فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸۶) صص. ۴۹ تا ۶۲

آشنایی با حساب اعداد فازی

محبوبه حسین‌یزدی، حسن حسن‌پور، ماشاالله ماشین چی

چکیده:
کار با اعمال جبری روی اعداد فازی مورد نیاز بسیاری از علاقمندان به موضوع مجموعه‌های فازی می‌باشد که اغلب این محاسبات دارای پیچیدگی خاص هستند. در مقالات بسیاری مانند [۳] و [۴] سعی شده است با تعریف اعمال جدید جمع و ضرب بر روی اعداد فازی، از این مجموعه یک گروه یا میدان بسازد. اما طبیعی‌ترین اعمالی که بر روی مجموعه اعداد فازی تعریف شده‌اند اعمالی هستند که بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند سپس با استفاده از اصل گسترش به مجموعه اعداد فازی گسترش داده شده‌اند. برای آشنایی بیشتر با محاسبات بر روی اعداد فازی می‌توان به مراجع [۱] و [۵] مراجعه کرد. در این مقاله سعی شده است که علاوه بر آشنایی با حساب اعداد فازی و ارائه راه‌حل‌های عملی جهت انجام محاسبات در حالت‌های خاص، مشکلات موجود در این راه مشخص شود. به علاوه ضمن ارائه مثال‌های متعدد، تفاوت‌های اعمال روی اعداد فازی و اعداد معمولی بیان شده است. برای آشنایی بیشتر با کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی می‌توان به مراجع [۷] و [۸] و [۹] و [۱۰] و [۱۱] و [۱۲] و [۱۳] و [۱۴] مراجعه کرد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه فازی، عدد فازی، αـبرش، اصل تجزیه، اصل گسترش

۱. مقدمه

امروزه استفاده از مجموعه‌های فازی در محاسبات نرم موضوع رایجی است. لذا گسترش چهار عمل اصلی و سایر اعمال روی مجموعهٔ اعداد حقیقی R به اعمالی متناظر با آن روی زیر مجموعه‌های فازی R مطلبی بسیار مهم است. با توجه به اصل گسترش هر تابعی روی اعداد حقیقی را می‌توان به تابعی بر روی مجموعه‌های فازی گسترش داد. بنابراین اگر چهار عمل

اصلی را به عنوان توابعی از $R \times R$ به R در نظر بگیریم می‌توان گسترش یافته این اعمال را در مجموعه‌های فازی روی R بدست آورد. گر چه این اعمال گسترش یافته، اعمال خوشتعریفی هستند اما به‌دست آوردن حاصل این اعمال به راحتی انجام نمی‌پذیرد، زیرا ضابطه‌مند کردن اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع در حالت کلی امری دشوار است، هر چند در حالت‌های خاص که در این مقاله بحث شده است عملی است. به علاوه چهار عمل اصلی گسترش یافته گرچه دارای بسیاری از خواص اعمال اصلی معمولی هستند (ر.ک.به قضیه (۳.۱)) اما تمام قوانینی که در حساب اعداد معمولی برقرار هستند از جمله $a - a = ۰$، $a/a = ۱$ و $a.a = a^۲$، لزوماً در حساب اعداد فازی برقرار نیستند، در مثال‌های بررسی شده برای اعداد فازی این موارد را توضیح می‌دهیم.

۲. پیش نیازها

در این بخش مفاهیم اولیه برای مطالعه حساب اعداد فازی، همراه با مثال‌هایی برای درک بهتر آنها ارائه می‌شوند.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی از X توسط یک تابع A، $A : X \longrightarrow [۰, ۱]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$ عدد حقیقی $A(x)$ میزان عضویت x در آن مجموعه است.

مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی X را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم و بنابراین

$$F(X) = \{A | A : X \longrightarrow [۰, ۱]\}.$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد و $A \in F(X)$.

(i) برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$، را مجموعه α-برش A می‌نامیم.

(ii) مجموعه $supp(A) = \{x \in X | A(x) > ۰\}$ را تکیه‌گاه A می‌نامیم.

(iii) $A \in F(X)$ را نرمال گوئیم هر گاه $x \in X$ وجود داشته باشد که $A(x) = ۱$.

تعریف ۲.۳. $A \in F(R)$ را یک عدد فازی می‌نامیم هر گاه در سه شرط زیر صدق کند:

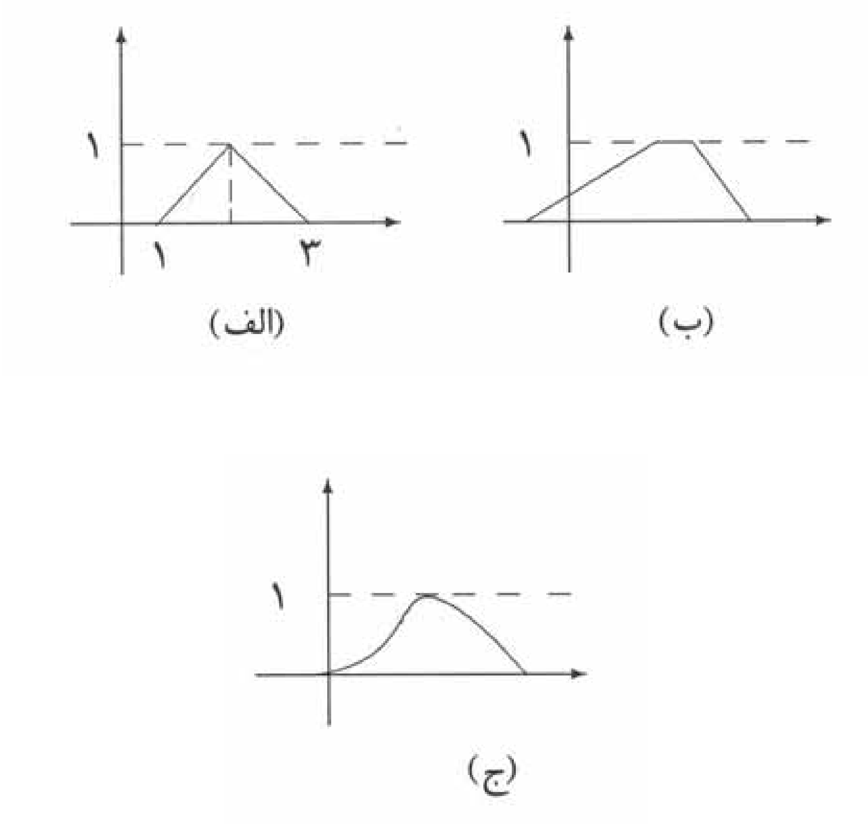
(i) A نرمال باشد،

(ii) $supp(A)$ کراندار باشد،

(iii) A_α برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ یک بازهٔ بسته باشد.

مجموعهٔ تمام اعداد فازی روی R را با $FN(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۴. نمودارهای شکل ۱ نمایش دهندهٔ اعداد فازی هستند.



شکل ۱. اعداد فازی

توجه کنید که در شکل (الف) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ داریم $A_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$. بعلاوه $supp(A) = (1, 3)$.

قضیه ۲.۵. (قضیه (۴.۱) از مرجع [۲]) فرض کنید $A \in F(R)$، یک زیرمجموعه فازی R باشد. در اینصورت A یک عدد فازی است اگر و تنها اگر اعداد حقیقی a, b و ω_1, ω_2 که $\omega_1 \le a \le b \le \omega_2$ وجود داشته باشند به طوری که

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ l(x) & x \in (-\infty, a) \\ r(x) & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

که در آن $l : (-\infty, a) \longrightarrow [0, 1]$ یک تابع اکیداً صعودی از راست پیوسته است و $l(x) = 0$ برای هر $x \in (-\infty, \omega_1)$ و $r : (b, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ یک تابع اکیداً نزولی از چپ پیوسته است و $r(x) = 0$ برای هر $x \in (\omega_2, \infty)$.

تعریف زیر به دلیل اهمیت زیادی که در فرهنگ ریاضیات فازی دارد به اصل گسترش شهرت یافته است.

اصل گسترش: فرض کنید Y و X دو مجموعه ناتهی و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع $A \in F(X)$. در اینصورت $B = f(A) \in F(Y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(y) = \sup_{y=f(x)} A(x).$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه تهی صفر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۶. فرض کنید برای $A_i \in F(X_i)$، $i = 1, ..., n$ و $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی X_iها باشد. در اینصورت حاصل‌ضرب دکارتی $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ نیز یک زیرمجموعه فازی X است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_1 \times \cdots \times A_n)(x_1, ..., x_n) = \min\{A_1(x_1), ..., A_n(x_n)\}.$$

نکته ۲.۷. با توجه به تعریف فوق و اصل گسترش می‌توان اعمال دوتایی R را به $F(R)$ به صورت زیر گسترش داد:

نمادگذاری. به‌جای $\sup$ و $\inf$ به ترتیب از نمادهای $\vee$ و $\wedge$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۸. اگر o یک عمل دوتایی روی R باشد، آنگاه این عمل را روی $F(R)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AoB(x) &= \sup_{aob=x} \{\inf(A(a), B(b)\}, \\ &= \vee_{aob=x}\{A(a) \wedge B(b)\}. \end{aligned}$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه تهی صفر تعریف می‌شود. به‌عنوان مثال داریم:

$$(A + B)(x) = \vee_{a+b=x}\{A(a) \wedge B(b)\}$$

$$(A.B)(x) = \vee_{a.b=x}\{A(a) \wedge B(b)\}$$

دقت کنید که با توجه به اصل گسترش می‌توان دید که

$$(-A)(x) = \vee_{y=-x}\{A(y)\} = A(-x)$$

نکته ۲.۹. هر عدد حقیقی r را می‌توان به صورت یک عدد فازی در نظر گرفت، زیرا تابع

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow F(R) \\ r &\longmapsto \mathcal{X}_{\{r\}} \end{aligned}$$

یک تابع یک‌به‌یک است و بنابراین می‌توان عدد حقیقی r را با تصویر آن یعنی $\mathcal{X}_{\{r\}}$، تابع مشخصه $\{r\}$، یکی فرض کرد. بدیهی است که $\mathcal{X}_{\{r\}}$ یک عدد فازی است. از این به بعد $\mathcal{X}_{\{1\}}$ را با $\mathbf{1}$ و $\mathcal{X}_{\{0\}}$ را با $\mathbf{0}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۱۰. (اصل تجزیه یا اتحاد تجزیه)

اگر $A \in F(X)$ آنگاه

$$A(x) = \vee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \wedge \mathcal{X}_{A_\alpha}(x)); x \in X$$

که در آن $\mathcal{X}_{A_\alpha}$ تابع مشخصه A_α است.

نکته ۲.۱۱. از آنجا که

$$\alpha \wedge \mathcal{X}_{A_\alpha}(x) = \alpha\mathcal{X}_{A_\alpha}(x); x \in X$$

و با توجه به اصل تجزیه داریم:

$$A(x) = \vee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\mathcal{X}_{A_\alpha}(x) = \vee_{x\in A_\alpha}\alpha.$$

۳. حساب اعداد فازی

در این بخش ابتدا ضمن یک قضیهٔ اساسی کلیهٔ روابط موجود در حساب اعداد فازی را ارائه می‌دهیم و سپس با مثال‌هایی تفاوت‌های حساب اعداد فازی و حساب معمولی اعداد حقیقی را بیان می‌کنیم. در ادامه با استفاده از اصل تجزیه یک راه‌حل عملی برای محاسبهٔ مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت اعداد فازی وقتی که محاسبه A_αها بر حسب α امکان‌پذیر باشد ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. اگر $A, B, C \in F(R)$ و $r \in R$ آنگاه:

۱) $\mathbf{0} + A = A$
۲) $\mathbf{0}.A = \mathbf{0}$
۳) $\mathbf{1}.A = A$
۴) $A + B = B + A$
۵) $A + (B + C) = (A + B) + C$
۶) $AB = BA$
۷) $(AB)C = A(BC)$
۸) $r(A + B) = rA + rB$
۹) $A(B + C) \leq AB + AC$
۱۰) $(-r)A = -(rA)$
۱۱) $-(-A) = A$
۱۲) $(-A)B = -(AB) = A(-B)$
۱۳) $A/\mathbf{1} = A$
۱۴) $A/r = (\mathbf{1}/r)A$
۱۵) $A/B = A.\mathbf{1}/B$
۱۶) $A + (-B) = A - B$

برهان. اثبات قضیه آسان است و به‌عنوان مثال اثبات گزاره‌های (۲)، (۹) و (۱۰) را می‌آوریم.
.۲

$$\begin{aligned} \circ.A(u) &= (\mathcal{X}_{\{\circ\}}.A)(u) = \vee_{a.b=u}\{\mathcal{X}_{\{\circ\}}(a) \wedge A(b)\} = \begin{cases} ۱ & u = \circ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \\ &= \mathcal{X}_{\{\circ\}}(u) = \circ \end{aligned}$$

.۹ فرض کنید $(A(B+C))(x) > (AB+AC)(x)$ در اینصورت u و v و y وجود دارند که $y(u+v) = x$ و

$$A(y) \wedge B(u) \wedge C(v) > A(p) \wedge B(q) \wedge A(h) \wedge C(k)$$

برای هر p, q, h, k که $pq + hk = x$ برقرار است. اما اگر $p = h = y$ و $v = k$، $q = u$ انتخاب شوند طرفین نامعادله فوق مساوی خواهند شد. حال اثبات $(A(B+C))(x) \leq (AB+AC)(x)$ به راحتی نتیجه می‌شود.
.۱۰

$$\begin{aligned} -(rA)(u) &= (rA)(-u) = (\mathcal{X}_{\{r\}}.A)(-u) = \vee_{a.b=-u}\{\mathcal{X}_{\{r\}}(a) \wedge A(b)\} \\ &= \vee_{-a.b=u}\{\mathcal{X}_{\{-r\}}(-a) \wedge A(b)\} = \vee_{c.b=u}\{\mathcal{X}_{\{-r\}}(c) \wedge A(b)\} \\ &= ((-r)A)(u). \qquad \square \end{aligned}$$

مثال زیر یکی از تفاوت‌های مهم حساب اعداد فازی و اعداد معمولی را بیان می‌کند.

مثال ۳.۲. اعداد فازی وجود دارند به طوری که:

الف) $A - A \neq \mathbf{0}$،

ب) $A/A \neq \mathbf{1}$.

برای مثال $A \in FN(R)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A(x) = \begin{cases} ۱ + x & -۱ \leq x < \circ \\ ۱ - x & \circ \leq x \leq ۱ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

از

$$A(۱/۲) \wedge (-A)(۱/۲) = A(۱/۲) \wedge A(-۱/۲) = ۱/۲ \wedge ۱/۲ = ۱/۲ \neq \circ$$

نتیجه می‌شود که

$$A + (-A)(۱) = \vee_{a+b=۱}\{A(a) \wedge (-A)(b)\} \neq \circ$$

در نتیجه $A - A \neq \mathcal{X}_{\{0\}}$.

حال $B \in FN(R)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$B(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در اینصورت

$$B/B(0) = \vee_{a/b=0}\{B(a) \wedge B(b)\} = \vee\{B(0) \wedge B(b)\} = \vee B(b) = 1 \Longrightarrow B/B \neq \mathcal{X}_{\{1\}}.$$

قضیه زیر و نتیجه آن راه را برای انجام محاسبه بر روی اعداد فازی هموار می‌کنند:

قضیه ۳.۳. (نتیجه ۳.۱.۱۰ مرجع [۶]) اگر $A, B \in FN(R)$ (اعداد فازی روی R) و o یک عمل دوتایی پیوسته روی R باشد آنگاه

$$(AoB)_a = A_a o B_a$$

نتیجه ۳.۴. اگر $A, B \in FN(R)$، آنگاه برای هر $a \in [0, 1]$

۱) $(A + B)_a = A_a + B_a$

۲) $(A.B)_a = A_a.B_a$

۳) $(A - B)_a = A_a - B_a$

از آنجا که طبق اصل تجزیه

$$AoB(x) = \vee_{a \in [0,1]} a\mathcal{X}_{(AoB)_a}(x)$$

بنابراین برای شناسایی عدد فازی AoB باید $(AoB)_a$ را به‌دست آوریم. چون $(AoB)_a = A_a o B_a$ و α-برش‌های اعداد فازی بازه‌های بسته هستند لازم است که به انجام عملیات بر روی بازه‌های بسته بپردازیم.

تعریف ۳.۵. اگر o هر یک از چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی R باشد و A و B دو زیرمجموعه از R باشند آنگاه AoB به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AoB = \{aob | a \in A, b \in B\}$$

می‌دانیم که توابع پیوسته مجموعه همبند را به مجموعهٔ همبند تصویر می‌کنند. حال با توجه به پیوستگی توابع جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به شرط آن که $0 \notin [c, d]$) و تعریف (۳.۵) اگر

$A=[a,b]$ و $B=[c,d]$ با کمی محاسبه داریم:

$$i)\qquad [a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$ii)\qquad [a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$$
$$iii)\qquad [a,b].[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$$
$$iv)\qquad [a,b]/[c,d]=[\min(a/d,a/c,b/d,b/c),\max(a/d,a/c,b/d,b/c)]$$

به شرط آن که $\circ\notin[c,d]$.

در مثال زیر ضمن محاسبه αـبرشهای اعداد فازی A و B، αـبرش‌های اعداد فازی $A+B$، $A-B$، $A.B$ و A/B را محاسبه و سپس با استفاده از اصل تجزیه خود این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۳.۶. فرض کنید

$$A(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{۲} & -۱\le x<۱\\ \frac{۳-x}{۲} & ۱\le x<۳\\ \circ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\quad,\ B(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & ۱\le x<۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ۳\le x<۵\\ \circ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}A_\alpha &=\{x|A(x)\ge\alpha\}=\left\{x|\tfrac{x+۱}{۲}\ge\alpha,\tfrac{۳-x}{۲}\ge\alpha\right\}\\ &=\{x|x\ge ۲\alpha-۱,x\le ۳-۲\alpha\}=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]\\ B_\alpha &=\{x|B(x)\ge\alpha\}=\left\{x|\tfrac{x-۱}{۲}\ge\alpha,\tfrac{۵-x}{۲}\ge\alpha\right\}\\ &=\{x|x\ge ۲\alpha+۱,x\le ۵-۲\alpha\}=[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha].\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(A+B)_\alpha &=A_\alpha+B_\alpha=[۴\alpha,۸-۴\alpha]\\ (A-B)_\alpha &=A_\alpha-B_\alpha=[۴\alpha-۶,۲-۴\alpha]\\ (A.B)_\alpha &=\begin{cases}[-۴\alpha^۲+۱۲\alpha-۵,۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۵] & \alpha\in[\circ,۱/۲]\\ [-۴\alpha^۲-۱,۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۵] & \alpha\in(۱/۲,۱]\end{cases}\end{aligned}$$

و

$$(A/B)_\alpha=\begin{cases}\left[\frac{۲\alpha-۱}{۲\alpha+۱}\ ,\ \frac{۳-۲\alpha}{۲\alpha+۱}\right] & \alpha\in(\circ,۱/۲]\\ \left[\frac{۲\alpha-۱}{۵-۲\alpha}\ ,\ \frac{۳-۲\alpha}{۲\alpha+۱}\right] & \alpha\in(۱/۲,۱]\end{cases}$$

حال اعداد فازی $A+B$، $A-B$، $A.B$ و A/B را محاسبه می‌کنیم:

$$(A+B)(x) = \vee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\mathcal{X}_{(A+B)_\alpha}(x) = \vee_{x\in(A+B)_\alpha}\alpha$$

لذا

$$x\in(A+B)_\alpha \Longrightarrow x\in[4\alpha, 8-4\alpha] \Longrightarrow 4\alpha\le x\le 8-4\alpha \Longrightarrow \alpha\le x/4\ ,\ \alpha\le 2-(x/4)$$

از طرفی اگر قرار دهیم $u=\vee_{x\in(A+B)_\alpha}\alpha$ چون $\alpha\in[0,1]$ پس $u\in[0,1]$. بنابراین اگر $u=x/4$ آنگاه $0\le x/4\le 1$ یعنی $0\le x\le 4$. بدیهی است که در این بازه $1\le 2-(x/4)\le 2$ و u نمی‌تواند $2-(x/4)$ انتخاب شود و اگر $u=2-(x/4)$ آنگاه $0\le 2-(x/4)\le 1$، یعنی $4\le x\le 8$ و در این بازه $1\le x/4\le 2$. در نتیجه

$$(A+B)(x)=\begin{cases} x/4 & 0<x\le 4\\ 2-(x/4) & 4<x\le 8\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

به همین ترتیب

$$(A-B)(x)=\begin{cases} \frac{6+x}{4} & -6\le x<-2\\ \frac{-x+2}{4} & -2\le x<2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

برای محاسبه $A.B$، داریم:

$$(A.B)(x) = u = \vee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\mathcal{X}_{(A.B)_\alpha}(x) = \vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha$$

حالت اول: اگر $0\le\alpha\le 1/2$، آنگاه

$$\begin{aligned} &x\in(A.B)_\alpha \Longrightarrow x\in[-4\alpha^2+12\alpha-5, 4\alpha^2-16\alpha+15]\\ &\Longrightarrow\begin{cases} -4\alpha^2+12\alpha-5\le x\Longrightarrow \alpha\le\frac{3-\sqrt{4-x}}{2}\\ x\le 4\alpha^2-16\alpha+15\Longrightarrow\alpha\le\frac{4-\sqrt{1+x}}{2}\end{cases}.\end{aligned}$$

لذا، اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha = u = \frac{3-\sqrt{4-x}}{2}$، آنگاه

$$0\le\frac{3-\sqrt{4-x}}{2}\le 1/2 \Longrightarrow -5\le x\le 0.$$

و اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha} = u = \frac{4-\sqrt{1+x}}{2}$، آنگاه

$$0 \leq \frac{4-\sqrt{1+x}}{2} \leq 1/2 \Longrightarrow 8 \leq x \leq 15.$$

حالت دوم: اگر $1/2 < \alpha \leq 1$، آنگاه

$$(A.B)_\alpha = [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15]$$

بنابراین:

$$x \in (A.B)_\alpha \Longrightarrow 4\alpha^2 - 1 \leq x \ , \ x \leq 4\alpha^2 - 16\alpha + 15$$

لذا

$$\alpha \leq \frac{\sqrt{x+1}}{2} \ , \ \alpha \leq \frac{4-\sqrt{1+x}}{2}$$

حال، اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha = u = \frac{\sqrt{x+1}}{2}$، آنگاه

$$1/2 < \frac{\sqrt{x+1}}{2} \leq 1 \Longrightarrow 0 < x \leq 3$$

اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha = u = \frac{4-\sqrt{1+x}}{2}$، آنگاه

$$1/2 < \frac{4-\sqrt{1+x}}{2} \leq 1 \Longrightarrow 3 \leq x < 8$$

بنابراین:

$$(A.B)(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{2} & -5 < x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}}{2} & 0 < x \leq 3 \\ \frac{4-\sqrt{1+x}}{2} & 3 < x \leq 15 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به طور مشابه می‌توان عدد فازی A/B را به صورت زیر محاسبه کرد

$$(A/B)(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2(1-x)} & -1 < x < 0 \\ \frac{5x+1}{2(1+x)} & 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{3-x}{2(1+x)} & 1/3 < x \leq 3 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف ۳.۷. عدد فازی A را مثلثی گوئیم اگر اعداد حقیقی a و b و c وجود داشته باشند به طوری که

$$A(x) = \begin{cases} \circ & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b \leq x \leq c \\ \circ & x > c \end{cases}$$

در این صورت عدد فازی مثلثی A را با سه‌تایی مرتب (a, b, c) نیز نمایش می‌دهند.

قضیهٔ ۳.۸. (قضیه ۳.۲.۵ مرجع [٦]) مجموع دو عدد فازی مثلثی یک عدد فازی مثلثی است. به عبارت دیگر:

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$$

نکتهٔ ۳.۹. گر چه مجموعه اعداد فازی مثلثی نسبت به جمع بسته است اما نسبت به ضرب بسته نیست.

مثال ۳.۱۰. اگر $A = (-۱, \circ, ۱)$، آنگاه

$$A(x) = \begin{cases} \circ & x < -۱ \\ ۱ + x & -۱ \leq x < \circ \\ ۱ - x & \circ \leq x < ۱ \\ \circ & ۱ \leq x \end{cases}$$

در این صورت αـ برش‌های A به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x | x \geq \alpha\} = \{x | ۱ + x \geq \alpha, ۱ - x \geq \alpha\} \\ &= \{x | x \geq \alpha - ۱, x \leq ۱ - \alpha\} = [\alpha - ۱, ۱ - \alpha] \end{aligned}$$

برای محاسبه αـبرش‌های عدد فازی $A.A$ داریم

$$(A.A)_\alpha = A_\alpha . A_\alpha = [\alpha - ۱, ۱ - \alpha].[\alpha - ۱, ۱ - \alpha] = [-(\alpha - ۱)^۲, (۱ - \alpha)^۲]$$

$$(A.A)(x) = u = \vee \alpha \mathcal{X}_{(A.A)_\alpha}(x)$$

لذا

$$x \in (A.A)_\alpha \Longrightarrow \begin{cases} -(\alpha - ۱)^۲ \leq x \overset{x \leq \circ}{\Longrightarrow} (\alpha - ۱)^۲ \geq -x \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - ۱ \geq \sqrt{-x} \\ \alpha - ۱ \leq -\sqrt{-x} \Longrightarrow \alpha \leq ۱ - \sqrt{-x} \end{cases} \\ x \leq (۱ - \alpha)^۲ \overset{x \geq \circ}{\Longrightarrow} \sqrt{x} \leq ۱ - \alpha \Longrightarrow \alpha \leq ۱ - \sqrt{x} \end{cases}$$

بنابراین، اگر $u = ٧\alpha = ١ - \sqrt{-x}$، آنگاه

$$٠ \leq ١ - \sqrt{-x} \leq ١ \Longrightarrow -١ \leq x \leq ٠.$$

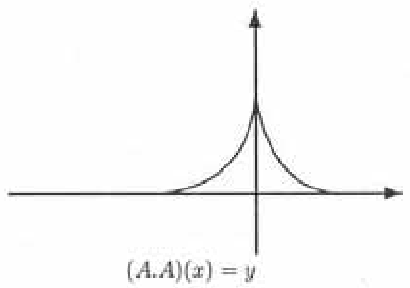
و اگر $u = ١ - \sqrt{x}$، آنگاه

$$٠ \leq ١ - \sqrt{x} \leq ١ \Longrightarrow ٠ \leq x \leq ١$$

در نتیجه:

$$(A.A)(x) = \begin{cases} ١ - \sqrt{-x} & -١ \leq x \leq ٠ \\ ١ - \sqrt{x} & ٠ \leq x \leq ١ \\ ٠ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که به وضوح یک عدد مثلثی نیست و گراف آن در شکل ٢ رسم شده است.



شکل ٢.

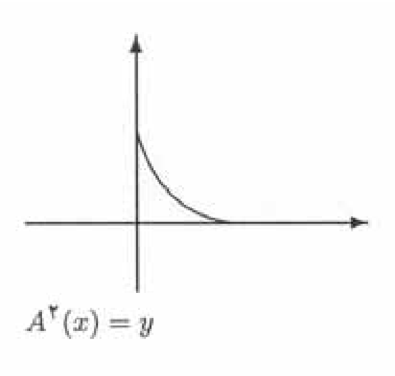
مثال زیر بیانگر یکی دیگر از تفاوت‌های حساب اعداد فازی با حساب اعداد معمولی است.

مثال ٣.١١. در حالت کلی $A.A \neq A^٢$. عدد فازی A در مثال قبل را در نظر بگیرید. برای محاسبه $A^٢$ طبق اصل گسترش داریم:

$$A^٢(y) = \begin{cases} \sup_x A(x) & x^٢ = y \\ ٠ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} = \begin{cases} \sup\{A(\sqrt{y}),\ A(-\sqrt{y})\} & y \geq ٠ \\ ٠ & y < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ١ - \sqrt{y} & y \geq ٠ \\ ٠ & y > ٠ \end{cases}$$

که گراف آن در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳.

بدیهی است که این عدد با عدد فازی $A.A$ که در مثال (۳.۱۰) محاسبه شد متفاوت است.

مراجع

[1] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York, 1980.

[2] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, Prentice-Hall, Upper Saddle Rives NJ, 1995.

[3] M. Mares, Algebra of fuzzy quantities, Int. J. General systems 20(1), 59-65, 1991.

[4] M. Mares, Multiplication of fuzzy quatities, Kybernetika 28 (5), 337-356, 1992.

[5] M. Mares, Computation over fuzzy quantities, CRC-Press, Boca Raton, 1994.

[6] H. T. Nguyen, E. A. Walker, A first course in fuzzy logic-2nd ed Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London NewYork, 1999.

[۷] رجبعلی برزوئی (گردآورنده)، مباحثی در نظریه مجموعه‌های فازی (مجموعه مقالات)، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سال ۱۳۸۱.

[۸] مرتضی زاهدی، تئوری مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، نشر کتاب دانشگاهی، چاپ اول، سال ۱۳۷۸.

[۹] سید محمود طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، چاپ اول، ۱۳۷۵.

[۱۰] اس. وی. کارتالوپولس، منطق فازی و شبکه‌های عصبی، مفاهیم و کاربردها، مترجمان محمد جورابیان و رحمت‌الله هوشمند، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز ۶۰، سال ۱۳۸۱.

[۱۱] کازوتاناکا، مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی، مترجمان علی وحیدی اصل و حمیدرضا طارقین، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۳۲۷، سال ۱۳۸۱.

[۱۲] جی. ج. کلر، یو. اس. کلیر و ب. یوآن، تئوری مجموعه‌های فازی، اصول و کاربردها، ترجمه و تدوین محمد حسین فاضل زرندی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، سال ۱۳۸۱.

[۱۳] لی‌وانگ، سیستم‌های فازی و کنترل فازی، مترجمان محمد تشنه‌لب و سایرین، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، سال ۱۳۷۸.

[۱۴] ماشاالله ماشین‌چی، مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان ۱۳۳، ۱۳۷۹.

ماشاالله ماشین‌چی mashinchi@mail.uk.ac.ir
حسن حسن‌پور hassanpur@graduate.uk.ac.ir
محبوبه حسین‌یزدی myazdi@spnu.ac.ir
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان