فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ٦۷ تا ۷۴

استفان باناخ

حامد اسماعیل‌زاده و محمد صال مصلحیان

استفان باناخ[۱] در ۳۰ مارس ۱۸۹۲ در شهر کراکو[۲] (لهستان) متولد شد و در ۳۱ اوت ۱۹۴۵ در شهر لوف[۳] (اوکراین) درگذشت. پدرش، استفان گریزک[۴]، کارمند دارایی بود. استفان در یک روستای کوچک به نام استرُسکو[۵] متولد شده بود، که در ۵۰ کیلومتری جنوب کراکو قرار داشت. باناخ دوران طفولیت را با مادر بزرگش در آن جا سپری نمود. بعد از بیماری جدی مادر بزرگ، استفان گریزک پسرش را برای نگهداری به فرانسیسکا پلوا[٦] سپرد که با دخترش ماریا در کراکو زندگی می‌کرد. قیمِ ماریا یک فرانسوی روشنفکر به نام جولیوز میین[۷] بود که به سرعت به استعداد باناخ پی برد. میین به پسر جوان یاد داد که فرانسوی صحبت کند و این امر به باناخ در تحصیلش بسیار کمک کرد.

باناخ دوره دبستان را در کراکو گذراند. در سال ۱۹۰۲ دبستان را برای تحصیلات میانی خود ترک کرد و در مدرسه راهنمایی هنریک سینکیویچ[۸] شروع به تحصیل کرد. بنا به تصادف یکی از هم‌کلاسی‌های باناخ، وایتلد ویلکوز[۹] بود که یک پروفسور ریاضیات شد، مدرسهٔ آنها در خور داشتن چنین شخص عالمی نبود و در ۱۹۰٦ ویلکوز به مدرسه بهتری رفت اما باناخ در هنریک سینکیویچ ماند در حالی که ارتباطش را با ویلکوز حفظ کرد. در طول اولین سالهای مدرسه، باناخ به رتبهٔ اول در ریاضیات و علوم طبیعی رسید. یکی از شاگردان مدرسهٔ باناخ که هم دورهٔ او بود از باناخ و ویلکوز چنین یاد می‌کند:

«باناخ لاغر و رنگ‌پریده بود. او در پاسخ‌دادن به همکلاسی‌هایش گشاده‌رو به نظر می‌رسید. اما به هیچ چیزی خارج از ریاضیات علاقه نداشت. خیلی تند حرف می‌زد درست به همان سرعتی که در مورد ریاضیات می‌اندیشید یا محاسبه می‌کرد. ویلکوز نیز چنین پدیده‌ای بود. بین آنها هیچ مسألهٔ ریاضی نبود که حل نشود. همان‌قدر که باناخ در مسائل ریاضی سریع بود، ویلکوز به طور خارق العاده‌ای در حل مسائل فیزیک سرعت داشت، موضوعی که اصلاً مورد علاقهٔ باناخ نبود.»[۲]

1) Stefan Banach 2) Krakow 3) Lvov 4) Stefan Greczek 5) Ostrowsko 6) Franciszka Plowa 7) Juliusz Mien 8) Henryk Sienkiewicz Gymnasium 9) Witold Wilkosz

گزارش شده است که وی در فلسفه شکاک بوده است؛ چنان که اغلب از پدر پیلکو سؤالاتی می‌پرسیده است مانند این که آیا خداوندِ قادر مطلق می‌تواند سنگی خلق کند که نتواند آن را بلند کند.

کسب بهترین رتبه‌ها توسط باناخ در سال‌های اول به رتبه‌های پایین‌تر در سال‌های بعد تبدیل شد. او امتحاناتش را در سال ۱۹۱۰ به پایان رساند، در هشت درس نمره پایین گرفت، اما با تصمیم مدرسه (و موافقت پدر پیلکو؛ علی‌رغم سؤالات شرمگینانه‌ای که باناخ می‌پرسید!) فارغ‌التحصیل شد. بعد از اتمام مدرسه، باناخ و ویلکوز تصمیم گرفتند به ریاضیات بپردازند. اما هر دو احساس کردند که‌ریاضیات آن‌قدر پیشرفت کرده است که در آن هیچ چیز جدیدی کشف نمی شود. بنابراین تصمیم گرفتند موضوعات دیگری را انتخاب کنند. این دو ریاضی‌دان برجستهٔ آینده می‌توانستند تصمیم بهتری برای آینده بگیرند، اما کسی نبود که آن‌ها را راهنمایی کند. ویلکوز زبان‌های شرقی را برگزید ولی دو سال بعد تغییر رشته داد و در ۱۹۱۹ دکترای ریاضی گرفت. باناخ مهندسی را انتخاب کرد و لذا کراکو را ترک کرد و به پلی‌تکنیک لوف رفت. در این زمان پدر باناخ که فرزندش را پشتیبانی مالی زیادی نمی‌کرد، هزینه‌های زندگی باناخ را به خود او واگذارده بود. سال ۱۹۱۴ جنگ جهانی اول شروع شد ولی باناخ به علت ضعف چشم چپ و چپ‌دستی از سربازی معاف گردید.

در سال ۱۹۱٦ بر حسب اتفاق، مردی به نام هوگو اشتین هاوس[1] زندگی حرفه‌ای و شخصی باناخ را متحول کرد. اشتین هاوس، که همواره باناخ را بزرگ‌ترین کشفش می‌نامید، مسأله‌ای به باناخ داد که خودش مدت‌ها روی آن کار کرده بود ولی به نتیجه‌ای نرسیده بود. بعد از چند روز باناخ آن را حل کرد. مسأله مربوط به همگرایی حاصل جمع‌های جزئی سری فوریهٔ یک تابع انتگرال پذیر بود. حل این مسأله بعد از وقفه‌ای کوتاه در «بولتن آکادمی کراکو[2]» در سال ۱۹۱۸ با عنوان «همگرایی میانگینی سری‌های فوریه[3]» به زبان فرانسه که زبان علمی آن دوره بود منتشر شد. این مقاله بود که او را به عنوان یک ریاضی‌دان معرفی کرد. در سال ۱۹۱۹ باناخ دومین مقالهٔ خود را تحت عنوان «مقدار میانگین توابع متعامد[4]» به چاپ رساند. در این مقاله باناخ این قضیه را ثابت کرده بود که حاصل جمع میانگین یک دنباله از توابع متعامد، همگرا به صفر است؛ یعنی، اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع روی بازهٔ $[a,b]$ باشد که

$$\int_a^b f_i(t) f_k(t)\,dt = \begin{cases} ۱ & i = k \\ ۰ & i \neq k \end{cases}$$

آن‌گاه برای هر $t \in [a,b]$،

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} f_k(t) \right) = ۰.$$

1) Hugo Steinhaus 2) Bulletin of the Cracow Academy 3) Sur la Convergance en moyenne de Séries de Fourier 4) Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales

در همان سال مقالهٔ بعدی باناخ تحت عنوان «معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$»[1] منتشر شد. مسألهٔ مورد نظر، یافتن تابعی بود که در معادله کوشی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند. در سال ۱۹۲۰ باناخ با لوسیا براوس ازدواج کرد. این ازدواج موفق بود چرا که بیست و پنج سال این زوج به یکدیگر عشق ورزیدند. در ۱۹۲۰ به باناخ شغلی تحت عنوان منشی در دانشگاه فنی لوف پیشنهاد شد. این اولین شغل دانشگاهی باناخ بود. باناخ پنجمین مقالهٔ خود را تحت عنوان «جواب‌های معادله تابعی ماکسول»[2] با استانیسلاو روزیویچ[3] و ششمین آن را تحت عنوان «مشتق توابع در توابع اندازه پذیر»[4] ارائه کرد. با این که باناخ هیچگاه تحصیلش را در دانشگاه فنی لوف تمام نکرد، ولی به وی اجازه داده شد دوره دکتری را شروع نماید. او رسالهٔ دکترای خود را در ۱۹۲۰ تحت عنوان «عملگرهای روی مجموعه‌های مجرد و کاربرد آن در معادلات انتگرالی[5]» ارائه کرد. این رساله شامل ایده‌های مهمی مانند فضاهای تابعی و تبدیلات خطی روی آنها بود. گرچه اولین مقالهٔ باناخ در زمینه‌ای که هم اکنون آنالیز تابعی نامیده می‌شود منتشر شد، باید گفت که رسالهٔ او آنالیز تابعی را وارد ریاضیات کرد. باناخ به کامل بودن فضا در رسالهٔ خود بسیار تأکید داشت، چون با استفاده از کامل بودن، قضایای مفیدی اثبات می‌شد. دو قضیهٔ بسیار مهمی که در رسالهٔ او به چشم می‌خورد عبارت بودند از «خطی و پیوسته بودن حد نقطه‌ای دنباله‌ای از توابع خطیِ پیوسته» و قضیهٔ نگاشت انقباضی باناخ که به قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ معروف است. باناخ علاقه‌ای به نوشتن نداشت ولی در عوض متفکر قهاری بود و لذا استاد راهنمایش از یکی از دستیارانش خواست تا او را همه جا حتی در کافه‌ها همراهی کند و رساله باناخ را که در فکرش بود بنویسد. او این کار را کرد و سپس باناخ آن را ویراستاری نمود.

در ۱۹۲۲ دانشگاه جان کازیمیرز در لوف از رسالهٔ باناخ در نظریهٔ اندازه تقدیر کرد. در ۱۹۲۴ باناخ به مرتبهٔ استاد تمام ارتقاء یافت و طی سال‌های ۱۹۲۵—۱۹۲۴ تحصیلات عالی را در پاریس گذراند. سال‌های بین دو جنگ جهانی برای باناخ سال‌های بسیار پر دردسری بود. علاوه بر ادامهٔ نگارش تعدادی مقالهٔ مهم که در آنها دو مفهوم انتگرال باناخ و حد تعمیم‌یافتهٔ باناخ را ارائه کرد، کتاب‌هایی درسی در زمینه حساب، هندسه و جبر را نیز برای دبیرستان‌ها نوشت. در سال ۱۹۲۹ همراه با اشتین هاوس انتشار مجله ریاضی «مطالعهٔ ریاضیات»[6] را شروع کردند و باناخ و اشتین هاوس اولین ویراستارهای آن شدند. خط مشی تحریریه این بود: «... متمرکز شدن در تحقیقات روی آنالیز تابعی و موضوعات وابسته». تک نگاشت‌های ریاضی از نشریات مهم دیگری بود که در سال ۱۹۳۱ انتشار آن تحت ویراستاری باناخ و اشتین هاوس از لوف و

---

1) Sur léquation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 2) Sur les solutions d'une équation fonctionelle de J. Cl. Maxwell 3) Stanislaw Ruziewiez 4) Sur les fonctions dérivécs des fonctions mesurabeles 5) Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals 6) Studia Mathematica

کناستر[۱]، کوراتفسکی[۲]، مازورکیویچ[۳] و سیرپینسکی[۴] از ورشو شروع شد. مجلد اول تحت نام «نظریهٔ عملگرهای خطی[۵]» توسط باناخ نوشته شد و در سال ۱۹۳۲ چاپ گردید. این مجلد ویرایش فرانسویِ نسخه‌ای بود که وی تحت همین نام در سال ۱۹۳۱ در لهستان نوشته بود، کتابی که به سرعت به یک اثر کلاسیک تبدیل گردید.

ازتأثیرات مهم بر باناخ، استخدام کوراتفسکی در دانشگاه فنی لوف در سال ۱۹۲۷ و ادامه فعالیت وی تا سال ۱۹۳۴ در آنجا بود. باناخ با همکاری کوراتفسکی چند مقالهٔ مفصل در طول این مدت نوشت. باناخ روش غیرمعمولی داشت . او دوست داشت روی ریاضیات با همکارانش در کافهٔ لوف کار کند. اولام او را در جلسات مکرر در کافهٔ اسکاتلندی به خاطر می‌آورد:

مشکل بود از باناخ جلو بزنیم. ما مسائلی را که در آنجا پیشنهاد می‌شد مورد بحث قرار می‌دادیم. اغلب جواب آشکاری نداشتند، حتی بعد از چند ساعت تفکر بدون جواب می‌ماندند. روز بعد باناخ با نشان‌دادن چند صفحهٔ کاغذ کوچک شامل طرح کلی اثباتی که کامل کرده بود، خبر می آورد.[۲]

آندره‌یی تورویچ[۶] پروفسور ریاضیات در دانشگاه کازیمیرز[۷] در لوف نیز روش کار باناخ را بدین صورت شرح می‌دهد:

[باناخ] بیشتر روزهایش را در کافه می گذراند. او موسیقی و سروصدا را دوست داشت، آنها او را از تمرکز کردن و فکر کردن باز نمی‌داشتند. گاهی اوقات، وقتی کافه در شب بسته می‌شد، به طرف ایستگاه راه آهن قدم می‌زد چون کافه تریای اطراف ایستگاه راه آهن در آن ساعت باز بود. آن‌جا ضمن نوشیدن نوشابه، در مورد مسأله‌ها فکر می کرد.[۲]

در سال ۱۹۳۹ درست قبل از شروع جنگ جهانی دوم، باناخ به عنوان رئیس انجمن ریاضی لهستان[۸] انتخاب شد. درابتدای جنگ، نیروهای شوروی شهر لوف را اشغال کردند. این شهر قبل از جنگ جهانی دوم متعلق به لهستان بود. باناخ قبل از جنگ رابطهٔ خوبی با ریاضی‌دانان شوروی داشت. چندین بار به مسکو رفته بود و با دولت جدید شوروی رابطه خوبی داشت. آنها او را به عنوان یک ریاضیدان بزرگ می‌شناختند و لذا به او اجازه دادند که کرسی خود را در دانشگاه حفظ کند. او در آنجا رئیس دانشکدهٔ علوم دانشگاه که نامش به ایوان فرانکو[۹] تغییر یافته بود، شد. زندگی باناخ در حالی که همچنان به تحقیقات خود ادامه می‌داد، کتاب‌های درسی‌اش را می‌نوشت، سخنرانی می‌کرد و در جلسات کافه اسکاتلندی شرکت می‌جست کمی فرق کرده بود. سوبولوف[۱۰] و الکساندر[۱۱]، باناخ را در لوف در سال ۱۹۴۰ ملاقات کردند. هنگامی که آلمان به شوروی هجوم آورده بود باناخ در کی‌یف[۱۲]

1) Knaster 2) Kuratowski 3) Mazurkiewicz 4) Sierpinski 5) Théorie des Opérations linéaires 6) Andrzej Turowicz 7) Kazimierz 8) Polish Mathematical Society 9) Ivan Franko 10) Sobolev 11) Aleksandrov 12) Kiev

شوروی بود و لذا به سرعت به طرف خانواده‌اش در لوف بازگشت. نازی‌ها در ژوئن سال ۱۹۴۱ لوف را اشغال کردند، بدین جهت باناخ تحت شرایط خیلی سختی زندگی می‌کرد. او در این جریان مورد سوء ظن قرار گرفت و بازداشت شد، اما بعد از چند هفته آزاد شد. وی در جریان قتل عام دانشگاهیان لهستانی جان سالم به در برد. دکتر لومینکی[1] استاد راهنمای دکترای او نیز در شب جانسوز ۳ جولای ۱۹۴۱ در بحبوحهٔ کشتارهای بیرحمانهٔ آن روز، جان سپرد. در این میان، باناخ از اواخر سال ۱۹۴۱ تا جولای ۱۹۴۴ در یکی از مؤسسه‌های آلمانی کار کرد. باناخ به محض این که شوروی لوف را اشغال کرد به آن‌جا برگشت و تمام ارتباطاتش را تجدید کرد. او سوبولوف را در خارج از مسکو ملاقات کرد، اما در این زمان به طور جدی بیمار شده بود. سوبولوف بعدها وقتی در کنفرانس بزرگداشت باناخ صحبت می‌کرد از این ملاقات چنین یاد می‌کند:

علی‌رغم اثرات زیانبار جنگ در سال‌هایی که تحت اشغال آلمان بود و علی‌رغم بیماری سختی که قوای او را به تحلیل می‌برد، چشمان باناخ هنوز شور زندگی داشتند. او همچون قبل خوش‌رو، بشاش و به طور خارق‌العاده‌ای خوش‌نیت مانده بود.[۲]

باناخ تصمیم گرفت بعد از جنگ، در سال ۱۹۴۵، برای اخذ کرسی ریاضی به دانشگاه یاگلونیان[2] در کراکو برود اما در لوف به علت سرطان ریه درگذشت.

باناخ آنالیز تابعی مدرن را بنیاد نهاد و سهم عظیمی را در نظریهٔ فضاهای برداری توپولوژیک بازی کرد. به علاوه در نظریهٔ اندازه، انتگرال‌گیری، نظریهٔ مجموعه‌ها و سری‌های متعامد کارهای مهمی کرده بود. نام فضای باناخ توسط فرشه ابداع شد. یک فضای باناخ، فضایی برداری روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط همراه با یک نرم است به طوری که تحت متر $d(x,y) = \|x-y\|$ القا شده از آن نرم، کامل است. این مفهوم در رسالهٔ باناخ ارائه شد اما همزمان نوربرت وینر[3] نیز آن را تعریف کرد ولی خودِ نظریه را گسترش نداد. وینر می‌گوید: «من توانستم دستگاه اصل موضوعی کاملی درست کنم که بتواند همهٔ انواع فضاهای برداری ممکن را در بر گیرد. فرشه کار مرا پسندید، ولی معلوم بود که تأثیر خاص و فوق العاده‌ای در او نکرده است. با این وجود، وقتی که بعد از چند هفته، مقالهٔ استفان باناخ را در یک مجلهٔ ریاضی لهستانی دید و معلوم شد که باناخ هم، به همان نتیجه‌گیری من ــ نه بیشتر و نه کمتر ــ رسیده است، به سختی برآشفت. باناخ همان راه مرا دنبال کرده بود، منتهی چند ماه زودتر. تلاش‌های ما به کلی بی‌ارتباط با هم بود و در استقلال کامل هر دو کار، هیچ تردیدی وجود نداشت. به همین دلیل، بعد از مدتی فضاهای مورد مطالعهٔ من و باناخ را اهمیت کار باناخ در این است که او یک نظریهٔ دستگاهمند را برای آنالیز تابعی بسط داد به‌طوری که نتایجی که قبلاً به صورت مجزا وجود داشت در نظریهٔ جدید تطبیق یافتند. این نظریه کارهایی که توسط ولترا، فردهلم و هیلبرت در معادلات انتگرالی انجام شد، را تعمیم داد. باناخ چند نتیجهٔ اساسی در فضاهای نرم‌دار را اثبات کرد. بسیاری از قضایا، بعد از او به نام وی نامگذاری شد.

1) Lomnicki 2) Jagiellonian 3) Norbert Wiener

بعضی از این قضایا عبارتند از:

- قضیهٔ هان ـ باناخ.

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار، M یک زیرفضای X، و f یک تابعک خطی کراندار روی M باشد. در این صورت تابعک خطی کراندار F روی X وجود دارد که

$$F(x) = f(x) \ , \ \ x \in M \qquad (۱)$$
$$\|F\| = \|f\| \qquad (۲)$$

به عبارت دیگر توسیعی از f چون F وجود دارد که خطی و کراندار و حافظ نرم است.

- قضیهٔ نگاشت باز باناخ. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و T یک تبدیل خطی کراندار و برو باشد. در این صورت T نگاشتی باز است، یعنی مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز نقش می‌کند.

- قضیهٔ باناخ ـ اشتین هاوس. فرض کنید X یک فضای باناخ، Y یک فضای نرم‌دار، و $\{T_n\}$ دنباله‌ای از تبدیلات خطی کراندار از X به‌توی Y باشد. دراین صورت $\{\|T_n\|\}$ یک دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی است؛ یعنی، $\{T_n\}$ دنباله‌ای کرانداردر فضای نرم‌دار $B(X, Y)$ است.

- قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ. فرض کنید $T : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ثابت انقباضی $۰ < \alpha < ۱$ بر روی فضای متریک کامل (X, d) باشد. در این صورت نگاشت T دقیقاً شامل یک نقطهٔ ثابت $u \in X$ است به علاوه برای هر $x \in X$ دنبالهٔ

$$x, T(x), T^{۲}(x), \ldots, T^k(x), \ldots$$

به نقطهٔ u همگراست یعنی داریم

$$\lim_{k \to \infty} T^k(x) = u$$

از کاربردهای این قضیه در آنالیز عددی، حل معادلهٔ $x = g(x)$ است. اگر $g(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$ و به ازای $۰ \leq k < ۱$، $|g'(x)| \leq k < ۱$، آن‌گاه g دارای یک نقطهٔ ثابت $\alpha \in [a, b]$ است و به ازای هر $x_۰ \in [a, b]$ دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ که $x_n = g(x_{n-۱})$ به α همگراست. در معادلات دیفرانسیل معمولی نیز برای اثبات قضیهٔ وجود و یکتایی از این قضیه استفاده می‌شود.

- قضیهٔ باناخ ـ آل‌اوغلو. فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد و X^* دوگان آن باشد. در این صورت گوی بسته یکه

$$S_۱^* = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq ۱\}$$

در توپولوژی $*$—ضعیف، فشرده است.

- پارادوکس باناخ ـ تارسکی. پارادوکس باناخ ـ تارسکی در مقالهٔ مفصل این دو ریاضی‌دان در سال ۱۹۲۶ در «ریاضیات پایه»[1] تحت نام «تجزیهٔ مجموعه‌ای از نقاط به چند قسمت هم ارز[2]» منتشر شد. این قضیه، به طور ساده، بیان می‌کند که یک گوی، با استفاده از اصل انتخاب، می‌تواند به زیرمجموعه‌هایی تقسیم شود که می‌توانند برای ساختن دو گوی که هر کدام مثل اولی‌اند به کار روند.

کتاب اسکاتلندی[3]

در فاصله سال‌های ۱۹۳۵ تا ۱۹۴۱، گروهی از ریاضی‌دانان لهستانی از جمله اولام[4]، باناخ، کاتس[5]، مازور[6]، اورباخ[7]، اشتین هاوس، ارلیخ[8]، شاودر[9] و چند نفر دیگر در کافهٔ اسکاتلندی[10] یا در کافهٔ رم[11] در شهر لوف دور هم جمع می‌شدند و مسأله‌ای را مطرح و روی آن بحث می‌کردند. روزی به پیشنهاد باناخ دفتری خریداری شد و خدمتکار کافه مأمور شد آن را در جای مناسبی نگهداری کند. بعد از هر مباحثه‌ای پیشخدمت کافه را فرامی‌خواندند، تا این دفتر را بیاورد و بعد از وارد کردن صورت مسأله (با ذکر نام اشخاص مطرح کننده) در صورت رسیدن به جواب، جواب آن را (با ذکر نام اشخاص حل کننده و تاریخ مسائل) به زبان لهستانی می‌نوشتند. سپس این دفتر به پیشخدمت داده می‌شد تا آن را در جای امن قرار دهد، اینجا زمانی بود که آنالیز تابعی و شاخه‌های مربوط به آن $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - ۱|| < ۱\}$ متولد شدند [۵]. آنها برای هر مسأله جایزه‌ای در نظر می‌گرفتند. این جوایز از یک فنجان قهوه تا پنج بطری نوشیدنی یا یک غاز زنده تغییر می‌کرد.
استفن باناخ اولین مسأله را در ۱۷ ژوئیه ۱۹۳۵ وارد این کتاب کرد و آخرین مسأله یعنی مسألهٔ ۱۹۳ام مربوط به هوگو اشتین هاوس در تاریخ ۳۱ می ۱۹۴۱ نگاشته شد.[۴] حدود ربعی از مسأله‌های این کتاب حل نشده ماندند.[۴] بعد از جنگ جهانی دوم این کتاب توسط فرزند باناخ در ورشو یافت شد و او آن را به اشتین هاوس داد. بعداً یک نسخه از آن برای اولام فرستاده شد و وی آن را در سال ۱۹۵۷ به زبان انگلیسی برگرداند و در لوس آلاموس امریکا منتشر نمود.[۶] در بین ریاضی‌دانان، این کتاب به کتاب اسکاتلندی معروف است. بعدها در سال ۱۹۷۷ ویرایشی تصحیح شده از آن به دست آمد و در سال ۱۹۸۱ نسخه‌ای از آن با توجه به سخنرانی‌ها و کنفرانس‌هایی که ریاضی‌دانان از مسائل آن کتاب ارائه داده بودند با عنوان «کتاب اسکاتلندی، ریاضیات کافه اسکاتلندی[12]» توسط انتشارات بیرخاوزر[13] و به ویرایش مالدین[14] چاپ شد.

---

1) Fundamenta Mathematicae 2) *Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent* 3) Scottish book 4) S. Ulam 5) M. Kac 6) S. Mazur 7) H. Auerbach 8) W. Orlicz 9) J. Sachauder 10) Cafe Szkocka (scottish cafe) 11) Cafe Roma 12) *The scottish book : Mathematics from scottish café* 13) Birkhauser 14) R. Daniel Mauldin

در اینجا به مسألهٔ شمارهٔ ۴۳ این کتاب که توسط مازور طرح و توسط باناخ حل شد و به بازی باناخ ـ مازور مشهور است اشاره می‌کنیم:
دو بازیکن که آنها را A و B می‌نامیم و یک زیرمجموعهٔ ناتهی E از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. بازی بدین صورت است که A یک بازهٔ ناتهی D_1 از E را انتخاب می‌کند و B یک زیربازهٔ ناتهی D_2 از D_1 انتخاب می‌کند و A با انتخاب یک زیربازهٔ ناتهی D_3 از D_2 کار را ادامه می‌دهد و سپس B زیربازهٔ D_4 از D_3 را انتخاب می‌کند و ... . بازی بدین صورت ادامه می‌یابد. A در صورتی برنده محسوب می‌شود که اشتراک تمام بازه‌های D_1، D_2، ... و E ناتهی باشد و در غیر این صورت B برنده خواهد بود. مازور مشاهده کرد که اگر متمم E در یک بازه از رستهٔ اول بئر باشد آنگاه A ترفندی دارد که می‌تواند بازی را ببرد و اگر خود E در $\mathbb{R}$ از رستهٔ اول بئر باشد B ترفندی دارد که می‌تواند ببرد. سؤال مازور (با جایزه یک بطری نوشیدنی) این بود که آیا این شرایط، به ترتیب، برای آن که A یا B ببرد لازم هستند؟ این سؤال توسط باناخ حل شد ولی هیچ‌گاه اثباتی از او در جایی دیده نشد.[٦]

باناخ حدود ٦٥ اثر مهم از خود برجای گذاشت و نام او در نوشتارهای ریاضی بیش از ۱۱۰۰۰ بار تکرار شده است. حسن ختام این مقاله سخن زیر از باناخ است:

یک ریاضی‌دان کسی است که می‌تواند قیاس بین قضایا را بیابد، یک ریاضی‌دان خوب کسی است که می‌تواند قیاس بین اثبات‌ها را ببیند، خوب‌ترین ریاضی‌دان کسی است که می‌تواند قیاس بین نظریه‌ها را نقد کند و یک ریاضی‌دان فوق‌العاده خوب را چنین می‌توان تصور کرد که بتواند قیاس بین قیاس‌ها را ببیند. [۱]

خدایش بیامرزاد.

تبصره. این نوشتار اساساً از منابع [۲] و [۳] اقتباس شده است.

منابع

[1] Terry J. Morrison, Functional analysis, an introduction to Banach spaces, John Wiley 2001

[2] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/ Mathematitians/Banach.html

[3] http://www-math.cudenver.edu/ Wcherowi/courses/m4010/s05/Noe.pdf

[4] http://www.icm.edu.pl/home/delta/delta2/dlt0209.html

[5] http://www.univ-ag.fr/aoc/activite/revalski/Banach-Mazur_Game.pdf

[6] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/ Scottish_Book.html

[۷] نوربرت وینر، من ریاضیدانم، ترجمهٔ پرویز شهریاری ، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳٦۸.