

نامساوی برون - مینکوفسکی در گذر زمان

محمد رضا میری، غلامرضا محتشمی برزادران و حسین حسینی گیو

چکیده

اگر V_n نشان دهنده اندازه n - بعدی لبگ باشد، آنگاه نامساوی برون مینکوفسکی بیان می‌کند که برای هر دو جسم محدب K و L در \mathbb{R}^n و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ ،

$$V_n((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n} + \lambda V_n(L)^{1/n}.$$

هدف این مقاله، معرفی اجمالی نامساوی مزبور از طریق بحثی تاریخی است. برای نیل به این مقصود، به مرور برخی نامساوی‌های تحلیلی وابسته، توسیعی‌ها و گونه‌های دیگر این نامساوی خواهیم پرداخت. ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام برون - مینکوفسکی که مهم‌ترین توسیع نامساوی بالاست، پایان بخش مطالب این مقاله خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: اجسام محدب، نامساوی برون - مینکوفسکی، نامساوی توان آنتروپی.

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 52A40، 26D15.

۱. مقدمه

بیش از یک قرن پیش، اندکی پس از ارائه نخستین اثبات کامل از نامساوی برابر محیطی کلاسیک، مینکوفسکی^۱ نشان داد که برای هر عدد حقیقی $0 \leq \lambda \leq 1$ ،

$$V_n((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n} + \lambda V_n(L)^{1/n}. \quad (1)$$

در این جا K و L اجسام محدب (مجموعه‌های فشرده و محدب با درون ناتهی) در \mathbb{R}^n ، V_n نشان دهنده اندازه n - بعدی لبگ و علامت + در سمت چپ (۱) بیانگر جمع برداری مجموعه‌ها

1) Minkowski

و در سمت راست آن، به مفهوم جمع اعداد حقیقی است. این نامساوی که پیش‌تر در سال ۱۸۸۷ توسط برون^۱ [۶] به اثبات رسیده بود، امروزه به نامساوی برون - مینکوفسکی^۲ مشهور است. همان‌گونه که در بخش سوم خواهیم دید، شکل‌های دیگری از این نامساوی، حتی در فضاهای اقلیدسی، مطرح‌اند و لذا برای جلوگیری از سردرگمی، (۱) را نامساوی برون - مینکوفسکی برای اجسام محدب می‌نامیم. نامساوی (۱) دارای دو شکل هم‌ارز به صورت

$$V_n(K + L)^{1/n} \geq V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}$$

و

$$V_n(sK + tL)^{1/n} \geq sV_n(K)^{1/n} + tV_n(L)^{1/n}$$

است که اثبات هم‌ارز بودن آن‌ها کار دشواری نیست. توجه کنید که در دومین شکل هم‌ارز (۱)، s و t ثابت‌های عددی مثبت و دلخواه هستند.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی اجمالی مفاهیمی می‌پردازیم که در سایر بخش‌های متن حاضر به کار خواهند رفت. نمادهای V_n و V_n^* به ترتیب نشان‌دهنده اندازه n - بعدی لبگ بر \mathbb{R}^n و اندازه داخلی لبگ بر \mathbb{R}^n هستند. یادآور می‌شویم که برای هر $A \subset \mathbb{R}^n$ ، $V_n^*(A)$ سوپریمم اندازه لبگ زیرمجموعه‌های فشرده A است. همچنین، $L_{\mathbb{R}^n}$ نشان‌دهنده σ - جبر زیرمجموعه‌های لبگ - اندازه‌پذیر \mathbb{R}^n است. ابتدا دو تعریف درباره‌ی توابع بر فضای \mathbb{R}^n بیان می‌کنیم. فرض کنید f و g توابع اندازه‌پذیر بر \mathbb{R}^n هستند. پیچش f و g ، تابع

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

است که برای x هایی تعریف می‌شود که به‌ازای آن‌ها انتگرال فوق موجود است. توجه کنید که در این‌جا dy نشان‌دهنده انتگرال‌گیری نسبت به اندازه n - بعدی لبگ است. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تک‌مُدی^۳ می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $0 \leq c \leq 1$ داشته باشیم $f(cx) \geq f(x)$.

مجموعه همه برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای آن آزمایش می‌نامیم. بردار تصادفی X تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه‌ای آزمایش است به \mathbb{R}^n . به‌وضوح به هر بردار تصادفی X با مقادیر در \mathbb{R}^n ، n متغیر تصادفی X_1, \dots, X_n نظیر می‌شود که مؤلفه‌های آن نامیده می‌شوند و می‌نویسیم $X = (X_1, \dots, X_n)$. بردارهای تصادفی $X = (X_1, \dots, X_m)$ و $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ را مستقل نامیم اگر برای هر $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ داشته باشیم

1) Brunn 2) The Brunn-Minkowski Inequality 3) Unimodal

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = F_1(x_1, \dots, x_m)F_2(y_1, \dots, y_n)$$

که در آن F ، F_1 و F_2 به ترتیب توابع توزیع توأم بردارهای تصادفی $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ ، (X_1, \dots, X_m) و (Y_1, \dots, Y_n) هستند. تابع چگالی احتمال یک بردار تصادفی به صورت تابع چگالی احتمال توأم مؤلفه‌های آن تعریف می‌شود.

اکنون بازمی‌گردیم به زیرمجموعه‌های فضای \mathbb{R}^n . زیرمجموعه فشرده و محدب K از \mathbb{R}^n را که دارای درون ناتهی است یک جسم محدب می‌نامیم. همچنین مساحت سطح جسم محدب K در \mathbb{R}^n بنا به تعریف، عبارت است از

$$S(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{V_n(K + \epsilon B^n) - V_n(K)}{\epsilon}$$

که در آن B^n گوی بسته واحد در \mathbb{R}^n است. دو جسم محدب K و L را متجانس گوئیم اگر عدد حقیقی $\alpha > 0$ و بردار $a \in \mathbb{R}^n$ موجود باشند به طوری که $K = \alpha L + a$. همچنین، فاصله هاسدورف^۱ دو زیرمجموعه فشرده و ناتهی K و L از \mathbb{R}^n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_0(K, L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B^n, L \subseteq K + \lambda B^n\}$$

مفهوم مهم دیگر، حجم آمیخته^۲ است. بنا به قضیه‌ای منسوب به مینکوفسکی، [۲۱]، قضیه ۵.۱.۶، اگر K_1, \dots, K_m اجسام محدبی در \mathbb{R}^n بوده و $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ اعداد حقیقی نامنفی باشند، آن‌گاه $V_n(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m)$ یک چندجمله‌ای از درجه n برحسب متغیرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ است. ضریب $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ منسوب به $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ را یک حجم آمیخته می‌نامیم. یکی از مهم‌ترین خواص احجام آمیخته، خطی بودن آن‌ها نسبت به تمامی مؤلفه‌هاست. اگر K و L دو جسم محدب باشند، آن‌گاه برای $i = 1, \dots, n$ تعریف می‌کنیم:

$$V_i(K, L) = V(K, \dots, K, L, \dots, L)$$

که در سمت راست آن K ، $n - i$ بار و L ، i بار ظاهر شده‌اند. $V_i(K, L)$ را i -امین حجم آمیخته متناظر با اجسام محدب K و L می‌نامیم.

در بخش‌هایی از این مقاله به مفهوم فضای گاوس^۳ اشاره می‌شود. اندازه استاندارد گاوس بر $L_{\mathbb{R}^n}$ ، یعنی قلمروی تعریف V_n ، به صورت

$$\gamma_n(A) = (\sqrt{\pi})^{-n/2} \int_A e^{-\|x\|^2/2} dx$$

تعریف می‌شود. در این‌جا $\|x\|$ نرم اقلیدسی بردار $x \in \mathbb{R}^n$ است. مجموعه \mathbb{R}^n همراه با متر اقلیدسی و اندازه استاندارد گاوس را فضای گاوس می‌نامیم.

دو تعریف آخرین بخش به معرفی مفاهیمی از نظریهٔ اطلاع اختصاص دارند. اگرچه در حال حاضر نمی‌توان دلیل متقاعد کننده‌ای برای مطرح نمودن این مفاهیم ارائه نمود، تلاش خواهیم کرد تا خلاء حاصل را در بخش ۷ پر نماییم. فرض کنیم X یک بردار تصادفی در \mathbb{R}^n با چگالی احتمال f باشد. در این صورت آنتروپی X ، $h(X)$ ، به صورت

$$h(X) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx$$

تعریف می‌شود. با استفاده از این تعریف می‌توان آنتروپی X را با

$$N(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi e}} e^{\frac{1}{n} h(X)}$$

تعریف نمود.

۳. نامساوی عام برون - مینکوفسکی

نامساوی ارائه شده در این بخش، موسوم به نامساوی عام برون - مینکوفسکی^۱ را می‌توان مهم‌ترین توسیع نامساوی (۱) به‌شمار آورد. بیان و اثبات این نامساوی که در سال ۱۹۳۵ و توسط لوسترنیک^۲ [۱۸] انجام پذیرفت، سبب ایجاد تحولی بزرگ در زمینهٔ فعالیت‌های تحقیقاتی پیرامون نامساوی برون - مینکوفسکی گردید. برای رسیدن به درک کاملی از چگونگی شکل‌گیری این تحول، لازم است به معرفی نامساوی عام برون - مینکوفسکی بپردازیم.

۱.۳. نامساوی عام برون - مینکوفسکی در \mathbb{R}^n

در بخش اول دیدیم که مجموعه‌های مورد بحث در نامساوی (۱)، زیرمجموعه‌های خاصی از فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n ، یعنی اجسام محدب بودند. فشردگی این مجموعه‌ها به‌وضوح کران‌داری و اندازه‌پذیر بودن آن‌ها را نسبت به V_n ایجاب خواهد کرد. لذا این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان (۱) را برای زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر و کران‌دار \mathbb{R}^n به اثبات رساند. ارائهٔ پاسخ مثبت به این سؤال در قالب نامساوی عام برون - مینکوفسکی توسط لوسترنیک و با اثبات قضیهٔ زیر صورت پذیرفت.

قضیه ۱. (نامساوی عام برون - مینکوفسکی در \mathbb{R}^n) فرض کنید $0 \leq \lambda \leq 1$ عدد حقیقی دلخواه بوده و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیر \mathbb{R}^n باشند به طوری که $(1-\lambda)X + \lambda Y$ نیز اندازه‌پذیر است. در این صورت داریم

$$V_n((1-\lambda)X + \lambda Y)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(X)^{1/n} + \lambda V_n(Y)^{1/n}. \quad (2)$$

1) The General Brunn-Minkowski Inequality 2) Lusternik

علاوه بر لوسترنیک، ریاضیدانان دیگری همچون هویر^۱ و امان^۲ [۱۰] و هنشونوک^۳ و مک بیت^۴ [۱۶] نیز به اثبات قضیه ۱ همت گمارده‌اند. برای مشاهده طریحی از برهان هویر و امان به قضیه ۴.۱ از [۱۱] مراجعه کنید. روش به کار رفته در [۱۶] برای اثبات قضیه ۱، بر پایه استقراء روی n استوار است. لازم به ذکر است که همانند آنچه در مورد نامساوی برون - مینکوفسکی (۱) بیان شد، نامساوی عام (۲) نیز دارای دو شکل هم‌ارز به صورت

$$V_n(X+Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n} \quad (۲')$$

و

$$V_n(sX+tY)^{1/n} \geq sV_n(X)^{1/n} + tV_n(Y)^{1/n}$$

است که در آخرین نامساوی، s و t اعداد حقیقی مثبت و دلخواه هستند.

۲.۳. مسأله اندازه‌پذیری ترکیب محدب

قضیه ۱ حاوی نکته مهمی است که شاید توجه خوانندگان را به خود جلب کرده باشد. در واقع، همان‌طور که از صورت قضیه برمی‌آید، ترکیب محدب هر دو زیرمجموعه لبگ - اندازه‌پذیر \mathbb{R}^n لزوماً لبگ اندازه‌پذیر نیست. این حقیقت را سرپینسکی^۵ از طریق مثال نقضی که در سال ۱۹۲۰ منتشر ساخت، آشکار نمود [۲۳]. تاکنون راه‌های متفاوتی برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده‌اند. یک راه ساده برای حذف شرط اندازه‌پذیری $\lambda Y + (1-\lambda)X$ ، در نظر گرفتن اندازه‌ی داخلی لبگ به جای اندازه لبگ در سمت چپ نامساوی (۲) است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش دوم، به نامساوی

$$V_n^*((1-\lambda)X + \lambda Y)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(X)^{1/n} + \lambda V_n(Y)^{1/n}$$

می‌رسیم که برای مشاهده اثبات آن می‌توانید به [۱۶] قضیه ۱ مراجعه کنید. روش دیگر، جایگزین نمودن جمع برداری با نوع دیگری از جمع موسوم به جمع اساسی است. برای این منظور، کافی است به یاد آوریم که جمع برداری مجموعه‌های X و Y را می‌توان به صورت

$$X+Y = \{z : X \cap (z-Y) \neq \emptyset\}$$

نوشت. در این صورت با اعمال یک تغییر مختصر، به تعریف مورد نظر خواهیم رسید. در واقع، جمع اساسی مجموعه‌های X و Y را به صورت

$$X+_e Y = \{z : V_n(X \cap (z-Y)) > 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

1) Hadwiger 2) Ohmann 3) Henstock 4) Macbeath 5) Sierpinski

اکنون شکل اساسی نامساوی برون - مینکوفسکی بیان می‌کند که اگر $0 < \lambda < 1$ و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیری از \mathbb{R}^n باشند، آنگاه

$$V_n(X + e Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n}.$$

اثباتی از این نامساوی را می‌توانید در ضمیمه [۵] بیابید.

۴. ارتباط با نامساوی‌های دیگر

در مقدمه بخش سوم بیان کردیم که ارائه و اثبات نامساوی عام (۲) موجب ایجاد تحولی شگرف در مسیر فعالیت‌های تحقیقاتی مرتبط با نامساوی برون - مینکوفسکی شد. در این بخش قصد داریم تا ضمن معرفی اجمالی برخی نامساوی‌های تحلیلی مرتبط با نامساوی‌های (۱) و (۲) در \mathbb{R}^n ، به توصیف تحول مزبور پردازیم. این مهم توسط نمودار صفحه بعد صورت می‌پذیرد. توجه کنید که در این نمودار علامت پیکان میان دو نامساوی نشان دهنده آن است که نامساوی واقع در انتهای پیکان را می‌توان از نامساوی واقع در ابتدای آن نتیجه گرفت.

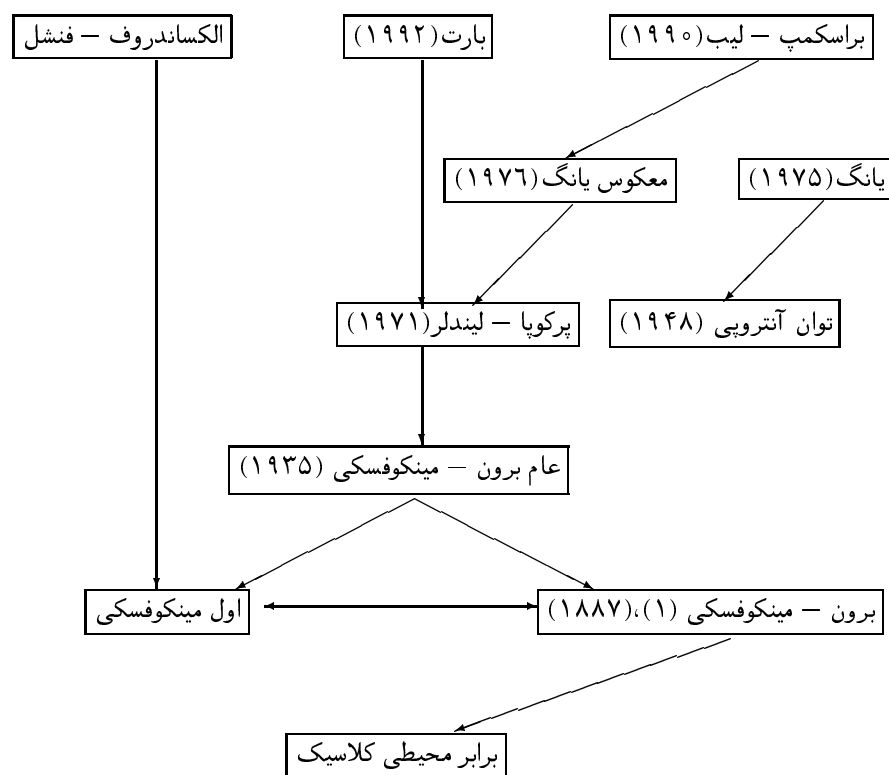
۱.۴. حرکت به سوی آنالیز

در بخش اول با نامساوی برون - مینکوفسکی برای اجسام محدب آشنا شدیم و دیدیم که انگیزه طرح این نامساوی در بحث‌های هندسی پیرامون نامساوی برابر محیطی کلاسیک نهفته بود. در واقع، اشتیاق به یافتن اثبات ساده‌ای از نامساوی برابر محیطی مهم‌ترین دلیل برای اندیشیدن به موضوعاتی بود که منجر به طرح نامساوی برون - مینکوفسکی گردید. با این توضیح و توجه به تحدد مجموعه‌های مورد بحث در (۱)، شگفت آور نخواهد بود اگر بیان کنیم که نامساوی برون - مینکوفسکی تا مدت‌ها متعلق به هندسه پنداشته می‌شده است. اما دیری نپایید که لوسترنیک وضعیت را تغییر داد. او با بیان و اثبات قضیه ۱ سبب شد تا بحث به حیطه‌ی آنالیز راه یابد و امکان استفاده از ابزارهای قدرتمند آنالیز ریاضی جهت پیشروی در این مسیر تحقیقاتی فراهم گردد. این امر همچنین موجبات یافتن کاربردهای گوناگون و توسیع‌های مهم دیگری همچون نامساوی پرکوپا - لیندلر^۱ را فراهم آورد.

۲.۴. نامساوی‌های مرتبط با (۱) و (۲) در \mathbb{R}^n

اکنون به معرفی اجمالی نامساوی‌هایی می‌پردازیم که در ارتباط تنگاتنگ با نامساوی‌های برون - مینکوفسکی (۱) و (۲) هستند.

1) The Prekopa-Leindler Inequality



نمودار نشان دهنده ارتباط نامساوی‌های مورد بحث

الف) نامساوی برابر محیطی

نامساوی برابر محیطی^۱ کلاسیک را می‌توان به‌عنوان پاسخی برای مسأله برابر محیطی در \mathbb{R}^n در نظر گرفت. مسأله مذکور یک مسأله بهینه‌سازی است، زیرا مطلوب آن کمینه نمودن مساحت سطح در میان تمام حوزه‌های با حجم برابر و یا معادلاً بیشینه نمودن حجم در میان تمام حوزه‌هایی است که دارای مساحت سطح $(n - 1)$ بعدی ثابتی می‌باشند. قضیه زیر پاسخ این مسأله را در قالب نامساوی برابر محیطی کلاسیک بیان می‌کند.

1) The Isoperimetric Inequality

قضیه ۲. (نامساوی برابر محیطی کلاسیک در \mathbb{R}^n) فرض کنید K یک حوزه دلخواه در \mathbb{R}^n با مساحت سطح A باشد. در این صورت نامساوی

$$A^n \geq n^n \omega_n V_n^{n-1}(K) \quad (۳)$$

برقرار است که در آن ω_n حجم (اندازه لبگ) گوی بسته واحد در \mathbb{R}^n است. تساوی در (۳) برقرار است اگر و تنها اگر K یک گوی باشد.

اثبات این نامساوی با استفاده از نامساوی برون - مینکوفسکی (۱) به سادگی و در چند سطر امکان پذیر است. برای مشاهده جزئیات برهان، می توانید به [۲۰] مراجعه کنید.

ب) نامساوی اول مینکوفسکی

در این جا به معرفی نامساوی مهم دیگری منسوب به مینکوفسکی، موسوم به نامساوی اول مینکوفسکی^۱، می پردازیم که با (۱) هم ارز است.

قضیه ۳. (نامساوی اول مینکوفسکی در \mathbb{R}^n) فرض کنیم K و L دو جسم محدب در \mathbb{R}^n با اولین حجم آمیخته $V_1(K, L)$ باشند. در این صورت نامساوی

$$V_1(K, L) \geq V_n(K)^{(n-1)/n} V_n(L)^{1/n} \quad (۴)$$

برقرار است. تساوی در (۴) رخ می دهد اگر و تنها اگر K و L متجانس باشند.

اثبات قضیه فوق با در دست داشتن نامساوی برون - مینکوفسکی (۱) بسیار ساده است ([۱۱] صفحات ۳۶۴ و ۳۶۵). از طرف دیگر، اثبات این که (۴)، (۱) را نتیجه می دهد نیز با استفاده از خطی بودن احجام آمیخته امکان پذیر است که برای مشاهده جزئیات برهان می توانید به [۱۳] صفحه ۳۷۰ مراجعه کنید.

نامساوی اول مینکوفسکی از چندین جهت حائز اهمیت است. نخستین وجه اهمیت آن، کاربرد در حل مسأله شفارد است. این مسأله را می توان بدین شرح بیان نمود: فرض کنیم K و L اجسام محدبی در \mathbb{R}^n هستند که یک انتقال یافته از هریک از آنها نسبت به مبدأ متقارن است. اگر حجم تصویر متعامد K بر هر ابرصفحه، کوچکتر از حجم تصویر متعامد L بر همان ابرصفحه باشد، آیا حجم K نیز از حجم L کوچکتر است؟ پاسخ این سؤال در حالت کلی منفی است ([۱۳] فصل چهارم و [۱۹] صفحه ۲۵۵ را ببینید). کاربرد دوم این نامساوی، در اثبات گونه ای از نامساوی برابر محیطی موسوم به نامساوی برابر محیطی برای اجسام محدب است. این نامساوی بیان می کند که برای هر جسم محدب K در \mathbb{R}^n داریم

1) Minkowski's First Inequality

$$\left(\frac{V_n(K)}{V_n(B^n)}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{S(K)}{S(B^n)}\right)^{1/(n-1)}.$$

برای مشاهده جزئیات بیشتر درباره این کاربرد، به [۱۱] مراجعه کنید.

پ) نامساوی پرکوپا - لیندلر

اثبات هشتوک و مک بیت ([۱۶]) از قضیه ۱ انگیزه‌ای برای کشف یک نامساوی قوی‌تر توسط پرکوپا^۱ و لیندلر^۲ گردید. این نامساوی که امروزه به نامساوی پرکوپا - لیندلر مشهور است در قضیه زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۴. (نامساوی پرکوپا - لیندلر در \mathbb{R}^n) فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و f, g, h توابع انتگرال‌پذیر نامنفی بر \mathbb{R}^n واجد شرط

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت داریم

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy\right)^\lambda. \quad (5)$$

شرایط کاملاً پیچیده‌ای برای برقراری تساوی در (۵) در حالت $n = 1$ ارائه شده‌اند که برای مشاهده آن‌ها می‌توانید به [۹] و [۲۴] مراجعه کنید. با وجود این، شرایط برقراری تساوی در حالت کلی همچنان غیرمشخص است.

اثبات قضیه فوق به‌سادگی و با استفاده از استقراء بر n امکان‌پذیر است ([۱۲] قضیه ۴.۲). اکنون برای آن‌که شکل هم‌ارز نامساوی عام (۲) را از نامساوی پرکوپا - لیندلر به‌دست آوریم، کافی است در (۵) قرار دهیم $f = \chi_X, g = \chi_Y, h = \chi_{(1-\lambda)X + \lambda Y}$.

ت) نامساوی توان آنتروپی

نامساوی توان آنتروپی^۳ یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین نامساوی‌ها در حیطه نظریه اطلاع است. در سال ۱۹۴۸، شانن^۴ [۲۲] این نامساوی را بیان و اثبات نمود تا کرانی پایینی برای ظرفیت یک کانال به‌دست آورد.

قضیه ۵. (نامساوی توان آنتروپی) فرض کنیم X و Y دو بردار تصادفی مستقل در \mathbb{R}^n با چگالی‌های احتمال در $L^p(\mathbb{R}^n)$ برای یک $p > 1$ باشند. در این صورت داریم

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y). \quad (6)$$

برای مشاهده دو اثبات ساده و جدید از قضیه فوق، [۱۵] و [۲۵] را ببینید.

نکته جالب توجه در مورد نامساوی توان آنتروپی، ارتباط غیرمستقیم آن با نامساوی برون - مینکوفسکی است. در این جا عبارت «ارتباط غیرمستقیم» را می توانیم به شرح زیر تعبیر کنیم. هر کدام از نامساوی های بیان شده در این بخش، به نحوی در ارتباط مستقیم با نامساوی برون - مینکوفسکی هستند. به عنوان مثال نامساوی اول مینکوفسکی (۴) با (۱) هم ارز است و نامساوی پرکویا - لیندلر (۵)، نامساوی عام (۲) را نتیجه می دهد. همچنین گزاره هایی مشابه (و البته نه کاملاً یکسان با) آنچه بیان شد در مورد ارتباط مابقی نامساوی های این بخش و نامساوی های برون - مینکوفسکی (۱) و (۲) صدق می کنند. لیکن وضع نامساوی توان آنتروپی مطلقاً متفاوت با دیگر نامساوی هاست. در واقع نمی توان با داشتن هر کدام از نامساوی های توان آنتروپی و برون - مینکوفسکی، دیگری را نتیجه گرفت. همچنین هیچ کدام از این دو نامساوی یک نامساوی مستقیماً مرتبط با دیگری را نتیجه نمی دهند. پس این سؤال مطرح می شود که دلیل معرفی نامساوی توان آنتروپی در این جا چیست؟ به عنوان یک پاسخ جامع، مانع ولی مبهم می توان شباهت های متعدد میان این دو نامساوی را دلیل موجهی دانست. در حقیقت همین شباهت ها هستند که می توان آن ها را تحت عنوان ارتباط «غیرمستقیم» تلقی نمود و سعی خواهیم کرد تا ابهام موجود در مورد این شباهت ها را به تدریج برطرف نمائیم. یک مورد از وجوه تشابه دو نامساوی را پس از معرفی نامساوی یانگ و عکس آن در زیر بخش بعد بیان خواهیم کرد و بیان مورد دیگر را به بخش ۷ موکول می کنیم.

ث) نامساوی یانگ و عکس آن

فرض کنیم اعداد حقیقی $1 \leq p, q, r$ در شرط

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \quad (7)$$

صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. اگر $f * g$ پیچش توابع f و g باشد، آنگاه نامساوی کلاسیک یانگ^۱ بیان می کند که

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (8)$$

قضیه زیر به معرفی دو نامساوی اختصاص دارد: (۹) توسیعی از (۸) است که به طور مستقل توسط بکنر^۲ [۲] و براسکمپ^۳ و لیب^۴ [۴] به اثبات رسیده است و (۱۰) شکل وارون (۹) است که توسط براسکمپ و لیب [۴] اثبات شده است.

قضیه ۶. (نامساوی یانگ و عکس آن در \mathbb{R}^n) فرض کنیم $p, q, r > 0$ در شرط (۷) صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. در این صورت

1) The Classical Young Inequality 2) Beckner 3) Brascamp 4) Lieb

الف. اگر $1 \leq p, q, r$ نامساوی یانگ

$$\|f * g\|_r \leq C^n \|f\|_p \|g\|_q \quad (9)$$

و

ب. اگر $1 \leq p, q, r$ عکس نامساوی یانگ

$$\|f * g\|_r \geq C^n \|f\|_p \|g\|_q \quad (10)$$

برقرارند. در این جا $C = \frac{C_p C_q}{C_r}$ که در آن برای s و s' صادق در شرط $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ داریم $C_s^2 = \frac{|s|^{1/s}}{|s'|^{1/s'}}$

آنچه نامساوی یانگ و عکس آن را با نامساوی برون - مینکوفسکی مرتبط می سازد، نتیجه شدن صورتی معادل از نامساوی پرکویا - لیندلر، موسوم به شکل اساسی نامساوی پرکویا - لیندلر ([۱۲] قضیه ۹.۱)، از حالت حدی $r \rightarrow \infty$ در عکس نامساوی یانگ است. اثباتی از این حقیقت را می توانید در [۱۲] قضیه ۱۴.۲ بیابید. با توجه به آنچه در مورد ارتباط نامساوی های پرکویا - لیندلر و برون - مینکوفسکی می دانیم، نتیجه بحث فوق این است که حالت حدی $r \rightarrow \infty$ در عکس نامساوی یانگ، نامساوی عام (۲) را نتیجه می دهد. نکته دیگری که خود به عنوان یکی از شباهت های نامساوی عام (۲) و توان آنتروپی (۶) مطرح می گردد آن است که حالت حدی $r \rightarrow 1$ از نامساوی یانگ، (۶) را ایجاب می کند ([۱۲] لم ۱۸.۲ و نتیجه ۱۸.۳).

ج) نامساوی های براسکمپ - لیب و بارت^۱

نامساوی های ارائه شده در این بخش، قوی ترین توسیع های شناخته شده در ارتباط با نامساوی یانگ و عکس آن هستند.

قضیه ۷. (نامساوی های براسکمپ - لیب و بارت در \mathbb{R}^n) برای هر $i = 1, \dots, m$ فرض کنید $c_i > 0$ و $n_i \in \mathbb{N}$ چنان باشند که $\sum_i c_i n_i = n$. همچنین فرض کنید $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{n_i})$ ها تابعی نامنفی و برای $i = 1, \dots, m$ $B_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ ها تابعی خطی و پوشا باشند. در این صورت اگر

$\{A_i\}$ یک ماتریس $n_i \times n_i$ معین مثبت است: $D = \inf \left\{ \frac{\det(\sum_{i=1}^m c_i B_i^* A_i B_i)}{\prod_{i=1}^m \det(A_i)^{c_i}} \right\}$ آن گاه نامساوی های

الف. براسکمپ - لیب

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \leq D^{-1/2} \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) dx \right)^{c_i} \quad (11)$$

و

1) Barthe

ب. بارت

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{i=1}^m f_i(z_i)^{c_i} : x = \sum_i c_i B_i^* z_i, z_i \in \mathbb{R}^{n_i} \right\} dx \geq D^{1/2} \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) dx \right)^{c_i} \quad (12)$$

برقرارند. می توان نشان داد که (۱۱) نامساوی یانگ را نتیجه می دهد و (۱۲) نامساوی پرکوپا - لیندلر را ایجاب می کند. برای مشاهده جزئیات می توانید به [۱۱] بخش ۱۵ مراجعه کنید.

چ) نامساوی الکساندروف - فنشل^۱

در زیربخش نامساوی اول مینکوفسکی بیان کردیم که نامساوی های برون - مینکوفسکی (۱) و اول مینکوفسکی (۴) هم ارزند. در این جا به معرفی توسیعی از نامساوی اول مینکوفسکی می پردازیم که با توجه به آنچه بیان شد، توسیعی از (۱) نیز به شمار می آید.

قضیه ۸ (نامساوی الکساندروف - فنشل در \mathbb{R}^n) فرض کنید K_1, \dots, K_n اجسام محدب در \mathbb{R}^n باشند و $1 \leq i \leq n$ عددی ثابت باشد. در این صورت داریم

$$V(K_1, \dots, K_n)^i \geq \prod_{j=1}^i V(K_j, i; K_{i+1}, \dots, K_n). \quad (13)$$

نامساوی (۱۳) قوی ترین توسیع نامساوی برون - مینکوفسکی (۱)، البته برای اجسام محدب است. متأسفانه هیچ اثبات ساده ای برای قضیه فوق موجود نیست. برای مشاهده اثباتی از آن می توانید [۲۱] قضیه ۶.۳.۱ را ببینید. این اثبات که مبتنی بر روش مورد استفاده توسط الکساندروف است، ابتدا به اثبات نامساوی برای گونه خاصی از چندوجهی های محدب پرداخته و سپس از تقریب استفاده می نماید. شرایط برقراری تساوی تا به امروز مجهول باقی مانده اند. برای مشاهده توضیحات تاریخی بیشتر می توانید به [۷] صفحه ۱۴۳ مراجعه کنید. اگر در (۱۳) قرار دهیم $K_1 = L, i = n$ و $K_2 = \dots = K_n = K$ ، به نامساوی اول مینکوفسکی می رسیم.

۵. مسائل پایایی

همان طور که برون و مینکوفسکی نشان دادند، تساوی در نامساوی برون - مینکوفسکی (۱) رخ می دهد اگر و تنها اگر K و L اجسام محدب متجانسی باشند، یعنی برای $\alpha > 0$ و $a \in \mathbb{R}^n$ بی داشته باشیم $K = \alpha L + a$. حال فرض کنید که برای $0 < \lambda < 1$ و یک $\epsilon > 0$ داشته باشیم

$$V_n((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n} \leq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n} + \lambda V_n(L)^{1/n} + \epsilon$$

یعنی تساوی میان دو کمیت واقع در دو طرف نامساوی (۱) با تقریب $\epsilon > 0$ برقرار باشد،

1) The Aleksandrov-Fenchel Inequality

در این صورت مایلیم بدانیم که آیا می توان حداکثر فاصله K و L نسبت به متر هاسدورف را بر حسب n ، λ و ϵ به دست آورد؟

مسائلی از این قبیل را معمولاً مسائل پایایی و تخمین های روشنی را که به چنین سؤالاتی پاسخ مثبت می دهند، اغلب نتایج پایایی می نامند.

قضیه زیر، منسوب به گرومر^۱ (قضیه ۳ از [۱۴])، به مسأله پایایی فوق پاسخ می دهد.

قضیه ۹. فرض کنید K_0 و K_1 دو جسم محدب در \mathbb{R}^n بوده و $\epsilon \geq 0$ و $0 < \lambda < 1$ اعدادی ثابت باشند. برای $i = 0, 1$ فرض کنید $d(K_i)$ قطر K_i باشد و قرار دهید $v_i = V_n(K_i)^{1/n}$. همچنین فرض کنید D عددی حقیقی صادق در شرط $d(K_i) \leq v_i D$ باشد. قرار دهید $M = \max\{v_0, v_1\}$ و $m = \min\{v_0, v_1\}$ اگر

$$V_n((1-\lambda)K_0 + \lambda L)^{1/n} \leq (1-\lambda)V_n(K_0)^{1/n} + \lambda V_n(K_1)^{1/n} + \epsilon$$

آن گاه

$$h_n(K_0, K_1) \leq \gamma_n \left(\frac{M}{m} \frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + 2 \right) m^{-1/(n+1)} D \epsilon^{1/(n+1)}. \quad (14)$$

که در آن $\gamma_n = (1 + \frac{1}{2} 2^{-12}) 3^{(n-1)/n} 2^{(n+2)/(n+1)} n < 6.00025n$ به روشنی، نامساوی (۱۴) همان نتیجه پایایی مورد نظر است.

۶. توسیع ها و نامساوی هایی از نوع برون - مینکوفسکی

در این بخش به مروری از توسیع ها و بیان دیگری از نامساوی های برون - مینکوفسکی (۱) و (۲) در فضا های گاوس می پردازیم. در سال ۱۹۵۷ نوٹ^۲، [۱۷]، به برهانی جدید از نامساوی (۱) دست یافت و با گسترش مفاهیم به کار رفته در اثبات خود موفق به استنتاج نتیجه کلی تر زیر گردید. برای هر جسم محدب K در \mathbb{R}^n فرض کنیم $F(K, x)$ تابعی حقیقی مقدار، نامنفی و پیوسته نسبت به K و x باشد. همچنین فرض کنیم عدد حقیقی $m \geq 0$ موجود است به طوری که

$$F(\lambda K + a, \lambda x + a) = \lambda^m F(K, x) \quad (15)$$

برای هر $a \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda > 0$ علاوه بر این،

$$\log F((1-\lambda)K + \lambda L, (1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) \log F(K, x) + \lambda \log F(L, y) \quad (16)$$

که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$ و $y \in L, x \in K$ در \mathbb{R}^n تعریف کنیم

$$G(K) = \int_K F(K, x) dx$$

آن‌گاه خواهیم داشت

$$G(K+L)^{\frac{1}{n+m}} \geq G(K)^{\frac{1}{n+m}} + G(L)^{\frac{1}{n+m}} \quad (17)$$

در این جا K و L اجسام محدب دلخواهی در \mathbb{R}^n هستند. اکنون بررسی می‌کنیم که (۱۷) چگونه از (۱) نتیجه می‌شود. به‌وضوح تابع $1 = F(K, x)$ در $x \in K$ در (۱۶) صدق کرده و شرط (۱۵) را به‌ازای $m = 0$ برمی‌آورد. همچنین متناظر با این تابع، برای هر جسم محدب K خواهیم داشت

$$G(K) = \int_K F(K, x) dx = \int_K dx = V_n(K)$$

لذا (۱) از (۱۷) نتیجه می‌شود. برای مشاهده توضیحات بیشتر در مورد توسیع نوٹ و اثبات آن، به [۱۷] مراجعه کنید.

در ادامه، به معرفی اجمالی یک نامساوی از نوع برون - مینکوفسکی می‌پردازیم.

قضیه ۱۰. (نامساوی برون - مینکوفسکی در فضای گاوس) فرض کنید $0 \leq \lambda \leq 1$ عددی ثابت و K و L دو زیرمجموعه کران‌دار و اندازه‌پذیر از \mathbb{R}^n باشند به طوری که $(1-\lambda)K + \lambda L$ نیز اندازه‌پذیر است. در این صورت نامساوی

$$\gamma_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \gamma_n(K)^{(1-\lambda)} \gamma_n(L)^\lambda \quad (18)$$

برقرار است.

توجه کنید که (۱۸) به لحاظ ظاهری شباهتی تام با شکل اول نامساوی عام (۱۲)، قضیه ۵.۱ دارد و همین امر وجه تسمیه آن است. اثبات قضیه فوق با استفاده از نامساوی پرکوپا - لیندلر (۵) انجام می‌شود که برای مشاهده جزئیات آن می‌توانید به [۴] رجوع کنید.

۷. کاربردهایی از نامساوی عام (۲')

همان‌طور که تا این‌جا دیده‌ایم، نامساوی برون - مینکوفسکی دارای صورت‌های هم‌ارز، توسیع‌ها و گونه‌های متعددی است. لیکن هر کدام از این نامساوی‌ها دارای کاربردهای مختلفی می‌باشند. از این‌رو، حجم عظیم کاربردهای نامساوی‌های مورد بحث در این مختصر نمی‌گنجد و ناچاراً به ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام (۲') بسنده می‌کنیم. توجه کنید که با توجه به معادل بودن نامساوی‌های عام (۲) و (۲')، آنچه به‌عنوان کاربردی از (۲') بیان می‌گردد، کاربردی از (۲) نیز خواهد بود.

۱.۷. کاربرد در نظریه اطلاع

در سال ۱۹۸۴، کاستا^۱ و کاور^۲ [۸] ضمن اشاره به مورد دیگری از وجوه تشابه نامساوی‌های

1) Costa 2) Cover

عام (۲') و توان آنتروپی (۶)، به استفاده از آن برای تعریف مفهوم جدید مساحت سطح برای متغیرهای تصادفی چندمتغیره و به قدر کافی خوش رفتار پرداختند. در واقع هنرکاستا و کاور در استفاده از شباهت‌های نامساوی عام برون - مینکوفسکی و نامساوی توان آنتروپی به منظور حصول نتایجی مرتبط با مفهوم آنتروپی از نتایج شناخته شده هندسی مرتبط با نامساوی عام بود. آن‌ها، در نخستین قدم، نشان دادند که اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل بوده و X' و Y' متغیرهای تصادفی نرمال و مستقل باشند به طوری که $h(X') = h(X)$ و $h(Y') = h(Y)$ ، آن‌گاه نامساوی

$$h(X + Y) \geq h(X' + Y') \quad (۱۹)$$

با نامساوی توان آنتروپی (۶) معادل است. این دو، در قدم بعد و با فرایندی مشابه، به یک نامساوی هم‌ارز با نامساوی عام (۲') دست یافتند که از لحاظ ظاهری مشابه (۱۹) بود. این نامساوی بیان می‌کند که اگر A و B زیرمجموعه‌های لیگ - اندازه‌پذیری از \mathbb{R}^n واجد شرط اندازه‌پذیری $A + B$ باشند و گوی‌های باز A' و B' را چنان اختیار کنیم که $V_n(A') = V_n(A)$ و $V_n(B') = V_n(B)$ ، آن‌گاه خواهیم داشت

$$V_n(A + B) \geq V_n(A' + B'). \quad (۲۰)$$

کار مهم بعدی مؤلفین مزبور تحقیق درستی نامساوی برابر محیطی کلاسیک برای حوزه‌های فشرده و محدب در \mathbb{R}^n و ایده گرفتن از شباهت حاصل میان نامساوی‌های (۲') و (۶) (در رسیدن به نامساوی‌های کاملاً مشابه (۱۹) و (۲۰)) جهت تعریف مساحت سطح متغیر تصادفی چندمتغیره X با چگالی به طور مناسب هموار $p(t)$ به صورت

$$S(X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{\gamma h(X+Z_\epsilon)} - e^{\gamma h(X)}}{\epsilon}$$

بود که در آن Z_ϵ بردار تصادفی گاوسی با ماتریس کوواریانس ϵI و مستقل از X است. کاستا و کاور سرانجام با استفاده از صورت معادل نامساوی توان آنتروپی (۱۹) به مشابه نامساوی برابر محیطی کلاسیک برای آنتروپی رسیدند:

$$\frac{1}{n} E \frac{\|\nabla p\|^2}{p^\gamma} \geq \gamma \pi e e^{-\frac{\gamma}{n} h(X)}.$$

۲.۷. کاربرد در آمار و نظریه احتمال

در سال ۱۹۵۵، اندرسون^۱ [۱]، نامساوی برون - مینکوفسکی را در تحقیق خود پیرامون توابع تک‌مدی چندمتغیره به کار برد. وی نتیجه اصلی خود را در قالب قضیه زیر بیان نمود.

قضیه ۱۱. (اندرسون) فرض کنیم K جسمی محدب در \mathbb{R}^n و متقارن نسبت به مبدأ باشد. همچنین فرض کنیم f تابعی نامنفی، متقارن و تک‌مدی باشد که بر \mathbb{R}^n انتگرال‌پذیر است. در این صورت

1) Anderson

برای هر $0 \leq c \leq 1$ و $y \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\int_K f(x + cy) dx \geq \int_K f(x + y) dx.$$

با استفاده از قضیه اندرسون می‌توان نتیجه گرفت که اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال بر \mathbb{R}^n بوده و Y متغیری تصادفی و مستقل از X باشد، آنگاه

$$P\{X \in K\} \geq P\{X + Y \in K\}$$

که در آن K جسمی محدب در \mathbb{R}^n و متقارن نسبت به مبدأ است. اثبات قضیه اندرسون به‌طور کامل وابسته است به $1/n$ - مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ (یعنی مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ به‌توان $1/n$) بر \mathbb{R}^n که متناظر با اجسام محدب K و L به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{K,L}(x) = V_n(K \cap (L + x)).$$

نامساوی عام برون - مینکوفسکی را می‌توان برای اثبات $1/n$ - مقعر بودن $g_{K,L}$ بر تکیه‌گاهش به کار برد. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد اثبات قضیه فوق و کاربرد نامساوی عام در آن، به [۱] مراجعه کنید.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری نهایی

اگرچه پیشینه تاریخی مباحث مرتبط با نامساوی برون - مینکوفسکی به اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم برمی‌گردد، این مبحث همچنان در زمره شاخه‌های تحقیقاتی فعال ریاضیات نوین قرار دارد. بدون شک مهم‌ترین دلیل این پویایی اتصال نامساوی برون - مینکوفسکی، صورت‌های معادل و گونه‌های مختلف آن به مقاصد کاربردی است. البته برای اهل ریاضیات که هیچ ادعایی را بدون اقامه برهان نمی‌پذیرند، تحقیق فعال بودن این قلمروی تحقیقاتی بسیار آسان بوده و با جستجویی ساده در اینترنت می‌توان به آخرین مقالات مربوطه دست یافت. به‌عنوان نمونه‌ای از چنین مقالاتی می‌توان [۳] را نام برد.

مراجع

- [1] Anderson, T. W., "The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 170-176.
- [2] Beckner, W., "Inequalities in Fourier analysis", *Ann. of Math.*, **102**(1975), 159-182.

- [3] Borell, C., “Inequalities of the Brunn-Minkowski type for Gaussian measures”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **140**(2008), 195-205.
- [4] Brascamp H. J., and Lieb, E. H., “Some inequalities for Gaussian measures and the long-range order of one-dimensional plasma”, *Functional Integration and its Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1975, pp. 1-14.
- [5] Brascamp H. J., and Lieb E. H., “On extensions of Brunn-Minkowski and Prekopa-Liendler theorems, including inequalities for long concave functions, and with an application to the diffusion equation ”, *J. Functional Anal.*, **22**(1976), 366-389.
- [6] Brunn, H., *Uber ovale und eiflachen dissertation*, Munchen, 1887.
- [7] Burago Y. D., and Zalgaler V. A., *Geometric inequalities*, Springer, New York, 1988.
- [8] Costa M. H. M., and Cover T. M., “On the similarity of the entropy power inequality and the Brunn-Minkowski inequality”, *IEEE Trans. Information Theory*, **30**(1984), 837-839.
- [9] Dancs S., and Uhrin, B., “On the conditions of equality in an integral inequality”, *Pub. Math.*, **29**(1982), 117-132.
- [10] Hadwiger, H., and Ohmann, D., “Brunn-Minkowskischer satz und isoperimetrie”, *Math. Zeit.*, **66**(1956), 1-8.
- [11] Gardner R. J., “The Brunn-Minkowski inequality”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**(2002), 355-405.
- [12] Gardner R. J., “The Brunn-Minkowski inequality: A survey with proofs”, available at <http://www.ac.wvu.edu/~gardner> .
- [13] Gardner R. J., *Geometric Tomography* , Cambridge University Press, New York, 1995.
- [14] Groemer, H., “On the Brunn-Minkowski theorem ”, *Geom. Dedicata*, **27**(1988), 357-371.
- [15] Guo, D., and Shamai S., and Verdu S., *Proof of entropy power inequalities via MMSE*, ISIT 2006, Seattle, USA, July 9-14 (2006).

- [16] Henstock, R., and Macbeath, M., "On the measure of sum-sets, I: The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik ", *Proc. London Math. Soc.*, **3**(1953), 182-194.
- [17] Knothe, H., "Contributions to the theory of convex bodies", *Michigan Math. J.*, **4**(1957), 39-52.
- [18] Lusternik, L. A., "Die Brunn-Minkowskische ungleichung fur beliebige messbare mengen", *C. R. Acad. Sci, URSS* **8** (1935), 55-58.
- [19] Lutwak, E., "Intersection bodies and dual mixed volume", *Adv. Math.*, **71**(1988), 232-261.
- [20] Osserman, R., "The isoperimetric inequality", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**(1978), 1182-1238.
- [21] Schneider, R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [22] Shannon, C. E., "A Mathematical theory of communication", *Bell System Tech. J.*, **27**(1948), 623-656.
- [23] Sierpinski, W., "Sur la question de la mesurabilite de la base de M. Hamel", *Fund. Math.*, **1**(1920), 105-111.
- [24] Uhrin, B., "Extensions and sharpenings of Brunn-Minkowski and Bonnesen inequalities", *Intuitive Geometry*, Siofok, 1985, ed. by K. Boroczky and G. Fejes Toth, *Coll. Math Soc.*, 1987, 551-571.
- [25] Verdu. S., and Guo, D., "A simple proof of the entropy power inequality", *IEEE Trans. Information Theory*, **52** (2006), 2165-2166.

محمد رضا میری mmiri@birjand.ac.ir
 حسین حسینی گوی hossein.giv@gmail.com
 دانشگاه بیرجند، گروه ریاضی
 غلامرضا محتشمی برزادران gmb1334@yahoo.com
 دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار