

# تحول شرآم - لورنر<sup>۱</sup>

فریدون رضاخانلو

## ۱. مقدمه

یکی از اهداف اساسی فیزیک آماری شناخت رفتار مدل‌های میکروسکوپی، در مقیاس بزرگ است. اخیراً، روش جدیدی برای معرفی حد در مقیاس<sup>۲</sup> سیستم‌های بحرانی ناوردای همدیس گوناگون در بعد ۲ توسعه یافته است. هدف اصلی این مقاله تشریح چند مدل شبکه‌ای که یک گذر فاز را تجربه می‌کنند، و مطالعه حد در مقیاس آن‌ها در حالت بحرانی است. این مدل‌های شبکه‌ای عبارت‌اند از: قدم‌زن تصادفی خود گریز، قدم‌زن تصادفی بدون دور، کاوش‌گر همساز و نشن. حدس زده می‌شود که در حالت بحرانی توصیف میکروسکوپی این مدل‌ها توسط اعضای متفاوت خانواده‌ای پیوسته از فرایندهای تصادفی موسوم به تحول شرآم - لورنر ( $SLE$ ) ارائه می‌شود. ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان حدس زده‌اند که مدل‌های اشاره شده در حالت بحرانی حد پیوسته‌ای (حد در مقیاس) دارند و این حد ناوردای همدیس است. شرآم نشان داد که اگر یک قدم‌زن تصادفی بدون دور در بعد ۲ حدی ناوردای همدیس داشته باشد، آن گاه حد آن یک  $SLE$  است. وجود این حد ناوردای همدیس بعداً توسط لولر<sup>۳</sup>، شرآم و ورنر نشان داده شد.

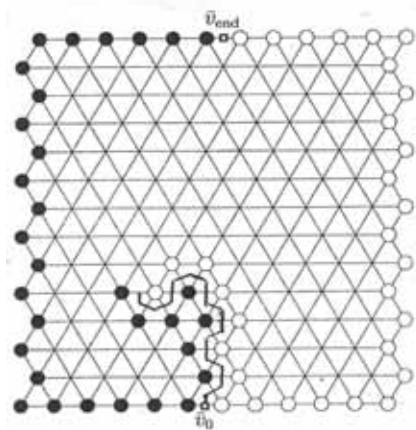
برای شروع، مسأله کلاسیک قدم‌زن تصادفی گسسته در  $\mathbb{Z}^2$  را در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر از نقطه<sup>۴</sup>  $\gamma_0 = 0$  شروع می‌کنیم و برای  $\gamma_n \in \mathbb{Z}^2$ ،  $\gamma_{n+1}$  را یکی از خانه‌های همسایه<sup>۵</sup>  $\gamma_n$  با احتمال مساوی  $\frac{1}{4}$  انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم که اگر  $\beta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\gamma_{[nt]}$ ؛ آن گاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n(t) = \beta(t)$  موجود است و یک حرکت براونی<sup>۲</sup> بعدی است. این همان اصل معروف ناوردایی دانسکر<sup>۴</sup> است که در همه ابعاد درست است. اما، این حد یک حرکت براونی مسطح است و بنا به قضیه‌ای از پال لوی<sup>۵</sup> ناوردای همدیس است. ابتدا مشاهده می‌شود که اگر قرار دهیم  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$  و  $\beta_\epsilon : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  را توسط  $\beta_\epsilon(t) = \epsilon\gamma_{\lfloor t/\epsilon \rfloor}$  تعریف کنیم، آن گاه مجموعه<sup>۶</sup>  $\{\beta_\epsilon(t) : t > 0\} = \{\epsilon\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$

1) Schramm - Loewner, C. (English), Löwner, K. (Germany)      2) scaling limit  
3) Lawler, G    4) Dansker    5) Paul Levy

یک خم تصادفی است که به  $\{\beta(t) : t > 0\}$  همگرا می‌شود که در آن  $\beta$  یک حرکت براونی مسطح است. لوی ثابت کرد که اگر  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  یک نگاشت هممدیس باشد، آن گاه  $f(\beta(t))$  نیز با تغییر زمان تصادفی یک حرکت براونی است. به طور دقیق‌تر، اگر  $\tau(t)$  را به صورت

$$\int_0^{\tau(t)} |f'(\beta(\theta))|^2 d\theta = t$$

تعریف کنیم، آن گاه فرایند  $\hat{\beta}(t) = f(\tau(t))$  نیز یک حرکت براونی است. معنی دیگر این حرف این است که اگر از پارامتر صرف نظر کنیم و قانون  $\{\beta(t) : t > 0\}$  را  $\mathcal{P}$  بنامیم، آن گاه  $\mathcal{P} \circ \Gamma^{-1} = \mathcal{P}$  که در آن  $\Gamma(\gamma) = \{f(z) : z \in \gamma\}$  مثالی از یک قانون ناوردای هممدیس است. در بخش ۲، مدل‌های شبکه‌ای متعددی معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، در مورد اهمیت کارلُونر بحث می‌کنیم و در بخش ۴ نشان می‌دهیم چگونه نسخه تصادفی کارلُونر حد در مقیاس مدل‌های فصل ۲ را توصیف می‌کند.



## ۲. مدل‌های میکروسکوپی

به عنوان اولین مثال، قدم زن تصادفی خودگریز را بررسی می‌کنیم که شیمی‌دان‌ها از آن به عنوان مدلی برای پلیمرها استفاده می‌کنند. برای هدف خود، این مدل را روی نیم‌صفحه بالایی معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ ،  $\bar{\mathbb{H}} = \{c \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$  و شبکه  $\mathbb{Z}^2 \cap \bar{\mathbb{H}}$  را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مجموعه تصادفی  $\{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(N)\}$  را طوری بسازیم که  $\gamma(0) = 0$ ؛  $\gamma(1), \dots, \gamma(N) \in \mathbb{Z}^2 \cap \bar{\mathbb{H}}$ ؛ برای  $i \neq j$  و  $\gamma(i) \neq \gamma(j)$ ؛  $\gamma(i) \sim \gamma(i+1)$  برای  $i = 1, \dots, N-1$ . در این جا  $a \sim b$  به این معنی است که  $a$  و  $b$  در  $\mathbb{Z}^2$  مجاورند. مجموعه چنین مسیرهایی را با  $\Gamma_N$  نشان می‌دهیم و روی  $\Gamma_N$  اندازه احتمال یکنواخت

می‌گذاریم. این اندازه احتمال را با  $\mathbb{P}_N$  نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N$  موجود است. این حد یک اندازه احتمال است و روی مسیرهای خودگریز  $\{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(N), \dots\}$  در نیم صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  متمرکز شده است.  $\epsilon$  را یک ثابت مثبت کوچک می‌گیریم و  $\epsilon\gamma$  را نظیر مسیری که از  $(0, \gamma(0)), (1, \gamma(1)), \dots$  ساخته می‌شود (روی شبکه  $(\mathbb{H} \cap \mathbb{Z}^2)$ ) می‌نویسیم. قانون  $\epsilon\gamma$  را با  $\mathcal{P}_\epsilon$  نشان می‌دهیم که روی مسیرهای خودگریز نیم صفحه بالایی متمرکز شده است. اکنون برای طرح اولین سؤال اساسی این مبحث آماده شده‌ایم.

سؤال ۱. حد  $\mathcal{P}_\epsilon$  وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$  چیست؟

این سؤال یک مسأله بازپیکارجو است. اما اکنون یک حدس دقیق به کمک SLEها برای این سؤال داریم. همان طور که قبلاً گفتیم یک خانواده تک پارامتری از فرایندها موسوم به  $SLE(\kappa)$ ،  $\kappa > 0$  موجود است که مدل‌های میکروسکوپی متعددی حد پیوسته‌ای در آن دارند.

حدس ۲.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon = SLE(\frac{4}{3})$  است.

لولر در اواخر دهه ۷۰ مدل دیگری که یک اندازه احتمال دیگر روی قدم زن تصادفی خود گریز است، ارائه داد که ریاضیات ساده‌تری دارد. این مدل قدم زن تصادفی بدون دور (LERW) نام دارد و می‌تواند روی شبکه‌های متنوعی تعریف شود. برای وضوح بیشتر، فقط آن را روی نیم صفحه بالایی تعریف می‌کنیم. این ساختار در دو مرحله انجام می‌گیرد. ابتدا یک قدم زن تصادفی غیربازگشتی را در نیم صفحه بالایی در نظر می‌گیریم. سپس دستورالعملی برای پاک کردن دوره‌های آن به ترتیب تقدّم زمانی در پیش می‌گیریم. همانند مرحله اول، یک قدم زن تصادفی در  $\mathbb{H} \cap \mathbb{Z}^2$  را با احتمال‌های گذر زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{ با احتمال} & (i, j) \rightarrow (i \pm 1, j) \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{j}\right) \text{ با احتمال} & (i, j) \rightarrow (i, j + 1) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{j}\right) \text{ با احتمال} & (i, j) \rightarrow (i, j - 1) \end{aligned}$$

می‌توان این قدم زن را از قدم زن تصادفی متقارن با شرط باقی ماندن در نیم صفحه بالایی به دست آورد. می‌توان نشان داد که قدم زن تصادفی  $X_n$  با احتمال‌های گذر بالا غیربازگشتی است. در واقع  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ ، از  $X_0 = 0$  شروع می‌کنیم و دوره‌ها را به ترتیب تقدّم زمانی پاک می‌کنیم تا یک قدم زن تصادفی خود گریز به دست آوریم. به طور دقیق‌تر، اگر  $\gamma(n)$  را بدانیم،  $\gamma(n+1) = X_m$  که  $m = \max\{j : X_n = X_j\} + 1$  اگر  $\mathbb{P}$  قانون  $\gamma$  باشد، در این صورت:

$$\mathbb{P}(\gamma(n+1) = a | \gamma(0), \dots, \gamma(n)) = \frac{1}{\sum_{b \in \mathbb{Z}} f(a; \gamma(0), \dots, \gamma(n)) P(\gamma(n), b)}$$

که در آن  $Z$  ثابت بهنجارسازی،  $P(a, b)$  احتمال گذر قدم زن تصادفی در نیم صفحه بالا و تابع

$f(a; A)$  بر حسب این قدم زن تصادفی در  $\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{H} \setminus A$  همساز گسسته با شرط مرزی زیر هستند:

$$f(a; A) = \begin{cases} 0 & a \in A \\ 1 & a \rightarrow \infty \end{cases}$$

به بیان دقیق‌تر

$$Z(\gamma(0), \dots, \gamma(n)) = \sum_{a \sim \gamma(n)} f(a; \gamma(0), \dots, \gamma(n)) P(\gamma(n), a).$$

در حقیقت،  $f(a; \gamma(0), \dots, \gamma(n))$  چیزی نیست جز احتمال این که یک قدم زن تصادفی در نیم صفحه بالا با شروع از  $a$  به گذشته  $\{\gamma(0), \dots, \gamma(n)\}$  برخورد نکند.

قانون  $\mathbb{P}$  روی مسیرهای قدم زن خود گریز در نیم صفحه بالا با شروع از مبدأ یک اندازه احتمال است. قرار می‌دهیم  $\gamma^\epsilon = \epsilon \gamma$  و قانون  $\gamma^\epsilon$  را با  $\mathcal{P}_\epsilon^\dagger$  نشان می‌دهیم. قضیه زیر از لولر، شرام و ورنر است.

قضیه ۳.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon^\dagger, SLE(2)$  است.

به عنوان مدل سوّم، مدل نشست روی شبکه مثلثی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $V$  مجموعه رؤس این شبکه باشد و رؤس را درون  $V \cap \mathbb{H}$  در نظر می‌گیریم. هر رأس  $V \cap \mathbb{H}$  با احتمال  $\frac{1}{3}$  سیاه یا سفید می‌شود. ما انتقالی از این شبکه را در نظر می‌گیریم که  $V \cap \mathbb{R}$  مجموعه  $\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$  باشد. بنابراین  $O$  در وسط یالی که  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  را وصل می‌کند قرار دارد.  $V \cap \mathbb{R}^+$  را سفید و  $V \cap \mathbb{R}^-$  را سیاه رنگ آمیزی می‌کنیم. به بیان دیگر، رؤس مرزی، تعیینی و رؤس  $V \cap \mathbb{H}$  تصادفی رنگ آمیزی شده‌اند.

از طرف دیگر، می‌توان شبکه دوگان را در نظر گرفت و وجوه این شبکه ۶ ضلعی را به طور مشابه رنگ آمیزی کرد. به بیان دقیق‌تر، شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که یال‌های آن بر یال‌های شبکه مثلثی عمودند و رؤس شبکه مثلثی وسط شش ضلعی‌ها قرار دارند که از یال‌های دوگان ساخته شده‌اند. به دلیل تناظر یک به یک بین رؤس شبکه مثلثی و وجوه شش ضلعی شبکه دوگان، وجوه مرزی در سمت چپ مبدأ سیاه و در سمت راست مبدأ سفید و سایر رؤس به طور مستقل و با احتمال  $\frac{1}{3}$  سیاه یا سفید رنگ آمیزی شده‌اند. خط فاصل یکتایی با شروع از  $O$  وجود دارد که وجوه سفید را از وجوه سیاه جدا می‌کند. این خط فاصل  $\gamma$  از مبدأ آغاز می‌شود و شامل یال‌های شبکه شش ضلعی است. اگر دوباره قانون این خط فاصل را پس از اعمال مقیاس  $\epsilon \gamma$  با  $\mathcal{P}^\epsilon$  نشان دهیم، به حد  $\mathcal{P}^\epsilon$  وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$  علاقه مندیم. قضیه زیر را اسمیرنوف ارائه داده است.

قضیه ۴.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon^\dagger, SLE(6)$  است.

نکته ۵. اگر هر خانه را با احتمال  $p$  سفید و با احتمال  $1-p$  سیاه کنیم که  $\frac{1}{3} \neq p$ ، آن گاه با نشتی

غیر بحرانی مواجه هستیم. به عنوان مثال اگر  $\frac{1}{p} > p$ ، خانه‌های سفید غالب هستند و مجاور مرز سیاه تنها برآمدگی‌های متناهی از تجمع سیاه‌ها مشاهده می‌شود. حاصل ضرب این برآمدگی‌ها در  $\epsilon$  وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$ ، به صفر همگرا می‌شود و خط فاصل  $\gamma^\epsilon$  در حد به قسمت منفی محور  $x$  میل می‌کند. به طور مشابه، اگر  $\frac{1}{p} < p$  آن گاه قانون  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}^\epsilon = \mathcal{P}$  تنها روی یک خم که همان قسمت مثبت محور  $x$  است متمرکز شده است.

تنها به این دلیل نشت روی شبکه مثلثی را ملاحظه کردیم که قضیه اسمیرنوف بر این حالت دلالت دارد. اما مسأله مشابه را می‌توان برای شبکه‌های دیگری هم چون شبکه مربعی صورت‌بندی کرد. برای مثال، برای شبکه مربعی مقدار بحرانی نشت رأسی عدد  $p_c$  است که به طور صریح به دست نیامده است. اما خط فاصل دو فاز مانند قبل تعریف می‌شود و حد در مقیاس آن  $SLE(6)$  حدس زده شده است.

توجه کنید که در شبکه مثلثی خط فاصل با دانستن رنگ خانه‌های مجاورش شناخته می‌شود. به بیان دقیق‌تر، اگر  $\gamma(t)$  خط فاصل در زمان  $t$  و  $A$  مجموعه‌ای از خانه‌ها باشند که از مبدأ فاصله دارند، رنگ خانه‌های  $A$  برای  $t < \tau$  بر  $\gamma(t)$  تأثیری ندارند که در آن  $\tau$  اولین زمان ورود به  $A$  است. این جنبه از خط فاصل خاصیت موضعی نامیده می‌شود و در جهت ارائه تعریف دیگری از  $\gamma$  به کار می‌رود. در ابتدا، تنها خانه‌هایی که در مرز  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$  قرار دارند، به ترتیب قبل رنگ آمیزی شده‌اند. از مبدأ شروع می‌کنیم و به صورت عمودی  $\frac{1}{2}$  واحد به بالا می‌رویم تا به مرکز مثلث برسیم. برای رأس مثلث هیچ رنگی در نظر گرفته نشده است. برای این رأس یک سکه سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر شیر آمد خانه نظیر را سفید و در غیر این صورت سیاه می‌کنیم. اگر این خانه سفید رنگ آمیزی شد در جهت یال دوگان یک واحد به چپ می‌پیچیم تا به مرکز جدیدی برسیم و در غیر این صورت به راست می‌پیچیم. این فرایند را تکرار می‌کنیم. اگر در هر مرحله به خانه‌ای رسیدیم که رنگ آمیزی نشده بود برای آن یک سکه پرتاب می‌کنیم و بر حسب برآمد سکه جهت حرکت بعدی را معین می‌کنیم. آن چه به دست می‌آید همان قانون خط فاصل در مدل نشت را دارد.

به عنوان آخرین مثال، نسخه غیر موضعی از خط فاصل نشت را که روح آن به LERW بسیار نزدیک است، در نظر می‌گیریم. این مدل کاوش گر همساز نام دارد و توسط شران و شفیلد معرفی شده است. ساخت کاوش گر همانند نشت است به جز این که قانون متفاوتی برای رنگ آمیزی به کار می‌بریم. اگر کاوش گر  $\gamma(n)$  در مرحله  $n$  ام خانه بدون رنگ  $a_n$  را پیش رو داشته باشد،  $a_n$  را با احتمال  $p_n$  سفید و با احتمال  $1 - p_n$  سیاه می‌کنیم که در آن  $p_n = f(a_n)$  تابع همساز گسسته با شرط مرزی به این صورت است که اگر  $a_n$  خانه‌ای باشد که در زمان  $n$  رنگ آمیزی شده است و اگر رنگ آن سفید است قرار می‌دهیم  $f(a) = 1$  و در غیر این صورت  $f(a) = 0$  به بیان دیگر، با شروع از  $a_n$  روی شبکه مثلثی یک قدم زن تصادفی متقارن را تا رسیدن به خانه‌های رنگ آمیزی شده، به راه می‌اندازیم. در این صورت رنگ خانه‌ای که قدم زن تصادفی به آن برخورد کرده را به  $a_n$  نسبت می‌دهیم. قضیه زیر توسط شران و شفیلد ثابت شده است.

قضیه ۶. قانون  $\mathcal{P}^\epsilon$  مربوط به کاوش گر با اعمال مقیاس  $\epsilon\gamma$  به قانون  $SLE(4)$  میل می کند.

نکته ۷. توجه کنید که در مدل های ارائه شده خم های  $\epsilon\gamma$  بدون پرمایش در نظر گرفته شده اند. اما برای همگرایی  $\mathcal{P}^\epsilon$  پرمایش  $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$  به طوری که فشردگی خانواده  $\mathcal{P}^\epsilon$  قابل بحث باشد، مورد نیاز است. همان طور که در تحوّل لُونر خواهیم دید، بهترین پرمایش برای  $\gamma^\epsilon$  انتخاب  $t$  به صورت  $2t = hcap\gamma^\epsilon[0, t]$  است که در آن  $hcap$  ظرفیت نیم صفحه بالایی است و در بخش آتی تعریف می شود (ضریب ۲ در  $2t$  برای حفظ یک سَمَت است و اهمیّت خاصی ندارد).

### ۳. تحوّل لُونر

در بخش قبلی، خم های تصادفی مختلف  $\gamma$  را در نیم صفحه بالایی با  $\gamma(0) = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$  تعریف کردیم. می توان این مدل ها را در دامنه های همبند ساده  $U$  مطالعه کرد. به این صورت که دو نقطه ثابت  $a$  و  $b$  روی  $\partial U$  در نظر گرفته شده است و خم تصادفی ما در  $a, U$  را به  $b$  وصل می کند. قانون این خم تصادفی را با  $\mathcal{P}_{a,b;U}$  نشان می دهیم. همان طور که قبلاً گفتیم انتظار داریم قانون  $\mathcal{P}_{a,b;U}$  ناوردای همدیس باشد. برای وضوح بیشتر اگر  $f: U \rightarrow V$  نگاشت همدیسی باشد که  $f(U) = V$ ، و اگر  $f$  توسعه پیوسته به  $a$  و  $b$  داشته باشد، چنین  $f$  یک نگاشت  $\Gamma(a, b, U) \rightarrow \Gamma(f(a), f(b), V)$  القا می کند که در آن  $\Gamma(a, b, U)$  مجموعه خم هایی در  $U$  است که  $a$  را به  $b$  وصل می کند و در حقیقت  $\tilde{f}(\gamma) = f \circ \gamma$  توسط  $\tilde{f}$  تعریف می شود. در این جا ناوردایی همدیس یعنی برای هر تابع همدیس  $f$  داریم:

$$(3.1) \quad \mathcal{P}_{f(a), f(b); f(U)} = \mathcal{P}_{a,b;U} \circ \tilde{f}^{-1}.$$

انتظار می رود که  $\mathcal{P}_{a,b;U}$  از نوعی خاصیت مارکفی بهره مند باشد. برای توضیح این مطلب، فرض می کنیم که  $\mathcal{P}_{a,b;U}$  روی خم های ساده متمرکز باشد و  $t \in (0, \infty)$ . فرض کنید  $\gamma$  طوری پرمایش شده باشد که  $\gamma(0) = a$  و  $\gamma(\infty) = b$ . خاصیت مارکف این است که:

$$(3.2) \quad \mathcal{P}_{a,b;U}(\cdot | \gamma[0, t]) = \mathcal{P}_{\gamma(t), b; U \setminus \gamma[0, t]}(\cdot)$$

توجه کنید که به دلیل سادگی خم  $\gamma$ ،  $V = U \setminus \gamma[0, t]$  همبند ساده است. به عنوان مثال، اگر  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1, \infty; \mathbb{H}}$ ، آن گاه (۳.۲) به صورت زیر در می آید:

$$(3.3) \quad \mathcal{P}(\cdot | \gamma[0, t]) = \mathcal{P}_{\infty, \infty; U \setminus \gamma[0, t]}(\cdot).$$

به منظور استفاده از (۳.۱)، می خواهیم صورتی از آن را به کار ببریم که در آن  $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$  با  $\mathbb{H}$  جایگزین شده باشد و خاصیت (۳.۲) تنها بر حسب  $\mathcal{P}$  بیان شود. به این منظور به مطالعه دقیق نگاشت های همدیس از  $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$  به روی  $\mathbb{H}$  نیاز داریم. اکنون به جایی رسیدیم که نظریه لولر

ایفای نقش می‌کند.

برای سادگی  $\gamma[0, t]$  را با  $K$  یا  $K_t$  نشان می‌دهیم و به مطالعهٔ نگاشت‌های همدیس  $g$  که  $\mathbb{H} \setminus K$  را به روی  $\mathbb{H}$  می‌نگارند، می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که طبق قضیهٔ نگاشت ریمان برای دو دامنهٔ همبند سادهٔ  $U, V \neq \mathbb{C}$  نگاشت همدیسی موجود است که  $U$  را به روی  $V$  می‌نگارد. در حقیقت اگر  $U = B(0, 1)$  و  $a \in V$  دلخواه باشد، نگاشت همدیسی که  $U$  را به روی  $V$  می‌برد و  $f(0) = a$  و  $f'(0) > 0$  یکتا است. این بدان معنی است که فضای نگاشت‌های همدیس از  $U$  به روی  $V$  سه بعدی است. دو درجهٔ آزادی برای انتخاب  $f(0) = a \in \mathbb{C}$  است و درجهٔ آزادی باقی‌مانده مربوط به انتخاب  $f, f'(0) \in \mathbb{R}$  را به طور یکتا معین می‌کند. به این نکته اشاره می‌کنیم که تابع  $f$  به نقطهٔ  $b \in \partial U$  توسعهٔ پیوسته دارد اگر این نقطه، نقطهٔ قابل دسترس مرز باشد. برای جزئیات بیشتر به کتاب‌های آنالیز مختلط استاندارد مراجعه کنید.

برای اهداف خود در نظر داریم که قضیهٔ نگاشت ریمان را برای  $U = \mathbb{H}$  و  $V = \mathbb{H}$  به کار ببریم. در این جا  $K$  یک  $\mathbb{H}$ -پوش است، یعنی  $K$  فشرده است و  $\mathbb{H} \setminus K$  همبند ساده است. نگاشت همدیس  $g$  را از  $\mathbb{H} \setminus K$  به  $\mathbb{H}$  طوری انتخاب می‌کنیم که  $g(\infty) = \infty$ . بنابراین تمام نقاط مرزی  $\mathbb{R} \cap \partial(\mathbb{H} \setminus K)$  قابل دسترس هستند. به بیان دیگر، اگر  $a \in \partial(\mathbb{H} \setminus K) \cap \mathbb{R}$  آن گاه  $g(a)$  را می‌توان با استفاده از توسعهٔ پیوسته تعریف کرد. به علاوه،  $g(a) \in \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ . با استفاده از اصل انعکاس شوارتز را به نیم‌صفحهٔ پایین گسترش می‌دهیم. دقیق‌تر این که اگر  $B(0, r_0)$  گویی باشد که  $K \subseteq B(0, r_0)$  آن گاه  $g$  توسعه‌ای تحلیلی به  $\mathbb{C} \setminus B(0, r_0)$  دارد. حال به بسط لوران حول  $\infty$  نگاه می‌کنیم. (توجه کنید که  $\infty$  نقطهٔ درونی  $\mathbb{C} \setminus B(0, r_0)$  است). چون  $g(\infty) = \infty$ ، بسط به شکل  $g(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + O(z^{-2})$  است. با قراردادن  $g_K(z) = \frac{g(z)-a}{a_1}$  نگاشت همدیس از  $\mathbb{H} \setminus K$  به روی  $\mathbb{H}$  است و بسط آن وقتی  $z \rightarrow \infty$  به صورت زیر است:

$$(۳.۴) \quad g_K(z) = z + \frac{b(K)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

می‌توان نشان داد که فقط یک نگاشت همدیس  $g_K : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$  وجود دارد که در  $\infty$   $g_K(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ ، یعنی  $b = b(K)$  در (۳.۴) به طور یکتا تعیین می‌شود. با استدلالی استاندارد نشان داده می‌شود که  $b(K) \geq 0$  و اگر  $K_1 \subseteq K_2$  آن گاه  $b(K_1) \leq b(K_2)$ . ثابت  $b(K)$   $\mathbb{H}$ -ظرفیت نامیده می‌شود و با  $hcap(K)$  نشان داده می‌شود. اکنون به مسألهٔ اصلی برمی‌گردیم و خم سادهٔ  $\overline{\mathbb{H}} \rightarrow [0, \infty)$  با  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$  و  $\gamma(0) = 0$  را در نظر می‌گیریم. از آن چه تاکنون بیان شد نتیجه می‌شود که  $g_{K_t} : \mathbb{H} \setminus K_t \rightarrow \mathbb{H}$  یکتایی وجود دارد که:

$$(۳.۵) \quad g_t(z) = z + \frac{hcap(K_t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), z \rightarrow \infty$$

که در آن  $K_t = \gamma[0, t]$ . به جای  $hcap(K_t)$ ، می‌نویسیم  $b(t)$ . لُورنر مشاهده کرد که صورت ساده‌ای برای تحویل  $g_t$  بر حسب  $t$  وجود دارد. قضیهٔ زیر از لُورنر است.

قضیه ۱. اگر  $b(t)$  به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، آن گاه

$$(۳.۶) \quad \frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - \xi(t)}$$

که در آن  $\xi(t) = g_t(\gamma(t))$ .

اکنون بیابید نسبت به (۳.۶) حسی پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که  $\gamma(t)$  نوک خم  $\gamma[0, t]$  است. همان طور که قبلاً گفته شد،  $\partial(\mathbb{H} \setminus K_t) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  از نقاط قابل دسترس تشکیل شده است. اما  $\gamma(s)$  برای  $s < t$  هرگز قابل دسترس نیست. وقتی از چپ یا راست به  $\gamma(s)$  نزدیک می شویم به دو حد مختلف می رسیم.  $\gamma(t)$  چنین وضعی ندارد و  $g_t$  را می توان به طور پیوسته به  $\gamma(t)$  توسعه داد. اکنون طرحی کلی از اثبات (۳.۶) را ارائه می دهیم. ابتدا مشاهده می کنیم  $g_{t+\epsilon} = g_{t,t+\epsilon} \circ g_t$  که در آن  $g_{t,t+\epsilon} = g_{g_t(\gamma[t,t+\epsilon])}$  داریم:

$$\frac{1}{\epsilon} [g_{t+\epsilon}(z) - g_t(z)] = \frac{1}{\epsilon} [g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z}]$$

که در آن  $\hat{z} = g_t(z)$  و  $K_\epsilon = g_t(\gamma[t, t+\epsilon])$ . حال باید نشان دهیم:

$$(۳.۷) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z}] = \frac{\dot{b}(t)}{\hat{z} - \xi(t)} .$$

توجه کنید که  $\gamma(0) = 0$ ، اما اکنون  $K_\epsilon$  خم کوتاهی است که از  $\xi(t) = g_t(\gamma(t))$  شروع می شود و مشاهده می کنیم که  $g_{A-a}(z) = g_A(z+a) - a$ ، بنابراین،

$$g_{K_\epsilon}(\hat{z}) = g_{\hat{K}_\epsilon}(\hat{z} - \xi(t)) + \xi(t) .$$

اکنون سمت راست را بسط می دهیم،

$$g_{K_\epsilon}(\hat{z}) = \hat{z} + \frac{hcap(K_\epsilon)}{\hat{z} - \xi(t)} + O\left(\frac{1}{(\hat{z} - \xi(t))^2}\right) .$$

می توان در مورد جمله آخر حرف بیشتری گفت:

$$(۳.۸) \quad \left| g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z} - \frac{hcap(K_\epsilon)}{\hat{z} - \xi(t)} \right| < C \frac{hcap(K_\epsilon) diam(K_\epsilon)}{(\hat{z} - \xi(t))^2} .$$

به علاوه، چون  $g_{t,t+\epsilon} = g_{g_t(\gamma[t,t+\epsilon])}$ ، می توان با استفاده از بسط،  $g_K$  را بر حسب  $hcap(K_\epsilon)$  نوشت و به دست آورد:

$$hcap(K_{t+\epsilon}) = hcap(K_t) + hcap(K_\epsilon) .$$

یعنی،  $hcap(K_\epsilon) = b(t+\epsilon) - b(t)$ ، از این و (۳.۷)، (۳.۸) حاصل می شود. در حالت کلی انتظار نمی رود که  $b(t) = hcap(\gamma[0, t])$  مشتق پذیر باشد. اما می توان نشان داد که  $b$  اکیداً صعودی و پیوسته است. با پذیرفتن این مطلب  $\gamma$  را به  $\bar{\gamma} = \gamma \circ b^{-1}$  تبدیل می کنیم. به این منظور که:





$\gamma^2$  دو خم مستقل با توزیع  $\mathcal{P}$  باشند. فرض کنید که  $g^1, g^2$  نگاشت‌های همدیس و  $\xi^1$  و  $\xi^2$  به ترتیب پارامتر  $\xi$  آن‌ها باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma^1(t) & t \leq T \\ (g_T^2)^{-1}(\gamma^2(t-T) + \xi^1(T)) & t > T \end{cases}$$

$$g_t(z) = \begin{cases} g_t^1(z) & t \leq T \\ g_{t-T}^2(g_T^1 - \xi^1(T)) + \xi^1(T) & t > T \end{cases} .$$

در این صورت قانون  $\gamma$  همان  $\mathcal{P}$  است و نگاشت همدیس نظیر آن  $g_t$  است. از  $\frac{d}{dt}g_t^i(z) = \frac{2}{g_t^i - \xi^i(t)}$  برای  $i = 1, 2$  نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)} .$$

که در آن:

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi^1(t) & t \leq T \\ \xi^1(T) + \xi^2(t-T) & t > T \end{cases} .$$

از این مطلب برمی‌آید که قانون  $\xi$  همان قانون  $\xi^1$  و  $\xi^2$  است. بنابه قضیه مشهوری از ایتو، فرآیند پیوسته با خاصیت فوق‌الذکر یک حرکت براونی با روند ثابت است. همان‌طور که دیده می‌شود، تمام مدل‌های میکروسکوپی که شرح دادیم دارای این خاصیت اضافی هستند که می‌گویند  $\mathcal{P}$  تحت انعکاس ناوردا است یعنی قانون آن با  $-\bar{\gamma}$  یکسان است. در این جا،  $\bar{z}$  مزدوج  $z$  است. نتیجه می‌گیریم که  $\xi$  همان قانون  $\xi$  را دارد. بر این اساس و آن چه گفته شد  $\xi$  تنها یک حرکت براونی است. اگر  $\beta$  حرکت براونی استاندارد باشد، برای  $\kappa \geq 0$  داریم:

$$\xi(t) = \sqrt{\kappa}\beta(t) .$$

قانون متناظر  $\mathcal{P}$  را با  $SLE(\kappa)$  نشان می‌دهیم.

اگر  $\kappa > 0$  داده شود، (۳.۹) را برای  $\xi = \sqrt{\kappa}\beta$  حل می‌کنیم.  $g_t : \mathbb{H}_t \rightarrow \mathbb{H}$  با  $g_t : \mathbb{H}_t \rightarrow \mathbb{H}$  به دست می‌آید. اما، شرط (۳.۱۰) برای چنین  $\xi$  برقرار نیست و واضح نیست که  $K_t$  از یک خم  $\gamma$  آمده باشد، چه برسد به یک خم ساده! قضیه زیر بیان می‌کند که چنین  $\gamma$ ی وجود دارد و برای  $\kappa$ های کوچک، ساده است. برای اثبات به لُونر [L] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱. برای هر  $\kappa > 0$ ، حد زیر تقریباً همیشه وجود دارد:

$$\gamma(t) := \lim_{\substack{z \rightarrow \xi(t) \\ z \in \mathbb{H}}} g_t^{-1}(z)$$

به علاوه،  $\mathbb{H}_t = \mathbb{H} \setminus K_t$  که در آن  $K_t$  مؤلفه همبندی بی کران  $[\circ, t]$  است. قضیه ۲. اگر  $\kappa \leq 4$ ، آن گاه  $\gamma$  تقریباً همیشه ساده است. اگر  $4 < \kappa < 8$ ، آن گاه  $\gamma$  خود و  $\mathbb{R}$  را قطع می کند و  $\bigcup_{t>\circ} K_t = \mathbb{H}$ ، و اگر  $\kappa \geq 8$  آن گاه  $\gamma$  فضا پرکن است. برای درک اهمیت مقادیر  $8, \kappa = 4$ ، فرض می کنیم  $Z_t = Z_t(z) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}g_t(z) - \beta(t)$ . آن گاه  $Z_t$  یک فرایند شبه بسل با پارامتر  $\hat{\kappa} = \frac{2}{\kappa}$  است. به بیان دقیق تر داریم:

$$dZ = \frac{\hat{\kappa}}{Z} dZ - d\beta .$$

برای  $Z$  داده شده، معادله زیر:

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\beta(t)}$$

به محض این که  $g_t(z) - \sqrt{\kappa}\beta(t)$  صفر شود، دیگر جواب ندارد؛ یعنی  $Z_t(z)$  صفر می شود. تعریف می کنیم:

$$T(z) = \inf \{t : Z_t(z) = \circ\},$$

در این صورت

$$K_t = \{z : T(z) \leq t\}.$$

اگر نقطه آغازین  $z \in \mathbb{R}$  باشد، آن گاه  $g_t(z)$  تا زمانی که  $t < T(z)$  در  $\mathbb{R}$  می ماند. در این حالت  $Z_t(z) \in \mathbb{R}$  برای  $t < T(z)$  و  $Z_t(z)$  یک فرایند بسل استاندارد با پارامتر  $\hat{\kappa}$  است. در این ارتباط لم زیر را داریم.

لم ۳. فرض کنید  $Z$  یک فرایند بسل در  $\mathbb{R}$  با پارامتر  $\hat{\kappa}$  باشد و  $T(x) = \inf \{t : Z_t(x) = \circ\}$ ، که در آن  $x$  نقطه آغازین است و  $x > \circ$ .

$$1- \text{ اگر } \hat{\kappa} \geq \frac{1}{4}, \text{ آن گاه تقریباً همیشه و برای هر } x > \circ, T(x) = \infty.$$

$$2- \text{ اگر } \hat{\kappa} < \frac{1}{4}, \text{ آن گاه تقریباً همیشه و برای هر } x > \circ, T(x) < \infty.$$

$$3- \text{ اگر } \hat{\kappa} \leq \frac{1}{4}, \text{ آن گاه تقریباً همیشه } \circ < x < y \text{ نتیجه می دهد } T(x) < T(y).$$

$$4- \text{ اگر } \frac{1}{4} < \hat{\kappa} < \frac{1}{2}, \text{ و } \circ < x < y \text{ آن گاه } \circ < T(x) < T(y) < \infty.$$

برای چشیدن طعم اثبات قضیه ۲، فرض کنید  $\kappa \leq 4$ ، یعنی  $\hat{\kappa} \geq \frac{1}{4}$  و با استفاده از لم فوق برای هر  $x \neq \circ$ ،  $T(x) = \infty$ ، این یعنی  $K_t \cap \mathbb{R} \setminus \{\circ\} = \emptyset$  و بنابراین  $\gamma$  نمی تواند با  $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$

اشتراک داشته باشد. (به یاد آورید که  $\gamma(0) = 0$ ). به علاوه، اگر خم خودش را قطع کند مثلاً برای  $t_1 < t_2$ ،  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ، آن گاه پس از اعمال  $g_{t_1}$ ، خم  $\tilde{\gamma}(s) := g_{t_1}(\gamma(s+t)) - g_{t_1}(\gamma(t))$  اکنون  $\mathbb{R}$  را قطع می‌کند. چون  $\tilde{\gamma}$  نیز  $SLE(\kappa)$  است، کار تمام است.

## ۵. نگاهی دیگر بر مدل‌های میکروسکوپی

اکنون تجاربی دربارهٔ SLE کسب کرده‌ایم. بیایید به مدل‌های میکروسکوپی نگاه دیگری بیندازیم و دلایل مؤید حدس‌ها و نتایج بخش ۲ را بیابیم. از کاوش گر همساز آغاز می‌کنیم. می‌خواهیم در مورد برخی دلایل در تأیید قضیهٔ ۶ بخش ۱ بحث کنیم. همگرایی کاوش گر همساز را به  $SLE(4)$  توجیه می‌کند. به عنوان مثال اگر در مرحلهٔ  $V_n, n$  مجموعهٔ خانه‌های رنگ آمیزی شده و  $h_n$  تابع همساز گسسته با شرط مرزی زیر باشد:

$$h_n(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \text{ سفید باشد} \\ 0 & \text{اگر } a \text{ سیاه باشد} \end{cases}$$

آن گاه برای هر رأس  $v$  فرایند  $\{h_n(v) : n = 0, 1, \dots\}$  یک مارتینگل است. فرض کنید  $u_t(z)$  متناظر ماکروسکوپی  $h_n(v)$  باشد. انتظار می‌رود  $u$  خواص زیر را داشته باشد:

۱- برای هر  $z, t \geq 0$ ،  $\{u_t(z)\}_{t \geq 0}$  یک مارتینگل است.

۲- برای هر  $u_t, t$  روی  $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$  همساز با شرط مرزی زیر است:

$$u_t(z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } z \in \mathbb{R}^- \text{ یا } z = \gamma_l(\theta) \text{ برای } \theta < t \\ 1 & \text{اگر } z \in \mathbb{R}^+ \text{ یا } z = \gamma_r(\theta) \text{ برای } \theta < t \end{cases}$$

در این جا منظور از  $z = \gamma_l(\theta)$  این است که  $z$  از چپ (راست) به  $\gamma(\theta)$  نزدیک می‌شود. سپس، با استفاده از  $g_t$  تعریف می‌کنیم  $\tilde{u} = u \circ g_t^{-1}$ . اکنون تابعی همساز روی  $\mathbb{H}$  با شرط مرزی زیر داریم:

$$\tilde{u}_t(z) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } z \in \mathbb{R} \text{ و } z < \xi(t) \\ 1 & \text{اگر } z \in \mathbb{R} \text{ و } z > \xi(t) \end{cases}$$

تنها یک تابع همساز با این شرط مرزی وجود دارد که در شرط زیر صدق کند:

$$\tilde{u}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \arg(z - \xi(t))$$

از این بحث می‌فهمیم که تابع زیر یک مارتینگل است:

$$u_t(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \arg(g_t(z) - \xi(t))$$

بنابراین تابع زیر یک مارتینگل است:

$$\arg(g_t(z) - \xi(t)) = \arg(\sqrt{\kappa}Z_t(z))$$

چون  $\arg Z = \text{Im}(\log Z)$ ، فرایند زیر را در نظر می‌گیریم:

$$M_t = \log Z_t(z)$$

و می‌پرسیم: برای چه مقداری از  $\kappa$  فرایند  $\log Z_t(z)$  یک مارتینگل است؟ بنا به حسابان ایتو داریم:

$$d(\log Z) = (\hat{\kappa} - \frac{1}{\kappa}) \frac{1}{Z} dt - \frac{1}{Z} d\beta.$$

$M_t$  یک مارتینگل است اگر و تنها اگر  $\hat{\kappa} = \frac{1}{\kappa}$ ، یعنی  $\kappa = 4$ . این بحث توضیح این مطلب است که چرا  $SLE(4)$  حد در مقیاس کاوش‌گر همساز است.

اکنون به مدل نشیت برمی‌گردیم. به یاد آورید که از دیدگاه میکروسکوپی خط فاصل نشیت دارای خاصیت موضعی است. اکنون این خاصیت را برای SLE ها صورت‌بندی می‌کنیم.

تعریف ۱. می‌گوییم  $SLE(\kappa)$  دارای خاصیت موضعی است اگر  $K_t$  نظیر آن خاصیت زیر را داشته باشد:

برای هر  $\mathbb{H}$ -پوش  $A$  با فاصله مثبت از مبدأ، اگر  $\tau_A = \inf \{t : K_t \cap A \neq \emptyset\}$ . آنگاه فرایند  $\{g_A(K_t) : t < \tau_A\}$  یک تغییر زمان  $SLE(\kappa)$  است.

به بیانی هدف ما این است که فرایند  $\{K_t : t < \tau_A\}$ ،  $SLE(\kappa)$  باشد اما برای مجموعه  $\mathbb{H} \setminus A$  به جای  $\mathbb{H}$ . اما می‌توانیم با به کار بردن  $g_A$  به  $\mathbb{H}$  برگردیم و  $SLE(\kappa)$  را با همان  $\kappa$  به دست بیاوریم. در این ارتباط، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.  $SLE(\kappa)$  دارای خاصیت موضعی است اگر و تنها اگر  $\kappa = 6$ .

اکنون خاصیت مهمی از SARW را که به خاصیت تحدید معروف است بیان می‌کنیم. می‌توان به راحتی نشان داد که اگر  $\mathcal{P}^\delta$  قانون SARW روی  $\mathbb{H} \cap \mathbb{Z}^2$  باشد و اگر  $A^\delta$  یک  $\mathbb{H}$ -پوش با  $\text{dist}(\circ, A^\delta) > 0$  باشد که در آن اجتماعی مناسب از بال‌های  $\mathbb{Z}^2$  است، آن گاه قانون زیر:

$$\mathbb{P}^{\delta, A} = \mathbb{P}^\delta(\cdot | \text{برخورد نکند} \cdot | A^\delta)$$

همان قانون SARW است. خاصیت تحدید را برای  $SLE(\kappa)$  تحلیل می‌کنیم.

تعریف ۳. می‌گوییم  $SLE(\kappa)$  خاصیت تحدید را دارد اگر قانون آن برای هر  $\mathbb{H}$ -پوش  $K$  و  $A$  که  $\text{dist}(A, \circ) > 0$  در شرط زیر صدق کند:

$$(5.1) \quad \mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset | \gamma \cap A = \emptyset) = \mathbb{P}(g_A^{-1}(\gamma) \cap K = \emptyset).$$

قضیه ۴. (لُولر - شرام - ورنر)  $SLE(\kappa)$  خاصیت موضعی دارد اگر و تنها اگر  $\kappa = \frac{4}{\lambda}$ .  
اثبات قضیه فوق براساس برابری زیر است:

$$\mathbb{P}(\gamma \cap A = \emptyset) = (g'_A(\circ))^{\frac{4}{\lambda}}$$

با قبول این برابری، داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset | \gamma \cap A = \emptyset) &= \mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset, \gamma \cap A = \emptyset) / \mathbb{P}(\gamma \cap A = \emptyset) \\ &= (g'_{A \cap K}(\circ) / g'_A(\circ))^{\frac{4}{\lambda}} \\ &= (g'_A(\circ) g'_{g_A(K)}(g_A(\circ)) / g'_A(\circ))^{\frac{4}{\lambda}} \\ &= (g'_{g_A(K)}(g_A(\circ)))^{\frac{4}{\lambda}} \\ &= \mathbb{P}(g_A(K) \cap \gamma = \emptyset) \end{aligned}$$

## مراجع

- [1] G. Lawler, Conformally Invariant Processes in The Plane, *AMS*(2005).
- [2] G. Lawler, O. Schramm and W. Werner, Conformal Invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Annals of Probability*, Vol.32, 939-995(2005).
- [3] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math*, 118, 221-288(2000).
- [4] O. Schramm, . Sheffield, The harmonic explorer and its convergence to SLE(4), *arXiv: math.PR/0310210*(2003).
- [5] S. Smirnov, Critical percolation in the plane I. Conformal invariance and Cardy's formula II. Continuum scaling limit. Preprint

تألیف: فریدون رضاخانلو

Fraydoun Rezakhanlou  
University of California,  
970 Evans Hall# 3840.  
Berkeley, CA 94720-3840 USA  
rezakhan@math.berkeley.edu

ترجمه: آرش فهیم

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی  
پست الکترونیک: arashfahim@yahoo.com