فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۴۹ تا ۶۹

ریاضیات قرن بیستم[۱]

مایکل اتیا

چکیده

این مقاله مبتنی بر سخنرانی مایکل اتیا[۲]، ریاضیدان بزرگ قرن گذشته و حال حاضر دنیا است که در انستیتو فیلدز تورنتو در ژوئن ۲۰۰۰ میلادی در گردهمایی جهانی ریاضیات ایراد گردید[۳]. در این مقاله به موضوعات کلیدی و مهمی اشاره شده است که شاخص‌های ریاضیات قرن بیستم می‌باشند. به علاوه چگونگی تأثیر فیزیک بر ریاضیات در قرن بیست و یکم مورد بحث قرار گرفته و همچنین پیش‌بینی‌هایی در مورد امکان توسعهٔ ریاضیات در قرن حاضر مطرح شده است.

وقتی صحبت از اتمام یک قرن و آغاز قرنی دیگر می‌شود، پیش روی آدمی دو انتخاب سخت قرار می‌گیرد، اول ارائهٔ تصویری از توسعهٔ ریاضیات در صد سال گذشته و دوم پیش بینی وضعیت

---

۱) این مقاله برگردانی است از متن روسی که در مجلهٔ سالانه متمتیچسکایا پراسوشینیا، شماره ۷، صفحات ۲۴—۵ سال ۲۰۰۳ چاپ شده توسط ب.ر.فرانکینا از متن انگلیسی به روسی برگردانده شده است. البته در ترجمهٔ حاضر از اصل مقاله که در بولتن انجمن ریاضی لندن جلد ۳۴ ، شماره ۱، صفحات ۱۵—۱ سال ۲۰۰۲ به چاپ رسیده نیز استفاده شده است.

۲) مایکل اتیا از تأثیر گذارترین ریاضیدانان معاصر است. پدرش لبنانی و مادرش اسکاتلندی تبار بود. او در سال ۱۹۲۹ به دنیا آمد، تحصیلات دانشگاهی خود را در دانشگاه کمبریج گذراند و سپس در دانشگاه آکسفورد به تدریس پرداخت. پس از یک دورهٔ سه ساله (۱۹۷۲—۱۹۶۹) عضویت رسمی در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستون، مجدداً به آکسفورد بازگشت و تا سال ۱۹۹۰ استادی آن دانشگاه و ریاست مؤسسهٔ نیوتن در کمبریج را به عهده داشت. اتیا با همکاری ریاضیدانانی چون هیرتسبروخ، بات و سینگر در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ در پدیدآوردن یک سلسله آثار مهم ریاضی در زمینه‌هایی مشترک بین رشته‌های هندسهٔ جبری ، توپولوژی و آنالیز نقش مهمی داشت. از جمله این آثار، نظریهٔ کی و قضیهٔ معروف اتیا ــ سینگر می‌باشد. اتیا نقش مهمی در پیوند دادن ریاضیات و فیزیک در نظریهٔ پیمانه‌ای و نظریهٔ میدان کوانتومی ایفا کرده است.

۳) گردهمایی جهانی ریاضیات سال ۲۰۰۰ ، تورنتو، ۹—۷ ژوئن ۲۰۰۰

ریاضیات در صد سال آینده. من سخت‌ترین این دو را انتخاب نموده‌ام. هر یک از ما می‌تواند پیش‌بینی‌هایی داشته باشد و تا وقتی که برایمان روشن نشوند و ندانیم کدام آنها اشتباه است، پیش‌بینی‌ها قابل لمس نخواهند بود؛ اما با دادن تصویری از گذشته هر کسی می‌تواند در مورد آن اظهار نظر و یا مخالفت کند. چیزی که من می‌توانم انجام دهم، این است که نظر شخصی خود را بیان کنم. البته اظهار نظر در مورد همهٔ موضوعات عملاً غیرممکن است، به همین دلیل از بعضی از قسمت‌های مهم سخنی به میان نمی‌آورم چون اولاً در این حوزه‌ها تخصص کافی ندارم ثانیاً در منابع دیگری به طور مفصل مطرح شده‌اند. به عنوان مثال در مورد وقایع مهمی در حوزهٔ واقع بین منطق و ریاضیات محاسباتی که با اسامی افرادی چون هیلبرت[1]، گودل[2] و تورینگ[3] عجین شده‌اند، چیزی نخواهم گفت. همچنین از خیلی از موضوعات سخن به میان نمی‌آورم از جمله کاربردهای ریاضیات، به استثنای فیزیک نظری، چرا که تعداد آنها زیاد است و بررسی‌های خاصی را می‌طلبد. هر کدام از آنها نیاز به یک سخنرانی جداگانه دارند و احتمالاً دربارهٔ آنها سخنرانان دیگری در این گردهمایی مطالبی را مطرح می‌کنند. به علاوه عقلانی نیست که سعی کنیم شماری از قضایا و حتی شماری از ریاضیدانان نامی صد سال گذشته را نام ببریم، که این کاملاً کار بی فایده‌ای خواهد بود. به همین دلیل سعی می‌کنم یک سری از موضوعات را انتخاب کنم. البته از نظر من، این موضوعات مانند نخ قرمزی از میان اکثر حوزه‌های ریاضیات گذشته و وقایع اصلی را مجزا و مشخص می‌کنند.

ابتدا اجازه می‌خواهم که تذکری کلی بدهم. سده یک مفهوم قراردادی است، در واقع پس از گذشت صد سال باورکردنی نیست که چیزی ناگهان متوقف شود و دوباره شروع به حرکت نماید. بنابراین در توصیف ریاضیات قرن بیستم، به‌خصوص به تاریخ وقایع زیاد دقیق نخواهم شد. اگر چیزی در ۱۸۹۰ شروع و تا ۱۹۰۰ ادامه یافته است، از این جزئیات چشم‌پوشی خواهم کرد. قصد دارم مانند یک اخترشناس فقط به رقم‌های تقریبی بسنده کنم. در واقع بسیاری از موضوعات در قرن نوزدهم شروع شدند و تنها در قرن بیستم جامهٔ عمل پوشیدند.

یکی از دلایل سختی موضوع بحث این است که امروزه نگاه کردن به موضوعات از دید یک ریاضیدان قرن نوزدهم خیلی آسان نیست، چون که دستاوردهای ریاضیات قرن نوزدهم ما و فرهنگمان را تغذیه کرده است. مشکل بتوان زمانی را تصور کرد که مردمانش خارج از واژگان ما فکر می‌کردند. در واقع، اگر شما یک کشف مهم و واقعی در ریاضیات انجام دهید، بعد از آن کشف، محکوم به حذف هستید! شما کاملاً در فرهنگ عمومی حل می‌شوید. بنابراین با توجه به گذشته باید تلاش کنیم بفهمیم که ریاضیات در عصر قدیم، یعنی زمانی که مردم مانند ما فکر نمی‌کردند، به چه چیزی شبیه بود.

از موضعی به سرتاسری[4]

اکنون قصد دارم از بعضی موضوعات اسم ببرم و در مورد آنها بحث کنم. نخستین موضوعی که

1) Hilbert 2) Godel 3) Turing 4) Local to global

به طور جامع می‌توان تعریف کرد، موضوع گذر از مفهوم موضعی به مفهوم سرتاسری است. در عصرهای کلاسیک مردم در کل دوست داشتند اشیاء را در مقیاس‌های کوچک مورد مطالعه قرار دهند، یعنی در مختصات موضعی و چیزی از این قبیل. تأکید و تکیه در قرن بیستم به تحقیق و درک رفتارهای سرتاسری در مقیاس‌های بزرگ بود. اما از آن جهت که فهم رفتارهای کلی بسیار سخت است و اکثراً در سطح کیفی انجام می‌شوند، ایده‌های توپولوژیکی بسیار اهمیت پیدا کردند. هنری پوانکاره[1] کسی بود که به طور جدی قدم‌های اولیه را در توپولوژی برداشت و پیش‌بینی کرد که توپولوژی یکی از مهم‌ترین مؤلفه‌های ریاضیات قرن بیستم خواهد شد. در عین حال هیلبرت، که مسائل معروف خود را در ریاضیات مطرح کرد، چنین نظری نداشت. در فهرست مسائل هیلبرت به سختی به توپولوژی برخورد می‌کنیم ولی برای پوانکاره کاملاً مشهود بود که توپولوژی عاملی مهم در ریاضیات قرن بیستم خواهد بود.

اجازه دهید برخی از حوزه‌های ریاضیات را نام ببرم، تا منظورم را بیشتر روشن کنم. به عنوان مثال آنالیز مختلط را در نظر بگیرید (منظور نظریهٔ توابع است) که در نقطهٔ مرکزی ریاضیات قرن نوزدهم قرار داشت و موضوع تحقیقات ریاضیدانان بزرگی مانند وایراشتراوس[2] بود. برای اکثر ریاضی‌دانان تابع، به عنوان تابع یک متغیره مطرح بود و برای وایراشتراوس تنها یک سری توانی بود که بتوان آن را به طور صریح نوشت و توصیف کرد و یا این که آن را به صورت فرمول ارائه داد. توابع در آن زمان فرمول‌هایی بیش نبودند که به طور صریح بیان می‌شدند. اما بعدها کارهای ریاضی‌دانانی همچون آبل[3]، ریمان[4] و پیروان آنها ما را به سمت نگرش کنونی سوق دادند و امروزه توابع بیشتر با خواص سرتاسریشان تعریف می‌شوند تا به صورت فرمول: به عبارتی، مهم است بدانیم که نقاط تکین توابع کدام‌اند، دامنهٔ تعریفشان چیست و کجا مقادیر خود را می‌گیرند. بدین ترتیب این خواص سرتاسری مشخصه‌هایی شدند که توابع را از یکدیگر متمایز می‌کردند و در این میان بسط موضعی تنها به عنوان یکی از این روش‌های بررسی توابع مطرح است.

جریانی مشابه برای معادلات دیفرانسیل نیز پیش آمد. در اصل حل یک معادلهٔ دیفرانسیل چیزی به غیر از یافتن جواب موضعی صریح نبود: چیزی که بتوانید بنویسید و زیردست خود پنهان کنید. در نتیجهٔ پیشرفت‌های بعدی، جواب‌های غیرصریح هم ظاهر شدند ولی همواره امکان بیان آنها به صورت فرمول‌های زیبا وجود نداشت. خواص سرتاسری یک جواب را در واقع، نقاط تکین آن معین می‌کردند و این جریان هم در کل مشابه چیزی بود که برای آنالیز مختلط اتفاق افتاد، هر چند در جزئیات کمی متفاوت بود.

در هندسهٔ دیفرانسیل، کارهای کلاسیک گاوس و دیگران صرف مطالعهٔ اجزاء کوچک فضا، بخش‌های جزئی انحنا و معادلات موضعی شدند که هندسهٔ موضعی را توصیف می‌کردند. در نتیجه، طبیعی است که وقتی از این مقیاس‌های کوچک وارد مقیاس‌های بزرگ می‌شویم بخواهیم طرح سرتاسری رویه‌ها و همچنین توپولوژی آنها را درک کنیم. وقتی از مقیاس کوچک‌تر و جزئی وارد

1) Poincare   2) Weierstrass   3) Abel   4) Riemann

مقیاس بزرگ‌تر و کلی می‌شویم، خواص توپولوژیکی مهم‌ترین مفاهیم خواهند بود.
نظریهٔ اعداد نیز دچار تحول مشابهی شد، هرچند در نگاه نخست به نظر نمی‌رسد که این بخش از ریاضیات در این مقوله بگنجد. متخصصان نظریهٔ اعداد آن را به دو صورت جداگانه مورد مطالعه قرار می‌دهند، نظریهٔ «موضعی اعداد»، جایی که فقط از یک عدد اول در زمان خاص یا از یک مجموعهٔ متناهی از اعداد اول بحث می‌شود، و نظریهٔ سرتاسری اعداد که تمام اعداد اول به طور همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرند. این تشابه بین اعداد اول و نقاط، بین مفاهیم موضعی و سرتاسری، تأثیر به‌سزایی در توسعهٔ نظریهٔ اعداد به جای گذاشت و باعث بروز ایده‌هایی در این نظریه شد که ریشه در توپولوژی داشتند.

اما در فیزیک، از آنجا که فیزیک کلاسیک کاملاً با بحث موضعی عجین شده است، معادله دیفرانسیلی که رفتار سیستم را کنترل می‌کند، در مقیاس کوچک توصیف می‌شود و بعد از آن باید رفتارهای سیستم فیزیکی در مقیاس‌های بزرگ را مطالعه کرد. در واقع کار فیزیک این است که سعی می‌کند با توجه به همهٔ نتایج، پیش بینی کند وقتی از یک مقیاس کوچک، جایی که رفتارها قابل فهم‌اند، وارد یک مقیاس بزرگ‌تر می‌شویم چه اتفاقی می‌افتد.

افزایش ابعاد [1]

موضوع دوم بحث متفاوتی است که آن را افزایش ابعاد می‌نامم. بار دیگر از نظریهٔ کلاسیک توابع مختلط شروع می‌کنم. این نظریه ابتدا عبارت بود از بررسی‌های جزئی و خسته‌کنندهٔ توابع مختلط یک متغیره. ورود به حالت‌های دو یا چندمتغیره تقریباً در قرن بیستم اتفاق افتاد و در این حوزه از ریاضیات پدیده‌های جدیدی کشف شد که غالباً با حالت یک متغیره تفاوت داشتند، درنتیجه مشخصه‌های کاملاً جدیدی پدید آمدند و نظریهٔ توابع چند متغیره توانست موقعیت توانمندی را در ریاضیات به دست آورد. این نیز یکی از دستاوردهای مهم قرن بیستم است.

به طور مشابه در شاخهٔ هندسه دیفرانسیل اکثر ریاضی‌دانان در گذشته بیشتر علاقمند به مطالعهٔ خم‌ها و رویه‌ها بودند ولی امروزه ما هندسهٔ چند بعدی چندگونه‌ها را مطالعه می‌کنیم و لازم است آن را به عنوان یک تحول مهم و واقعی قرن‌مان تلقی کنیم. در گذشته خم‌هاو رویه‌ها اشیائی بودند که ما به واقع می‌توانستیم در فضا ببینیم. اشیاء در ابعاد بالاتر بیشتر اشیاء شرطی بودند که ما آنها را به عنوان اشیاء ریاضی فرض می‌کردیم ولی شاید به جد نمی‌پذیرفتیم. ایدهٔ پذیرش و مطالعهٔ آنها به عنوان اشیاء جدی مانند ابعاد پایین‌تر در واقع متعلق به قرن بیستم است. همچنین برای ریاضی‌دانان قرن نوزدهم افزایش تعداد توابع و مطالعهٔ چند تابع همزمان به عبارتی مطالعهٔ توابع برداری، ایدهٔ زیاد روشنی نبود. در حالی که امروزه افزایش تعداد متغیرهای مستقل و همچنین وابسته را شاهد هستیم.

جبر خطی همواره با متغیرهای زیادی سر و کار داشت ولی افزایش در ابعاد غیرمنتظره بود و

---
1) Increase in dimensions

بدین ترتیب جبر خطی از ابعاد متناهی به ابعاد نامتناهی و از فضاهای خطی به فضاهای هیلبرت با تعداد متغیرهای نامتناهی طی مسیر کرد. البته در این جریان آنالیز هم نقش عمده‌ای داشت. به غیر از توابع چند متغیره، می‌توانیم به توابعی از توابع یعنی تابعک‌ها اشاره داشته باشیم. تابعک‌ها توابعی روی فضای توابع می‌باشند که اصولاً شامل تعداد نامتناهی متغیر هستند و تئوری آنها را حساب تغییرات[۱] می‌نامیم. جریان مشابهی در حوزهٔ توابع عمومی (توابع غیرخطی) اتفاق افتاد که البته موضوع جدیدی نبود، ولی در قرن بیستم اولویت پیدا کرد و این موضوع دوم سخنرانی من است.

از جابجایی به ناجابجایی[۲]

ورود از مفهوم جابجایی به مفهوم ناجابجایی موضوع سوم این سخنرانی است. شاید بتوان گفت این موضوع یکی از مشخص‌ترین ویژگی‌های ریاضیات و مخصوصاً جبر قرن بیستم است. در این میان جنبهٔ ناجابجایی بسیار مهم جلوه می‌کند. البته جبر ناجابجایی ریشه در قرن نوزدهم دارد و این ریشه‌ها چندجانبه می‌باشند و تحقیقاً غیرمنتظره‌ترین آنها کار هامیلتون روی کواترنیون‌ها است. کارهای وی تأثیرات وسیعی در جهت‌گیری ایده‌های فیزیکی گذاشت. همچنین به کارهای گراسمان روی جبرهای خارجی[۳] (یکی دیگر از سیستم‌های جبری که در دل نظریهٔ صورت‌های دیفرانسیلی جای دارد) نیز می‌توان اشاره کرد. البته کار کیلی[۴] روی ماتریس‌ها که پایه در جبر خطی دارد و کار گالوا[۵] روی نظریهٔ گروه‌ها دستاوردهای دیگری می‌باشند که می‌توان از آنها نام برد.

چنانچه گفته شد تمام این روش‌های متفاوت که پایه‌های ورود ضرب ناجابجایی به جبر را شکل می‌دهند روغن موتور ماشین جبری قرن بیستم بودند. هرچند برای ما زیاد محسوس نیست ولی تمام مثال‌های ذکر شده در قرن نوزدهم هر کدام به نوبهٔ خود مثال‌های کلانی بودند. البته کاربردهای این ایده‌ها از جوانب کاملاً غیرمنتظره‌ای پیدا شدند. کاربردهای ماتریس‌ها و ضرب ناجابجایی در فیزیک با پیدایش مکانیک کوانتمی آغاز شد. مهمترین مثال از کاربرد اساسی جبر ناجابجایی در فیزیک عبارت است از روابط تعویضی هایزنبرگ[۶] که بعدها توسط فون نویمان[۷] در نظریهٔ جبر عملگرها توسعه یافت.

نظریهٔ گروه‌ها نیز یکی از مهم‌ترین عناصر ریاضیات قرن بیستم به شمار می‌رود که کمی بعد به آن نیز می‌پردازم.

از خطی به غیر خطی[۸]

بحث بعدی عبور از مفهوم خطی به مفهوم غیرخطی است. اکثر بخش‌های ریاضیات کلاسیک یا اساساً خطی‌اند یا اگر هم کاملاً خطی نیستند، تقریباً خطی هستند و به کمک اختلالات

---

1) calculus of variation 2) commutative to non-commutative 3) exterior algebras
4) Cayley 5) Galois 6) Heisenberg 7) Von Neumann 8) Linear to Non-liner

متناسب در سیستم بررسی می‌شوند. پدیده‌های واقعی غیرخطی به مراتب مشکل‌اند و به معنای واقعی تنها در قرن بیستم روی آنها کار شده است. این روند با هندسه شروع می‌شود: هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ صفحه، هندسهٔ فضا و هندسهٔ خطوط مستقیم همگی خطی‌اند ولی بعداً با گذر از یک سری مراحل، هندسهٔ غیراقلیدسی وارد هندسهٔ ریمانی می‌شود که اساساً غیرخطی است، در معادلات دیفرانسیل، با مطالعهٔ جدی پدیده‌های غیرخطی، با یک سری پدیده‌های جدید روبرو می‌شویم که در رفتارهای کلاسیک دیده نمی‌شود. من در اینجا به بیان دو مورد بسنده می‌کنم: بحث سالیتون‌ها [۱] و نظریهٔ آشوب [۲] که دو نگرش کاملاً متفاوت از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌باشند که در زمرهٔ موضوعات ویژهٔ قابل توجه و عمومی در قرن بیستم قرار گرفتند. سالیتون‌ها رفتار ناگهانی غیرخطی سازمان یافته را معرفی می‌کنند در حالی‌که آشوب رفتار ناگهانی غیرسازمان یافته را شرح می‌دهد. هردوی آنها در رفتارهای متفاوت یک پدیده حضور دارند و هر دو جالب و مهم‌اند. آنها اساساً پدیده‌های غیرخطی می‌باشند. این مفاهیم را می‌توان در کارهایی نه چندان اساسی که در اواخر قرن نوزدهم روی سالیتون‌ها انجام گرفت ردیابی کرد.

البته در فیزیک معادلات ماکسول (معادلات اساسی الکترومغناطیس) معادلاتی با مشتقات جزئی خطی و در مقابل، معادلات معروف یانگ ـ میلس [۳] غیرخطی‌اند و نیروهای وارد بر ماده را مورد مطالعه قرار می‌دهند. معادلات یانگ ــ میلس غیرخطی‌اند چرا که در اصل صورت ماتریسی معادلات ماکسول هستند ولی از آنجا که ضرب ماتریسی ناجابجایی است، عامل غیرخطی در این معادلات ظاهر می‌شود و اینجاست که ارتباطی جالب بین غیرخطی‌بودن و ناجابجایی بودن دیده می‌شود. ناجابجایی بودن، غیرخطی بودن از نوع خاص را تولید می‌کند و این چیزی جالب و مهم است.

هندسه در مقابل جبر [۴]

تا اینجا تنها در مورد چند موضوع علمی بحث شد. حال می‌خواهم در مورد تقابل در ریاضیات که همواره با ما بوده است صحبت کنم. این تقابل امکان می‌دهد که بتوانم در مورد تعمیم‌های فلسفی صحبت کنم و تذکراتی را خاطرنشان سازم. منظور تقابل بین هندسه و جبر است که دو رکن اولیه و اصلی ریاضیات هستند. هندسه به یونانی‌ها و حتی به زودتر از آن و جبر به عرب‌ها و هندی‌ها [۵] برمی‌گردد. اگرچه هندسه و جبر نقشی اساسی در ریاضیات بازی کردند ولی تأثیر و روابطشان با هم ساده نبوده است.

اجازه بدهید با تاریخچهٔ موضوع شروع کنم. هندسهٔ اقلیدسی اولین مثال یک نظریهٔ ریاضی است و تا زمانی که دکارت مختصات جبری را که امروزه صفحهٔ دکارتی می‌نامند ابداع نکرده بود موکداً

---

1) Solitons 2) Chaos 3) Yang-Mills 4) Geometry Versus algebra

۵) همانطور که خواننده گرامی می‌داند ایرانیان نیز نقش اساسی در توسعهٔ جبر داشته‌اند که به کارهای خیام، ابوریحان و خوارزمی می‌توان اشاره کرد (مترجم)

هندسی محسوب می‌شد. این کار دکارت تلاشی برای هدایت افکار هندسی به سمت طرح‌های جبری بود. البته این یک شکست یا به عبارت دیگر حمله‌ای بزرگ علیه هندسه بود که توسط جبردانان انجام شد. در حوزهٔ آنالیز، کارهای نیوتن و لایبنیتز[1] متعلق به دو عرف متفاوت هستند. نیوتن قطعاً یک هندسه‌دان و لایبنیتز اساساً یک جبردان بود و برای این ادعا هم دلایل محکم و عمیقی وجود دارد. برای نیوتن هندسه (یا حساب دیفرانسیل که توسط وی بسط داده شد) کوششی برای توصیف قوانین طبیعت به شمار می‌رفت. وی به معنای وسیعی با فیزیک سر و کار داشت و فیزیک تنها در دنیای هندسه نمود پیدا می‌کند. هرگاه بخواهید بدانید اشیاء چگونه ساخته شده‌اند، عملاً در جهان فیزیک و درون اشکال هندسی تفکر می‌کنید. زمانی که نیوتن حساب دیفرانسیل را توسعه می‌داد، می‌خواست آن را به شکلی درآورد که هر چه بیشتر به مفاهیم فیزیکی که تحت لوایش قرار دارند، نزدیک‌تر نماید. او به این دلیل مباحث هندسی را به کار می‌برد زیرا تنها در این صورت به معنی و مقصود واقعی نزدیک می‌شد. لایبنیتز از طرف دیگر آرزو داشت تمام ریاضیات را طوری شکل دهد که آن را به یک ماشین جبری بزرگی تبدیل کند و این دقیقاً مخالف نیوتن بود. بدین جهت آنها کاملاً نمادگذاری‌های متفاوتی را به کار بردند. همانطور که می‌دانیم در جدال بزرگی که بین نیوتن و لایبنیتز روی داد نمادگذاری لایبنیتز پیروز شد و امروزه ما مشتق را با نماد لایبنیتز نشان می‌دهیم. روح نیوتن هنوز پشت این نماد حضور دارد ولی مدت‌های مدیدی بی‌اثر شده بود.

اواخر قرن نوزدهم یعنی صد سال پیش، پوانکاره و هیلبرت دو چهرهٔ شاخص در ریاضیات محسوب می‌شدند. قبلاً در مورد آنها صحبت کردیم، در واقع آنها پیروان نیوتن و لایبنیتز بودند (پوانکاره دنباله‌روی نیوتن و هیلبرت پیرو لایبنیتز بود). فکر پوانکاره بیشتر روح هندسی داشت و وی هندسه و توپولوژی را به عنوان پایهٔ خلاقیت خود به کار می‌برد. هیلبرت بیشتر به عنوان یک صورت‌گرا[2] مطرح بود. وی می‌خواست ریاضیات را اصل موضوعی کند و آن را به صورت قالبی محکم معرفی نماید. آن دو (هیلبرت و پوانکاره) بی شک به سنت‌های متفاوتی تعلق داشتند، هرچند همیشه به این راحتی نمی‌توان گفت که یک ریاضیدان بزرگ به کدام دستهٔ فکری متعلق است.

ضمن آماده کردن این سخنرانی فکر می‌کردم بهتر است اسامی چند تن از ریاضی‌دانانی را که از پیروان این سنت‌ها می‌باشند در این فهرست بیاورم. صحبت کردن در مورد ریاضی‌دانانی که در قید حیات هستند خیلی مشکل است، کدامیک از آنها را در این فهرست می‌آوردم؟ بعداً اندیشیدم که اسامی چه کسان دیگری می‌توانست در هر کدام از دو طرف طبقه‌بندی مذکور بگنجد. در مجموع اسم دو نفر برگزیده شد یکی بورباکی[3] که از نظر اینجانب در نقش معروف‌ترین پیرو هیلبرت است و دیگری آرنولد[4] که به وارث سنت پوانکاره ـ نیوتن می‌باشد. بی تردید نظرات مکانیکی و فیزیکی آرنولد اساساً هندسی‌اند و مستقیماً به نیوتن برمی‌گردند. چیز دیگری که در این بین مطرح می‌شود

---

1) Leibniz 2) Formalist 3) Bourbaki

۴) ولادیمیر ایگوروویچ آرنولد در بندر اودسا در خانوادهٔ ریاضیدان معروف، متخصص در نظریهٔ اعداد، ایگور←

بجز چند نفر دیگر از ریاضی‌دانان مانند ریمان نادرست به نظر می‌رسد. بورباکی سعی می‌کرد که در سطح وسیعی برنامهٔ صورت‌گرای هیلبرت را با هدف اصل موضوعی ساختن ریاضیات، تکمیل کند و تا اندازهٔ قابل قبولی هم موفقیت‌هایی به‌دست آورد. هر یک از این نقطه‌نظرها اعتبار خاص خود را دارد ولی بین‌شان برخورد نیز وجود دارد.

اجازه دهید نظر شخصی خود را در مورد تفاوت بین هندسه و جبر ابراز کنم. شکی نیست که هندسه در واقع علمی در مورد فضا است، وقتی من به حاضرین می‌نگرم، در آن واحد خیلی چیزها می‌بینم، در یک ثانیه و حتی در یک میکرو ثانیه می‌توانم مقدار قابل ملاحظه‌ای اطلاعات را دریافت کنم و البته این یک امر اتفاقی نیست. مغز ما طوری ساخته شده است که ارتباط تنگاتنگی با قوهٔ بینایی دارد. قوهٔ بینایی، به طوری که از دوستانی که در علم اعصاب و روان کار می‌کنند شنیده‌ام، در حدود ۸۰ یا ۹۰ درصد حجم پوستهٔ مغز را به کار می‌گیرد، در مغز حدود ۱۷ مرکز متفاوت وجود دارد که هر کدام برای قسمت‌های معین مراحل بینایی تخصیص داده شده است. تعدادی از آنها مربوط به خطوط قائم و تعدادی مربوط به خطوط افقی می‌باشند و تعدادی نیز با رنگ مناظر سر و کار دارند و نهایتاً تعدادی با تفکر و تعابیر و تفاسیر در ارتباط می‌باشند. درک و فهم جهانی که می‌بینیم، مهمترین قسمت تکامل تدریجی ما را سبب می‌شود. بنابراین حس فضایی و درک فضایی از جمله وسایل و سلاح‌های قوی می‌باشند. به همین خاطر است که هندسه در واقع شاخه‌ای قوی از ریاضیات را تشکیل می‌دهد که نه تنها با اشیای کاملاً هندسی بلکه با اشیائی هم که هندسی نیستند مرتبط است. ما تلاش می‌کنیم به چنین اشیائی شکل هندسی ببخشیم چرا که چنین کاری ما را قادر می‌سازد از قوهٔ ادراکی که تواناترین سلاح ما است، استفاده کنیم. حتی وقتی شما سعی می‌کنید یک مطلب ریاضی را به دانشجو یا به همکار خود توضیح دهید، این مورد به طور آشکار دیده می‌شود. شما یک بحث طولانی و سخت مطرح می‌کنید و در نهایت دانشجو مطلب را می‌فهمد.

← ولادیمیرووِیچ آرنولد چشم به جهان گشود. وی در سال ۱۹۵۴ وارد دانشکدهٔ مکانیک ــ ریاضی دانشگاه دولتی مسکو شد و زیر نظر ریاضیدان معروف آن زمان آندری نیکولایوویچ کولموگوروف به تحصیل و تحقیق پرداخت و در همان سال‌های دانشجویی بود که توانست جوابی برای مسألهٔ ۱۳ هیلبرت بیابد، داستان از این قرار بود که روزی کولموگوروف جهت فرصت مطالعاتی قصد سفر به فرانسه را داشت، وی مسأله‌ای را جهت حل به آرنولد پیشنهاد می‌کند. بعد از ٦ ماه که از فرانسه برمی‌گردد، آرنولد حلی از مسألهٔ مذکور را به وی ارائه می‌کند. بعد از تأیید درستی حل، وی به آرنولد می‌گوید که این مسأله، مسألهٔ ۱۳ هیلبرت است. آرنولد در سال ۱۹٦۱ از رسالهٔ دکتری خود تحت رهبری کولموگوروف دفاع کرده و در سال ۱۹٦۳ دورهٔ فوق دکتری خود را به پایان رساند. وی از سال ۱۹٦۱ در دانشکدهٔ مکانیک ــ ریاضی دانشگاه دولتی مسکو مشغول به کار شد و در سال ۱۹٦۵ به درجهٔ پروفسوری نائل آمد. در حال حاضر وی همکار اصلی انستیتوی آکادمی علوم روسیه به نام انستیتو استکلوف می‌باشد و همزمان به عنوان پروفسور دانشگاه دوفین پاریس با آن دانشگاه همکاری دارد. از وی تا به امروز حدود ۳۵۰ کار علمی منتشر شد و کتاب‌های معروفی به چاپ رسیده است. همچنین وی یکی از بنیانگذاران نظریهٔ معروف KAM (کولموگورف ـ آرنولد ـ موزر) می‌باشد.

در این لحظه دانشجو می‌گوید "I see !"، دیدن مترادف فهمیدن دیده می‌شود. شما یک بحث طولانی و سخت مطرح می‌کنید و در نهایت دانشجو مطلب را می‌فهمد. در این لحظه دانشجو می‌گوید "I see !"، دیدن مترادف فهمیدن است و به جای هر دو مفهوم یعنی دیدن و فهمیدن ما کلمهٔ درک را به کار می‌بریم. حداقل در زبان انگلیسی چنین موردی کاملاً درست است. جالب است اگر این ادعا را در دیگر زبان‌ها نیز بررسی کنیم. مغز انسان این قابلیت را دارد که با یک نگاه آنی حجم عظیمی از اطلاعات را دریافت کند و ریاضیات آن را کامل می‌کند.

در طرف دیگر جبر اصولاً زمان را بررسی می‌کند. (و البته احتمال دارد شما در مورد جبر چنین نگرشی نداشته باشید). هر قسمت از جبر را مورد مطالعه قرار دهید، قطعاً دنباله‌ای از اعمال پی در پی اجرا می‌شوند و عبارت «پی در پی» بدین معنی است که شما به اجبار با زمان سر و کار دارید. در دنیای ایستا جایی برای جبر وجود ندارد در حالی که هندسه ذاتاً ایستا است. من می‌توانم بنشینم و نگاه کنم، می‌توان فرض کرد که چیزی تغییر نمی‌کند ولی به هر حال می‌توانم بنگرم. اما جبر مرتبط با زمان است، چرا که ما با اعمالی سر و کار داریم که به طور دنباله‌ای صورت می‌گیرد. وقتی از «جبر» صحبت می‌کنم منظورم تنها جبر نوین نیست. هر الگوریتم و هر روند محاسباتی، دنباله‌ای از مراحل پی در پی می‌باشند که رایانه‌های مدرن به طور واضح و روشن این کار را انجام می‌دهند. آنها اطلاعات را به صورت دنباله‌ای از صفر و یک‌ها دریافت می‌کنند و جواب می‌دهند.

جبر با محاسبه در زمان و هندسه با فضا سر و کار دارد. این دو موضوع جنبه‌های مکمل دنیای ما به شمار می‌روند و برای آنها دو نقطه نظر متفاوت در ریاضیات متناظر می‌شوند. بدین ترتیب بحث و گفتگو بین ریاضی‌دانان گذشته در مورد مفهوم نسبی هندسه و جبر حائز اهمیت است.

البته این فکر که در این بحث و جدل یک طرف بازنده و طرف دیگر برنده به شمار می‌رود درست نیست. بهتر است این موضوع را با یک مثال شهودی توضیح دهم. وقتی که می‌پرسیم می‌خواستید یک جبردان باشید یا یک هندسه‌دان؟ مثل این است که می‌پرسیم دوست داشتید ناشنوا باشید یا نابینا؟ هرگاه نابینا باشیم، فضا را نمی‌بینیم و هرگاه ناشنوا باشیم نمی‌شنویم ولی ناشنوایی در زمان اتفاق می‌افتد. در کل دوست داریم هر دو توانایی را داشته باشیم.

در فیزیک نیز مرزبندی تقریباً مشابهی بین ایده‌ها و تجربیات وجود دارد. فیزیک از دو قسمت تشکیل شده است:

۱) نظریه ـ مفاهیم، ایده‌ها، عبارات؛

۲) قوانین ـ اسباب و ابزار تجربی.

به نظر من ایده‌ها به معنایی وسیع‌تر اشیاء عبارات هندسی می‌باشند چرا که با آنچه که در جهان واقعی اتفاق می‌افتد در ارتباط هستند. از طرف دیگر تجربه، بیشتر محاسبات جبری را خاطرنشان می‌سازد.

شما کاری در زمان انجام می‌دهید یا کمیت‌هایی را اندازه‌گیری می‌کنید و آنها را فرمول‌بندی می‌کنید، ولی ایده‌های اساسی که پشت این تجربیات قرار دارند بخشی از سنت‌های هندسی را

تشکیل می‌دهند.

می‌توان این تقابل را به صورت فلسفی یا ادبی نیز بیان کرد به این صورت که جبر «وسوسهٔ فاوست[۱]» هندسه‌دان است. همانطور که می‌دانید فاوست در داستان گوته در قبال فروختن روح خود می‌توانست مالک هر چیزی شود، از جمله زن زیبا. جبر عبارت است از وسوسه‌های شیطانی ریاضیدان. شیطان می‌گوید: من این ماشین قوی را به تو می‌بخشم، او هر سؤالی را جواب می‌دهد، هر سؤالی که بخواهی. در مقابل چیزی که از تو می‌خواهم این است که روحت را به من بدهی، از هندسه صرف نظر کن و در این صورت است که تو مالک این ماشین فوق‌العاده عالی جبر می‌شوی. در حال حاضر این ماشین می‌تواند همان رایانه باشد. البته که ما دوست داریم هر دو را داشته باشیم. احتمالاً می‌خواستیم شیطان را گول بزنیم و تظاهر کنیم که روح خود را می‌فروشیم در حالی که آن را نمی‌دادیم. به هر حال روحمان در خطر است چرا که با شروع به محاسبات جبری در واقع فکر کردن را متوقف می‌کنیم، دیگر هندسی فکر نمی‌کنیم. در اصل، دیگر در مورد ایدهٔ کار نمی‌توانیم فکر کنیم.

من در اینجا با جبردانان منتقدانه برخورد کردم ولی در واقع هدف جبر همواره ساختن فرمول‌هایی است که بتوان آن‌ها را در ماشین انباشت و با چرخاندن دسته، جواب را گرفت. در واقع شما (جبردانان) چیزی دارای مفهوم را انتخاب و آن را به یک فرمول تبدیل کرده‌اید و جواب را استخراج نموده‌اید. در این شرایط دیگر لازم نیست به این فکر کنید که گام‌های جداگانه‌ای که در انجام مراحل جبری برداشته‌اید، با چه چیزی در هندسه متناظرند. شما قوهٔ ادراک خود را از دست می‌دهید و این مسأله ممکن است در مراحل مختلفی مهم جلوه کند. نباید به طور کلی از قوهٔ ادراک خود صرف نظر کنید، ممکن است بعداً به آن نیازمند شوید. منظور من از وسوسهٔ فاوست این است، من به نیرنگ و مکر او معتقدم.

انتخاب حد وسط هندسه و جبر، موجب ایجاد آمیزه‌هایی شده است که در آنها جبر و هندسه ترکیب می‌شوند و همانطور که اشاره شد جدایی بین جبر و هندسه خیلی ساده و واضح نیست بلکه ساده‌انگارانه می‌باشد، چیزی که بحث‌اش را همین الان کردیم. به عنوان مثال جبردانان معمولاً از دیاگرام‌ها استفاده می‌کنند، دیاگرام چیست، آیا چیزی غیر از تسلیم شدن به قوهٔ ادراک هندسی می‌باشد؟

روش‌های مشترک [۲]

حال اجازه می‌خواهم وارد موضوعی بشوم که بیشتر از این که به محتوای ریاضیات مربوط شود، به اسلوب و روش‌های تکنیکی مربوط می‌شود. می‌خواهم تعدادی از روش‌های کلی را توصیف کنم که به نوعی در تمام زمینه‌ها به کار گرفته شده‌اند.

---

۱) در زبان روسی دیدن فقط با عضو چشم عملی انجام می‌شود و از درک و فهم خبری نیست.

2) Techniques in common

نظریهٔ همولوژی

مرسوم است که نظریهٔ همولوژی را به عنوان شاخه‌ای از توپولوژی در نظر بگیرند. این نظریه با مسأله زیر مرتبط است. فرض می‌کنیم یک فضای توپولوژیک با ساختار پیچیده‌ای وجود دارد و لازم است که از آن اطلاعات ساده‌ای شامل تعداد سوراخ‌ها یا چیزی شبیه آن را به دست آورید، برای این کار می‌توانید چند ناوردای خطی به فضای پیچیده وابسته کنید. در واقع این کار ساختن ناورداهای خطی است که در وضعیت غیرخطی صورت می‌گیرد. به لحاظ هندسی، دورهایی را تصور می‌کنیم که بتوان آنها را جمع و تفریق کرد. در این صورت است که چیزی به نام گروه همولوژی فضا را به دست می‌آوریم. همولوژی ابزار جبری مهمی است که جهت به دست آوردن اطلاعات در مورد فضاهای توپولوژیکی در نیمهٔ اول قرن مطرح شد و بدین ترتیب از هندسه شیئی جبری استخراج شد. همولوژی در مباحث دیگری هم ظاهر می‌شود. نقطهٔ شروع دیگر نظریهٔ همولوژی مدیون هیلبرت است که وی این نظریه را برای مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها به کار برد. چندجمله‌ای‌ها را به عنوان توابع غیرخطی می‌توان در یکدیگر ضرب کرد و چندجمله‌ای‌هایی با درجهٔ بالاتر به دست آورد. ایدهٔ عمیق هیلبرت این بود که ترکیبات خطی چندجمله‌ای‌ها با ریشه‌های مشترک را به عنوان ایده‌آل‌ها مطرح کند و بدین‌وسیله بدنبال یافتن مولدهای چنین ایده‌آل‌هایی بود. مجموعهٔ چنین مولدهایی می‌تواند به حد کافی حجیم باشد. وی روابط بین این مولدها و سپس روابط بین این روابط را بررسی کرد. به این ترتیب وی سلسله‌ای از این روابط را به دست آورد که سی‌زی‌گی‌های هیلبرت[1] نامیده شدند و این نظریهٔ هیلبرت روش زیرکانه‌ای بود که سعی می‌کرد یک وضعیت غیرخطی مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها را به وضعیت خطی تقلیل دهد. در واقع هیلبرت سیستم پیچیده‌ای از روابط خطی را به دست آورد که شامل اطلاعاتی در مورد مفاهیم غیرخطی یا به عبارتی چندجمله‌ای‌ها بود.

این نظریهٔ جبری در واقع یادآور نظریهٔ توپولوژیکی مشابهی است و در حال حاضر آنها با هم، جبر همولوژیکی نامیده می‌شوند. در هندسهٔ جبری، یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای سال ۱۹۵۰ عبارت بود از نظریهٔ کوهمولوژی کلاف‌ها و اشاعهٔ آن به هندسهٔ تحلیلی که توسط کارهای مکتب فرانسوی لِری[2]، کارتان[3]، سر[4] و گروتندیک[5] انجام گرفت. در آنجا ترکیبی از ایده‌های توپولوژیک ریمان ــ پوانکاره[6] و ایده‌های جبری هیلبرت و همچنین مطالبی از آنالیز که برای توازن اضافه شده‌اند وجود دارند.

ظاهراً نظریهٔ همولوژی کاربردهای وسیع‌تری در دیگر شاخه‌های جبر نیز دارد. می‌توان به گروه‌های همولوژی که همواره مشخصهٔ اشیاء خطی در مقابل اشیاء غیرخطی می‌باشند، اشاره کرد.

---

1) Hilbert's syzygies 2) Leray 3) Cartan 4) Serre 5) Grothendieck
6) Reimann-Poincare

به عنوان مثال گروه‌های متناهی یا جبرهای لی را در نظر بگیرید، برای هر کدام از آنها می‌توان گروه‌های همولوژی متناظر را پیدا کرد. مهم‌ترین کاربردهای نظریهٔ همولوژی در نظریهٔ اعداد، گروه‌های گالوا[1] است. بدین ترتیب نظریهٔ همولوژی به عنوان یکی از قوی‌ترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل یک سری مفاهیم کلی است و به نوعی به عنوان یکی از مشخصه‌های ریاضیات قرن بیستم می‌باشد.

نظریهٔ «کی»

بعد از مدت‌ها نظریهٔ دیگری متولد شد که در خیلی روابط و نسبت‌ها در کل شبیه نظریهٔ همولوژی بود. این نظریه نیز کاربردهای وسیعی یافت و در تمام قسمت‌های ریاضیات نفوذ کرد. این نظریه در اواسط قرن بیستم ظهور کرد، هر چند ریشه‌های آن را می‌توان در سال‌های قبل نیز مشاهده کرد. این نظریه، نظریهٔ «کی» نامیده شد و در اصل ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ نمایش داشت. می‌شود گفت نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی ریشه در قرن گذشته دارد ولی شکل مدرن آن یعنی نظریهٔ «کی» مدت‌ها بعد به وجود آمد. نظریهٔ «کی» را می‌توان به عنوان تلاش برگرفته از نظریهٔ ماتریس‌ها که ضرب در آن ناجابجایی می‌باشد جهت ساختن ناورداهای خطی یا آبلی تلقی کرد. عناصری مانند اثر یک ماتریس، مفهوم بعد و دترمینان همگی ناورداهای آبلی در نظریهٔ ماتریس‌ها می‌باشند. ولی نظریهٔ «کی» در واقع روشی است برای نظام‌مند کردن کار با چنین ناورداهایی و از این رو بعضاً آن را «جبر خطی پایدار» نیز می‌نامند. ایدهٔ این نظریه آن است که اگر دو ماتریس با ابعاد بزرگ داشته باشیم که با هم جابجا نمی‌شوند، با هم جابجا خواهند شد اگر آنها را در بلوک‌های متفاوت و در موقعیت‌های متعامد قرار دهیم، چرا که اشیاء را در فضای بزرگ‌تر می‌توان جابجا کرد و بدین ترتیب می‌توان امیدوار شد که این کار برای به دست آوردن بعضی اطلاعات کافی باشد، و این به عنوان یک روش پایهٔ نظریهٔ «کی» است. تشابه بین نظریهٔ «کی» و نظریهٔ همولوژی عبارت است از این که هر دو سعی دارند از سیستم‌های غیرخطی پیچیده، اطلاعات خطی دریافت کنند.

گروتندیک در هندسهٔ جبری این ایده را برای اولین بار با بهترین شکل در ارتباط تنگاتنگ با نظریهٔ کلاف‌ها که هم‌اکنون به آن اشاره شد و همچنین در ارتباط با کارهای خود در مورد قضیهٔ ریمان ــ رخ[2] توسعه داد.

در توپولوژی من و هیرتسبروخ این ایده‌ها را برگرفتیم و آنها را در زمینهٔ توپولوژیک به کار بردیم. به معنایی، در حالی که گروتندیک به سی‌زی‌گی‌های هیلبرت مرتبط بود، نتایج ما بیشتر با نتایج ریمان و پوانکاره در زمینهٔ همولوژی مرتبط‌اند، با این تفاوت که آنها به جای چندجمله‌ای‌ها، توابع پیوسته را مورد استفاده قرار می‌دهند. همچنین کارهای ما در نظریهٔ شاخص عملگرهای بیضوی در آنالیز خطی ایفای نقش می‌کنند. از طرف دیگر بعد جبری این موضوع همراه با کاربردهای بالقوه در

1) Galois 2) Riemann-Roch

نظریهٔ اعداد توسط میلنور[۱]، کویلن[۲] و دیگران توسعه یافت و در این شاخه مسائل و سؤالات بسیار جالبی مطرح شد. در آنالیز تابعی در سایهٔ کارهای دانشمندان زیادی از جمله کاسپاروف، نظریهٔ پیوستهٔ «کی» وارد C^*–جبرهای ناجابجایی شد. توابع پیوستهٔ تعریف شده روی کل فضا، یک جبر جابجایی نسبت به عمل ضرب توابع تشکیل می‌دهند، هر چند در مواقعی شکل ناجابجایی آن نیز مطرح می‌شود و آنالیز تابعی یک محیط کاملاً طبیعی برای طرح سؤالاتی از این قبیل می‌باشد.

بدین ترتیب نظریهٔ «کی» حوزهٔ دیگری است که در آن شاخه‌های متفاوتی از ریاضیات خود به خود شکل‌های به حد کافی ساده‌ای می‌یابند، هر چند در هر حالت مسائل عملی سختی هم وجود دارند که خاص خود موضوع در ارتباط با دیگر جنبه‌های آن می‌باشند. این ابزار یکنواختی نیست ولی یک الگوی یکسان در ارتباط با نقاط اشتراک و شباهت‌های بین حالت‌های مختلف می‌باشد.

آلن کن[۳] بسیاری از این نتایج را وارد هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی کرد.

جالب است بدانید که در همین اواخر ویتن در کارهای خود در زمینهٔ نظریهٔ ریسمان (شاخهٔ جدیدی در فیزیک نظری) روش‌های جالبی را ابداع کرد که نشان می‌دهند چگونه می‌توان نظریهٔ «کی» را به یک محیط طبیعی برای کمیت‌های پایا (حفظ شونده) تبدیل کرد. در حالی که قبلاً فکر می‌کردند، محیط طبیعی برای این قسمت‌ها نظریهٔ همولوژی می‌باشد. حال می‌توان تصور کرد که نظریهٔ «کی» تأمین کننده نتایج بهتری باشد.

گروه‌های لی

مفهوم تعمیم یافتهٔ دیگری که نمی‌توان کاملاً آن را مفهوم فنی نامید، عبارت است از مفهوم گروه لی. گروه‌های لی، که اساساً عبارتند از گروه‌های متعامد، یکانی و سمپلکتیک به انضمام تعدادی گروه‌های خاص اگرچه از قرن نوزدهم شناخته شده بودند، نقش بسیار مهمی در تاریخ ریاضیات قرن بیستم بازی کرده‌اند. همانطور که می‌دانید سوفوس لی[۴] ریاضیدان نروژی قرن نوزدهم بود که همراه با فیلکس کلاین[۵] و دیگران بانی پیشرفت قابل ملاحظهٔ نظریهٔ گروه‌های پیوسته شدند.

اصولاً برای کلاین این کار راهی برای متحدکردن انواع هندسه‌ها: هندسهٔ اقلیدسی و غیراقلیدسی به شمار می‌رفت. هر چند این موضوع در قرن نوزدهم هم مطرح شد ولی تنها در قرن بیستم توانست به تکامل اصلی خود برسد. قرن بیستم با حکمرانی کامل نظریهٔ گروه‌های لی به عنوان الگوی واحد برای مطالعهٔ سؤالات مختلفی سپری شد.

چنان که قبلاً نقش ایده‌های کلاین در هندسه را یادآور شدیم، وی هندسه را یک فضای همگن تصور می‌کرد که در آن فضا تغییر مکان اشیاء بدون تغییر شکل امکان‌پذیر است. به همین دلیل هندسه

1) Milnor 2) Quillen 3) Alain connes 4) Sophus Lie 5) Felix Klein

توسط گروه‌های ایزومتری متناظرش تعریف می‌شود. هندسهٔ اقلیدسی از گروه حرکت‌های اقلیدسی حاصل می‌شود، هندسهٔ هذلولوی توسط گروه لی دیگری حاصل می‌شود. بدین صورت است که هر هندسهٔ یکنواخت با یک گروه لی مخصوص خودش متناظر می‌شود. اما بعداً طرفداران کارهای ریمان در هندسه بیشتر به مطالعهٔ فضاهای غیرهمگن پرداختند که انحنا در این فضاها از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند و هیچ تقارن کلی برای فضا وجود ندارد. هرچند گروه‌های لی همچنان نقش اساسی را بازی می‌کنند، چرا که آنها در سطح بی‌نهایت کوچک ظاهر می‌شوند و در فضای مماسی همواره مختصات اقلیدسی وجود دارد. بنابراین در فضای مماسی نظریهٔ گروه‌های لی بار دیگر در مقیاس بی‌نهایت کوچک ظاهر می‌شود، ولی از آنجا که لازم است نقاط مختلف را در مکان‌های متفاوت تطبیق دهیم بنابراین تغییر مکان اشیاء ضروری می‌گردد و در حین این کار گروه‌های لی متفاوتی به کار می‌روند. نظریهٔ مذکور به وسیلهٔ ریاضی‌دان فرانسوی الی کارتان[۱] توسعه یافت و این نظریه پایهٔ هندسهٔ دیفرانسیل مدرن شد. همچنین در نظریهٔ اینشتین نیز نظریهٔ گروه‌های لی نقش بسزائی بازی می‌کند.

در طول قرن بیستم روش کلی مذکور به مطالعهٔ گروه‌های لی و هندسه دیفرانسیل در سطح کلی منجر شد. یکی از جهات مهم این مطالعه که توسط کارهای بورل و هیرتسبروخ معرفی شد اطلاعاتی در مورد به اصطلاح «رده‌های مشخصه» ناورداهای توپولوژیکی است که سه قسمت کلیدی ریاضیات یعنی گروه‌های لی، هندسه دیفرانسیل و توپولوژی را به هم متصل می‌کند.

یکی از شاخه‌های بسیار نزدیک به آنالیز امروزی آنالیز هارمونیک ناجابجایی نامیده می‌شود. این شاخه تعمیمی از نظریهٔ فوریه می‌باشد که در آن سری‌ها و انتگرال‌های فوریه در اصل با یک گروه لی تعویض‌پذیر روی دایره و روی خط متناظر می‌گردند.

اگر به جای این گروه‌های لی یک تعداد گروه لی پیچیده‌تری جایگزین شوند، نظریهٔ بسیار زیبا و ظریفی حاصل می‌شود که نظریهٔ نمایش گروه‌های لی و آنالیز توسط این نظریه پیوند می‌خورد. این اصلی‌ترین اثر تمام عمر هریش ـ چاندرا[۲] بود.

اما آنچه که به نظریهٔ اعداد مربوط می‌شود، آن است که کل برنامهٔ لنگلاندز[۳] که ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ هریش چاندرا نیز دارد، در درون نظریهٔ گروه‌های لی مفهوم پیدا می‌کند. به هر گروه لی، نظریهٔ اعداد و برنامهٔ لنگلاندز مخصوصی متناظر می‌گردد. خیلی از کارها در نظریهٔ جبری اعداد، در نیمهٔ دوم قرن بیستم از این جریان تأثیر گرفتند. همچنین باید به این موضوع بررسی و مطالعهٔ صورت‌های مدولی و نیز اثبات آخرین قضیهٔ فرما[۴] کار اندرو وایلز[۵] را اضافه کرد.

ممکن است تصور شود که گروه‌های لی تنها در هندسه به علت نیاز به تغییرات پیوسته مهم‌اند، اما مشابه‌های گروه‌های لی روی میدان‌های متناهی به گروه‌های متناهی منجر می‌شوند و بسیاری

1) Eli Cartan 2) Harish-Chandra 3) Langlands program 4) Fermat's last theorem
5) Andrew Wiles

از گروه‌های متناهی به این روش به وجود می‌آیند. بدین صورت روش‌های بعضی از بخش‌های نظریهٔ گروه‌های لی حتی در حالت گسسته برای میدان‌های متناهی یا موضعی به کار می‌روند. در این جا خیلی از کارها صرفاً جبری است؛ به عنوان مثال کارهایی که نام جورج لوستیگ [1] را بر خود دارند و در آنها نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی را مطالعه می‌کنند و بسیاری از روش‌هایی که در بالا به آن اشاره شد در این کارها مشابهی دارند.

گروه‌های متناهی

بدین صورت به حوزهٔ گروه‌های متناهی می‌رسیم که برای من نظریهٔ طبقه‌بندی گروه‌های ساده متناهی را تداعی می‌کند. در این مورد باید اعتراف کنم که چند سال پیش مصاحبه‌ای کردم که در آن زمان طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی تقریباً به انتها رسیده بود و نظر مرا در این مورد جویا شدند. من بدون تأمل گفتم فکر نمی‌کنم که چیز مهمی باشد. علتش این بود که آن طور که این طبقه‌بندی مشخص می‌کرد قسمت اعظم گروه‌های ساده برای ما شناخته شده بود و فقط چند مورد استثنا وجود داشت. از یک نقطه نظر دیگر، این طبقه‌بندی موضوعی، بدون کشف جدیدی به اتمام رسید. وقتی که فضای کاری به جای این که توسعه پیدا کند بسته می‌شود، من چندان هیجان‌زده نمی‌شوم، البته اکثر دوستان من که در این حوزه کار می‌کردند بسیار ناراضی شدند، و بعد از آن بود که من مجبور شدم لباس ضدگلوله بپوشم!

اینجا استثنائی پیدا شد. در واقع من متذکر شدم که اسم بزرگ‌ترین گروه در فهرست به اصطلاح «گروه‌های نامرتب [2]» مانستر بود. فکر می‌کنم که همانا کشف این مانستر تعجب‌آورترین نتیجهٔ این طبقه‌بندی باشد. به نظر می‌آید که مانستر یک حیوان بسیار جالب و ناشناخته است که ارتباط غیرمنتظره‌ای با قسمت‌های بزرگ بقیهٔ ریاضیات، با توابع مدولی بیضوی و حتی با فیزیک نظری و نظریهٔ میدان کوانتمی دارد. این یکی از محصولات جالب طبقه‌بندی مذکور می‌باشد. همانطور که اشاره کردم طبقه‌بندی در را بست ولی مانستر در دیگری را گشود.

تأثیر فیزیک

حال اجازه دهید به موضوع دیگری که تأثیر فیزیک در ریاضیات می‌باشد وارد شویم. در طول قرن‌ها فیزیک همواره در ارتباط با ریاضیات بوده است. بخش‌های بزرگی از ریاضیات، به عنوان مثال محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها در اثر حل مسائل فیزیکی توسعه یافتند. این احتمال وجود دارد که در اواسط قرن بیستم این موضوع چندان واضح نبوده باشد، چرا که قسمت اعظم ریاضیات محض با موفقیت تمام مستقل از فیزیک توسعه یافت ولی در ربع آخر قرن بیستم به طور مهیجی تغییر یافت. حال سعی می‌کنم تأثیر فیزیک بر ریاضیات و بخصوص بر هندسه را به طور خلاصه مرور کنم.

1) George Lusztig   2) Sporadic groups

در قرن نوزدهم هامیلتون مکانیک کلاسیک را با صورت‌بندی جدید که امروزه مکانیک هامیلتونی نامیده می‌شود معرفی کرد. مکانیک کلاسیک باعث شد آنچه که ما امروزه آن را «هندسهٔ سیمپلکتیک[1]» می‌نامیم ایجاد شود. این شاخه از هندسه می‌توانست سال‌ها قبل مطالعه شود، ولی در واقع مطالعهٔ جدی آن در دو دههٔ اخیر شروع شد. این هندسه در کل از نظر محتوایی یک شاخهٔ غنی هندسه محسوب می‌شود. هندسه در آن معنا که من به کار می‌برم شامل سه شاخه می‌باشد: هندسهٔ ریمانی، هندسهٔ مختلط و سمپلکتیک و سرانجام هندسهٔ متناظر با سه نوع گروه‌های لی. در این میان هندسهٔ سمپلکتیک جدیدترین و شاید از بعضی جهات جالب‌ترین بخش هندسه می‌باشد. در کل این بخش از هندسه با توجه به ریشه‌های تاریخی در ارتباط با مکانیک هامیلتونی و بعدها با مکانیک کوانتمی، ارتباط تنگاتنگی با فیزیک دارد.

معادلات ماکسول که قبلاً به آنها اشاره شد و معادلات خطی اساسی الکترومغناطیسی، انگیزهٔ کارهای هاج[2] روی صورت‌های هارمونیک و کاربرد آن در هندسهٔ جبری شد. این نظریهٔ فوق‌العاده پربار پایهٔ بسیاری از کارهای انجام شده در هندسه از سال‌های ۱۹۳۰ به بعد را پی‌ریزی کرد. من قبلاً در مورد نظریهٔ نسبیت عام و کارهای اینشتین صحبت کردم. البته مکانیک کوانتمی نه تنها در ارتباط با روابط جابجایی بلکه در فهم فضای هیلبرت و نظریهٔ عملگرها محصول بزرگی به همراه داشت.

بلورشناسی به شکل کلاسیک آن تقارن‌های ساختارهای بلورها را مورد مطالعه قرار می‌داد. گروه‌های متناهی متقارن روی مجموعه‌های نقطه‌ای به خاطر کاربردشان در بلورشناسی در مرحلهٔ اول مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در سدهٔ ما کاربردهای عمیق‌تر و عملی‌تر نظریهٔ گروه‌ها در فیزیک به نتایج مطلوبی رسید. در بین ذرات چنانچه معتقدیم کل ماده از آنها تشکیل شده است تقارن‌های پنهان در مقیاس‌های کوچک کشف شدند که در آنجا گروه‌های لی مخفی هستند و نمی‌توانیم آنها را ببینیم اما طی مطالعه رفتار واقعی ذرات این تقارن‌ها آشکار می‌شوند. بدین صورت مدلی را طرح می‌کنیم که در آن تقارن نقش اساسی را بازی می‌کند. در نظریه‌های معروف فعلی گروه‌های لی کاملاً شناخته شدهٔ $SU(۲)$ و $SU(۳)$ به عنوان اولین گروه‌های متقارن ساخته شدند. بدین صورت این گروه‌های لی در نقش اجزای سازندهٔ ماده ظاهر شدند.

بدین ترتیب گروه‌های به وجود آمده تنها گروه‌های لی فشرده نبودند. در فیزیک گروه‌های غیرفشردهٔ مشخصی مانند گروه لورنتس نیز دیده می‌شوند. همانا برای اولین بار مطالعهٔ نظریهٔ نمایش گروه‌های لی غیرفشرده توسط فیزیک‌دان‌ها آغاز شد. این نمایش‌ها باید در یک فضای هیلبرت انجام شوند چرا که نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های فشرده با بعد متناهی هستند اما گروه‌های غیرفشرده با بعد نامتناهی را می‌طلبند و این چیزی است که فیزیک‌دان‌ها برای اولین بار به آن دست یافتند.

ربع آخر قرن بیستم که مدت زیادی از آن نگذشته است همراه با هجوم ایده‌های جدید از فیزیک به

1) Symplectic geometry 2) Hodge

ریاضیات بود. احتمالاً این یکی از برجسته‌ترین اتفاقات سدهٔ ما است. شاید می‌شد برای این موضوع سخنرانی جداگانه‌ای ترتیب داد. اما آنچه که در اینجا مهم است تأثیر فوق‌العادهٔ نظریهٔ میدان کوانتمی و نظریهٔ ریسمان می‌باشد که روش‌های برجسته و واضحی در رسیدن به نتایج جدید در اکثر بخش‌های ریاضیات را به همراه داشتند. منظورم این است که فیزیک‌دانان می توانستند بعضی از واقعیات ریاضی را که پایه در فهم نظریهٔ فیزیکی داشتند پیش‌بینی کنند. البته این‌ها اثبات‌های محکمی نبودند اما بر شهود بسیار قوی، حالت‌های خاص و تشابهات تکیه داشتند. این نتایج که توسط فیزیک‌دانان پیش‌بینی شده بودند، به نوبهٔ خود مجدداً توسط ریاضیدانان بررسی شدند و مشخص شد که نتایج درست‌اند، هر چند اثبات آنها دشوار است و خیلی از آنها تا به امروز به طور کامل ثابت نشده‌اند.

این چنین بود که در ۲۵ سال اخیر در این شاخه حرکت اساسی و چشمگیری به وقوع پیوست. این نتایج دقیق و جزئی بودند. بی دلیل نیست که فیزیکدانان می‌گویند «این مطلب باید صحیح باشد» و ضمن آن فرمول دقیق همراه با ده حالت اولیه (تا ۱۲ رقم اعشار) را ارائه می‌کنند. آنها به مسائل سخت و پیچیده جواب‌های دقیقی می‌دهند، که تصورش هم برای ما مشکل است. جواب هایی که آنها ارائه می‌دهند فقط توسط رایانه قابل محاسبه می‌باشند. نظریهٔ میدان کوانتمی ابزار جالبی به شمار می‌آید که از نقطه نظر ریاضی درک آن به مراتب مشکل است ولی در اصطلاحات کاربردی ارزش فوق‌العاده دارد. این در واقع موضوع جالب ۲۵ سال آخر قرن بیستم می‌باشد.

اینجا به چند عنصر سازندهٔ این موضوع می‌توان اشاره کرد: مثلاً کارهای دونالدسون[1] در مورد چندگونه‌های چهاربعدی، کارهای واگان ــ جونز[2] روی ناورداهای گره‌ها[3]، تقارن‌های آینه‌ای[4]، گروه‌های کوانتمی و برای تکمیل مطلب به مانستر نیز باید اشاره کنم.

منظور از طرح این موضوع چیست؟ همانطور که قبلاً اشاره کرده‌ام، قرن بیستم شاهد افزایش در بعد بود که به بینهایت ختم می‌شد. فیزیکدانان نیز آن را توجیه کردند. آنان در نظریهٔ میدان کوانتومی سعی دارند به طور دقیق فضای با بعد نامتناهی را عمیقاً مورد مطالعه قرار دهند.

فضاهای با بعد نامتناهی که فیزیکدانان با آنها سر و کار دارند، معمولاً فضاهای تابعی با سرشت‌های متفاوت می‌باشند. ساختار این فضاها بسیار پیچیده می‌باشد، نه تنها به این دلیل که با بعد نامتناهی‌اند بلکه جبر، هندسه و توپولوژی پیچیده‌ای دارند و برای هر کدام از آنها یک گروه لی بزرگ ــ گروه لی با بعد نامتناهی ــ مربوط می‌شود. همانطور که در قرن بیستم قسمت اعظم ریاضیات به توسعهٔ هندسه، توپولوژی، جبر و آنالیز روی گروه‌های لی با بعد متناهی و چند گوناها مربوط می‌شود، این بخش از فیزیک نیز با تحقیقات مشابه در ابعاد نامتناهی مرتبط است. البته این خود بحث دیگری است هر چند نتایج قابل توجهی به همراه دارد. حال روی این موضوع کمی بیشتر بحث می‌کنیم. نظریهٔ میدان کوانتومی در فضا و زمان اتفاق می‌افتد و فضا در واقع سه‌بعدی است ولی مدل‌های ساده شده‌ای وجود دارند که می‌توان یک بعد آنها را در نظر گرفت. در فضای

1) Donaldson 2) Vaughan-Jones 3) Kont invariants 4) Mirror symmetry

۱ بعدی و زمان ۱ ـ بعدی، فیزیکدانان معمولاً با گروه‌هایی همچون گروه دیفئومرفیسم‌های دایره یا گروه نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر روی دایره به توی یک گروه لی فشرده برخورد می‌کنند. این دو مثال مهم گروه‌های لی با بعد نامتناهی در مبحث نظریهٔ میدان کوانتومی ظاهر می‌شوند و این در قالب موضوعات ریاضی کاملاً معقول است و ریاضیدانان مدتی است که به مطالعه در این زمینه می‌پردازند.

در چنین نظریه‌های (۱+۱)— بعدی، می‌توان به عنوان فضا ـ زمان یک رویهٔ ریمانی را در نظر گرفت، و در این صورت به نتیجه رسید. به عنوان مثال، فضای مدول‌های رویه‌های ریمانی با گونهٔ مشخص یک موضوع کلاسیک است که به قرن ۱۹ بر می‌گردد. نظریهٔ میدان کوانتومی در ارتباط با کوهمولوژی این فضاهای مدولی به نتایج جدیدی رسیده است. فضاهای مدولی کاملاً مشابه دیگر، فضای مدولی ـ کلاف‌های مسطح روی رویه‌های ریمانی با گونه می‌باشد. این فضاها، فضاهای جالبی هستند و نظریهٔ میدان کوانتومی نتایج دقیقی در مورد آن‌ها بدست می‌دهد. مخصوصاً، فرمول‌های جالب و مناسبی برای احجام، جایی که مقادیر توابع زتا به‌کار می‌روند، وجود دارند. کاربرد دیگر این نظریه‌ها با شمارش خم‌ها مرتبط است. اگر بخواهیم خم‌های جبری در صفحه با درجه و نوع مفروضی را مورد مطالعه قرار دهیم و مسألهٔ شمارش تعدادی از این خم‌ها که از نقاط معلوم داده شده‌ای عبور می‌کنند، مطرح باشد در این صورت با مسائل هندسهٔ جبری که در فوق اشاره شده برخورد خواهیم کرد، که از مسائل کلاسیک قرن بیستم می‌باشند. این‌ها مسائل سختی هستند و به کمک مبحث جدیدی به نام کوهمولوژی کوانتومی حل می‌شوند. می‌توان سؤالات سخت‌تری را نیز مطرح کرد که در ارتباط با خم‌ها نه در صفحه، بلکه روی چند گوناهای خمیده می‌باشند. این نیز بحث جالبی است که نتایج روشنی به همراه دارد که به تقارن آینه‌ای معروف است. همهٔ این‌ها از نظریه میدان کوانتومی با بعد(۱+۱) ناشی می‌شوند.

هر گاه یک بعد دیگر هم اضافه کنیم، در این صورت یک فضای دو بعدی و یک فضای ۱ ـ بعدی زمان را خواهیم داشت که در این صورت نظریهٔ ناورداهای گره‌ها منتسب به واگان ـ جونز مطرح می‌شوند. این نظریه توصیف و تفسیر زیبایی در قالب نظریهٔ میدان کوانتومی دارد.

بدین ترتیب گروه‌هایی به نام گروه‌های کوانتومی بروز می‌کنند. جالب‌ترین چیزی که در مورد گروه‌های کوانتومی وجود دارد، اسم گروه است که بر آنها نهاده‌اند، در حالی که گروه نیستند. اگر بخواهید تعریفی از گروه‌های کوانتومی ارائه دهم به زمان بیشتری نیاز دارم. گروه‌های کوانتومی موضوعات پیچیده‌ای هستند ولی بدون شک ارتباط عمیقی با نظریهٔ کوانتومی دارند. با این که این گروه‌ها از فیزیک مشتق شده‌اند ولی در حال حاضر توسط جبردانان متعصب به‌کار می‌روند. آنها گروه‌های کوانتومی را در محاسبات خاصی به‌کار می‌برند.

اگر یک گام دیگر نیز جلوتر رویم (بعد ۳+۱) آنگاه این نظریهٔ چهاربعدی با نظریهٔ چندگونه‌های چهاربعدی دونالدسون متناسب می‌شود. همانا نظریهٔ چند گوناهای چهاربعدی دونالدسون است که با ارائهٔ نظریهٔ میدان کوانتومی تأثیر مهمی بر ریاضیات می‌گذارد. به‌عنوان مثال

این نظریه باعث شد که سیبرگ[1] و ویتن[2] یک نظریهٔ جایگزین ایجاد کنند که مبنای آن شهود فیزیکی است ولی بهر حال نتایج ریاضی جالبی به‌همراه دارد. همهٔ این‌ها مثال‌های خاص می‌باشند که البته مثال‌های دیگری هم در این زمینه وجود دارد. نظریهٔ دیگر، نظریهٔ ریسمان است که آن را پشت سر گذاشته‌ایم . نظریهٔ (ام) نظریه‌ای است که لازم می‌دانم در مورد آن صحبتی داشته باشم. این نظریه هم از نظر محتوی غنی است و هم این که جنبه‌های ریاضی متفاوتی دارد. نتایج به‌دست آمده از آن هنوز به طور کامل تجزیه و تحلیل نشده‌اند. بنابراین مدت زیادی برای ریاضیدانان کار بحد کافی وجود خواهد داشت.

خلاصهٔ تاریخی

حال اجازه دهید نتیجه‌گیری کوتاهی داشته باشیم و به طور خلاصه و کلی به تاریخ ریاضی بنگریم: در واقع امر چه اتفاقی در ریاضیات افتاده است؟ بدون هیچ تعصبی ترجیح می‌دهم سده‌های ۱۸ و ۱۹ را دورهٔ ریاضیات کلاسیک بنامم. در این دوره که برای ما با اسامی اویلر و گاوس شناخته شده است، تمام ریاضیات عظیم کلاسیک ساخته شد و توأماً توسعه یافت. چنان تصور می‌شد که ریاضیات به آخر رسیده است ولی قرن بیستم برعکس پر بار و پر محصول جلوه کرد و این چیزی بود که من در موردش صحبت کردم.
قرن بیستم را می‌توان تقریباً به دو نیمه تقسیم کرد. از نظر من نیمهٔ اول ترجیحاً به عنوان دوره‌ای که من آن را دورهٔ تخصص‌گرایی می‌نامم جلوه‌گر شد. در این دوره روش هیلبرت بسیار مؤثر بود. در این روش سعی برآن بود که موضوعات صوری شده و هرکدام بطور دقیق تعریف شود و سپس در هر حوزه تحقیقات انجام شود. چنان که قبلاً نیز گفته‌ام، نام بورباکی با این جریان مرتبط است. در اینجا توجه ریاضیدانان متمرکز به فهم این مورد است که در قالب دستگاه‌های تعریف شدهٔ جبری یا دستگاه‌های دیگر در زمان معین چه کاری می‌توان انجام داد. نیمه دوم قرن بیستم تا حد زیادی به صورت دورهٔ اتحاد و یگانگی جلوه‌گر شد. در این دوره مرزها از بین رفتند، روش‌ها از یک حوزه به حوزه دیگر انتقال یافتند و اختلاط عظیمی بین حوزه‌های مختلف اتفاق افتاد. اگر چه این تقسیم‌بندی بسیار ساده است، با این حال فکر می‌کنم بعضی جنبه‌های توسعهٔ ریاضیات قرن بیستم را بیان می‌کند.
چه پیش‌بینی‌هایی در مورد قرن بیست و یکم می‌توان کرد؟ چنانچه قبلاً نیز اشاره کردم، قرن بیست و یکم را می‌توان دورهٔ ریاضیات کوانتومی یا به عبارت بهتر ریاضیات با بعد بی‌نهایت نام نهاد. این عبارت به چه معنی می‌تواند باشد؟ ریاضیات کوانتومی به طور کلی به معنی درک واقعی آنالیز، هندسه، توپولوژی، جبر در فضاهای تابعی غیرخطی متفاوت است. «درک واقعی» برای من درکی است که از آن برای تمام چیزهای زیبایی که فیزیک‌دان‌ها در مورد آنها اندیشیده‌اند اثبات دقیق

1) Seiberg 2) Witten

حاصل شود. باید بگویم که اگر با بعد بینهایت با خامی برخورد کنید و سؤالات ناپخته مطرح کنید، معمولاً پاسخ نادرست یا بدیهی دریافت می‌کنید. شهود، کاربردهای فیزیکی و انگیزه، همگی به نوعی با فیزیک در ارتباط هستند. به طوری که برای فیزیکدانان این امکان را فراهم آورده‌اند که سؤالات معقولی را در مورد بعد نامتناهی مطرح کنند و به نکات ظریفی توجه داشته باشند که ما را به جواب‌های محسوسی هدایت می‌کنند. بنابراین تحقیق در آنالیز نامتناهی از این طریق اصلاً کار ساده‌ای نیست. اینجاست که باید کاملاً صحیح عمل کرد. ما تنها یک سری کلید و نشان در دست داریم و مقابل‌مان نقشهٔ راه نیز قرار دارد و این‌ها کاملاً مشخص می‌کنند که چه کار باید کرد ولی راه هنوز دراز است.

چه چیز دیگری ممکن است در قرن بیست و یکم اتفاق بیفتد؟ می‌خواهم به هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی کُن اشاره داشته باشم. این نظریهٔ مهم و وحدت بخش توسط آلن کن پایه‌گذاری شد. این نظریه بار دیگر همه چیز را به هم پیوند می‌دهد. آنالیز، جبر، هندسه، توپولوژی، فیزیک و حتی نظریهٔ اعداد توسط نظریهٔ کن به هم مرتبط شده و هر کدام از آنها بخشی از این نظریه را تشکیل می‌دهند. این نظریه چارچوبی است که امکان انجام تحقیقاتی را در زمینهٔ آنالیز ناجابجایی فراهم می‌کند که در هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی معمول‌اند. دلایل کافی و قانع‌کننده‌ای (بالقوه و بالفعل) وجود دارند که لزوم این کار را باعث می‌شوند مثلاً کاربردهایی در نظریهٔ اعداد، هندسه، گروه‌های گسسته و همچنین در فیزیک و مثال‌هایی از این قبیل. در حال حاضر تحقیقاتی در مورد ارتباط این نظریه با فیزیک انجام می‌شود. چه مدت طول می‌کشد یا چه نتایجی حاصل خواهد شد فعلاً باید منتظر ماند. من به نوبهٔ خود مشخصاً انتظار دارم شاهد توسعهٔ قابل توجه در این حوزه تا اتمام دههٔ اول قرن بیست و یکم باشم، امکان ظهور ارتباط بین این نظریه و نظریهٔ تا به امروز نه چندان توسعه یافتهٔ میدان‌های کوانتومی بعید به نظر نمی‌رسد.

با حرکت به سمت دیگری به آنچه که «هندسهٔ محاسباتی» یا هندسهٔ آراکلوف نامیده می‌شود برخورد می‌کنیم که سعی در اتحاد هر چه بیشتر هندسهٔ جبری با بعضی از گرایش‌های نظریهٔ اعداد دارد. این هم نظریهٔ بسیار موفقی است. این نظریه شروع خیلی خوبی داشت ولی راهی طولانی پیش رو دارد. کسی چه می‌داند؟

به طور حتم همه این مسیرها تقاطع‌هایی هم دارند. انتظار می‌رود که فیزیک تأثیر خود را همه جا اشاعه دهد، حتی در نظریهٔ اعداد. آندرو وایلز با نظر من موافق نیست و تنها زمان است که همه چیز را روشن می‌کند.

اینها رشته‌هایی هستند که به نظر من در یک دههٔ آینده می‌توانند پدیدار شوند، البته موضوع دیگری هم که می‌توان به آن اشاره کرد و من آن را ژوکر در قاب می‌نامم، نزول به هندسهٔ با بعد پایین‌تر می‌باشد. در کنار همهٔ توهمات بعد نامتناهی، هندسه با بعد پایین‌تر یک نوع آشفتگی به همراه دارد. بعدهایی که با گذشتگانمان شروع شدند، در خیلی از موارد مبهم جلوه می‌کنند. بعد پایین از نظر من ابعاد ۲، ۳، ۴ می‌باشد. به عنوان مثال هدف کارهای ترستون در هندسهٔ ۳ ــ بعدی

عبارت بود از طبقه‌بندی هندسه. آنها را می‌توان برای چندگوناهای ۳ ــ بعدی اعمال کرد. این نظریه خیلی عمیق‌تر از نظریهٔ ۲ ــ بعدی می‌باشد. برنامه ترستون هنوز به اتمام نرسیده است و تحقق آن بدون شک یکی از بزرگترین چالش‌ها خواهد بود.

یکی دیگر از موارد قابل توجه در بعد ۳ عبارت است از کارهای واگان — جونز که ایدهٔ آن در اصل از فیزیک ناشی شده است. این کارها اطلاعات جدیدی از حالت ۳ بعدی به دست می‌دهند که تقریباً مکمل چیزی است که در برنامهٔ ترستون وجود دارد. چگونگی اتصال این دو نظریه یکی از بزرگترین چالش‌ها است و این در حالی است که اولین علائم در مورد امکان عملی شدن این اتصال دیده شده است. بدین ترتیب این حوزه هنوز در ابعاد پایین با فیزیک در ارتباط است ولی فی‌الواقع بسیار اسرارآمیز است.

نهایتاً چیزی که لازم می‌دانم به آن اشاره کنم این است که در فیزیک چیزهایی که در کل نقش اساسی را بازی می‌کنند «دوگانگی‌ها» هستند. این دوگانگی‌ها به طور کلی وقتی ظاهر می‌شوند که نظریهٔ کوانتومی به عنوان نظریه‌ای کلاسیک به دو صورت متفاوت تحقق می‌یابد. مثالی ساده از دوگانگی عبارت است از دوگانگی بین موقعیت و اندازه حرکت در مکانیک کلاسیک. در این حالت فضا با فضای دوگان خود تعویض می‌شود و جای خود را به فضای دوگان می‌دهد و در نظریه‌های خطی این دوگانگی چیزی جز تبدیلات فوریه نیست. ولی این که در نظریه‌های غیرخطی تبدیلات فوریه را با چه چیزی جایگزین کنیم خود چالش بزرگی است. خیلی از قسمت‌های ریاضیات با این مسألهٔ مهم درگیرند که چگونه دوگانگی را از حالت‌های خطی به حالت‌های غیرخطی تعمیم دهند. چنین به نظر می‌رسد که فیزیکدانان به طور قابل توجهی می‌توانند این کار را در نظریهٔ ریسمان و نظریهٔ M انجام دهند. آنها مثال‌های زیادی از دوگانگی‌های جالب ارائه می‌دهند که به معنای کلی می‌توانند صورت‌های غیرخطی با بعد نامتناهی از تبدیلات فوریه باشند و جالب این که این مثال‌ها در اینجا مصداق دارند.

ولی فهم دوگانگی‌های غیرخطی همچنین یکی از مسائل بزرگ قرن بیست و یکم است. به نظر می‌رسد که به نوعی باید صحبتم را پایان دهم. کار بسیار است و صحبت در مورد آنها در حضور کثیری از جوانان مثل شما برای شخص مسنی مثل من بسیار دلپذیر و خوشایند است و می‌توانم بگویم در سدهٔ بیست ویکم برای شما کارهای زیادی وجود دارد که انجام دهید.

مترجم: قربانعلی حقیقت دوست بناب
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
gorbanali@yahoo.com

ویراستار: محمد جلوداری ممقانی