فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۱ تا ۱۶

مسائل وارون

محمود حصارکی، مرتضی فتوحی فیروزآباد

چکیده

در این مقاله برای آشنایی با مسائل وارون چند مثال از این گونه مسائل و کاربردهای آنها ارائه می‌گردد. در پایان نیز به مشکلی که عموم مسائل وارون با آن مواجه هستند، یعنی بدرفتاری معادلات، اشاره شده و یکی از راه‌های برخورد با این مشکل مطرح می‌شود.

۱. مقدمه

دو مسأله را وارون یکدیگر گویند، هرگاه صورت‌بندی یکی به اطلاعاتی از مسأله دیگر نیاز داشته باشد. اما همواره یکی از این دو مسأله قبل از دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد و به آن مسألهٔ مستقیم[1] گفته می‌شود. در مقابل مسألهٔ دیگر را وارون آن می‌گویند. تفاوت عمده این دو مسأله از آنجا ناشی می‌شود که در مورد مسألهٔ مستقیم معمولاً اطلاعات خوبی در دست است. مثلاً جواب هر مسأله به طور یکتا از روی داده‌های اولیه تعیین می‌گردد و این جواب پایدار است (بدین معنا که اختلال کوچک در داده‌های اولیه تغییر چندانی در جواب مسأله ایجاد نمی‌کند). این خاصیت جواب‌ها، حداقل انتظاری است که در بررسی مدل‌های فیزیکی از جواب مسأله داریم. بر همین اساس داشتن خواص وجود، یکتایی و پایداری جواب برای یک مسأله به خوش‌رفتاری آن مسأله تعبیر می‌شود و اگر یکی از این سه خاصیت برقرار نباشد، مسأله را بدرفتار گویند. غالب مسائل وارون مهمّی که تاکنون مطرح شده‌اند، بدرفتار می‌باشند، و همین مطلب باعث تقدم بررسی مسائل مستقیم بر مسائل وارون شده است. با بیان صورت مسألهٔ مستقیم، مسأله وارون متناظر آن این گونه مطرح می‌شود که چگونه می‌توان از روی جواب مسألهٔ مستقیم، یکی از داده‌های اولیه را تعیین کرد.

1) direct problem

عمده مباحثی که در هر مسألهٔ وارون مطرح می‌شود، عبارتند از یکتایی جواب، پایداری جواب و ارائه الگوریتمی که به وسیله آن بتوان به جواب وارون رسید. در مثال‌هایی که در بخش‌های ۲ الی ۷ می‌آیند، فقط به معرفی اجمالی مسائل و بیان صورت مسألهٔ وارون پرداخته شده است. برای اطلاع بیشتر از دستاوردهای موجود در هر قسمت به مراجع اشاره شده در هر بخش مراجعه شود. در پایان در بخش ۸ به معرفی مسائل بدرفتار پرداخته و روش‌های منظم‌سازی برای مقابله با اینگونه مسائل مطرح می‌شوند.

۲. جاذبه

اگر f تابع چگالی جسم Ω باشد، میدان جاذبهٔ تولید شده توسط آن در معادلهٔ پواسون[1] همراه با شرط حدی زیر صدق می‌کند:

$$-\Delta u = f \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

این شرط حدی از این حقیقت فیزیکی نتیجه شده است که جاذبه در فاصله بسیار دور از جسم صفر است. در اینجا مسألهٔ مستقیم پیدا کردن میدان جاذبهٔ u از تابع چگالی f است. این مسأله برای هر تابع انتگرال‌پذیر f و حتی برای هر تابع توزیع که خارج Ω صفر باشد، دارای جواب یکتا است و این جواب پایدار است.

مسألهٔ وارون متناظر، پیدا کردن تابع چگالی f با فرض دانستن نیروی جاذبه ∇u روی رویهٔ Γ می‌باشد، که Γ قسمتی از مرز ناحیه‌ای است که Ω را در بر دارد. کاربرد این مسأله در زمین‌شناسی است و به وسیلهٔ آن و با محاسبهٔ نیروی جاذبه می‌توان درون زمین را شناسایی کرد. متأسفانه یکتایی جواب این مسأله وارون برقرار نمی‌باشد و نمی‌توان درون زمین را به طور منحصر به فردی بازیابی کرد. ولی با این حال اگر به دنبال تابع f باشیم که خواص معینی دارد مثلاً این که تابع f هارمونیک باشد، یا این که فقط به یک متغیر وابسته باشد و یا این که از نوع توابع مشخصهٔ $\chi(D)$ باشد که ناحیهٔ D درون Ω قرار دارد، می‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد [۱۰].

علاوه بر تعیین چگالی زمین از روی محاسبهٔ میدان جاذبه، این مسأله در هدایت موشک و هواپیما نیز به کار می‌رود. برای این منظور نیاز به این است که مقدار u در نزدیکی سطح زمین مشخص باشد. به همین منظور میدان جاذبه را به وسیلهٔ ماهواره‌ها در دور دست محاسبه کرده و با استفاده از این مسأله وارون تابع f که این میدان را تولید می‌کند، تعیین می‌گردد. با محاسبه f به راحتی می‌توان میدان را در هر نقطهٔ دلخواه خارج سطح زمین محاسبه کرد. برای اطلاعات بیشتر از نتایج به دست آمده به مراجع [۸]، [۱۰]، [۹] و [۲۰] مراجعه شود.

---

1) Poisson

۳. رسانایی

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای کراندار با مرز هموار باشد و تابع مثبت γ رسانایی Ω را نشان دهد. پتانسیل u در Ω با ولتاژ f روی مرز ناحیه در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= 0 \quad \text{در } \Omega \\ u &= f \quad \text{روی } \partial\Omega \end{aligned} \tag{۱}$$

نگاشت Λ_γ تابع ولتاژ روی مرز را به تابع جریان متناظر می‌کند، یا به عبارت دقیق ریاضی نگاشت دیریکله به نیومن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda_\gamma(f) = \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial\Omega}.$$

در رابطهٔ بالا u جواب معادلهٔ (۱) و ν نشان دهندهٔ بردار عمود خارجی $\partial\Omega$ است. با مشخص بودن رسانایی γ می‌توان نگاشت Λ_γ را تعیین کرد که خود یک مسألهٔ مستقیم است. مسألهٔ وارون متناظر بدین صورت بیان می‌شود که با دانستن نگاشت Λ_γ چگونه می‌توان میزان رسانایی γ را تعیین کرد. در بعضی موارد مسأله وارون با اطلاعات کمتری نیز مطرح می‌شود، مثلاً آیا با دانستن تنها یک مقدار تابع ولتاژ f و جریان $\Lambda_\gamma(f)$ می‌توان رسانایی γ را تعیین کرد؟ تفاوت این سؤال با مسألهٔ قبل در این است که در اینجا تنها کافی است یکبار برای یک ولتاژ خاص، جریان را اندازه بگیریم. در مقابل در مسألهٔ قبل باید برای تمام ولتاژها میزان جریان مشخص باشد.

این مسأله در عکسبرداری تومورها به روش امپدانس [۱] کاربرد دارد. به همین منظور الکترودهایی روی سطح بدن قرار می‌گیرد و جریان الکتریسیته از آنها عبور داده شده و ولتاژ را در الکترودها محاسبه می‌کنند. این مسأله کاربردهای دیگری نیز در اکتشاف معدن و منابع زیرزمینی نیز دارد. برای اطلاع بیشتر از دستاوردهای این بخش به کارهای السااندرینی [۲] به عنوان مثال در [۲] یا کارهای اولمن [۳] در [۱۸] مراجعه شود.

۴. تبدیل رادون

اگر f تابعی تعریف شده در $\mathbb{R}^n$ باشد، تبدیل رادون f که با Rf نشان داده می‌شود، روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌های $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Rf(\gamma) := \int_\gamma f \, d\gamma$$

مسألهٔ وارون در اینجا تعیین R^{-1} می‌باشد، بدین معنا که با دانستن مقدار انتگرال یک تابع روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌ها، چگونه می‌توان آن تابع را پیدا کرد. در حالت خاص و معروف این مسأله

---

1) electrical impedance tomography 2) Alessandrini 3) Uhlman

$\{\gamma\}$ خانواده‌ای از ابرفضاهای $\mathbb{R}^n$ هستند. در [۹] یکتایی جواب وارون و پایداری آن در بعدهای دو و سه بررسی شده است.
این مسأله در بُعد دو در حالتی که خانوادهٔ زیرخمینه‌های $\{\gamma\}$ خطوط راست صفحه باشند، در عکسبرداری تومورها به وسیلهٔ اشعهٔ X کاربرد دارد. در این کاربرد هر انتگرال $Rf(\gamma)$ بیانگر میزان کاهش انرژی اشعه X عبور داده شده از بدن می‌باشد که به وسیلهٔ ابزارهای پزشکی قابل محاسبه است. شناسایی تابع f بیانگر وضعیت داخلی بدن است.

همچنین این مسأله کاربرد دیگری در زمین‌شناسی و اکتشاف منابع زیرزمینی به روش لرزه‌ای[3] دارد. در این روش مسیر موجی که در زمین ایجاد می‌شود بین دو نقطهٔ x و y، منطبق بر ژئودزیک‌های $\gamma(x,y)$ است که از متریک ریمانی $a(x)|dx|^۲$ به دست می‌آیند. تابع a معکوس تابع چگالی درون زمین است. با این فرض زمان عبور موج از نقطه x به y برابر است با

$$\tau(x,y)=\int_{\gamma(x,y)} d\gamma$$

این زمان به وسیلهٔ ابزارهای زمین‌شناسی قابل محاسبه است. مسألهٔ وارون پیدا کردن تابع چگالی a با اطلاعات $\tau(x,y)$ برای مقادیر $x,y\in\Gamma$ می‌باشد که Γ قسمتی از سطح زمین است. برای مطالعهٔ بیشتر به [۴]، [۱۴]، [۱۵] و [۱٦] مراجعه شود.

۵. شنیدن شکل طبل

این مسأله این گونه مطرح شده است که آیا می‌توان با شنیدن صدای طبل و هارمونیک‌های آن شکل آن را تعیین کرد؟ صورت ریاضی این مسأله بدین صورت است که اگر D پوستهٔ طبل باشد و به ارتعاش در آید، جابجایی آن در زمان t که با $F(x,y,t)$ نشان داده می‌شود در معادلهٔ موج

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^۲ F}{\partial t^۲}=c^۲\Delta F\\&F(x,y,t)=\circ \qquad (x,y)\in\partial D\end{aligned} \tag{۲}$$

صدق می‌کند که c مقداری ثابت است. جواب‌های به صورت $F(x,y,t)=u(x,y)e^{iwt}$ بیانگر همان تُن‌های خاصی است که پوسته می‌تواند ایجاد کند و مُدهای طبیعی آن طبل نامیده می‌شوند. با قراردادن رابطهٔ بالا در معادلهٔ (۲) معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta u+\lambda u &= \circ \quad \text{در } D\\ u&=\circ \quad \text{روی } \partial D\end{aligned}$$

مقدار ثابت λ را که معادلهٔ بالا برای آن جواب دارد، مقدار ویژهٔ دیریکله در ناحیهٔ D می‌نامند. ثابت شده است که این مقادیر دنبالهٔ گسسته $\cdots \leqslant \lambda_۳ \leqslant \lambda_۲ \leqslant \lambda_۱$ را ایجاد می‌کنند که $\lambda_n\to\infty$،

3) seismic

و این مقادیر بیانگر همان مدهای طبیعی طبل هستند. مسألهٔ شنیدن شکل طبل که مسألهٔ وارون مقادیر ویژه است، این گونه بیان می‌شود که چگونه با دانستن مقادیر ویژه $\{\lambda_n\}$ شکل D را تعیین کنیم. ثابت شده است که مقادیر ویژهٔ D، برخی ویژگی‌های ناحیه مانند مساحت، محیط و تعداد مؤلفه‌های همبندی را تعیین می‌کند [۱۲]. با وجود این، یکتایی مسألهٔ وارون برقرار نمی‌باشد. در [۵] دو ناحیه متمایز با مرز قطعه قطعه هموار مثال زده شده است که مقادیر ویژهٔ آنها برابر است. ولی همچنان سؤال یکتایی مسألهٔ وارون برای نواحی با مرز هموار، مسأله‌ای باز است. برای مطالعات بیشتر در زمینهٔ مسائل وارون مقادیر ویژه به [۱۳] مراجعه شود.

۶. بازشناسی تصویر

هر تصویر در ناحیهٔ D را به وسیلهٔ تابع $u : D \longrightarrow [\circ, ۱]$ می‌توان نشان داد که $u(x)$ بیانگر میزان روشنایی نقطه x است. به عنوان مثال $u(x) = \circ$، یعنی رنگ نقطهٔ x کاملاً سفید است و $u(x) = ۱$، یعنی کاملاً سیاه. دقت هر دستگاه عکسبرداری محدود است و میزان رنگ نقطه x را به صورت ترکیبی از رنگ نقاط اطراف آن نقطهٔ بیان می‌کند. مدل ریاضی این پدیده را می‌توان با یک عملگر انتگرالی بیان کرد. اگر تصویر به دست آمده از دستگاه عکسبرداری Au باشد، آنگاه Au به صورت زیر به دست آمده است:

$$(Au)(x) = \int_D K(x-y)u(y)\,dy$$

تابع K خارج گوی به شعاع r صفر است. در این صورت میزان رنگ نقطهٔ x در تصویر به دست آمده ترکیبی از رنگ نقاط در r ـ همسایگی آن نقطه است. مسألهٔ وارون در اینجا پیدا کردن تصویر واقعی u از تصویر به دست آمده $Au = v$ است. اهمیت این مسأله واضح است و کاربرد فراوانی در بازشناسی عکس‌های به دست آمده از ماهواره‌ها دارد. در بعضی موارد دستگاه عکسبرداری مقداری اختلال[۱] نیز در تصویر ایجاد می‌کند، به خصوص در تصاویر ماهواره‌ای که تصاویر همراه با مقداری اختلال ارسال می‌شوند. در این صورت u، تصویر واقعی و v، تصویر به دست آمده رابطه زیر را با هم دارند، که η اختلال وارده در تصویر است:

$$Au + \eta = v$$

در این حالت نیز باید با دانستن v بتوان u را محاسبه کرد. به عنوان نمونه در [۳]، [۱۱] و مراجع اشاره شده در آنها روش‌هایی برای بازشناسی تصویر آمده است.

۶. پراکندگی امواج

فرایند پراکندگی موج در اثر قرار گرفتن مانعی بر سر راه میدان امواج صوتی یا الکترومغناطیسی پدید

1) noise

می‌آید. بسته به خواص فیزیکی مانع فرآیند پراکندگی به صورت‌های مختلف مدل می‌شود. در این قسمت فقط به بررسی مدل پراکندگی امواج صوتی می‌پردازیم. برای بررسی این مدل، میدان امواج صوتی را به صورت نوسانی و هارمونیک زمانی در نظر می‌گیرند، یعنی $U(x,t) = \mathrm{Re}\{u(x)e^{-i\omega t}\}$ که $\omega > 0$، فرکانس موج است. بدین ترتیب با قرار دادن $U(x,t)$ در معادلهٔ موج، معادله مستقل از زمان زیر

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

که به معادله هلموتز معروف است، به دست می‌آید. در این معادله $k = \frac{\omega}{c_0} > 0$ عدد موج و c_0 سرعت موج را نشان می‌دهند. این مدل، رفتار موج را در محیط همگن نشان می‌دهد. اگر محیط ناهمگن باشد و سرعت موج در آن تغییر کند، دیگر رفتار موج مطابق این مدل نخواهد بود. ولی به هر حال اگر مانع D بر سر راه موج باشد، میدان امواج در خارج از ناحیهٔ D مطابق معادله هلموتز رفتار می‌کند. اکنون اگر موج u^i در فضا منتشر شود و در اثر برخورد آن با D، موج u^s پراکنده شود، میدان $u = u^i + u^s$ در بیرون ناحیهٔ D تشکیل خواهد شد که در معادلهٔ هلموتز صدق می‌کند. اگر D یک مانع نرم ـ صوت[1] باشد، یعنی فشار موج روی مرز آن صفر است، در این صورت شرط مرزی دیریکله $u = 0$ روی ∂D برقرار است. اگر D، مانع سخت ـ صوت[2] باشد، مؤلفهٔ عمودی سرعت موج روی مرز صفر است و به شرط مرزی نیومن $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ روی ∂D می‌رسیم.

در حالت کلی‌تر روی مرز D مؤلفهٔ عمودی سرعت می‌تواند متناسب با فشار روی مرز باشد. در این حالت شرط مرزی را اَمپدانس[3] گویند:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \qquad \text{روی } \partial D$$

حالت $\lambda = 0$ به شرط مرزی نیومن، سخت ـ صوت، منجر می‌شود و حالت $\lambda = \infty$ همان شرط مرزی دیریکله، نرم ـ صوت است. در ساده‌ترین مدل فرض بر این است که λ ضریب ثابت است، یعنی شرایط فیزیکی مانع در عبور موج همگن است ولی در بعضی از مدل‌ها این ضریب وابسته به مکان تغییر می‌کند [۱]. مدل دیگری نیز برای مسائل پراکندگی موج وجود دارد که ترکیبی از حالات، شرط مرزی دیریکله و امپدانس است. این موانع به موانع به طور موضعی پوشیده شده معروف هستند. در این مدل مرز ∂D به صورت $\partial D = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ تجزیه می‌شود که Γ_D و Γ_I زیرمجموعه‌های باز و جدا از هم ∂D می‌باشند و Π مرز مشترک Γ_D و Γ_I است. بر روی Γ_D شرط مرزی دیریکله حاکم است و بر روی Γ_I شرط امپدانس، یعنی

$$u = 0 \qquad \text{روی } \Gamma_D$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \qquad \text{روی } \Gamma_I$$

انتظاری که در هر کدام از مدل‌های بالا داریم این است که بعد از منتشر شدن موج دلخواه u^i موج

1) sound-soft 2) sound-hard 3) impedance

پراکنده شده u^s در فاصلهٔ بسیار دور شبیه یک موج کروی رفتار کند. این خاصیت با رابطهٔ زیر که به رابطهٔ تشعشعی زامرفلد[۱] معروف است بیان می‌شود:

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s) = \circ \ , \qquad r = |x| \ .$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که رفتار مجانبی میدان u^s به صورت زیر است:

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + o(\frac{\text{۱}}{|x|}) \right\} \ , \qquad |x| \to \infty.$$

در این رابطه $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ است و

$$u^\infty(\hat{x}) = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi} \int\limits_{\partial D} \left\{ u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y).$$

که روی کرهٔ واحد تعریف می‌شود، الگوی میدان دور[۲] میدان u^s نامیده می‌شود.

در غالب مسائل، موج منتشر شدهٔ u^i موج تخت، $u^i(x,d) := e^{ikx\cdot d}$، است که در راستای d منتشر شده است. میدان امواج پراکنده شده و الگوی میدان دور آن را به ترتیب با $u^s(x,d)$ و $u^\infty(\hat{x},d)$ نشان می‌دهند. با شناخت D و ماهیت فیزیکی آن که تعیین کنندهٔ شرط مرزی D می‌باشد، تابع $u^\infty(\hat{x},d)$، برای هر $\hat{x}, d \in \Omega$ قابل محاسبه است. مسألهٔ مستقیم پراکندگی موج، محاسبهٔ میدان امواج پراکنده شده یا الگوی میدان دور برای هر موج دلخواه منتشر شدهٔ u^i است.

در مقابل مسألهٔ وارون پراکندگی موج به این صورت مطرح می‌شود، آیا با دانستن الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x},d)$ برای تمام امواج تخت، ناحیهٔ D قابل شناسایی است؟ اگر به نظر می‌رسد این میزان اطلاعات برای پیدا کردن D زیاد است، می‌توان فرض مسأله را بدین صورت تغییر داد که u^∞ تنها برای تعداد متناهی جهت d یا تنها یک جهت مشخص است. یا این که اصلاً برای یک موج دلخواه u^i که لزوماً تخت نیست، u^∞ مشخص است و آیا می‌توان D و u^s را تعیین نمود؟ البته باید ذکر کرد که الگوریتم‌هایی که تا چندی پیش برای شناسایی D وجود داشتند، علاوه بر اطلاعات کامل $u^\infty(\hat{x},d)$ نیاز به این داشتند که خواص فیزیکی D نیز تا حدودی مشخص باشد و نوع شرط مرزی را از قبل بدانیم. یعنی به فرض سؤال باید این مطلب را اضافه کرد که D، نرم ـ صوت، سخت ـ صوت یا به طور موضعی پوشیده شده است. این در حالی است که در بسیاری از کاربردها مانع D کاملاً ناشناخته است.

اگر مسألهٔ وارون دقیق‌تر مطرح شود، تعیین خواص فیزیکی مانع از روی اطلاعات الگوی میدان دور نیز در صورت مسأله جا می‌گیرد. اینکه بتوان تعیین کرد که مانع سخت ـ صوت است یا نرم ـ صوت و یا این که به طور موضعی پوشیده شده است، یا در حالت امواج الکترومغناطیس بتوان

1) Sommerfeld radiation condition 2) far field pattern

مشخص کرد که مانع رسانای کامل است یا خیر. این مسأله در حالتی که با شرایط مرزی اَمپدانس سروکار داریم با تعیین ضریب اَمپدانس سطح کامل‌تر می‌شود. همچنین در حالت موانع به طور موضعی پوشیده شده می‌تواند این سؤال مطرح شود که کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ علاوه بر این‌ها در بررسی مسائل وارون بحث یکتایی جواب نقش مهمی دارد. بنابراین در کلی‌ترین حالت که همان موانع به طور موضعی پوشیده شده هستند، مسائل وارون را در چهار سؤال می‌توان مطرح کرد:

۱ــ چگونه شکل مانع موج را بازسازی کنیم؟ آیا این بازسازی جواب یکتا دارد؟

۲ــ آیا می‌توان شرایط مرزی را تعیین کرد؟ آیا مانع به طور موضعی پوشیده شده است یا خیر؟

۳ــ کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ آیا می‌توان به جواب یکتا رسید؟

۴ــ خواص الکتریکی سطح پوشیده شده چیست؟ آیا ضریب اَمپدانس به طور یکتا تعیین می‌شود؟

برای آشنایی با آخرین دستاوردها در این زمینه می‌توانید به [٦] و [۱۷] مراجعه کنید. مسائل وارون پراکندگی امواج نقش مهمی در علوم کاربردی نظیر عکسبرداری‌های پزشکی، علم مواد، رادارها و اکتشافات زیرزمینی دارد. در همهٔ این کاربردها با استفاده از خواص پدیدهٔ پراکندگی امواج سعی در شناسایی یک شیء ناشناخته یا خواصی از آن می‌شود.

۸. مسائل بدرفتار

همه مثال‌های قبل به نوعی عملگر پیوسته‌ای مانند $A : X \longrightarrow Y$ را نشان می‌دادند، که در هر مسأله فضاهای X و Y متناسب با آن مسأله تعریف می‌شوند. در هر قسمت مسألهٔ وارون پیدا کردن جواب معادله

$$Ax = y \qquad (۳)$$

برای مقدار مشخص $y \in Y$ است. بنابراین قبل از هر چیز، وجود جواب و یکتایی آن اهمیت خود را نشان می‌دهند. ولی مطلب مهم دیگری که بیش از همه در آزمایش‌های فیزیکی مهم جلوه کرده است، پایداری جواب است. در اندازه‌گیری‌های فیزیکی هیچ وقت مطمئن نخواهیم شد که اندازهٔ محاسبه شده میزان واقعی کمیت مورد نظر است. لذا اگر میزان واقعی کمیت مورد نظر در معادلهٔ (۳)را y بنامیم و کمیت اندازه‌گیری شده را y^δ قرار دهیم، تنها اطلاعی که از میزان واقعی y داریم، این است که ابزار فیزیکی ما با تقریب مثلاً δ، کمیت مطلوب را محاسبه می‌کند، یعنی

$$||y^\delta - y||_Y < \delta.$$

لذا در عمل به جای حل معادله و پیدا کردن x به جواب x^δ می‌رسیم که جواب آن معادله برای مقدار y^δ می‌باشد، یعنی $Ax^\delta = y^\delta$. شرط پایداری تضمین می‌کند که جواب به دست آمده x^δ

نزدیک به جواب واقعی x می‌باشد. در واقع $\|x^\delta - x\| \to 0$ هرگاه $\|y^\delta - y\| \to 0$. بر همین اساس هادامارد[۱] مفهوم خوش‌رفتاری[۲] معادله $Ax = y$ را این گونه تعریف کرد که سه خاصیت وجود جواب، یگانگی جواب و پایداری جواب برای آن برقرار باشد، یا به عبارت دیگر عملگر $A^{-1} : Y \longrightarrow X$ خوش‌تعریف و پیوسته باشد. در غیر این صورت اگر معادلهٔ $Ax = y$ یکی از این سه خاصیت را نداشته باشد، بدرفتار[۳] می‌نامند.

مثال ۱. تابع $u(x,t)$ درجهٔ حرارت یک میله را در زمان t نشان می‌دهد که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{در } (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && t \in (0,T) \\ u(x,0) &= u_0 && x \in (0,1) \end{aligned}$$

عملگر $A : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ مقدار حرارت میله را در زمان T برحسب مقدار آن در زمان صفر نشان می‌دهد یعنی

$$Au_0 = u_T$$

که $u_T(x) = u(x,T)$. در این صورت معادلهٔ $Au_0 = u_T$ بدرفتار است. زیرا اگر $a_k(x) = \sin(\pi k x)$ آنگاه

$$(Aa_k)(x) = e^{-\pi^2 k^2 T}\sin(\pi k x)$$

در این صورت $\|Aa_k\|_{L^2} \to 0$ در حالی که $\|a_k\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

مثال ۲. هر عمگر فشردهٔ $K : X \longrightarrow Y$ که بعد فضای X نامتناهی است، بدرفتار است. زیرا در غیر این صورت K^{-1} پیوسته است و از آنجا که ترکیب دو عملگر فشرده و پیوسته، فشرده خواهد شد، نتیجه می‌شود که $I = K^{-1}K : X \longrightarrow X$ فشرده است و این مطلب با فرض بعد نامتناهی X تناقض دارد. نمونه خوبی از عملگرهای فشرده، عملگرهای انتگرالی

$$(Af)(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)\,dy$$

می‌باشند که در مسائل وارون مختلفی ظاهر می‌شوند، مانند مثال ۱ یا مسائل مطرح شده در بخش‌های ۲ و ٦.

1) Hadamard 2) well-posedness1) 3) ill-posed

از آنجا که عموم مسائل وارون بدرفتار هستند، لذا در نظریهٔ مسائل وارون بررسی مسائل بدرفتار اهمیت به سزایی دارد. هر چند با انتخاب فضاهای مناسب می‌توان مشکل وجود و یکتایی آن را برطرف کرد، ولی از آنجا که اهمیت مسائل وارون در کاربردهای فیزیکی آنها و حل عددی می‌باشد، لذا بحث پایداری از اهمیت بسیاری برخوردار است. یکی از راه‌های برخورد با این مشکل آن است که نُرم فضاهای X و Y را تغییر دهیم تا عملگر A^{-1} پیوسته شود. اما این روش برای بسیاری از مسائل مناسب نیست، چرا که محدودیت‌های فیزیکی مسألهٔ فضاهای X، Y و نرم‌های آنها را تعیین می‌کنند. راه دیگر، روش‌های منظم‌سازی[1] است که در بخش بعد مطرح خواهد شد.

۱.۸ روش‌های منظم‌سازی

به‌وسیلهٔ روش‌های منظم‌سازی می‌توان تقریبی از جواب هر معادلهٔ بدرفتار را به دست آورد که پایدار نیز باشد. فرض کنید $A : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی و یک به یک باشد. همان طور که در بخش قبل نیز اشاره شد، شرط یک به یکی را با انتخاب مناسب فضای X می‌توان برقرار کرد. قرار است معادلهٔ $Ax = y$، با دانستن تقریب y^δ از y حل شود که

$$\|y^\delta - y\| \le \delta.$$

وقتی $y \in \operatorname{Im} A$، معادلهٔ $Ax = y$ جواب یکتا دارد. اما برای مقدار مختل شدهٔ y^δ دیگر لزومی برای برقراری شرط $y^\delta \in \operatorname{Im} A$ و وجود جواب مسأله نیست. روش‌های منظم‌سازی برای مقدار y^δ، مقدار x^δ را متناظر می‌کند که علاوه بر این که تقریبی از جواب $Ax = y$ می‌باشند، پایدار نیز هستند. یعنی اگر δ به صفر میل کند، آنگاه x^δ نزدیک x خواهد شد. در حالتی که عملگر A پایدار نباشد، $A^{-1} : \operatorname{Im} A \longrightarrow X$ بیکران است. در روش‌های منظم‌سازی برای پیدا کردن جواب پایدار معادله تقریبی از عملگر A^{-1} ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۱ X و Y فضاهای نرم‌دار بوده و $A : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی و یک به یک است. خانواده عملگرهای خطی $R_\alpha : Y \longrightarrow X$، $\alpha > 0$، را طرح منظم‌سازی عملگر A گویند، هرگاه برای هر $x \in X$،

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A x = x.$$

پارامتر α را پارامتر منظم‌سازی می‌نامند. از این تعریف به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $y \in \operatorname{Im} A$، $R_\alpha y \to A^{-1} y$ وقتی $\alpha \to 0$. قضیه زیر نشان می‌دهد در حالتی که عملگر A فشرده باشد، همگرایی خانواده R_α نمی‌تواند یکنواخت باشد.

قضیهٔ ۱. X و Y فضاهای نرم‌دار و $A : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی و فشرده است و $\dim X = \infty$. در این صورت اگر خانوادهٔ عملگرهای $\{R_\alpha\}$، طرح منظم‌سازی عملگر A باشند، آنگاه:

1) regularization methods

۱− عملگرهای $\{R_\alpha\}$ به طور یکنواخت کراندار نیستند، یعنی زیردنبالهٔ $\{\alpha_j\}$ وجود دارد که $\|R_{\alpha_j}\| \to \infty$ وقتی $\alpha_j \to 0$.

۲− دنبالهٔ عملگرهای $\{R_\alpha A\}$ وقتی $\alpha \to 0$ به طور یکنواخت همگرا نمی‌باشد.

اثبات. قضیه ۴−۴ در مرجع [٦].

به وسیلهٔ طرح منظم‌سازی R_α جواب x از معادلهٔ $Ax = y$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta.$$

خطای تقریب به دست آمده عبارت است از:

$$\begin{aligned}\|x_\alpha^\delta - x\| = \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Ax - x\| &\leq \|R_\alpha\|\|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \delta\|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|\end{aligned}$$

اگر α ثابت بماند و $\delta \to 0$، جملهٔ اول به صفر میل می‌کند ولی مقدار جملهٔ دوم ثابت است و میزان خطا به اندازهٔ دلخواه کوچک نمی‌شود. همچنین اگر δ را ثابت نگه داریم و $\alpha \to 0$، جمله دوم به صفر میل می‌کند، اما بنا بر قضیهٔ قبل جمله اول بزرگ می‌شود. برای رسیدن به یک جواب پایدار، هر طرح منظم‌سازی شامل روشی برای انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ بر حسب δ است، تا میزان خطای کل به اندازهٔ قابل قبولی کوچک شود.

تعریف ۲. طرح منظم‌سازی R_α همراه با انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ را قابل قبول گویند هرگاه برای هر $x \in X$ و $\|y^\delta - Ax\| \leq \delta$ داشته باشیم:

$$\alpha(\delta) \to 0 , \quad \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| \to 0$$

وقتی $\delta \to 0$.

در دو بخش بعدی دو نمونه از طرح‌های منظم‌سازی، به همراه انتخاب قابل قبول پارامتر منظم‌سازی ذکر می‌شود. کتاب‌های [٦]، [۹]، [۱۳] و [۱۹] مراجع مناسبی در این زمینه می‌باشند.

۲.۸ تجزیه مقادیر تکین

X و Y فضاهای هیلبرت بوده و عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ فشرده می‌باشد. در این صورت عملگر الحاقی A که با $A^* : Y \longrightarrow X$ نشان داده می‌شود، نیز فشرده است. عملگر فشرده، خودالحاق و نامنفی $A^*A : X \longrightarrow X$ دارای مقادیر ویژهٔ زیر می‌باشد:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots > 0$$

دنبالهٔ متعامد یکهٔ $\{u_n\}$ در X موجود است که

$$A^* A u_n = \lambda_n u_n.$$

با قرار دادن $\mu_n = \lambda_n^{1/2}$ و $v_n = \frac{1}{\mu_n} A u_n$، دنبالهٔ $\{v_n\}$ متعامد یکه خواهد شد و

$$A u_n = \mu_n v_n \ , \qquad A^* v_n = \mu_n u_n.$$

دنبالهٔ (μ_n, u_n, v_n) را دستگاه تکین[1] عملگر A می‌نامند. اگر عملگر A یک به یک باشد، دنبالهٔ $\{u_n\}$ پایهٔ متعامد یکه برای X خواهد بود. در این صورت هر مقدار $x \in X$، تجزیه‌ای به صورت زیر دارد:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n.$$

همچنین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, u_n) v_n.$$

در صورتی که $y \in N(A^*)^{\perp}$، جواب معادلهٔ $Ax = y$ بدین شکل قابل محاسبه است:

$$x = A^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, v_n)}{\mu_n} u_n.$$

این رابطه طبیعت بدرفتاری معادلهٔ $Ax = y$ را به خوبی نمایش می‌دهد. چرا که اگر $y^\delta = y + \delta v_n$ آنگاه $x^\delta = x + \frac{\delta v_n}{\mu_n}$ و خطای به دست آمده عبارتست از:

$$\|x^\delta - x\| = \frac{\|y^\delta - y\|}{\mu_n}.$$

یعنی با مقادیر مختلف y^δ که در تقریب $\|y^\delta - y\| = \delta$ صدق می‌کنند، میزان خطای جواب معادله به اندازهٔ کافی می‌تواند بزرگ باشد، چرا که $\mu_n \to 0$. بر همین اساس نرخ صفر شدن مقادیر تکین μ_n، معیاری برای میزان بدرفتاری معادلهٔ $Ax = y$ ارائه می‌کند.

برای از بین بردن بدرفتاری معادله می‌توان تأثیر عامل $\frac{1}{\mu_n}$ را با قرار دادن فیلتر مناسبی کم کرد و منظم سازی R_α را به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_\alpha(\mu_n)}{\mu_n} (y, v_n) u_n.$$

توابع $\omega_\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ باید دارای خواص زیر باشند:

---

1) singular system

۱− برای هر α، ω_α کراندار است. این شرط همگرایی سری فوق را تضمین می‌کند.

۲− برای هر α، $\sup\limits_{0<s} |\frac{\omega_\alpha(s)}{s}| < \infty$. در این صورت R_α پیوسته خواهد بود و
$\|R_\alpha\| \leq \sup\limits_{0<s} |\frac{\omega_\alpha(s)}{s}|$.

۳− برای هر مقدار $s > 0$، $\lim\limits_{\alpha\to 0} \omega_\alpha(s) = 1$. از این شرط، نتیجه می‌شود که، $R_\alpha Ax \to x$.

مثال ۳. با قرار دادن $\omega_\alpha(s) = \begin{cases} 1, & s > \alpha \\ 0, & s \leq \alpha \end{cases}$، طرح منظم‌سازی R_α به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_\alpha y = \sum_{\mu_n > \alpha} \frac{1}{\mu_n}(y, v_n)u_n,$$
$$\|R_\alpha\| \leq \tfrac{1}{\alpha}.$$

در R_α سری $A^{-1}y$ از یک جا به بعد بریده شده است. اگر α کوچک انتخاب شود این سری به $A^{-1}y$ نزدیک‌تر می‌شود و دقت جواب بیشتر خواهد بود. از طرف دیگر برای به دست آوردن پایداری نیاز است که α بزرگ باشد. با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$، $0 < p < 1$، می‌توان تعادلی بین دقت و پایداری برقرار کرد. در این صورت میزان خطا عبارتست از:

$$\delta^{1-p} + \|R_{\alpha(\delta)}Ax - x\|,$$

که می‌تواند با انتخاب مناسب δ به اندازه کافی کوچک شود.

مثال ۴. (منظم‌سازی تیخونوف[1]). طرح منظم‌سازی به دست آمده از توابع $\omega_\alpha(s) = \dfrac{s^2}{s^2+\alpha}$ را تیخونوف نامند و داریم:

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

می‌توان پارامتر منظم‌سازی را با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$، $0 < p < 2$، قابل قبول کرد.

۳.۸ منظم‌سازی تیخونوف

عملگر خطی و پیوسته $A : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای هیلبرت X و Y مفروض است. در این صورت بهترین جواب معادلهٔ $Ax = y$ در حالتی که $y \notin \operatorname{Im} A$، پیدا کردن مقدار $\hat{x} \in X$ است که

$$\|A\hat{x} - y\| = \min_{x\in X} \|Ax - y\|.$$

1) Tikhonov Regularization

مقدار $\hat{x} \in X$ در رابطهٔ بالا صدق می‌کند اگر و تنها اگر $A^*A\hat{x} = A^*y$. این معادله همچنان بدرفتار است و برای حل این مشکل جملهٔ $\alpha J(x)$ را به می‌نیمم‌ساز اضافه می‌کنیم. تابع جریمهٔ[1] J، تابعی نیم‌پیوسته پایینی و مثبت می‌باشد. در این صورت طرح منظم‌سازی R_α را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_\alpha(y) = \arg\min_{x \in X}\{\|Ax - y\|^۲ + \alpha J(x)\}.$$

تابع $\arg\min$ مقداری را نسبت می‌دهد که از آن می‌نیمم به دست می‌آید. اگر $J(x) = \|x\|^۲$، طرح منظم‌سازی R_α را تیخونوف نامند و $x_\alpha = R_\alpha y$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$(\alpha I + A^*A)x_\alpha = A^*y.$$

در حالتی که A فشرده باشد، عملگر $\alpha I + A^*A$ دوسویی است و وارون پیوسته دارد و طرح منظم‌سازی R_α عبارت است از:

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-۱}A^*.$$

به راحتی می‌توان دید که R_α همان طرح منظم‌سازی مثال ۴ است. (برای اثبات این مطلب که R_α طرح منظم‌سازی است به قضایای ۴—۱۳ و ۴—۱۴ در [٦] مراجعه شود.)

در [۱۹] نمونه‌های مختلفی از توابع جریمه معرفی شده است. انتخاب مناسب تابع جریمه می‌تواند در به دست آوردن نتایج مطلوب، مفید واقع شود. به عنوان نمونه به [۳] مراجعه شود که مسأله بازشناسی تصویر را بررسی می‌کند. در آنجا تابع جریمه به گونه‌ای تعیین می‌شود که جواب مسأله مرز شکل‌های مختلف را حفظ کند.

در پایان برای انتخاب قابل قبول α در طرح منظم‌سازی تیخونوف روش دیگری ارائه می‌شود که به اصل اختلاف[2] معروف است.

قضیهٔ ۲. اگر عملگر $A : X \longrightarrow Y$ خطی، فشرده و یک به یک باشد که تصویرش در Y چگال است، برای مقدار $y \in Y$ و $\|y\| > \delta > ۰$، می‌توان پارامتر α را به طور یکتا تعیین کرد که

$$\|AR_\alpha y - y\| = \delta.$$

اثبات. قضیه ۴—۱۵ در کتاب [٦].

از طرف دیگر با توجه به رابطهٔ

$$x_\alpha = R_\alpha y^\delta = \arg\min_{u \in X}(\|Au - y^\delta\|^۲ + \alpha\|u\|^۲)$$

اگر x جواب واقعی معادلهٔ $Ax = y$ باشد، خواهیم داشت:

1) penalty function 2) discrepancy principle

$$\begin{aligned}\|Ax_\alpha - y^\delta\|^2 + \alpha\|x_\alpha\|^2 \le \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 &= \|y - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \\ &= \delta^2 + \alpha\|x\|^2\end{aligned}$$

با توجه به انتخاب α از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $\|x_\alpha\| \le \|x\|$. از طرف دیگر وقتی $\delta \to 0$، همگرایی ضعیف $x_\alpha \rightharpoonup x$ برقرار است. برای نشان دادن این مطلب کافی است برای هر $z \in Y$ عبارت زیر به صفر میل کند، زیرا که تصویر A^* چگال است ($\overline{\operatorname{Im} A^*} = N(A)^\perp$).

$$\begin{aligned}|(x_\alpha - x, A^* z)| &= |(Ax_\alpha - Ax, z)| = |(AR_\alpha y^\delta - y^\delta + y^\delta - y, z)| \\ &\le (\|AR_\alpha y^\delta - y^\delta\| + \|y^\delta - y\|)\|z\| \le 2\delta\|z\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

بنابراین از همگرایی ضعیف $x_\alpha \rightharpoonup x$ و رابطهٔ $\|x_\alpha\| \le \|x\|$ نتیجه می‌شود که میزان خطای جواب وقتی $\delta \to 0$، به صفر میل خواهد کرد:

$$\|x_\alpha - x\|^2 = \|x_\alpha\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_\alpha, x\rangle + \|x\|^2 \le 2\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_\alpha, x\rangle \longrightarrow 0.$$

مراجع

[1] Akduman I. and Kress R., Direct and Inverse Scattering Problems for inhomogeneous impedance cylinders of arbitrary Shape, *Radio Science*, vol. 38, No. 6, (2003) 1110.

[2] Alessandrini G. and Gabouro, R., Determining Conductivity with Special anisotropy by boundary measurements, *SIAM J. Math. Anal.,* **33**, 1 (2001) 153–171.

[3] Aubert G. and Vese L., A variational method in Image recovery, SIAM J. *Numer. Anal.*, **34**, 5, (1997) 1948–1979.

[4] Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W. and Jr., *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration and inversion*, Springer-Verlag, New York, (2001).

[5] Chapman S.J., Drums that Sound the same, *Amer. Math. Monthly,* **102**, 2, (1995) 124–138.

[6] Colton D. and Kress R., *Inverse acoustic and electromagnetic Scattering theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).

[7] Fotouhi M., *Inverse Scattering Problems*, Phd Thesis, Sharif University of Thechnology (2005).

[8] Glasko V.B., *Inverse problems of mathematical physics*, American Institute of Physics, New York (1984).

[9] Isakov V., *Inverse Source Problems*, Math. Surveys and Monographs Series, vol. 34, AMS, providence, R.I. (1990).

[10] Isakov V., *Inverse problems for partial differential equations*, Springer-Verlag, New York (1998).

[11] Jain A.K., *Fundamentals of digital image processing*, Prentice-Hall, New York (1989).

[12] Kac M., Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73**, 4, (1966) 1–23.

[13] Kirsch A., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York (1996).

[14] Louis A.K., *Medical imaging State of art and future developments Inverse Problems*, **89** (1992) 709–738.

[15] Louis A.K. and Natterer F., *Mathematical Problems in Computerized tomography*, Proc. IEEE, **71**, (1983) 379–384.

[16] Natterer F., *The mathematics of Computerized Tomography*, Teubner-Verlag, Stuttgart (1986).

[17] Potthast R., *Point Sources and multiples in inverse scattering theory*, Chapman&Hall/CRC (2001).

[18] Uhlmann G., *Recent progress in the anisotropic electrical impedance problems*, Proceedings of the USA-Chile workshop on Nonlinear Analysis, J. Diff. Eqns., Conf. 06 (2001), 303–311.

[19] Vogel C.R., *Computational methods for inverse problems*, SIAM (2002).

[20] Zidarov D., *Inverse gravimetric problems in geoprospecting and geodesy*, elsevier, Amsterdam (1980).

محمود حصارکی
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: hesaraki@sina.sharif.edu

مرتضی فتوحی فیروزآباد
دانشگاه‌صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: fotouhi@sina.sharif.edu