فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۱۷ تا ۳۸

تاریخچهٔ انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی از ۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰

رابرت ژارو و فیلیپ پروتر[۱]

تاریخ انتگرال‌گیری تصادفی و یافتن الگویی برای قیمت‌گذاری قراردادهای بازار بورس، هر دو به حرکت براونی بازمی‌گردد، بنابراین بحث را از حرکت براونی آغاز می‌کنیم. کوشش‌های اولیه برای ارائهٔ الگوی ریاضی حرکت براونی از سه منبع مختلف سرچشمه می‌گیرد که هیچ کدام ارتباطی با دیگری نداشته است: اولی کار ت. ن. تیله[۲] در کپنهاگ در سال ۱۸۸۰ بود که هنگام مطالعهٔ سری‌های زمانی، الگوی هوشمندانه‌ای برای حرکت براونی ابداع کرد [۸۰][۳]. دومی به کارهای ل. بشیلیه[۴] در پاریس مربوط می‌شود که هنگام مطالعهٔ رفتار پویای بازار بورس پاریس در سال ۱۹۰۰، الگویی برای حرکت براونی ارائه داد (مراجع [۱]، [۲] و [۱۱] را ملاحظه کنید). بالأخره منبع سوم، الگویی بود که آلبرت اینشتین در سال ۱۹۰۵ برای حرکت ذرات ریز معلق در یک مایع ارائه کرد تا فیزیکدانان دیگر را درباره ماهیت مولکولی ماده، متقاعد سازد (برای ملاحظهٔ شرحی از انگیزه‌های اینشتین و توصیف الگوی او به [۶۳] رجوع کنید). از این سه الگو، الگوهای تیله و بشیلیه در طولانی مدت بروز چندانی نداشتند، لکن الگوی اینشتین تأثیر خود را بلافاصله نشان داد.

از آنجا که بسیاری، بشیلیه را بنیان‌گذار ریاضیات مالی می‌دانند، آنچه را بر او گذشت قدری مبسوط‌تر بیان می‌کنیم. بشیلیه، پس از کار تیله (که در زمان خودش مورد اقبال چندانی واقع نشد) و پیش از کار اینشتین، تلاش کرد تا نوفه‌های بازار بورس پاریس را الگوسازی کند. در این راه، سپس با الهام از ایده‌های مربوط به قضیهٔ حد مرکزی و درک این مطلب که نوفه‌های بازار می‌بایست بی‌حافظه باشند، استدلال کرد که نموهای قیمت‌های کالاها باید مستقل و دارای توزیع نرمال باشند.

1) Robert Jarrow and Philip Protter   2) T. N. Thiele

۳) این مطلب را رانگار نوربرگ به ما گوشزد کرد که از او تشکر می‌کنیم و یادآوری می‌کنیم که سهم تیله در بسط این موضوع به‌طور مشروح در مقاله‌ای از هالد [۳۰] آمده است.

4) L. Bachelier

استدلال خویش را با ویژگی‌های مارکفی و نیمگروهی در هم آمیخت و با استفاده از این‌که هستهٔ گاوسی، جواب اساسی معادلهٔ حرارت است، حرکت براونی را به معادلهٔ حرارت مرتبط ساخت. او همچنین توانست سایر فرآیندهای مرتبط با حرکت براونی را نیز تعریف کند، برای مثال فرآیند ماکسیمم تغییرات در یک بازهٔ زمانی برای حرکت براونی یک‌بعدی را با استفاده از قدم‌زدن تصادفی و کوچک ساختن طول قدم‌ها با عمل حدگیری به سمت صفر، تعریف کرد. رسالهٔ دکتری او را استاد مشاورش هانری پوانکاره تمجید فراوان کرد، لکن عمدتاً به‌خاطر بی‌میلی که در آن زمان نسبت به مطالعهٔ اقتصاد به عنوان بخشی از کاربردهای ریاضی وجود داشت، نتوانست به جمع نخبگان ریاضی پاریس بپیوندد و باقی عمر خویش را بسیار دور از پاریس در روستایی در مرکز بیزانسن در شرق فرانسه نزدیک سوئیس گذراند (شرحی از این داستان غم‌انگیز در مرجع [۱۱] آمده است). باز می‌گردیم به الگوی اینشتین. به زبان امروزی، اینشتین حرکت براونی را فرآیندی تصادفی معرفی کرده بود که مسیرهای پیوسته و نموهای مستقل با توزیع گاوسی مانا دارد. او ویژگی‌های فیزیکی دیگری از قبیل طول‌پذیری مسیرها را برای الگوی خود قائل نشد که البته اگر این ویژگی اخیر را نیز لحاظ کرده بود، اکنون می‌دانستیم فرآیندی که او معرفی کرده بود، وجود خارجی ندارد. با این حال، اینشتین نتوانست نشان دهد که این فرآیند به عنون یک شیء ریاضی واقعاً وجود دارد که البته این مطلب قابل درک است، زیرا ایده‌های بُرل و لبگ در ساختن نظریهٔ اندازه طی دههٔ نخست قرن بیستم شکل گرفت در حالی که اینشتین فرآیند مزبور را در سال ۱۹۰۵ ارائه کرده بود. در سال ۱۹۱۳، رویکرد دانیل دربارهٔ نظریهٔ اندازه (که در آن انتگرال پیش از اندازه تعریف می‌شود) به صحنه آمد و ن. وینر[1] توانست در سال ۱۹۲۳ به کمک این رویکرد همراه با سری‌های فوریه، حرکت براونی را بسازد و دیدگاه فیزیکی اینشتین را جامهٔ ریاضی بپوشاند. وینر و دیگران، بسیاری از ویژگی‌های مسیرهای حرکت براونی را ثابت کردند که این کار، تا به امروز نیز ادامه یافته است. دو ویژگی کلیدی حرکت براونی که به انتگرال‌گیری تصادفی مربوط می‌شوند عبارتند از:

(۱) مسیرهای حرکت براونی، تغییرات مرتبه دوم کراندار ناصفر دارند طوری که روی بازهٔ (s,t) مقدار تغییرات مرتبه دوم برابر است با $t-s$ ،

(۲) مسیرهای حرکت براونی، قریب به یقین روی بازه‌های زمانی فشرده، تغییرات بی‌کران دارند.

البته ویژگی دوم به سادگی از اولی به‌دست می‌آید.

توجه کنید که اگر اینشتین فرض کرده بود که مسیرها طول‌پذیرند، آن‌گاه اثبات وینر نشان می‌داد که وجود چنین الگویی غیرممکن است. معمولاً به خاطر ارج نهادن به کار وینر، حرکت براونی رافرآیند وینر نیز می‌نامند. وینر، یک انتگرال چندگانه نیز ساخت امّا این موضوع ارتباطی به آنچه امروزه «انتگرال چندگانهٔ وینر» می‌نامیم ندارد، در واقع در سال ۱۹۵۱ ک. ایتو[2] ضمن تلاش برای درک مقالات وینر که کار چندان ساده‌ای هم نبود، اندیشه‌های وینر را منظم کرد و اصلاحات زیادی در آن‌ها انجام داد [۳۶].

1) N. Wiener 2) Kiosi Itô

قدم بعدی را در آماده‌سازی بستر تعریف برای انتگرال تصادفی، آ. ن. کلموگرف برداشت. نظریهٔ انتگرال تصادفی از دیدگاه غیر مالی، از همان روزهای نخست شکل‌گیری، با نظریهٔ فرآیندهای مارکف درهم آمیخت که البته در این جریان، کلموگرف نقشی اساسی بازی کرد. در واقع، کلموگرف در سال ۱۹۳۱، درست دو سال پیش از آن‌که در کتاب مشهورش مبانی ریاضی نظریهٔ احتمال را با استفاده از نظریهٔ اندازه پایه‌گذاری کند، اشاراتی مختصر به روش بشیلیه در ساختن حرکت براونی داشته است ([۴۱]، صفحات ۶۴ و ۱۰۲–۱۰۳). به‌علاوه در همین مقاله بخش زیادی از نظریه‌اش را در باب فرآیندهای مارکف ارائه داده است. به‌خصوص در همین مقاله، نشان داد که فرآیندهای مارکف پیوسته (فرآیندهای نفوذ) اساساً فقط به دو پارامتر بستگی دارند، یکی سرعت پیشروی و دیگری اندازهٔ بخش تصادفی خالص (مؤلفهٔ نفوذی). سپس توانست توزیع‌های احتمال فرآیند را به جواب‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مربوط سازد و آن معادلات را حل کند که امروزه آن‌ها را «معادلات کلموگرف» می‌نامیم. البته کلموگرف به نظریهٔ انتگرال ایتو دسترسی نداشت و از این‌رو، مبنای کار خود را آنالیز نیمگروه‌ها و مولدهای بی‌نهایت کوچک آن‌ها و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاصل، قرار داد.[1] پس از کلموگرف، به سراغ داستان جالب و غم‌انگیز وینسنت دوبلین[2] (با نام اصلی ولفگانگ دوبلین) می‌رویم که پسر نویسندهٔ مشهور آلفرد دوبلین بود. خانوادهٔ دوبلین به‌خاطر فرار از نازی‌های آلمان، ابتدا به سوئیس و سپس به پاریس گریختند. ولفگانگ، به وینسنت دوبلین تغییر نام داد و شهروند فرانسوی شد. دوران دبیرستان خود را در فرانسه به پایان رساند و دیری نپایید که هوش سرشار ریاضی او آشکار گشت. در اواخر دههٔ ۱۹۲۰، نظریهٔ احتمال در میان ریاضی‌دانان به خصوص در دو مرکزیت مسکو و پاریس، در حال شکل‌گیری بود. دوبلین به احتمال‌دانان پیوست و به کار بر روی زنجیرهای مارکف و سپس فرآیندهای مارکف مشغول شد[3].

۱) ج. ل. دوب [۱۷] از این موضوع ابراز ناخشنودی می‌کند که روش‌های حاوی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای منسوب به کلموگرف و فِلِر که در مطالعهٔ فرآیندهای مارکف به‌کار گرفته می‌شوند، غالباً روش‌های «آنالیزی» خوانده می‌شود، در حالی‌که روش دیفرانسیل‌های تصادفی منسوب به ایتو، «احتمالاتی» نام گرفته است. او می‌نویسد: « عده‌ای از ریاضی‌دانان تصور می‌کنند که اگر به ویژگی‌های آنالیزی و امید ریاضی پرداخته شود، آن‌گاه این مطلب بخشی از آنالیز است در حالی‌که اگر به بررسی دنباله‌های نمونه‌ای و توابع نمونه‌ای بپردازیم، آن‌گاه موضوع، احتمالات است نه آنالیز». سپس دوب تلاش می‌کند که متقاعد سازد هر دو روش احتمالاتی هستند. با این حال نظر ما بر این است که روش‌های ایتو در تغییر شهود احتمالاتی حاکم بر فرآیندهای مارکف، تأثیر داشته است.

2) Vincent Doeblin

۳) دوب در کتاب خود [۱۷] اشارات فراوانی به کارهای زیربنایی دوبلین روی زنجیرهای مارکف و فرآیندهای مارکف دارد. پال لوی در مقاله‌ای که پس از مرگ دوبلین به خاطر پاسداشت کارهای او منتشر کرد، می‌نویسد:
«به جرأت می‌گویم که پس از آبل و گالوا، تعداد ریاضی‌دانانی که در جوانی مردند و پشت سر خویش انبوهی از کارهای مهم را بر جای گذاشتند، به انگشتان یک دست هم نمی‌رسد و دوبلین یکی از آن‌ها بود.» [۴۴]

دوبلین می‌خواست فرآیندی تصادفی بسازد که مسیرهای پیوسته دارد و با نظریهٔ آنالیزی کلموگرف دربارهٔ احتمال‌های گذرِ فرآیندهای مارکف، سازگاری داشته باشد و سرانجام چارچوبی برای مطالعهٔ این گونه فرآیندها ارائه کرد که با درنظر گرفتن پیشرفت‌های آتی، بسیار آینده نگرانه بود. دوبلین یادداشت اولیه‌ای از یافته‌هایش تهیه نمود و تصمیم گرفت بدون چاپ کردن آن‌ها، به تحقیقات خویش ادامه دهد. لکن پیش از آن‌که به آلمان عزیمت کند، طرح‌واره‌ای از ایده‌هایش تهیه کرد و آن‌ها را به بخش امانات آکادمی ملی علوم فرانسه سپرد تا صد سال دیگر توسط خود او یا فرد دیگری گشوده شود. به نظر می‌رسد دوبلین به خاطر این‌که اندیشه‌هایش به دست نازی‌ها نیفتد، آن‌چه از یادداشت‌هایش باقی مانده بود را سوزانده و سپس به زندگی خویش پایان داده‌است. در ماه می سال ۲۰۰۰ بخش امانات آکادمی به درخواست برادر او کلود دوبلین باز شد و تازه معلوم شد که در کارهای دوبلین چه بصیرت علمی بالایی وجود داشته است. او در یادداشت‌هایش از مفهوم جدید مارتینگل که در سال ۱۹۳۹ توسط جی. ویل [1] معرفی شد، استفاده کرده بوده است، به‌علاوه بر اهمیت مطالعهٔ مسیرهای نمونه‌ای به جای تمرکز بر ویژگی‌های توزیع‌های متناهی ــ بعد واقف بوده است. از جمله ایده‌هایی که داشته است، طی کردن حرکت براونی با یک ساعت تصادفی است که امروزه آن را بحثی با عنوان تغییر زمان می‌شناسیم. سپس تغییر زمان را با ضرایب معادلهٔ نفوذ مرتبط ساخته و به این طریق توانسته بود روش جدیدی را در بررسی این دست معادلات ارائه کند که ده‌ها سال پس از او توسط دیگران به انجام رسید.[2]

حال به سراغ کیوشی ایتو، پدر انتگرال تصادفی، می‌رویم. قصد نداریم مختصرنامهٔ زیبایی را که وارادان و استروک [3] در سال ۱۹۸۷ از کارهای علمی ایتو تهیه کردند [۸۲]، بازگویی کنیم، بلکه می‌خواهیم بخش‌های کوتاهی را که به نظر ما نقطهٔ عطف فعالیت‌های اوست، بیان کنیم. شکی نیست که یکی از نخستین انگیزه‌های ایتو برای مطالعهٔ انتگرال‌های تصادفی، پایه‌گذاری تعبیر درستی از دیفرانسیل تصادفی بوده است که بتوان آن را در بررسی فرآیندهای مارکف به‌کار گرفت و این دقیقاً همان کاری بود که پیش از او دوبلین قصد انجامش را داشت، هرچند که کار دوبلین به بخش امانات آکادمی علوم فرانسه سپرده شد که تا ده‌ها سال نیز از چشم دیگران پنهان بماند. در انتگرال وینر نمی‌توان فرآیندهای تصادفی را به عنوان انتگرالده به‌کار برد در حالی‌که اگر بخواهیم برای مثال یک فرآیند نفوذ را به صورت جوابی از یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی نمایش دهیم، گریزی از چنین انتگرالده‌هایی نخواهد بود. در واقع، خود ایتو این انگیزه را به این صورت بیان می‌کند:

---

1) J. Ville

۲) نگارندهٔ دوم این مقاله مایل است از مارک یور به خاطر ارسال مقالهٔ زیبایی که به همراهی برنارد بریو نگاشته است [٦] تشکر کند. این مقاله به علاوهٔ مقالهٔ مبسوط‌تر [۷] منابعی هستند که در شرح کارهای دوبلین، از آن‌ها استفاده شده است. اخیراً نیز داستان دوبلین در کتابی به شکل زندگی‌نامه درج شده است [٦۴].

3) S. Varadhan and D.W. Stroock

«در این مقالات[۱] به روش‌های آنالیزی نیرومندی برای مطالعهٔ احتمال‌های گذر فرآیندها برخورد کردم، منظورم معادلهٔ سهموی کلموگرف و توسیعی از آن است که فلر ارائه کرده است. امّا می‌خواهم مسیرهای فرآیندهای مارکف را همان‌طوری مطالعه کنم که لوی به فرآیندهای دیفرانسیلی می‌نگریست. دیدگاه شهودی را که کلموگرف در به‌دست آوردن معادلاتش برگزیده بود و در مقدمهٔ این مقالات شرح داده است، پیش چشم قرار دادم و متوجه شدم که یک ذرهٔ مارکفی در هر لحظه به ازای آینده‌ای بسیار کوچک، یک فرآیند دیفرانسیلی همگن زمانی را می‌پیماید و به این ترتیب به مفهوم معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی حاکم بر مسیرهای یک فرآیند مارکف رسیدم که می‌شد آن را بر حسب دیفرانسیل‌های یک فرآیند دیفرانسیلی تنها بیان کرد.[۲]» (مرجع [۳۷] را ملاحظه کنید).
اولین مقالهٔ ایتو دربارهٔ انتگرال‌گیری تصادفی در سال ۱۹۴۴ منتشر شد [۳۴]، درست همان سالی که کاکوتانی دو یادداشت کوتاه دربارهٔ ارتباط حرکت براونی و توابع همساز منتشر ساخت. همچنین طی دههٔ ۱۹۴۰، دوب[۳] که از آنالیز مختلط وارد نظریهٔ احتمال شده بود، متوجه ارتباط بین مارتینگل‌ها و توابع همساز شد و تلاش کرد نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل را بر مبنای مارتینگل‌ها بنا کند. به علاوه، هانری کارتان[۴] در میانهٔ دههٔ ۴۰ پیشرفت‌های عظیمی را در نظریهٔ پتانسیل سبب گشت که پس از او با کار کلاسیک دنای در سال ۱۹۵۰ دنبال شد. این ایده‌های پراکنده در گوشه و کنار، گرد هم آمدند تا این‌که دوب توانست به کمک آن‌ها برای نخستین بار، به روشنی ویژگی مارکفی قوی را تشریح کند. چند سال بعد یعنی در ۱۹۴۸، ای. هیله[۵] و ک. یوشیدا مستقل از یکدیگر، ساختار نیمگروه‌های عملگرهای به‌طور قوی پیوسته را ارائه دادند و نقش مولدهای بی‌نهایت کوچک را در نظریهٔ فرآیندهای مارکف آشکار ساختند.

ایتو در تلاش برای الگوسازی فرآیندهای مارکف، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر به‌دست آورد:

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + \mu(X_t)dt$$

که در آن W فرآیند وینر استاندارد است. اکنون او دو مسأله پیش رو داشت: یکی این‌که معنای دیفرانسیل تصادفی $\sigma(X_t)dW_t$ را مشخص سازد که این کار را در مقاله‌ای که قبلاً ذکر شد انجام داد [۳۴] و مسألهٔ دوم این بود که کارهای کلموگرف دربارهٔ فرآیندهای مارکوف را با تعبیرات خودش مرتبط سازد.

---

۱) اینجا ایتو به مقالات کلموگرف [۴۱] و فِلِر [۲۶] اشاره می‌کند.

۲) توجه کنید که هرچند ایتو در تحقیقاتش هیچ اشاره‌ای به کار بشیلیه نمی‌کند ولی چون از کلموگرف، لوی و دوب تأثیر زیادی گرفته است، به نظر معقول می‌آید که فکر کنیم از کار بشیلیه آگاه بوده زیرا کلموگرف در مقالهٔ کلیدی خود [۴۱] ضمن شرح و ارجاع به کار بشیلیه، آن را جزء انگیزه‌بخش‌ترین منابع خود دانسته است. با این که هیچ شاهدی وجود ندارد که ایتو حتی کار بشیلیه را خوانده باشد، هانس فولر و روبرت مِرتُن در مکاتبات شخصی با نویسندگان مقاله گفتند که ایتو واقعاً از کار بشیلیه تأثیر گرفته است.

3) J. L. Doob 4) H. Cartan 5) E. Hille

به‌ویژه می‌خواست مسیرهای X را به تابع گذر فرآیند نفوذ ربط دهد که در پیگیری این خواسته، نشان داد توزیع X جواب معادلهٔ پیشروی کلموگرف است. این کوشش‌ها منجر به مقالهٔ بارز او در سال ۱۹۵۱ شد [۳۵]، که در آن چیزی را بیان و ثابت کرد که امروزه با نام **فرمول ایتو** شناخته می‌شود:

$$f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d[X,X]_t.$$

در اینجا تابع f از ردهٔ C^2 است و برای معرفی آن از نمادگذاری‌های کنونی استفاده کرده‌ایم[۱]. فرمول ایتو توسیعی است از فرمول تغییر متغیر در انتگرال‌گیری ریمان ــ اشتیلیس و تفاوت بین حسابان تصادفی ایتو و حسابان تصادفی کلاسیک را روشن می‌سازد که در آن اعمال حسابان را روی فرآیندهای تصادفی پیوسته که مسیرهایشان در بازه‌های زمانی فشرده با تغییرات کراندار است، مسیروار انجام می‌دهیم. فرمول مربوط به حسابان تصادفی کلاسیک عبارت است از:

$$df(A_t) = f'(A_t)dA_t$$

که در آن A نشان دهندهٔ فرآیند مذکور و f تابعی از ردهٔ C^1 است. می‌توان نشان داد که اگر H فرآیندی با مسیرهای نمونه‌ای پیوسته باشد و بخواهیم انتگرال $\int_0^t H_s dA_s$ را به‌طور مسیری به عنوان حد مجموع‌های ریمانی تعریف کنیم، آن‌گاه بنابر قضیهٔ باناخ ــ اشتاینهاوس فرآیند A می‌بایست روی بازه‌های زمانی فشرده، مسیرهای با تغییرات کراندار داشته باشد [٦٦]. چون تقریباً هر مسیر حرکت براونی روی هیچ بازهٔ زمانی متناهی با تغییرات کراندار نیست، ایتو می‌دانست که نمی‌شود از همهٔ فرآیندهای تصادفی پیوسته انتگرال گرفت. یکی از بصیرت‌های عالی ایتو این بود که فضای انتگرالده‌های خود را به فرآیندهای به اصطلاح پیش‌بینی ناپذیر محدود کرد، یعنی انتگرالده‌هایی را مجاز می‌دانست که با صافی زمینهٔ متشکل از $\sigma-$ جبرهای تولیدشده توسط حرکت براونی، سازگار باشد. به این ترتیب او می‌توانست از استقلال نموهای حرکت براونی سود جوید و L^2- یکمتری را ثابت کند:

$$E((\int_0^t H_s dW_s)^2) = E(\int_0^t H_s^2 ds).$$

پس از آن‌که این یکمتری برای فرآیندهای پیش‌بینی ناپذیر پیوستهٔ H ثابت شد، می‌توان آن را به

---

۱) کتاب اچ. پ. مک‌کین پسر که در ۱۹٦۹ منتشر شد [۴۷]، تأثیر بسزایی در عمومی‌سازی انتگرال ایتو داشت به‌خاطر این‌که نخستین شرح کارهای ایتو و دیگر کارهای مربوط به آن، در قالب یک کتاب بود. امّا مک‌کین «فرمول» ایتو را لم ایتو می‌نامد که این نام‌گذاری در متون امروزی نیز گاهی به چشم می‌خورد. روشن است که اهمیت این قضیهٔ کلیدی ایتو بیش از آن است که آن را صرفاً یک «لم» بنامیم و ما هم همان اصطلاح ایتو یعنی «فرمول» را ترجیح می‌دهیم.

فرآیندهای پیش‌بینی ناپذیر توأماً اندازه‌پذیر گسترش داد[1]. ج. ل. دوب متوجه شد که در روش ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی، از تمامی توان استقلال نموهای حرکت براونی استفاده نشده است، به همین دلیل در کتاب بسیار تأثیرگذارش به سال ۱۹۵۳ انتگرال تصادفی ایتو برای حرکت براونی را ابتدا به فرآیندهایی با نموهای متعامد (به مفهوم L^2) و سپس به فرآیندهایی با نموهای متعامد شرطی، یعنی مارتینگل‌ها، توسعه داد [۱۶]. آن‌چه در این مسیر نیاز داشت مارتینگل M بود به طوری که $M_t^2 - F(t)$ مجدداً مارتینگل باشد که در اینجا فرآیند صعودی F غیرتصادفی است. به این منظور، قضیه‌ای را ثابت کرد که اکنون به تجزیهٔ دوب معروف است:اگر X_n یک زیرمارتینگل زمان گسسته باشد، آن‌گاه تجزیهٔ یکتایی به صورت $X_n = M_n + A_n$ دارد که در آن M یک مارتینگل و A فرآیندی با مسیرهای نانزولی است، $A_0 = 0$ و A_n نسبت به $\mathcal{F}_{n-1}$[2] اندازه‌پذیر است. اگر M یک مارتینگل باشد، M^2 زیرمارتینگل است، لذا دوب برای توسعهٔ بیشتر انتگرال تصادفی خود نیاز به قضیهٔ تجزیهٔ مشابهی برای فرآیندهای زمان پیوسته داشت و با اثبات این قضیه، توانست یکمتری ایتو را به رابطه‌ای به صورت زیر گسترش دهد:

$$E((\int_0^t H_s dM_s)^2) = E(\int_0^t H_s^2 dF(s))$$

که در آن F نانزولی و غیر تصادفی است و $M^2 - F$ مجدداً مارتینگل است و انتگرال تصادفی حاصل نیز مارتینگل می‌شود (فصل ۹ از مرجع [۱۶]).

سؤال جالبی مطرح شد، این‌که آیا فقط به خاطر توسعهٔ تعریف انتگرال تصادفی به مارتینگل‌ها است که باید قضیهٔ تجزیهٔ دوب را به زیرمارتینگل‌های زمان پیوسته گسترش دهیم؟ نه! دلایل دیگری نیز برای این کار وجود داشت، مثلاً در پیشرفت‌های نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل که درست با گسترش نظریهٔ اصل موضوعی پتانسیل به‌دلیل چاپ مقالات متوالی هانت[2] ([۳۱]، [۳۲]، [۳۳]) در سال‌های ۱۹۵۶ و ۱۹۵۸، همگام شده بود. شاید یک دهه طول کشید تا ارزش والای این مقالات روشن شود، اما به‌خاطر این مقالات بود که در اواخر دهۀ ۱۹۶۰ و اوایل دهۀ ۱۹۷۰ تمایل فزون‌تر به نگرش ایتو به فرآیندهای مارکف به عنوان جوابی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی نمایان شد، فرآیندهای مارکفی چون حرکت براونی و آنچه امروزه با نام اندازهٔ تصادفی پواسن شناخته می‌شود. این مشکل را ریاضیدان جوان فرانسوی پ. آ. مِیِر[3] طی دو مقاله در سال ۱۹۶۲ حل کرد.

---

۱) در واقع این، روشی است که در کتاب سال ۱۹۶۹ مک‌کین ارائه شد [۴۷]. متأسفانه تعیین این‌که کدام فرآیندها را باید در این روش لحاظ کرد به آن سادگی که مک‌کین در سال‌های اولیهٔ شروع نظریه تصور می‌کرد نیست. $\sigma-$ جبر طبیعی که انتگرالده‌های ساده تولید می‌کنند، امروزه $\sigma-$ جبر حدس‌پذیر نامیده می‌شود و فرآیندهای اندازه‌پذیر حدس‌پذیر زیرمجموعهٔ سره‌ای از فرآیندهای توأماً اندازه‌پذیر پیش‌بینی ناپذیر است. این نکته مثلاً در کتاب چانگ و ویلیامز [۹] صفحهٔ ۶۳ روشن شده است.

۲) f_n دنباله‌ای صعودی از میدان‌های سیگمایی است که صافیِ زمینه را تشکیل می‌دهد

2) G. A. Hunt 3) P. A. Meyer

در واقع، میر به منظور گوشزد کردن اهمیت نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل در پیشرفت انتگرال تصادفی، در مقالهٔ نخست خود، وجود تجزیهٔ دوب را برای زیرمارتینگل‌های زمان پیوسته به زبان نظریهٔ پتانسیل اثبات کرد [۵۱]. مِیِر نشان داد که این قضیه در حالت کلی برقرار نیست. این قضیه برقرار است اگر و فقط اگر فرض شود که وقتی زیرمارتینگل را با زمان‌های توقف اندیس‌گذاری می‌کنیم، به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر شود و زیرمارتینگل‌های با این ویژگی را به افتخار دوب، از «ردهٔ D» نامید. اورنشتاین نشان داده بود که زیرمارتینگل‌هایی وجود دارند که از ردهٔ D نیستند و در سال ۱۹۶۳ ج. جانسون[1] و ل. هلمز[2]، به کمک حرکت براونی سه بعدی مثالی از این گونه زیرمارتینگل‌ها ساختند[۴۰]. همچنین در سال ۱۹۶۳، میر یکتایی تجزیهٔ دوب را ثابت کرد و به همین دلیل این قضیه اکنون تجزیه دوب ــ میر نامیده می‌شود [۵۲]. به‌علاوه، میر در مقالهٔ دومش، تحلیلی از ساختار L^2 ــ مارتینگل‌ها فراهم آورد که بعدها معلوم شد در تکمیل پیشرفت‌های نظریهٔ انتگرال‌گیری تصادفی نقش اساسی داشته است. دو سال بعد یعنی در ۱۹۶۵، ایتو و واتانابه[3] هنگام مطالعهٔ تابعک‌های ضربی فرآیندهای مارکف، مارتینگل‌های موضعی را تعریف کردند که همان شیء اساسی مورد نیاز برای اثبات درستی حدس اولیهٔ دوب بود به این مضمون که هر زیرمارتینگل X چه از ردهٔ D باشد و چه نباشد، تجزیهٔ یکتایی به صورت $X_t = M_t + A_t$ دارد که در آن M یک مارتینگل موضعی و A یک فرآیند نانزولی حدس‌پذیر است که $A_0 = 0$ [۳۹].

به اولین مقالهٔ مِیِر باز می‌گردیم [۵۱]. در انتهای این مقاله، مِیِر به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ تجزیه، توسیعی از انتگرال تصادفی دوب و به طریق اولی توسیعی از انتگرال ایتو ارائه داده است که در آن فضای انتگرالده‌ها عبارت است از فرآیندهای «خوش‌سازگار»، یعنی فرآیندهای توأماً اندازه‌پذیر که نسبت به صافی $\sigma-$ جبرهای زمینه سازگار است. سپس در انتهای مقاله تذکر اکید می‌دهد که به سختی می‌توان نشان داد که کل ردهٔ فرآیندهای خوش‌سازگار با «نرم» متناهی به همین روش به‌دست می‌آید، گرچه این مطلب یقیناً درست است. شش سال بعد، همین پیش‌گویی میر، پیش چشم مک‌کین بود و همین مشکل عجیب و غریب اندازه‌پذیری باعث شد که گسترش نظریهٔ انتگرال تصادفی برای مارتینگل‌های پرش‌دار به تعویق بیفتد.

پیش از ادامهٔ شرح تحولات نظریهٔ انتگرال تصادفی، قدری از بحث منحرف می‌شویم و پیشرفت‌هایی را که در اقتصاد رخ داد بیان می‌کنیم. پیتر برنشتاین[4] در کتاب خود [۴] به سال ۱۹۹۲ می‌نویسد : «پایان‌نامهٔ بشیلیه با وجود اهمیتی که داشت، بی اعتنا رها شد تا این‌که تصادفاً در سال ۱۹۵۰، جیمی ساواژ[5] آماردانی از شیکاگو آن را مجدداً کشف کرد.» سپس قدری جلوتر می‌نویسد: «حوالی سال ۱۹۵۴ زمانی که ساواژ مشغول زیر و رو کردن کتاب‌های کتابخانه‌ای در یکی از دانشگاه‌ها بود، اتفاقاً به کتاب کوچکی از بشیلیه دربارهٔ سرمایه‌گذاری و داد و ستد، برخورد کرد که در سال ۱۹۱۴ منتشر شده بود.» می‌دانیم که کلموگرف و دوب به صراحت به کارهای بشیلیه ارجاع داده‌اند و یقیناً ایتو هم از این کارها آگاه بوده است، بنابراین شاید آنچه در این میان مفقود مانده

1) G. Johnson 2) L. L. Helms 3) S. Watanabe 4) Peter Bernstein 5) Jimmie Savage

بوده، سهمی است که بشیلیه در اقتصاد داشته است.[۱] برنشتاین می‌گوید که ساواژ، پاول ساموئلسن[۲] اقتصاددان را از کار بشیلیه آگاه ساخته، به او اطلاع می‌دهد که پایان‌نامهٔ بشیلیه را در کتابخانه MIT یافته است و سپس می‌نویسد: «گویا چیزی تمام ذهن بشیلیه را به خود مشغول کرده بوده است ولی چه چیز؟» [۷۲] (مرجع [۷۳] را هم ببینید).

ساموئلسون، پس از یک دهه سخنرانی در گوشه و کنار کشور دربارهٔ قیمت‌گذاری ضمانت‌نامه‌ها و تصادفی بودن قیمت کالاها در بازار معاملات، در سال ۱۹٦۵ تصمیم گرفت دو مقاله در باب نوآوری‌های خویش در این زمینه به چاپ برساند. در مقالهٔ [۷۱]، استدلال‌های اقتصادی خود را مبنی بر تصادفی بودن نوسانات قیمت کالاها ارائه می‌دهد، موضوعی که ٦۵ سال پیش، بشیلیه نیز مدعی آن شده بود. این مقاله همراه با کاری که فاما در همین مورد انجام داد [۲۴]، مبانی آن چیزی را تشکیل دادند که امروزه « فرض بازار کارا» نامیده می‌شود. فرض بازار کارا، انقلابی را در تجارت تجربی موجب شد، با این حال، بحث و بررسی در باب سودمندی عملی آن هنوز هم ادامه دارد [۲۵]. دو بصیرت زیربنایی دیگر نیز در این مقالهٔ اولی به چشم می‌خورد که صورت اصلاح شدهٔ آن، سنگ بنای نظریهٔ قیمت‌گذاری اختیاری شد. یکی، اعتقاد به این موضوع بود که تغییرات پیش بینی نشده در قیمت‌ها دارای ویژگی مارتینگلی است. ساموئلسون توانست به کمک این اصل ثابت کند که تغییرات آتی در قیمت‌های کالاها، در طی زمان ناهمبسته باقی می‌ماند، که این تعمیمی است از الگوی قدم زدن تصادفی [۱۳, ۴٦]. نکتهٔ دوم این بود که این گزاره را می‌توان به توابع دلخواهی از قیمت کالاها تعمیم داد. هرچند او به‌طور صریح، در آن مقاله به این مطلب اشاره نکرد، لیکن این، نویدبخش کاربردهای وسیعی در قیمت‌گذاری اختیاری بود.

ساموئلسون در مقالهٔ مشترک [۷۰] توانایی‌های مک‌کین را هم به یاری طلبید.[۳] مک‌کین که در همان سال کتاب مشترک خود با ایتو [۳۸] را منتشر کرده بود، پیوست ریاضی بر آن مقاله افزود که در آن اساساً نشان داده بود که الگوی مناسب برای تغییرات قیمت کالاها در بازار بورس آن چیزی است که امروزه حرکت براونی هندسی نام دارد. ساموئلسون شرح می‌دهد که الگوی بشیلیه از تضمین مثبت بودن قیمت کالاها قاصر است و به ناسازگاری آشکار با اصول اقتصادی منجر می‌شود،

۱) احتمالاً ساواژ به این دلیل کار بشیلیه را خوانده است که یک سال قبل از این اتفاق، کتاب دوب منتشر شده و به آن کار ارجاع داده بود و احتمالاً ساواژ از محتوای اقتصادی کار بشیلیه متعجب شده بوده است. ساموئلسون نیز در مرجع [۷۲] (صفحهٔ ٦) می‌نویسد: «هرچند در مطالب استاندارد مرتبط به احتمالات به بشیلیه ارجاع فراوان داده می‌شود، لکن در بخش عظیمی از یادداشت‌های ریاضی اشاره‌ای به کار او در اقتصاد نشده است.»

2) Paul Samuelson

۳) ساموئلسون به این دلیل از توانایی‌های مک‌کین و بعداً ر. س. مرتُن سود جست که با مفاهیم مربوط به حسابان تصادفی تازه متولد احساس راحتی نمی‌کرد([۴] صفحهٔ ۲۱۵). این عقیده‌ای است که با بررسی مکاتبات شخصی‌اش با مرتن تأیید می‌شود.

در حالی که حرکت براونی هندسی با چنین دردسری مواجه نیست. در این مقاله، فرمول‌هایی برای ارزیابی اختیار معاملهٔ اروپایی و آمریکایی هم به‌دست آمده است[۱]. روش به‌دست آوردن این فرمول‌ها تقریباً با آنچه حدود یک دهه بعد در استنتاج فرمول بلک ـ شولز به‌کار رفت، یکسان بود جز این‌که در عوض به‌کارگیری اصل عدم واسطه‌گری در به‌دست آوردن فرمول ارزیابی، فرض کرده بود که پرداختی‌های اختیاری تنزیل از ویژگی مارتینگلی تبعیت می‌کنند (صفحه ۱۹ مرجع [۷۰] را ملاحظه کنید) که از آنجا فرمول‌های ارزیابی به راحتی نتیجه می‌شوند. به‌علاوه شایان ذکر است که در همین مقاله، ساموئلسون و مک‌کین قیمت یک اختیار معاملهٔ آمریکایی را با کشف رابطهٔ بین اختیار معاملهٔ آمریکایی و مسألهٔ مرز آزاد برای معادلهٔ حرارت، تعیین می‌کنند. این اولین باری بود که چنین ارتباط عجیبی کشف می‌شد. جالب است که ساموئلسون و مک‌کین خودشان را به استفاده از ابزارهای حسابان تصادفی، لااقل به‌طور صریح، مقید نساختند. روش‌هایی که مک‌کین در پیوست خود بر این مقاله به‌کار می‌گیرد عبارتند از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ملهم از اندیشه‌های کلموگرف، همراه با نظریهٔ زمان توقف و روش‌های نظریهٔ پتانسیل که پیشروی این نظریه‌ها هانت بود و دینکین آن‌ها را گسترش داد.

آنچه در جریان پیشرفت نظریهٔ انتگرال‌گیری تصادفی تقریباً به حساب نیامده بود و ارتباطی هم با ریاضیات مالی نداشت، ایده‌های هرمان روبین[۲] بود. روبین در سومین گردهمایی برکلی در سال ۱۹۵۵، دربارهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی سخنرانی کرد. یک سال پس از آن، به ارائهٔ مقاله‌ای برای گردهمایی سیاتل دعوت شد که به‌طور مشترک از طرف مؤسسهٔ آمار ریاضی، انجمن ریاضی آمریکا، انجمن زیست‌سنجی، جامعهٔ ریاضی آمریکا و انجمن اقتصاددانان برگزار شد. در این مقاله مطالبی را ارائه کرد که بعداً موضوع پایان‌نامهٔ دکترای د. ل. فیسک[۳] را مشخص کرد و به ابداع شبه‌مارتینگل‌ها و همچنین به قول امروزی انتگرال استراتونوویچ شد. خود او در مجموعهٔ مقالاتش می‌نویسد: «با انتگرال ایتو راحت نبودم به خاطر این‌که تحت تغییر مختصات غیرخطی هرچند به اندازهٔ کافی هموار، ناوردا نبود و مشاهده کردم که اگر میانگین نقاط انتهایی چپ و راست را به‌کار ببریم، دقیقاً همان چیزی که می‌باید انتگرال XdX باشد (حتی برای X ناپیوسته)

۱) در این مقاله، اولین باری بود که اصطلاحات اختیار معاملهٔ «اروپایی» و «آمریکایی» به‌کار می‌رفت. از شواهدی که بر مبنای مکاتبات شخصی ساموئلسون با ر. س. مرتن به دست آمده، معلوم شده است که او پیش از نوشتن مقاله‌اش به وال استریت رفته است تا موضوع این دو نوع اختیار معامله را با متخصصین صنعتی در میان گذارد. بررسی تماس‌هایش با وال استریت نشان می‌دهد که دو نوع اختیار معامله وجود داشته است: یکی که پیچیده‌تر است را می‌شده پیش از سررسید پرداخت اعمال کرد و دیگری که ساده‌تر بوده باید درست در زمان سررسید اعمال می‌شد و فقط مغز تحلیل‌گر اروپایی (در مقابل مغز آمریکایی) می‌توانسته نوع اول را درک کند. با این حال، وقتی ساموئلسون مقاله‌اش را نوشت و از این پسوندها استفاده کرد، جای آن‌ها را عوض کرد.

2) Herman Rubin 3) L. Fisk

به‌دست می‌آید. به نظر می‌رسید اگر X پیوسته و دارای ویژگی‌های به اندازهٔ کافی خوبی باشد، این مفهوم گزینهٔ مناسبی برای تعریف انتگرال خواهد بود. از طرفی، شبه‌مارتینگل‌ها طبیعی‌ترین گزینه برای ردهٔ فرآیندهای تصادفی به نظر می‌رسید ولی اثبات روشنی برای این مطلب نداشتم به همین خاطر کار را بر عهدهٔ فیسک گذاشتم تا موضوع پایان‌نامهٔ دکترایش باشد و او به خوبی از عهدهٔ کار برآمد» [۶۸]. در واقع، فیسک در پایان‌نامه‌اش که در زمان حضور روبین در دانشگاه ایالتی میشیگان، تحت نظر او نگاشته شد، چیزی را معرفی می‌کند که امروزه به انتگرال استراتونوویچ موسوم است [۲۷]. به‌علاوه نظریهٔ جدید شبه‌مارتینگل‌ها را (با همین نام) ارائه کرد که بعدها ک. م. رائو[1] آن را به‌کار گرفت و به طرز هوشمندانه‌ای ثابت کرد که هر شبه‌مارتینگل برابر است با تفاضل دو زیرمارتینگل [۶۷]. س. اوری[2] نیز در مقاله‌ای، ایده‌های فیسک را تعمیم داد و توانست نظریهٔ تازهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها را تحت تأثیر قرار دهد [۶۲]. هرمان روبین در [۶۸]. اشاره می‌کند که فیسک پایان‌نامه‌اش را برای چاپ ارسال کرد ولی ویراستار اعتقاد نداشت که انتگرال‌گیری تصادفی مورد اقبال فراوانی است و به همین دلیل فیسک آن بخش از پایان‌نامه‌اش را که در این‌باره بود حذف کرد و به جای آن، فقط قسمت مربوط به شبه‌مارتینگل‌ها را چاپ کرد[۲۸].

اکنون باز می‌گردیم به روند تاریخی انتگرال‌گیری تصادفی و یادآوری می‌کنیم که نظریهٔ انتگرال تصادفی که پ. آ. میر در مرجع [۵۱] ارائه داد، چارچوب مناسبی بود که پس از آن در سال ۱۹۶۳ به‌طور سازمان‌یافته‌تری با کارهای فیلیپ کارژ[3] نمود پیدا کرد [۱۰]. در فعالیت‌های کارژ هم رد پای نظریهٔ پتانسیل به‌روشنی دیده می‌شود و مقالهٔ او نه تنها در یک مجله، بلکه در مجموعه سخنرانی‌های سمینار برلو ــ شوکه ــ دنای[4] (نظریهٔ پتانسیل) که شهرت فراوانی داشت، به چاپ رسید. بسیاری از فرآیندهای مارکف آشنا به‌ویژه آن‌هایی که هانت مورد بررسی قرار داده بود ([۳۱]، [۳۲]، [۳۳]) شبه پیوستهٔ چپ هستند، یعنی مسیرهایی دارند که قریب به یقین از راست پیوسته‌اند و حد چپ دارند و اگر در زمان توقف T دارای پرش باشند، آن‌گاه زمان T باید کلاً دسترس‌ناپذیر باشد. معنای شهودی این مطلب این است که T باید کاملاً غیر منتظره رخ دهد. شرط شبه پیوستگی را می‌توان بر حسب صافی $\sigma-$جبرهای زمینه در فرآیند مارکف نیز صورت‌بندی کرد که این ویژگی در مورد صافی مربوط به فرآیندهای مارکف همگن زمانی، معقول به نظر می‌آید و مثال‌های بسیاری وجود دارد که در این شرط صدق می‌کنند. فرضِ شبه پیوسته بودن صافی از طرف کسی که در نظریهٔ پتانسیل کار می‌کرد، طبیعی بود و اتفاقاً نتیجهٔ چنین فرضی این شد که اگر X یک زیرمارتینگل و $X = M + A$ تجزیهٔ دوب ــ میر آن باشد، آن‌گاه فرآیند A مسیرهای نمونه‌ای پیوسته دارد و به همین دلیل در معادلهٔ یکمتری

$$E((\int_{۰}^{t} H_s dM_s)^{۲}) = E(\int_{۰}^{t} H_s^{۲} dA_s),$$

1) K. M. Rao   2) S. Orey   3) Philippe Courrege   4) Séminaire Brélot-Choquet-Dény (théorie du potetiel)

که در آن A فرآیند صعودی متناظر با نیمه مارتینگل $X = M^{2}$ است، می‌توان روش ایتو ــ دوب را به L^{2}–مارتینگل‌های کلی گسترش داد و حاصل کار این است که فرآیند تصادفی صعودی A مسیرهای پیوسته دارد. معلوم شد که این مطلب منجر به سادگی زیادی در نظریهٔ انتگرال تصادفی می‌شود و این دقیقاً همان فرضی بود که کارژ اتخاذ کرده بود. کارژ با انتگرالده‌هایی که مسیرهای از چپ پیوسته دارند نیز کار کرد و فضای فرآیندهایی را در نظر گرفت که نسبت به σ–جبری که روی $\mathbb{R} \times \circ\Omega$ تولید می‌کنند، اندازه‌پذیرند و این دست فرآیندها را «از پیش سازگار» نامید. بنابراین کارژ در واقع اولین کسی بوده است که σ–جبرهای حدس‌پذیر را معرفی کرد هرچند همانند میر از آن‌ها استفاده نکرد. ثابت می‌شود که اگر dA_t قریب به یقین نسبت به dt پیوستهٔ مطلق مسیری باشد، آن‌گاه اساساً فرقی نمی‌کند که چه σ ــ جبری مورد استفاده قرار گیرد: σ ــ جبر حدس‌پذیر، σ ــ جبر پیشرونده[1]، یا حتی σ ــ جبر تولید شده توسط یک فرآیند سازگار توأماً اندازه پذیر. بااین حال اگر A صرفاً پیوسته باشد و قریب به یقین مسیرهای پیوستهٔ مطلق نداشته باشد، آن‌گاه دست کم به σ ــ جبر پیشرونده نیاز داریم. اکنون می‌دانیم که انتگرال تصادفی فرآیندی که برابر است با تفاضل فرآیندی از این دست و تصویر حدس‌پذیرش، فرآیند صفر خواهد شد و به همین دلیل، نوع σــ جبر به‌کار رفته اهمیت ندارد (جزئیات این مطلب را لیپستر و شرپایف در مرجع [۴۵] آورده‌اند. می‌توانید چانگ و ویلیامز [۹] را هم ببینید).

با این همه، کار مهمی که کارژ انجام نداد، اثبات فرمول تغییر متغیر درست مشابه با فرمول ایتو برای انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی بود که این وظیفه را هـ. کونیتا[2] و س. واتانابه در مقالهٔ تأثیرگذاری به سال ۱۹۶۷ به انجام رساندند. در حالی که رویکرد کارژ به شدت تحت تأثیر سنّت ایتو و دوب یعنی اثبات یک L^{2} ــ یکمتری بود، دو سال قبل در سال ۱۹۶۵ موتو و واتانابه رویکرد جدیدی را برگزیده بودند، آن‌ها انتگرال تصادفی را به چشم عملگری روی مارتینگل‌هایی با ویژگی‌های خاص می‌نگریستند و با به کار گیری ساختار فضای هیلبرت L^{2} و استفاده از فرآیند صعودی دوب‌ ــ میر، یک ضرب داخلی روی تغییرات مرتبهٔ دوم مارتینگل‌ها تعریف کردند [۶۰]. موتو و واتانابه در همان مقاله، یک قضیهٔ نمایش مارتینگلی را ثابت کردند که خط و خطوط پیشرفت‌های آتی را معلوم می‌کرد: آن‌ها ثابت کردند که همهٔ L^{2} ــ مارتینگل‌هایی که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند، از طریق ساختن نوعی فرآیند مارکف به نام فرآیند هانت (به افتخار مقالات اساسی که هانت در این باره نگاشت و پیش از این به آن اشاره کردیم)، به‌دست می‌آیند که با گردایه‌ای از تابعک‌هایی تولید می‌شود که خودشان L^{2} ــ مارتینگل هستند، و این کار را به روشی انجام دادند که امروزه به «فرمول دینکین و مسألهٔ مارتینگل» موسوم است. با این حال، مقالهٔ مهم موتو و واتانابه، به سرعت تحت الشعاع مقالهٔ بسیار زیبای هـ. کونیتا و واتانابه قرار گرفت که در سال ۱۹۶۷ منتشر

---

۱) σــ جبر پیشرونده در نظریهٔ انتگرال تصادفی تعریف می‌شود و ویژگی آن این است که اگر فرآیند H_s اندازه‌پذیر پیشرونده، و τ یک زمان توقف متناهی ــ مقدار باشد، آن‌گاه H_τ نسبت به $\mathcal{F}_\tau$ اندازه‌پذیر است.

2) H. Kunita

شد[۴۲]. در آن مقاله، کونیتا و واتانابه، ایده‌های مربوط به تعامد مارتینگل‌ها را که میر، موتو و واتانابه، پایه‌ریزی کرده بودند، گسترش داده، نظریهٔ فضاهای مارتینگلی پایدار را ارائه دادند که معلوم شده است در نظریهٔ نمایش مارتینگل‌ها نقشی اساسی دارد و در ریاضیات مالی به «کامل بودن بازار» شهرت دارد. تغییرات مرتبهٔ دوم را به صورت یک شبه ضرب داخلی نگریستند و یک فرمول تغییر متغیر کلی ثابت کردند که فرمول ایتو دربارهٔ مارتینگل‌های براونی را گسترش می‌داد. این فرمول در مورد مارتینگل‌هایی که مسیرهای پیوسته دارند، ساده و روشن بود، ولی برای حالت کلی یعنی وقتی مسیرهای مارتینگل دارای ناپیوستگی‌های جهشی بود، مؤلفین به ساختار غنی متوسل شدند که در بستر فرآیند هانت در اختیارشان بود و پرش‌ها را برحسب دستگاه لویِ فرآیند مارکف زمینه بیان کردند(دستگاه لوی برای فرآیندهای مارکف، ساختاری غنی است برای توصیف رفتار پرش‌های یک فرآیند هانت و چند سال پیش از آن در ۱۹۶۴ توسط واتانابه ارائه شده بود [۸۴] و بعدها بنونیست[1] و ج. جاکود[2] آن را به پیش راندند [۳]). به‌کار گیری چنین ابزارهایی در آن زمان امری طبیعی بود، زیرا همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، انتگرال تصادفی از همان ابتدا با فرآیندهای مارکف درآمیختگی داشت. علاوه بر این‌ها، کونیتا و واتانابه توانستند به کمک فرمول تغییر متغیر، اثبات‌های ساده و هوشمندانه‌ای برای قضیهٔ لوی ارائه دهند که حرکت براونی را در میان همه مارتینگل‌های پیوسته، با فرآیند تغییرات مرتبهٔ دومش مبرّز می‌سازد. همچنین قضیه‌ای از ل. دوبین[3] و جی. شوارتز[4][۱۸] و ک. ای. دامبیس[5][۱۴] را که بر مبنای آن ردهٔ وسیعی از مارتینگل‌های پیوسته را می‌شود به صورت تغییر زمان در حرکت براونی نشان داد، از حالت یک بُعدی به بُعد N گسترش دادند.

مقالهٔ جالب کونیتا و واتانابه، بلافاصله مورد توجه میر قرار گرفت که در آن زمان در استراسبورگ بود. او تلاش کرد به کمک انتشارات اشپرینگر، مجموعهٔ سمینار احتمالات را در سری متون سخنرانی‌های ریاضی[6] راه‌اندازی کند که یکی از طولانی‌ترین مجموعه‌های مکتوب سمینار است که تاکنون منتشر شده است. او در شمارهٔ نخست این مجموعه سمینارها که مجلد ۳۹ در سری مذکور بود، چهار مقاله منتشر کرد[7] که در آن‌ها از ایده‌های کونیتا و واتانابه الهام گرفته بود ([۵۳]، [۵۴]، [۵۵] و [۵٦]). در این مقالات او دو نوآوری مهم انجام داد: یکی این که به جای ضرب داخلی $\langle X,Y\rangle$ ابداعی کونیتا و واتانابه که برمبنای تجزیهٔ دوب ــ میر بنا شده بود، با بسط ایدهٔ آستین برای مارتینگل‌های با پارامتر گسسته، مفهوم شبه ضرب داخلی $[X,Y]$ را به وجود آورد. برخلاف ضرب داخلی $\langle X,Y\rangle$ که فقط برای مارتینگل‌های به‌طور موضعی مربع ــ انتگرال پذیر (و به‌خصوص مارتینگل‌های پیوسته) وجود دارد، این شبه ضرب داخلی، فرآیندی است که برای همهٔ مارتینگل‌ها و بلکه مارتینگل‌های موضعی هم قابل تعریف است. بعدها مشخص شد که این موضوع در

1) A. Benveniste 2) J. Jacod 3) L. Dubin 4) G. Schwartz 5) K. E. Dambis

6) Lecture Notes in Mathematics

۷) تعداد زیادی از کارهای مهم دربارهٔ انتگرال تصادفی در سری سمینار احتمالات چاپ شد که أخیراً همراه با کمی یادداشت‌های اضافی در مجلدی مستقل چاپ مجدد شده است [۲۳].

پیشرفت‌های آتی نظریهٔ انتگرال تصادفی، به‌ویژه در ابداع نیمه‌مارتینگل‌ها و توسعهٔ تعریف انتگرال تصادفی به همهٔ مارتینگل‌های موضعی و نه فقط آن‌هایی که موضعاً مربع ـ انتگرال پذیرند، مؤثر بوده است.

دومین بصیرت مهم میر در این مجموعه مقالات، درک اهمیت σ ـ جبر حدس پذیر بود. او متوجه شد که اگر یک مارتینگل مسیرهای با تغییرات کراندار نیز داشته باشد (که در مورد مارتینگل‌های پرشدار لزوماً چنین است) در این صورت، انتگرال تصادفی باید همانی شود که از طریق انتگرال‌گیری مسیروار لبگ ـ اشتیلیس به‌دست می‌آید. او نشان داد که این مطلب صحت دارد اگر و فقط اگر انتگرالده یک فرآیند حدس پذیر باشد. به‌علاوه، او ملاحظه کرد که اگر انتگرالده اندازه پذیر حدس پذیر باشد، رفتار پرش‌های انتگرال تصادفی مانند انتگرال لبگ ـ اشتیلیس است و از این طریق توانست پرش‌های انتگرال تصادفی را تحلیل کند. این‌ها همگی زمینه‌ساز نظریهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها شد که چند سال پس از آن، پا به عرصه گذاشت. در اینجا باید اشاره کنیم که میر در دو مقالهٔ نخست از چهار مقالهٔ مزبور، چارچوب فرآیندهای مارکف را که کونیتا و واتانابه از آن سودجسته بودند به کناری نهاد و فرمول تغییر متغیر را در حالت کلی اثبات کرد که در آن از دستگاه لوی استفاده نمی‌شود. پس از آن در دو مقالهٔ بعدی نتایج کلی جدید خود را در جهت تحلیل فرآیندهای مارکف به‌کار گرفت. البته این کار نیز طبیعی بود، زیرا یکی از علایق اولیهٔ میر حل مسائل باز بسیاری بود که در مقالات پیاپی هانت مطرح شده بودند. در حالی که از زمان ایتو به این طرف، همواره تحقیق در زمینهٔ فرآیندهای مارکف بوده که علاقه به مطالعهٔ انتگرال تصادفی را هم برانگیخته است ولی دوب، ویژگی مارتینگلی فرآیندها را مستقل از فرآیندهای مارکف مورد بررسی قرار می‌داد و میر در مقالات کلاسیک خود در سال‌های ۱۹۶۲ و ۱۹۶۳ که پیش از این تشریح کردیم، می‌خواست از روش‌های نظریهٔ پتانسیل فرآیندهای مارکف برای اثبات نتایج مارتینگلی خالص سود برد ([۵۱] و [۵۲]).

تا اینجا به نظر می‌رسد سیر پیشرفت نظریهٔ انتگرال تصادفی عمدتاً در ژاپن و فرانسه متمرکز بوده است. اما به موازات این‌ها، فعالیت‌هایی نیز در اتحاد شوروی سابق در حال شکل‌گیری بود. کتاب‌های دینکین دربارهٔ فرآیندهای مارکف ابتدا در سال ۱۹۶۰ و سپس به زبان انگلیسی توسط انتشارات اشپرینگر در سال ۱۹۶۵ به چاپ رسیدند ([۱۹] و [۲۰]). همچنین می‌توان به سمینار مشهور مسکو اشاره کرد (که دست کم یک بار دیگر در ۱۸ و ۱۹ اکتبر ۱۹۹۶ در ایست لنسینگ ایالت میشیگان به همراهی دینکین، اسکروخود[1]، ونتزل، فریدلین، کریلف[2] و دیگران تشکیل شد)، و کارهای گرسانف دربارهٔ تبدیل‌های حرکت براونی که به ۱۹۶۰ و پیش از آن برمی‌گردد [۲۹][3].

---

1) Skorohod 2) Krylov

۳) کاری که گرسانف انجام داد، توسیع کار اولیهٔ کامرون و مارتین در این زمینه بود که در سال ۱۹۴۹ انتقال تعینی و تصادفی مسیرهای حرکت براونی را با حفظ معادل بودن توزیع‌های قدیمی و جدید فرآیندها به این ←

استراتونوویچ[1] صورتی از انتگرال ایتو را ارائه داد که از قواعد تغییر متغیر متداول در انتگرال ریمان ــ اشتیلیس تبعیت می‌کند، لکن ویژگی مارتینگلی و نیز کلیت انتگرال ایتو را ندارد [۷۹][2].

انتگرال استراتونوویچ، در عین حال که در مجامع مهندسی متداول بود، ولی برای ریاضیدانان عجیب می‌نمود، تا این‌که بعداً معلوم شد که وقتی مسیرهای حرکت براونی را با خم‌های مشتق پذیر تقریب می‌زنیم، انتگرال‌های حاصل به انتگرال استراتونوویچ همگرا هستند و این باعث شد تا این شیء، ذاتی هندسهٔ دیفرانسیل تصادفی شود [۲۲].

نخستین کارهای جالب در زمینهٔ انتگرال تصادفی در اتحاد شوروی، سری مقالاتی بود که اسکروخود نوشت. اسکروخود، کاملاً به موازات کارژ و کونیتا و واتانابه، انتگرال ایتو را عمدتاً با الهام از روش‌های مربوط به نظریهٔ فرآیندهای مارکف، توسعه داد. در سال ۱۹۶۳، اسکروخود درست در چارچوب فرآیندهای مارکف و تحت تأثیر کار دینکین، نظریهٔ انتگرال تصادفی را برای مارتینگل‌ها ارائه داد که مشابه با نظریهٔ کارژ در فرانسه بود هرچند از تغییر زمان استفاده کرده بود [۷۵]. در سال ۱۹۶۶، حین مطالعهٔ تابعک‌های جمعی فرآیندهای مارکف پیوسته، ایدهٔ تغییرات مرتبهٔ دوم مارتینگل‌ها و نیز آنچه اکنون به نامساوی کونیتا ــ واتانابه شهرت دارد و همان فرمول تغییر متغیری را که کونیتا و واتانابه اثبات کرده بودند، ارائه کرد [۷۶]. او در سال ۱۹۶۷، این نتایج و به‌علاوه فرمول تغییر متغیر خود را به مارتینگل‌های پرشداری که همواره روی یک فرآیند مارکف تعریف شده‌اند تعمیم داد [۷۸]. جملات مربوط به پرش در فرمول تغییر متغیر، به کمک هستهٔ دستگاه لوی که

← معنی (که مجموعه‌های اندازه صفرشان یکسان است) مورد بررسی قرار دادند[۸]؛ پس از آن مارویاما در سال ۱۹۵۴ [۴۸]، و سپس گرسانف در سال ۱۹۶۰ این ایده‌ها را به فرآیندهای مارکف نیز تسرّی دادند. بعدها در سال ۱۹۷۴ ون شوپن به همراه وانگ [۸۱]، نتایج مزبور را به مارتینگل‌ها هم گسترش دادند و به دنبال آن میر در ۱۹۶۷ و لنگلارت در ۱۹۷۷ صورت امروزی به نتایج مربوط به تبدیلات حرکت براونی بخشیدند ([۵۷] و [۴۳]). در این باره می‌توانید مثلاً صفحات ۱۳۶—۱۲۳ مرجع [۶۶] را مطالعه کنید تا با نتایج جدید در این باب، آشنا شوید.

1) Stratonovich

۲) در واقع انتگرال استراتونوویچ چندان تعجب برانگیز نبود. اسکروخود در نقدی بر یک کتاب در همان زمان می‌نویسد: «این انتگرال اگر وجود داشته باشد، خیلی ساده‌تر از انتگرال ایتو قابل بیان است. با این حال ردهٔ توابعی که این انتگرال برای آن‌ها وجود دارد، بسیار محدود و گاهی مصنوعی است. هر چند ممکن است با به کار گیری این انتگرال متقارن بعضی از فرمول‌ها ساده‌تر شوند (که البته بعداً روشن می‌کنیم که بسیاری از آن‌ها هم پیچیده‌تر می‌شوند)، کاربردش به واسطهٔ حوزهٔ تعریف کوچکی که دارد، محدود است. از این رو این نوآوری اصلاً توجیه پذیر نیست» [۷۷]. انتگرال استراتونوویچ را همزمان فیسک در اتحاد شوروی به عنوان بخشی از پایان نامهٔ دکتری خود گسترش بخشید لکن برای چاپ مورد پذیرش واقع نشد به‌خاطر این‌که برای داور بیش از اندازه بدیهی می‌نمود. البته نیمهٔ دوم پایان نامهٔ او مربوط به ابداع شبه‌مارتینگل‌ها بود که آن نیمه چاپ شد [۲۸].

واتانابه معرفی کرده بود، قابل بیان است.[۱]

در پایان، مجدداً بازمی‌گردیم به فرانسه. پس از مقالهٔ کونیتا و واتانابه و چهار مقالهٔ میر که طی آن نتایج ایشان را تعمیم داد، یک وقفهٔ سه ساله رخ داد تا این‌که مقالهٔ دولن ـ داد[۲] و میر ظاهر شد [۱۵]. پیش از این مقاله، پیشرفت انتگرال تصادفی بیشتر بر مبنای فرآیندهای مارکف بود و گاهی به نظر می‌رسید که اصولاً انتگرال تصادفی ابزار سودمند و مؤثری در بررسی مباحث مربوط به فرآیندهای مارکف است. فرض اساسی که در کارهای قبلی کونیتا، واتانابه و میر دیده می‌شد، این بود که صافی σ ـ جبرها، از چپ پیوسته است، به عبارت دیگر صافی، هیچ زمان ناپیوستگی تثبیت شده‌ای ندارد. دولن ـ داد و میر توانستند این فرض را حذف کرده، یک نظریهٔ مارتینگلی خالص ارائه دهند که در آن ردپایی از وابستگی به فرآیندهای مارکف به چشم نمی‌خورد. اکنون می‌توان ادعا کرد که این قدم مهم، منجر به رشد روزافزون نظریهٔ انتگرال تصادفی در دههٔ ۱۹۷۰ و پیدایش مقالات بنیادی هریسون ـ کرپس[۳] و هریسون ـ پلیسکا[۴] در نزدیکی‌های پایان این دهه شد. سرانجام، در همان مقاله دولن ـ داد و میر مفهوم جدید نیمه‌مارتینگل را به عنوان کلی‌ترین ردهٔ فرآیندهایی که می‌شود برای آن‌ها انتگرال تصادفی را تعریف کرد، عرضه کردند[۵].

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از ه. فولر، ک. ایتو، ج. جاکود، ج. پیتمن، ه. رابین، آ. ن. شریایف، س. واتانابه، م. یور و م. زاکای به خاطر کمک‌هایی که برای تهیهٔ این تاریخچه ارائه نمودند، سپاسگزارند.

مراجع

[1] Bachelier, L. *Théorie de la Spéculation*, *Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure* (1900), 21-86.

---

۱) میر در چهار مقالهٔ خود [۵۳]، [۵۴]، [۵۵] و [۵٦] که تأثیر زیادی در غرب داشت، به کارژ، موتو، واتانابه و کونیتا ارجاع می‌دهد لکن هیچ رجوعی به اسکروخود ندارد. بی‌شک میر از کارهای او آگاهی نداشته است که خود همین به ناشناخته ماندن کارهای اسکروخود کمک کرد.

2) Doleans-Dade 3) Harrison-Kreps 4) Harrison-Pliska

۵) همانطور که در ادامهٔ این مقاله خواهیم دید، تعریفی که دولن ـ داد و میر از نیمه‌مارتینگل‌ها در سال ۱۹۷۰ ارائه دادند بسیار عالمانه بود و در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، دلاچری و بیچلِر همزمان یک ویژگی مشخصهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها را ثابت کردند: آن‌ها نشان دادند که اگر فرآیند از راست پیوسته X که حد چپ دارد داده شده و انتگرال تصادفی به روش معمول برای فرآیندهای حدس‌پذیر ساده تعریف شده باشد و صورت خیلی ضعیف قضیهٔ همگرایی کراندار را هم در اختیار داشته باشیم، آن‌گاه X به طریق اولی یک نیمه مارتینگل است.

[2] Bachelier, L. *Théorie de la Spéculation*, Gauthier-Villars, Paris (1900). {Note: This book has been reprinted by the Paris Publisher Éditions Jacques Gabay (1995).

[3] Benveniste, A. and Jacod, J. Systèmes de Lévy des processus de Markov, Invent. Math., **21**, (1973) 183-198.

[4] Bernstein, P. L.*Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, The Free Press, New York (1992).

[5] Bernstein, S. Equations différentielles stochastiques, *Actualités Sci. Ind.*, **738** (1938), 5-31.

[6] Bru, B. and Yor, M. *La vie de W. Doeblin et le Pli cacheté 11 668, La Lettrede L'Académie des Science*, **2**, (2001) 16-17.

[7] Bru, B. and Yor, M. Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin, *Finance and Stochastics* **6** (2002), 2-47.

[8] Cameron, R. H. and Martin, W. T. Transformation of Wiener integrals by non-linear transformations, *Transaction of the American Math. Society* **66** (1949), 253-283.

[9] Chung, K. L. and Williams, R. *Introduction to Stochastic Integration*, Second Editition, Birkhäuser, Boston (1990).

[10] Corrège, Ph. Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable, *Séminaire Brélot-Choquet-Dény* (Théorie du Potential),**7e année, 1962/63** (1963), 7-01-7-20.

[11] Courtault, J. M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P., Lebon, I., and Le Marchand, A. Louis Bachelier: On the Centenary of Théorie de la Spéculation, *Mathematical Finance* **10** (2000), 341-353.

[12] Cox, J. and Ross, S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, **3** (1/2) (1976), 145-166.

[13] Csörgo. Random walking around financial mathematics, Random walks (Budaapest), edited by Pál Révész, Bálint Tóth. Boliai Soc. *Math. Stud.*, **9** (1998), 59-111.

[14] Dambis, K. E. On the decomposition of continuous martingales, *Theor. Proba. Applications*, **10** (1965), 401-410.

[15] Doléans-Dade, C. and Meyer, P. A. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, *Séminaire de Probabilités IV*, Lecture Notes in Mathematics, **124** (1970), 77-107.

[16] Doob, J. L. *Stochastic Processes*, John Wiley end Sons, New York (1953).

[17] Doob, J. L. The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950), in J.-P. Pier, ed., *Development of Mathematics* 1900-1950, Birkhauser Verlag AG, Basel (1996).

[18] Dubins, L. and Schwarz, G. On continuous martingales, *Proc. National Acad. Sciences USA*, **53** (1965), 913-916.

[19] Dynkin, E. *Theory of Markov Processes*, Pergamon Press, Oxford (1960).

[20] Dynkin, E. *Markov Processes* (two volumes), Springer-Verlag, Berlin (1965).

[21] Einstein, A. *On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*, Ann. d. Physik **17** {In *Investigations of the theory of Brownian movement*, ed. R. Fürth, Dover, New York, 1956} (1905).

[22] Emery, M. *Stochastic calculus in manifolds, with an appendix by P. A. Meyer*, Springer-Verlag, Berlin (1989). .

[23] Emery, M. and Yor, M., eds. *Séminaire de Probabilités 1967-1980: A Selection in Martingale Therory*, Lecture Notes in Mathematics (2002), **1771**.

[24] Fama, E. The Behavior of Stock Prices, *Journal of Business*, **38** (1965), 34-105.

[25] Fama, E. Market Efficiency, Long Term Returns, and Behavioral Finance, *Journal of Financial Economics,* **49**, (1985) 283-306.

[26] Feller, W. Zur Theorie der Stochastichen Prozesse (existenz-und Eindeutigkeitssatze), *Math. Ann.* **113** (1936).

[27] Fisk, D. *Quasi-martingales and stochastic integrals*, Ph.D. thesis, Michigan State University, Department of Statistics (1936).

[28] Fisk, D. Quasimartingales, *Transactions of the American Math. Soc.*, **120** (1965), 369-389.

[29] Girsanov, I. V. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous changes of measures, *Theory Probab. Appl.*, **5** (1960), 285-301.

[30] Hald, A. T. N. Thiele's contributions to Statistics, *International Statistic Review*, **49** (1981), 1-20.

[31] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials I, *Illinois J. Math.* **1** (1957), 44-93.

[32] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials II, *Illinois J. Math.* **1** (1957), 316-369.

[33] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials III, *Illinois J. Math.* **2** (1958), 151-213.

[34] Itô, K. *Stochastic Integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 519-524.

[35] Itô, K. On a formula concerning stochastic differentials, *Nagoya Math. J.*, **3** (1951), 55-65.

[36] Itô, K. Multiple Wiener integral, *J. Math. Society of Japan* **3** (1951), 157-169.

[37] Itô, K. *Foreword, K. Itô Collected Papers*, Springer-Verlag, Heidelberg, xiii-xvii (1987).

[38] Itô, K. and McKean, H. P., Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag (1965), New York; new edition by Springer-Verlag, 1996.

[39] Itô, K. and Watanabe, S. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals, *J. Math.* Kyoto Univ. **4** (1965), 1-75.

[40] Johnson, G. and Helms, L. L. (1963). Class (D) Supermartingales, Bull. *American Math. Society* **69**, 59-62.

[41] Kolmogorov, A. N. (1931). *On Analytic Methods in Probability Theory, in A. N. Shiryaev, ed., Selected Works of A. N. Kolmogorov; Volume II: Probability Theory and Mathematical Statistics*, Kluwer, Dordrecht, 1992, 62-108. [Original: Uber die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.* **104**, 1931, 415-458.]

[42] Kunita, H. and Watanabe, S. On Square Integrable Martingales, *Nagoya Math.* J. **30** (1967), 209-245.

[43] Lenglart, E. *Transformation des martingales locales par changement absolument cotinu de probabilités*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **39** (1977), 65-70.

[44] Lévy, P. *W. Dőblin (V. Doblin) (1915-1940)* Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications, **8** (1955), 107-115.

[45] Liptser, R. Sh., and Shiryaev, A. S.; A. B. Aries, translator, 1977,1978, (2nd, revised and expanded edition, 2001) *Statistics of Random Processes*, Two volumes, Springer-Verlag, Heidelberg.

[46] Malkiel, B. G. *A Random Walk Down Wall Street*, 7th edition, WW Norton, New York (2003).

[47] McKeen, H. P., Jr. *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York (1969).

[48] Maruyama, G. *On the transition probability functions of Markov processes*, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **5** (1954), 10-20.

[49] Maruyama, G. *Continuous time processes and stochastic equations*, Rend. Circ. Math. Palermo **4** (1955), 1-43.

[50] Merton, R. C. *Continuous Time Finance*, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts (1990).

[51] Meyer, P. A. A decomposition theorem for supermartingales, Ill. *J. Math.* **6** (1962), 193-205.

[52] Meyer, P. A. Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, Ill. *J. Math.* **7** (1963), 1-17.

[53] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques I, *Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics,* **39** (1967), 72-94.

[54] Meyer, P. A. *Intégrales Stochastiques II*, Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 95-117.

[55] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques III, *Séminaire de Probabilités I*, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 118-141.

[56] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques IV, *Séminaire de Probabilités I*, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 142-162.

[57] Meyer, P. A. Un cours sur les intégrales Stochastiques, *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics, **511** (1976), 246-400.

[58] Meyer, P. A. *Les Processus Stochastiques de 1950 à Nos Jours*, in Development of Mathematics 1950-2000, edited by Jean-Paul Pier; Birkhäuser, Boston (2000), MA. 813-848.

[59] Modigliani, F. and Miller, M. H. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, *American Economic Review,* **48**, 261-297.

[60] Motoo, M. and Watanabe, S. *On a class of additive functionals of Markov process*, J. Math. Kyoto Univ. **4**, 429-469.

[61] Osborne, M. F. M. Brownian motion in the stock market, *Operations Research*, **7** (1959), 145-173.

[62] Orey, S. *F-processes*, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, **2**, 301-303, University of California Press, Berkeley.

[63] Pais, A. (1982). *'Subtle is the Lord...' The Science and Life of Albert Einstein,* Oxford University Press, Oxford.

[64] Petit, M. (2003). *L'équation de Kolmogroff*, Editions Ramsay, Paris.

[65] Protter, P. A new prize in honor of Kiyosi Itô, *Stochastic Processes and their Applications*, **108** (2003), 151-153.

[66] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*; Second Edition, Springer Verlag, Heidelberg (2004).

[67] Rao, K. M. Quasimartingales, *Math. Scand.*, **24** (1969), 79-92.

[68] Rubin, H. Personal communication by electronic mail (2003).

[69] Rubin, H. (1956). *Quasi-martingales and stochastic integrals*,title of an invited talk at the Seattle Meeting of the IMS, August 21-24, 1956; see page 1206 of the Annals Math. Statist., **27**, 1198-1211.

[70] Samuelson, P. Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review,* **6** (1965), 13-39.

[71] Samuelson, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly, *Industrial Management Review,* **6** (1965)., 41-49.

[72] Samuelson, P. Mathematics of Speculative Price, *SIAM Review,* **15** (1973), 1-42.

[73] Samuelson, P. *Modern finance theory within one lifetime*, Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000, eds. Geman, H., Madan, D., Pliska, S. R., and T. Vorst; Springer-Verlag, Heidelberg (2002), 41-46.

[74] Samuelson, P. and Merton, R. C. A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility, *Industrial Management Review*, **10**(2) (1969), 17-46.

[75] Skorokhod, A. V. *On homogeneous continuous Markov proceses that are martingales, Theory of Probability and its Applications*, **8** (1963), 355-365.

[76] Skorokhod, A. V. *On the local structure of continuous Markov processes, Theory of Probability and its Application*, **11** (1966), 336-372.

[77] Skorokhod, A. V. Review of R. L. Stratonovich, Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control, *Theory of Probability and its Applications*, **12** (1967), 154-156.

[78] Skorokhod, A. V. *Homogeneous Markov processes without discontinuities of the second kind, Theory of Probability and its Applications*, **12** (1967), 222-240.

[79] Stratonovich, R. L. *Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control Izd.* Moskow University Press, Moskow (1966).

[80] Thiele, T. N. (1880). *Sur la compensation de quelques erreurs quasisystématiques par la méthod des moindres carrés*, Reitzel, Copenhagen. {Note: This article was published simultaneously in Danish and French; for the Danish reference see [30].}

[81] Van Schuppen, J. H. and Wong, E. *Transformations of local martingales under a change of law, Annals of Probability* **2** (1974), 879-888.

[82] Varadhan, S. R. S. and Stroock, D. W. *Introduction, K. Itô Collected Papers*, Springer-Verlag, Heidelberg, vii-xii (1987).

[83] Ville, J. (1939). *Étude critique de la notion de collectif*, Gauthier-Villars, Paris.

[84] Watanabe, S. (1964). *On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japanese J. Math.*, **36**, 53-70.

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان
jahanipu@kashanu.ac.ir