فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۳۹ تا ۵۵

در بهار اتفاق می‌افتد!

احسان ممتحن

بعد از ظهر یک سه‌شنبهٔ بهاری در دفتر کارم مشغول گشت و گذار در منزلگاه‌های ریاضی بودم که کسی درب اتاقم را باز کرد و وارد شد. خلوتم را به هم زده بود و این عمل را، به خودی خود، گناهی نابخشودنی تلقی می‌کردم. نخست کمی عصبانی شدم، اما این عصبانیت به سرعت جایش را به حیرتی توأم با وحشت داد. امکان نداشت. آخر چطور؟ یعنی چه؟ شاید کابوس بود، نمی‌توانست واقعیت داشته باشد ــ یک بار در مجلهٔ فیزیک قصه‌ای علمی تخیلی خوانده بودم که در آن نیوتن وارد اتاق فیزیکدان جوانی شده بود و به او گفته بود که نیروی جاذبه با معکوس مکعب فاصلهٔ دو جرم متناسب است نه با مربع آن، یکبار هم در کتاب «دنیای سوفی» فیلمی از آتن باستانی را به سوفی نشان داده بودند، اما اینها همه افسانه بودند حال آن که این یکی به هیچوجه به توهم شبیه نبود. راه می‌رفت و بدون اجازه وارد اتاق کار آدم می‌شد و از همه عجیب‌تر شبیه به کسی بود که سال‌ها در باره‌اش مطلب خوانده بودم. شبیه سقراط. واقعاً شبیه بود، بینی کوفته‌ای، کلّهٔ تاس (باید اذعان کنم که حجم کلّه‌اش باور نکردنی بود!)، شانه‌هایی پهن، تنومند، یک ریش بلند و نامرتب و صدایی نرم و روحانی. لباسی بسیار عادی به تن داشت. پیراهن و شلوار سفید و کفشی کتانی. هوا کمی سرد بود و هنوز این لباس مناسب چنان هوایی نبود اما چیز غیر عادیی نیز تلقی نمی‌شد. سلام کرد و گفت که آموزگار دبستانی است در همین نزدیکی‌ها! قدری ترسم فرو نشست. عمری رساله خوانی باید هم آدم را خیالاتی کند. نه، معلوم است که آن چیزهاباید فقط در قصه‌ها اتفاق بیافتد و بس.

گفتم: امری داشتید.

گفت: خواهش می‌کنم، بله، می‌خواهم گفتگو کنم.

گفتم: در چه موردی؟

گفت: اصل انتخاب.

باز خون به چهره‌ام دوید و منقلب شدم. آموزگار دبستان را با اصل انتخاب چه کار؟ این که جزء موضوعات درسی آن‌ها نیست. این آدم چه می‌گوید. خنده‌ای کرده و گفتم جالب است که به

اصل انتخاب علاقه دارید، نباید با شغلتان ارتباطی داشته باشد، حتماً کنجکاوی شخصی باعث شده به این موضوع علاقه پیدا کنید.

گفت: اصل عجیبی است. پذیرفتنش یک مصیبت است و نپذیرفتنش هم یک مشکل. از مدیر گروه پرسیدم گفتند شما مبانی ریاضی درس می‌دهید و به این موضوعات علاقه‌مندید. من قدری نظریهٔ مجموعه‌ها خوانده‌ام و به غیر از بعضی ایرادات منطقی قابل اغماض، اصل انتخاب مرا واقعاً به حیرت انداخته و در عین حال بر سر شوق آورده است. دوست دارم کمی با شما در مورد این اصل صحبت کنم. به نظر شما چه چیز این اصل بیش از همه برای یک ریاضیدان جالب است؟

گفتم: شاید کنجکاوی برانگیزترین نکته در بارهٔ اصل انتخاب آن باشد که چه موقع از آن استفاده می‌کنیم. یعنی ردّپای اصل انتخاب را در هر کجا که به کار گرفته شده است، ببینیم. این کار همیشه آسان نیست به ویژه اگر بیاد بیاوریم که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، یعنی در اوج شکل گیری و توجه به نظریهٔ مجموعه‌ها و اصل انتخاب، با وجود مخالفت با اصل انتخاب، بارها ندانسته و نخواسته از این اصل استفاده کرده بودند. و چرا چنین چیزی باید تااین حد مهم باشد؟ چرا دانستن این که در فلان قضیه اصل انتخاب به کار گرفته شده است یا نه مهم است؟ پاسخی که فوراً به ذهن می‌رسد این است که اصل انتخاب از بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است (یکی از کارهای مهم گودل). یعنی نمی‌توان اصل انتخاب را از دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مانند اصل تصریح، اصل زوج سازی، اصل اجتماع و $\cdots$ نتیجه گرفت، یا به طور معادل به این معنی است که می‌توان مدلی ساخت که دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها در آن صدق کنند و راست باشند اما این اصل راست نباشد و هم چنین می‌توان مدلی ساخت که این اصل و دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها راست باشند...

همینطور که داشتم حافظه‌ام را تخلیه می‌کردم وسط حرفهایم دوید و گفت: بله بله متوجهم. اما اگر موافق باشید نخست راجع به موضوع پایه‌ای‌تری صحبت کنیم. یعنی خود اصل انتخاب. من در فهم معنای این اصل مشکلاتی دارم. نمی‌دانم کلمهٔ **انتخاب** در این میان به چه معناست. اصولاً نمی دانم چه وقت در حال انتخاب کردن هستیم و چه وقت نه. برای این کار اجازه دهید موضوع را با حالتی آغاز کنم که در آن فقط یک مجموعه وجود دارد. اگر قصد *انتخاب* یک عضو از مجموعه‌ای ناتهی چون A را داشته باشیم چه می‌کنیم؟

گفتم: منطق به این پرسش چنین پاسخ می‌دهد که A ناتهی است $:= \exists\, x \in A$. پس **همان** x را انتخاب می‌کنیم.

گفت: اما همان x یا یکی از همانها را؟. زیرا ممکن است A یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، پس بینهایت از این «همان xها» وجود دارند. آیا اصولاً در اینجا نیز موضوع **انتخاب** قابل طرح است؟ آیا در این زبان مرتبهٔ اول، سور وجودی، $\exists$، از میان متغیرها عضوی را انتخاب می‌کند؟

گفتم: درست مانند آن است که دست کنیم در یک جعبه و چیزی در دستمان قرار گیرد. مهم نیست چه چیزی، تنها کافی است دست ما خالی بر نگردد. البته این هیچگاه در مورد یک جعبهٔ

خالی اتفاق نمی‌افتد. هر چقدر هم جستجو کنیم چیزی در دستمان قرار نمی‌گیرد. بنابراین در اینجا **انتخابی** در میان نیست. تنها، بودن یا نبودن عضوی در آنجا مطرح است. در جعبه دست میکنی و چیزی (همان x) هست که مأیوست نکند و دستت را خالی از جعبه بیرون نیاوری.

گفت: موضوع این است که در زبان مرتبهٔ اول که برای نمایش بخش بزرگی از ریاضیات مناسب است به لحاظ منطقی فرقی میان $\exists x \in A$ و $\exists y \in A$ نیست. هر دو می‌گویند «A تهی نیست»، یعنی هر دو را وقتی به یک زبان طبیعی مانند زبان فارسی بر می‌گردانیم به نظر می‌رسد که به این معنی است. اما مشکل اینست که اگر در یک مجموعه زندگی کنید بین متغیرهای x و y فرق می‌نهید، زیرا اگر این دو یکی بودند دیگر هیچ انسانی قادر نبود تفاوتی میان آنها قائل شود.

گفتم: ایرادتان مرا به یاد گفته‌ای از ویتگنشتاین می‌اندازد. او نیز معتقد بود اگر مدعی هستیم که زبانی صوری طراحی کرده‌ایم که از مشکلات زبان‌های طبیعی در امان است پس چه معنی دارد که هر بار به زبان طبیعی باز گردیم و بگوییم این جملهٔ صوری در واقع فلان چیز را در زبان طبیعی می‌گوید؟ پس اصولاً چه نیازی بود که فرگه و بعد راسل و وایتهد و دیگران اینهمه وقت صرف ساختن چنین زبانی کنند؟ گویی گریزی از این نیست که برای فهمیدن هر چیزی نهایتاً آن را به زبان طبیعی باز گردانیم [۵].

گفت: من نیز متوجه چنین مشکلی شده‌ام. در درک ریاضیات، زبان طبیعی به شدت دخالت می‌کند. هیچ ریاضیدانی، حتی منطقدان‌ترین آنها یعنی گودل، نمی‌تواند از زبان‌های طبیعی استفاده نکند، برای همین هم گودل در مقالهٔ خود «دربارهٔ گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا» نوشت: جمله‌ی $\neg Bew[R(q), q]$ در واقع می‌گوید که «$R(q)$ اثبات پذیر نیست». چرا باید به ما یادآوری کند که گزاره‌اش دارد چنین حرفی می‌زند اگر موضوع واضح است [۸]؟ اما این دقیقاً آن چیزی نبود که می‌خواستم در باره‌اش بحث کنم. بیایید با یکدیگر پیمان ببندیم که بر اصل انتخاب تمرکز کنیم و آن را بهتر بفهمیم.

نمی‌دانم چرا دلم شور می‌زد، با خود گفتم اگر آموزگار است پس چطور مقالهٔ گودل را خوانده و به این چیزها فکر کرده است؟ اصلاً من چرا باید با این آدم عجیب و غریب که در این هوای خنک یک پیراهن پوشیده است و با سر عظیمش به طرف من ... دوباره رشتهٔ افکارم را پاره کرد. لبخند می‌زد و از همه عجیب‌تر برای خودش لیوانی چای ریخته بود و چشمانش دنبال قندان می‌گشت. قندان در زیر توده‌ای از کاغذهای کاهی پنهان شده بود در حالی که آن را بیرون می‌آوردم و کنار دستش می‌گذاشتم به بحث بازگشت.

گفت: نخست مشخص کنیم که چه فرقی بین انتخاب یک عضو از یک مجموعه که ممکن است بینهایت عضو هم داشته باشد با انتخاب بینهایت عضو از بینهایت مجموعه (از هر مجموعه یک عضو) وجود دارد؟ کمی قبل البته مشخص شد که انتخاب یک عضو از یک مجموعه اصولاً **انتخاب** نیست. زیرا فرقی نمی‌کند که کدام عضو را، x یا y را، *انتخاب* کنید (این را که می‌گفت لبخند عجیبی بر لبانش نشست، گویی می‌خواست بگوید اینجا نیز ناگزیریم از کلمهٔ انتخاب استفاده

کنیم)، به سرعت افزود: اجازه دهید برای این حالت به جای انتخاب از واژهٔ برداشت استفاده کنیم. مهم این است که عضوی آنجا هست و در عین حال مهم نیست که کدامیک. هر چه پیش آید خوش آید. وضع با مقولهٔ مورد علاقهٔ احتمال‌دانان هم فرق دارد. آنها در جعبه تعدادی گلوله‌های آبی، زرد و قرمز می‌ریزند و بعد از احتمال بیرون آمدن مهرهٔ زرد سؤال می‌کنند. درست است؟

گفتم: بله، برای احتمال‌دان موضوع مهم محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد، مثلاً زرد بودن مهرهٔ بیرون آمده از جعبه است. بدین معنی احتمال وجود عضوی در یک مجموعهٔ ناتهی یک است. شاید وضع شبیه این است که جعبه‌ای مالامال از مهره‌های سفید رنگ باشد و بپرسیم احتمال بیرون آمدن مهرهٔ سفید چقدر است؟ معلوم است که یک.

گفت: بسیار خوب. و اگر بخواهیم از دو یا سه یا بطور کلی تعداد متناهی مجموعه عضوهایی انتخاب کنیم (از هر مجموعه یک عضو) وضع کم و بیش به همین نحو است. درست مانند حالت انتخاب یک عضو از یک مجموعه. بعد گویی که با خودش گفتگو می‌کند ادامه داد: گاه از خودم می‌پرسم آیا برداشت یک عضو از یک مجموعه با برداشت **هم‌زمان** میلیاردها عضو از میلیاردها مجموعه یکسان است؟ در عین حال احساس منطقی ریاضیدانان را نیز درک می‌کنم. سپس وضعیتی دیگر پیش می‌آید: فرض کنیم تعداد شمارایی مجموعه‌های غیرتهی مانند $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، ... داده شده باشند. می‌خواهیم از هر یک از مجموعه‌ها عضوی انتخاب کنیم. اگر از $A_۱$ عضو $x_۱$، از $A_۲$ عضو $x_۲$ و به همین ترتیب از مجموعه‌های بعدی به ترتیب و تک تک عضو انتخاب کنیم آیا خواهیم توانست نهایتاً مجموعهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را تشکیل دهیم یا خیر؟

گفتم: به نظر نمی‌رسد که بتوانیم به چنین هدفی نائل شویم. منظور من این است که به ازای هر n، البته می‌توانیم x_n را داشته باشیم ولی همهٔ x_n ها را با هم خیر. نمی‌دانم منظورتان را از تشکیل درست فهمیده‌ام؟

گفت: بله، کم و بیش. منظورم از تشکیل مجموعه در واقع یافتن خاصیتی است چون $P(x)$ به نحوی که $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty} = \{\, x \in \cup_{n=۱}^{\infty} A_n \mid P(x)\}$. بدین ترتیب معتقدید که تشکیل دنباله‌ها به چیزی بیش از این نیاز دارد؟

گفتم: کاملاً. در آنجا شما یک تابع دارید: مثلاً $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ و تابع (هر تابعی) یکبار برای همیشه بر روی همه‌ی اعضای دامنه‌اش تعریف می‌شود. نه این که f نخست ۱ را به $f(۱) = x_۱$ می‌برد و بعد ۲ را به $f(۲) = x_۲$ و الی آخر. خیر، از همان آغاز شما مقدار f را به ازای همهٔ اعداد طبیعی می‌دانید.

گفت: بنابراین برای انتخاب یک عضو از بینهایت مجموعه نیاز به یک تابع داریم. *انتخاب یعنی وجود یک تابع*. تابعی که امکان انتخاب هم‌زمان یک عضو از هریک از مجموعه‌ها را فراهم آورد. راستی عجیب نیست که در ریاضیات هم، زمان ولو به این شکل وارد می‌شود؟ اگر $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های غیر تهی باشد برای این که از هریک از A_iها عضوی انتخاب کنیم نیاز به یک تابع داریم. تابعی با دامنهٔ I و برد $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \mathfrak{A}$. تابعی که

برای تکمیل انتظاراتمان از آن باید داشته باشیم $\forall i \in I,\ f(i) \in A_i$. می‌دانیم که چنین تابعی را تابع انتخاب می‌نامند. چقدر از این دیدگاه همه چیز طبیعی به نظر می‌رسد. همه چیز سر جای خودش است.

گفتم: آری ولی از آنسو هم قضیهٔ باناخ ــ تارسکی را داریم که از یک کره به کمک اصل انتخاب دو کرهٔ همنهشت با آن به‌دست می‌آورید. نتیجه‌ای که با شهود یا به عبارتی بهتر با عقل سلیم همخوانی ندارد. از سوی دیگر اگر آن را کنار گذاریم حلقه‌های واحدداری یافت خواهند شد که ایده‌آل ماکسیمال ندارند، فضاهای برداری بدون پایه خواهیم داشت، مجموعه‌های نامتناهی که فاقد زیرمجموعه‌های شمارا هستند (که این یکی هم با عقل سلیم همخوانی ندارد) و حاصل ضربی از فضاهای فشرده که فشرده نیستند و هزار و یک چیز بزرگ و کوچک. به قول خودتان پذیرفتنش مصیبتی است و نپذیرفتنش مشکل. در مورد وارد شدن مفهوم زمان هم باید بگویم که امری قابل صرف نظر کردن است. آنچه باید گفت وجود یک تابع انتخاب است. عبارت «هم زمان» به خاطر دخالت زبان بشری مطرح می‌شود.

نمی‌دانم سر بزرگش را به نشانهٔ تأیید تکان داد یا حیرت. چند لحظه که به نظر چند ساعت آمد سکوت کرد. و ای کاش سکوت نمی‌کرد چون دوباره به من فرصتی داد تا در مغزم شروع به راه رفتن کنم. این واژه‌ای است که برای اندیشیدن بی نتیجه انتخاب کرده‌ام. شاید بهتر باشد تا از او دربارهٔ فلسفهٔ افلاطون بپرسم، مثلاً نظرش را دربارهٔ مُثُل افلاطونی جویا شوم یا موضوع بحث را عوض کنم و راجع به فضیلت، دینداری، یا زیبایی بپرسم. کم‌کم داشتم به خود شجاعت می‌دادم که موضوع بحث را تغییر دهم که دیدم با دقت در حال نگریستن به من است.

گفت: می‌دانید، داشتم فکر می‌کردم که نیاز به اصل انتخاب از همان اول احساس می‌شود وگرنه چطور برای تابع پوشای $f : A \longrightarrow B$، وجود وارون راست را ثابت می‌کردیم: یعنی تابعی مانند $g : B \longrightarrow A$ که $f \circ g = 1_B$. برای همین نیز گاه از برتراند راسل تعجب می‌کنم که چرا به این اصل تا این حد بدبین بود. شاید حق با هاردی بود که می‌گفت اگر این اصل را کنار بگذاریم باید با بخش قابل توجهی از ریاضیات وداع کنیم. با این همه، انصافاً صورتبندی راسل از این اصل، یعنی وجود مجموعه‌ای که از هریک از اعضای $\mathfrak{A}$ تنها یک عضو داشته باشد، صورتبندی روشنی است. صورتبندی راسل به وضوح نشان می‌دهد که اصل، یک حکم وجودی است. و همانطور که منطق‌دانان می‌گویند تصدیق احکام وجودی، یعنی بحث از بود و نبود، کار منطق نیست [۱۲]. به همین دلیل هم راسل و وایتهد مجبور شدند نظریهٔ مجموعه‌ها را به نظام صوری خود بیفزایند تا بتوانند ریاضیات را از آن استخراج کنند.

گفتم: به نظر من راسل به هر چه که دست می‌زد آن را از ابهام بدر می‌آورد. مثلاً آن عبارت معروفش را دربارهٔ اصل انتخاب بیاد دارید؟ «برای انتخاب یک جوراب از بینهایت جفت جوراب به اصل انتخاب نیاز است اما برای انتخاب یک چکمه از بینهایت جفت چکمه به اصل انتخاب نیازی نیست» [۴]، زیرا می‌توانید از هر جفت چکمه، لنگهٔ چپ را انتخاب کنید. به هر حال فرقی بین

لنگه‌های یک جفت چکمه وجود دارد. اما در مورد جوراب‌ها چنین فرقی وجود ندارد. جوراب‌ها را می‌توان لنگه به لنگه پوشید اما چکمه‌ها را نه. به نظر من همین کلید درک این نکته است که چه وقت از اصل انتخاب استفاده می‌کنیم و چه وقت نمی‌کنیم.

گفت: درست است. در غیاب یک قانونمندی ذاتی که برای انتخاب اعضا بدان تکیه کنیم به اصل انتخاب نیاز داریم اما در حضور چنین قانونمندی به اصل انتخاب نیازی نیست. در مثال راسل، می‌توانید جفت‌های چپ یا راست را انتخاب کنید زیرا چپ و راست بودن بر کفش‌ها حاکم است اما بر جوراب‌ها حاکم نیست. اگر $\mathfrak{A}$ شامل زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{N}$ باشد، برای انتخاب یک عضو از هر یک از اعضای $\mathfrak{A}$ بازهم به اصل انتخاب نیازی نیست زیرا همهٔ آن مجموعه‌ها بنا به خاصیت خوشترتیبی اعداد طبیعی عضو ابتدا دارند و می‌توانیم به راحتی از هر یک از آنها عضو ابتدایشان را انتخاب کنیم. این کاری است که در مورد زیر مجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ نمی‌توان انجام داد. روشن نیست که چطور باید از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد. یا دیگر روشن نیست که به عبارتی چطور باید تابعی مناسب برای این منظور یافت، هیچ کس تاکنون تابعی مناسب برای این منظور نیافته است و استدلال‌های متقاعد کننده‌ای در نظریهٔ مدل‌ها وجود دارند که هیچکس از این به بعد هم نخواهد توانست چنین تابعی بیابد (البته برای اثبات این موضوع باید تعریف دقیقی از «یافتن» ارائه کنم. بگذریم!). راستی ما مدتی است که از اصل انتخاب صحبت می‌کنیم بی آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم، هر چند بارها به آن اشاره کرده‌ایم: *فرض کنید $\mathfrak{A}$ رده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. آنگاه می‌توانیم عضوی از هر یک از مجموعه‌ها* انتخاب *کنیم. به عبارتی دیگر، تابعی چون $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \bigcup \mathfrak{A}$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر S در این رده، $f(S)$ عضوی از S می‌باشد.* آیا با این تعریف به عنوان مبنایی برای ادامهٔ بحث موافقید؟

گفتم: اصل انتخاب به شکل‌های مختلفی بیان شده است که البته همگی منطقاً با یکدیگر معادلند. بله، چرا که نه، من نیز این صورتبندی را برای بحث کاملاً مناسب می‌دانم. اما برگردیم به بحث، اگر به جای همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\mathfrak{A}$ را مجموعهٔ همهٔ بازه‌های با طول مثبت و متناهی در نظر بگیریم آنگاه برای هر $S \in \mathfrak{A}$ می‌توان $f(S)$ را نقطهٔ میانی بازهٔ S تعریف کرد. لذا با این که در اینجا نیز با زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ (هر چند زیر مجموعه‌های ویژه‌ای از آن) سر و کار داریم به اصل انتخاب نیازی نیست. به راحتی می‌توانیم تابع انتخاب را تعریف کنیم.

گفت: برای همین نیز وقتی با خانواده‌های نامتناهی از گروه‌ها یا حلقه‌ها یا مدول‌ها سروکار داریم برای انتخاب عضوی از هر یک از آنها به این اصل نیازی نیست. کافی است عضو خنثی را از هر یک از آنها انتخاب کنیم. درست می‌گویم؟

گفتم: بله، لازم نیست برای غیر تهی بودن حاصل‌ضرب نامتناهی گروهها، حلقه‌ها و مدولها به اصل انتخاب متوسل شویم. در مورد حلقه‌ها، اگر واحددار باشند، به غیر از عضو خنثای جمعی، می‌توان عضو خنثای ضربی آنها را نیز انتخاب کرد. اما برای اطمینان از ناتهی بودن حاصلضرب بینهایت نیمگروه به اصل انتخاب نیاز داریم.

گفت: با این حال، گاه فکر جنون‌آمیزی به ذهنم خطور می‌کند. چطور عضو خنثی را در یک گروه از بقیهٔ اعضا تمیز دهیم؟ با کدام محک می‌توانیم عضو خنثی را بیابیم؟ تنها می‌دانیم عضوی در G وجود دارد که از ترکیبش با هر عضو دیگر چیزی بجز همان عضو بدست نمی‌آید. آیا این کافی است تا در میان اعضای گروه به راحتی عضو خنثی را بیابیم؟ فکر نمی‌کنم که چنین بحثی به ریاضیات مربوط باشد، شاید به روانشناسی یا فلسفه مربوط باشد، ولی حداقل ابهامی است که برای من وجود دارد.

گفتم: بله، اما در مورد عضو خنثی نشان می‌دهیم که عضو خنثی در گروه منحصر بفرد است و همین اجازه می‌دهد به آسانی به آن ارجاع دهیم.

گفت: اما وارون هر عضو در گروه نیز منحصر بفرد است، چرا به آن ارجاع نمی‌دهید؟ اگر تنها منحصر بفرد بودن کافی است، باید بتوانید به وارون یک عضو هم به همان آسانی ارجاع دهید چرا که آن نیز منحصربه‌فرد است.

گفتم: در یک گروه برای هر عضو تنها یک وارون وجود دارد، اما عضو خنثی در سراسر گروه یکی است. گویی در گله‌ای اسب تنها یک اسب سفید باشد و بقیهٔ گله قهوه‌ای باشند و سیاه. آیا آن اسب سفید در تمام گله منحصر به فرد نیست؟ ممکن است هر اسب قهوه‌ای جفتی سیاه رنگ داشته باشد و آن را به راحتی در گله تشخیص دهد اما اگر شما بخواهید به اسبی سیاه در گله اشاره کنید خواهند پرسید کدام اسب سیاه؟ اسب سیاه برای جفت قهوه‌ای رنگش منحصر به‌فرد است نه برای ما. ولی اسب سفید نزد ما نیز مشخص است. نظر شما چیست؟

گفت: چرا، چرا، درست می‌گویید. حرفم را پس می‌گیرم. اما این ملاحظات که فرمودید در ریاضیات هم لحاظ شده است؟ به نظر می‌رسید داشتید کمی فلسفه ورزی می‌کردید. همینطور به نظر می‌رسید که یافتن یک عضو در یک مجموعه (یادمان باشد که مفهوم مجموعه تعریف نشده است) از شخصی به شخص دیگر متفاوت است. اگر به جای شما (این را که می‌گفت لبخند می‌زد) یکی از اسبان قهوه‌ای به مجموعهٔ اسبان بنگرد بی شک جفت خود را بر خواهد گزید نه اسب سفید رنگ را. می‌دانم که اینگونه تأملات در ریاضیات محملی ندارند اما وقتی بخواهیم مفهوم انتخاب را نیک دریابیم به ذهن می‌رسند. دست خود آدم نیست. اندیشه‌ها می‌آیند و به اشتباه در ذهن من مأوا می‌گزینند، برای تشخیص ایرادشان تأکید مطلقی دارند بر بیرون آمدن. نمی‌دانم از کجا می‌آیند، یا این که ارزشی دارند یا نه، اما هر اندازه که ابلهانه یا مخاطره آمیز باشد، فکر نمی‌کنم حق داشته باشم از این عمل جلوگیری کنم [۲]. برای همین نیاز شدیدی به گفتگو پیدا می‌کنم. گاه گفتگو به همان اندازه برای من حیاتی است که تنفس برای دیگران.

راست می‌گفت، دو موضوع بحث برانگیز دربارهٔ اصل انتخاب، «انتخاب» و «وجود» است. می‌دانستم که طبق نظر ساختگرایان «وجود داشتن» به معنی ساختن است، لذا اصل انتخاب نادرست است چرا که ما نمی‌توانیم تابع انتخابی برای زیر مجموعه‌های غیر تهی $\mathbb{R}$ بسازیم. بعضی دیگر از ساختگرایان نیز وجود داشتن را به معنی «یافتن» می‌دانند و در این حالت نیز چون نمی‌توانیم تابع

انتخابی بیابیم اصل نادرست است [نک توضیح].

با این وجود، اغلب ریاضیدانان «وجود» را به معنی ضعیفتری در نظر می‌گیرند و اصل را درست می‌دانند: کافی است تعریف کردن $f(S)$ را به مثابهٔ «انتخاب کردن عضوی از» S بدانیم.

وقتی اصل را می‌پذیریم پیشاپیش با این قرارداد موافقت کرده‌ایم که به خودمان اجازه دهیم که از تابع انتخاب f در اثبات‌هایمان استفاده کنیم چنانکه گویی به یک معنی «وجود دارد»، حتی اگر نتوانیم نمونه یا الگوریتم دقیقی برایش ارایه دهیم. در این اندیشه بودم که صدای آهنگین و زیبای او برخاست. صدایش چون صوت داوود بود.

گفت: «وجود» f یا هر شیء ریاضی دیگر، حتی «۳»، کاملاً صوری است. به نظر می‌رسد مانند میز و صندلی اتاق شما صلب و محکم نیست. نمی‌توانی آن را لمس کنی، بو کنی، وزن کنی، بچشی یا گوش کنی یا ببینی. اما افلاطون وجود آنها را مستدام و بی‌تغییر و مستقل از ما آدمیان می‌دانست. به هر حال صندلی اتاق شما در اثر باد و باران و گذشت روزگاران به ذرات چوب تبدیل خواهد شد اما اشیاء ریاضی به نظر او تغییرناپذیر و جاودان هستند. عجیب آن است که با این که هیچ ارتباط حسی با اشیاء ریاضی نداریم ولی آنها را دقیق‌تر از میز تعریف می‌کنیم [۱۰]. راستی تا به حال تلاش کرده‌اید از میز کار خود تعریفی ارائه دهید؟

فکر کردم می‌خواهد که پاسخی دهم: راستش خیر.

گفت: اشیاء ریاضی، به زعم شهودگرایان، تنها در دنیای ذهنی ریاضیات وجود دارند. دنیاهای ریاضی بسیاری قابل تصورند. وقتی اصل را می‌پذیریم یا انکار می‌کنیم در حقیقت داریم مشخص می‌کنیم که قصد داریم در کدام دنیای ریاضی کار کنیم. پذیرفتن یا انکار این اصل، همان گونه که مدل‌های گودل و کوهن نشان می‌دهند هیچکدام به تناقضی منجر نمی‌شود.

گفتم: بعضی ریاضیدانان از خود پرسیده‌اند که آیا باید از همهٔ قدرت این اصل استفاده کرد؟ آیا اصل انتخاب در حالت شمارا (یعنی انتخاب از رده‌ای شمارا از مجموعه‌ها) برای بیشتر مقاصد ما کافی نیست؟

گفت: به نظر نمی‌رسد که در ریاضیات کاربردی همهٔ قدرت اصل انتخاب به کار آید. ممکن است همین اصل انتخاب شمارا کفایت کند. زیرا کاربردها بر اندازه‌گیری مبتنی هستند و بشر تنها می‌تواند تعداد متناهی اندازه را محاسبه کند. ما برون‌یابی می‌کنیم یا حدود را محاسبه می‌کنیم. اما حتی آن حدود نیز اغلب دنباله‌وار هستند. ما حتی در عالم نظر هم بیش از تعداد شمارایی اندازه بکار نمی‌بریم. بگذریم که حتی تعریف پیوستگی نیز با دنباله‌ها ممکن است. بعد با سر به کتاب «اصول آنالیز ریاضیِ» رودین اشاره کرد و ادامه داد: حتی در اینجا هم بسیاری از قضایا تنها از اصل انتخاب شمارا استفاده می‌کنند، هرچند این نویسنده چندان در قید تصریح موارد استعمال این اصل نیست. به عنوان مثال در اثبات شمارا بودن نقاط ناپیوستگی یک تابع یکنوا از اصل انتخاب در حالت شمارا بهره می‌گیرد اگرچه به هیچوجه به آن اشاره‌ای نمی‌کند. بیشتر فضاها جدایی‌پذیر هستند. کارهایی که می‌کنیم اغلب در زیر فضاهای جدایی‌پذیر اتفاق می‌افتند. البته گاه یافتن آن

زیر فضاها کمی زحمت دارد. لذا به یک معنی فضاهای جدایی‌ناپذیر تنها در خیال ریاضیدانان وجود دارند. اگر خودمان را به فضاهای جدایی‌پذیر محدود کنیم بیشتر آنالیز معمولی را تنها به کمک اصل انتخاب شمارا می‌توان بازتولید کرد. هر چند که در آن صورت توصیف آنچه که بدست آورده‌ایم پیچیده‌تر خواهد شد، بنابراین چنین کاری تنها توسط ریاضیدانانی که نگرش فلسفی بسیار بدبینانه‌ای نسبت به اصل دارند انجام می‌شود [۴].

گفتم: تعداد کمی از ریاضیدانان محض و تعداد به نسبت بیشتری از ریاضیدانان کاربردی با این اصل مشکل دارند. با این که این اصل بخش‌هایی از ریاضیات را ساده‌تر می‌کند نتایجی هم به دست می‌دهد که با تجارب روزمرهٔ ما همخوانی ندارد یا حتی با آن متناقض است. مانند همان پارادوکس باناخ ــ تارسکی که در آغاز به آن اشاره کردم. باناخ و تارسکی اصل را به کار گرفتند تا ثابت کنند که ممکن است کرهٔ واحد ۳ ـ بعدی $B = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \mid x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱\}$ را گرفت و به تعداد متناهی پاره افراز کرد و این پاره‌ها را حرکت داد (تنها با دوران و انتقال) و از آنها دو نسخه از B ساخت.

گفت: در نگاه اول ممکن است این به اصطلاح پارادوکس باناخ ــ تارسکی با شهود فیزیکی ما یا دقیقتر گفته باشیم، با قانون بقای جرم در فیزیک نیوتنی، هماهنگی نداشته باشد. اما این نتیجه فقط کمی پیچیده است نه متناقض. اگر چگالی یکنواخت را بپذیریم، تنها یک مجموعه با یک حجم مشخص می‌تواند جرم معینی داشته باشد. مفهوم حجم برای زیرمجموعه‌های بسیاری از $\mathbb{R}^۳$ قابل تعریف است و افراد مبتدی نظیر من، ممکن است انتظار داشته باشند که این مفهوم برای همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^۳$ قابل تعریف باشد، اما این‌طور نیست. کمی دقیق‌تر گفته باشم، اندازهٔ لبگ روی بعضی از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^۳$ قابل تعریف است اما نمی‌توان آن را به همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^۳$ چنان تعمیم داد که بتواند دو خاصیت عمده از خواص اندازه را همچنان حفظ کند: اندازهٔ اجتماع دو مجموعهٔ مجزا از هم برابر مجموع اندازه‌های آنها است و اندازهٔ تحت انتقال و دوران دست نخورده باقی می‌ماند. یکی یا چندتایی از مجموعه‌ها در تجزیهٔ باناخ ــ تارسکی باید به معنی لبگ، اندازه‌ناپذیر باشند؛ لذا یک نتیجه از قضیهٔ باناخ ــ تارسکی این واقعیت است که مجموعه‌هایی وجود دارند که به معنی لبگ، اندازه‌ناپذیر هستند. هر چند راه‌های ساده‌تری برای ساختن مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر وجود دارد. ولی هر اثباتی برای این منظور از اصل انتخاب استفاده می‌کند.

بعد همینطور که لیوان چای را از روی میز برمی‌داشت، گفت: می‌توانید در بدنهٔ این لیوان بینهایت سوراخ تصور کنید اما امکان تجسم یک لیوان اندازه‌ناپذیر بسیار مشکل می‌نماید. هر چند فکر کردن به آن خالی از لطف هم نیست. شاید اگر چنین لیوانی را یکبار از چای پر کنیم دیگر تا آخر عمر به دم کردن مجدد چای نیازی نداشته باشیم و این برای کسی چون من می‌توانست خبر مسرت‌بخشی باشد.

سخنانش مرا به یاد مقاله‌ای انداخت که مدتها پیش خوانده بودم [۱۳]. در آن مقاله گفته شده بود: «*شناخته‌شده‌ترین مثالِ اندازه، حجم یک جسم صلب A، در فضای اقلیدسی n بعدی معمولی*

است» و کمی بعد اضافه شده بود که: « *هنوز خیلی‌ها عقیده دارند که حجم تنها اندازهٔ ناوردا در فضای n بعدی اقلیدسی است»*. نظرش را جویا شدم. مقاله را خوانده بود.

گفت: نویسندهٔ مقاله سعی می‌کند به غیر از حجم، اندازه‌های دیگری در فضاهای n بعدی اقلیدسی بیابد که تحت گروه‌های تبدیلات هندسی (به ویژه دوران و انتقال) ناوردا بمانند و در قسمتی از سخنرانی می‌گوید: *اما در واقع اندازه‌های ناوردای دیگری وجود دارند که روی تمام زیرمجموعه‌های* **معقول** *فضای اقلیدسی تعریف شده‌اند، و دارای معنای هندسی قابل توجهی هستند.* و در بقیهٔ سخنرانی سعی در تشریح چنین اندازه‌هایی دارد. منتها منظور خود را از *معقول و معنای هندسی* هیچگاه مشخص نمی‌کند. می‌بینید اگر این چند سطر را نمی‌نوشت مقاله ناقص می‌بود و حال که نوشته، مقاله مبهم شده است. معقول از نظر که؟ از نظر براور یا هیلبرت؟ و معنای هندسی یعنی چه؟ امروزه شما ریاضیدانان به طیف وسیعی از مطالب صفت «هندسی» می‌دهید که هیچ شباهتی با یکدیگر ندارند.

کمی ناراحت بودم. برای چه از ابتدا خودش را درست معرفی نکرده است؟ گفتم باید مدرسه‌ی ابتدایی جالبی باشد که شما آموزگارش هستید. با حیرت به من نگریست و بعد از ته دل خندید: من کی گفتم که آموزگار مدرسهٔ ابتدایی هستم؟ من گفتم که آموزگار دبستانم، آیا اینطور نیست؟ و دبستان که لزوماً مدرسهٔ ابتدایی نیست و هر آموزگاری که معلم کودکان نیست. هر چند که اگر معلم اطفالی را هم دیدید که به این امور علاقه دارد نباید تعجب کنید. بیاد بیاورید که کارل پوپر هم مدتی معلم کودکان بوده است یا حتی ویتگنشتاین مدتی معلم روستای تراتنباخ در اتریش بود، هر چند این دومی معلم بسیار بدی بود. خجالت کشیدم، چرا خودم این را حدس نزده بودم. معلوم بود متوجه شده است چون با خنده گفت تقصیر شما نیست مشکل از سرشت زبانهای طبیعی است. اینطور است دیگر و کاری هم نمی‌شود کرد. حال که کار به اینجا کشیده بود میخواستم کنجکاوی شعله‌ور شده‌ام را فرو نشانم و آنچه را که از آغاز رنجم داده بود بیرون بریزم. پرسیدم: پس آموزگار کدام دبستان هستید؟

گفت: آنجا که من آموزگارم تنها یک دبستان وجود دارد (و بعد با مهربانی مرا نگریست). ببینید دوست عزیز، برای شما چه فرق می‌کند که من کیم. مهم اینست که هردوی ما به موضوعی علاقه داریم و برای فهمیدن آن گفتگو می‌کنیم. چه تضمین بیشتری برای ادامهٔ بحث لازم است.

گفتم: آخر شما به سقراط شبیه هستید. آیا سقراط نیستید؟

از جایش بلند شد و از ته دل خندید: فرمودید سقراط؟ کمی به جلو خم شد و ناگهان دستم را در میان پنجه‌های نیرومندش اسیر کرد و فشرد. و ضمن اینکار از من پرسید فکر می‌کنید سقراط تاریخی که حتی بعضی از مورخان فلسفه او را ساخته و پرداختهٔ ذهن افلاطون می‌دانند می‌توانست چنین دستان شما را بفشارد. آیا من زنده نیستم؟ سرشار از کنجکاوی و پرسش؟ آیا یک مرده می‌توانست چنین باشد؟ مگر فراموش کرده‌اید که آتنیان سقراط را با جامی از شوکران به کام مرگ فرستادند. کمی صبر کرد و سپس گفت: آیا شکّتان برطرف شد؟ این را گفت و دستم را که سرخ و داغ شده بود

رها کرد.

گفتم: لااقل بگویید در این دبستان چه چیزهایی به شاگردانتان می‌آموزید؟ بسیار مایلم که این را بدانم.

گفت: خوب بعضی چیزهای مهم را. مانند افزایش نیروی دقت و توجه [۱۱]. چون اگر بتوانند با همهٔ وجود بر موضوعی متمرکز شوند آن را هر چقدر هم دشوار باشد درخواهند یافت. دیرزمانی است که پی برده‌ام حقیقت خاصّ نوابغ نیست. دانستن حق همهٔ ماست و همیشه این جملهٔ معروف هیلبرت «ما باید بدانیم، ما خواهیم دانست» را همینطور تفسیر می‌کنم. در روزگار جوانی گمان می‌کردم که بارگاه حقیقت مخصوص نوابغ است و دیگران را بدان راهی نیست و از این فکر زجر می‌کشیدم. ترجیح می‌دادم بمیرم تا آن که به قلمرو حقیقت راه نیابم. آنچه که پس از آن آموختم مرا قانع ساخت که هر انسانی حتی اگر به ظاهر از توانایی‌ها و استعدادهای ویژه محروم است می‌تواند به قلمرو حقیقت که خاص نوابغ است راه یابد و در آن مقیم شود. به شرط آن که با همهٔ وجود و از اعماق قلب این را بخواهد و همهٔ توجهش را بر آن متمرکز کند. چنین کسی نیز در حقیقت برای خودش نابغه‌ای خواهد شد، هر چند ممکن است دیگران نتوانند نبوغ او را به سبب فقدان استعدادی خاص تشخیص دهند [۲]. و حال که پرسیدید بگذارید بگویم که من به هیچوجه با این سخنان کلیشه‌ای که «ریاضیات بازی جوانان است» یا «خاصّ تیزهوشان است» کنار نیامده‌ام. حقیقت ملکِ شخصی هیچ کس نیست.

بعد گویی از این که ناخواسته به این عرصه کشانده بودمش پریشان شده باشد دستش را در فضا حرکت داد و سکوت کرد. کمی بعد سرش را برافراشت و توانستم همان لبخند مهرآمیز را در چهره‌اش ببینم، دوباره آن آرامش ملکوتی در چشمانش خانه کرده بود.

گفت: برگردیم به سروقت کار اصلی خود. می‌دانید علیرغم نظر بیشتر افراد، فکر می‌کنم که حیرت‌انگیزی این اصل در موضوعات پیچیده‌ای چون قضیهٔ باناخ ــ تارسکی یا مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر نیست بلکه در جاهایی است که به هیچوجه توقع آن را ندارید. مثل وقتی که سروکلّهٔ اصل هنگام کار با اعداد صحیح پیدا می‌شود. یک پالایه[1] را در نظر بگیرید. از تعریف آن می‌توان نتیجه گرفت که یک مجموعه و متمم آن نمی‌توانند در پالایه قرار گیرند. لذا نمی‌توان پالایه‌ای روی مجموعهٔ اعداد صحیح چنان تعریف کرد که اعضایش همهٔ زیر مجموعه‌های نامتناهی باشند. زیرا مجموعه‌ی اعداد زوج و فرد هردو نامتناهی هستند و اشتراکی ندارند. در عوض می‌توان پالایه‌ای روی $\mathbb{Z}$ در نظر گرفت که اعضایش همهٔ مجموعه‌هایی باشند که متمم آنها متناهی است. اگر چه که چنین پالایه‌ای ابرپالایه نیست. گفتم: زیرا ابرپالایهٔ F یک پالایه است با این خاصیت اضافی که برای هر زیر مجموعهٔ S از $\mathbb{Z}$ باید یا S یا متمم آن در F قرار داشته باشد. برای این که یک ابرپالایه بسازیم کافی است عددی صحیح چون $x_\circ$ برداریم و همهٔ مجموعه‌هایی را که شامل $x_\circ$ باشند

1) filter

در نظر بگیریم. چنین خانواده‌ای از مجموعه‌ها تشکیل یک ابرپالایه می‌دهد. به چنین ابرپالایه‌ای، اصلی، گوییم. گفت: دربارهٔ ابرپالایهٔ غیراصلی چه می‌گویید؟ منظورم ابرپالایه‌ای است که شامل هیچ مجموعهٔ متناهی نباشد. عنایت دارید که ابرپالایهٔ شما حتی شامل مجموعهٔ تک عضوی $\{x_\circ\}$ نیز می‌شد.

گفتم: بله، کاملا متوجهم. برای به‌دست آوردن چنین ابرپالایه‌ای باید از اصل انتخاب استفاده کنید. زیرا بنا به لم تسورن ـ کوراتوفسکی هر پالایه‌ای در یک ابرپالایه قرار می‌گیرد. کافی است با پالایهٔ مجموعه‌های متمم متناهی شروع کنیم و به کمک لم مذکور آن را در یک ابر پالایه قرار دهیم. این ابرپالایه به وضوح ابرپالایه‌ای غیراصلی خواهد بود.

گفت: مسأله اینجاست که نمی‌توانیم مثال مشخصی از یک ابرپالایهٔ غیر اصلی ارائه دهیم یا پیدا کنیم. این نتیجه، ساده‌تر از پارادوکس باناخ ـ تارسکی به نظر می‌رسد اما به واقع ما را از دست نظریهٔ اندازه نجات نمی‌دهد. یک ابرپالایهٔ غیراصلی همان چیزی است که ما آن را اندازهٔ احتمال دو ارزشی می‌نامیم، اندازه‌ای که متناهی ـ جمع‌پذیر است اما شمارا ـ جمع‌پذیر نیست [۴].

گفتم: بحث ما بدون اشاره‌ای به معادل‌های اصل انتخاب ناقص می‌ماند. ریاضیدان خوبی را می‌شناسم که معتقد است هر جا که اصل انتخاب به کار رفته است نتیجهٔ حاصل با اصل انتخاب معادل است.

گفت: بر این اساس محک بِر[۱] در مورد مدول‌های انژکتیو، قضیهٔ هان ــ باناخ و قضایای بسیاری که معادل بودنشان با اصل انتخاب هنوز به اثبات نرسیده است با اصل انتخاب معادلند؟ ادعای متهورانه‌ای است اما بی شک نادرست است. به عنوان مثال ثابت شده که **قضیهٔ رسته‌ای بئر**[۲] ضعیفتر از اصل انتخاب است، هر چند برای اثبات آن به اصل انتخاب نیاز داریم [۳]. زمانی ریاضیدانی گفته بود: «اصل انتخاب به وضوح درست است، اصل خوشترتیبی به وضوح نادرست است و که می‌تواند راجع به لم تسورن نظری دهد؟»

گفتم: شوخی بامزه‌ای است. همهٔ این‌ها با هم معادلند.

گفت: آری، منطقاً چنین است ولی شهود آدمی همیشه از آنچه که به لحاظ ریاضی درست است پیروی نمی‌کند. اصل انتخاب با شهود بیشتر ریاضیدانان موافقت دارد، اصل خوشترتیبی مخالف شهود بیشتر ریاضیدانان است و لم تسورن آنچنان پیچیده است که بیشتر ریاضیدانان قادر نیستند اندیشه‌ای شهودی دربارهٔ آن داشته باشند. هر چند در دبستان ما چنین احساس شهودیی وجود دارد. بعد قدری با ریش انبوهش بازی کرد و به اندیشه فرو رفت. مثل این که چیزی به یادش آمده بود.

۱) R. Baire ریاضیدان فرانسوی که قضایای رسته‌ایش در توپولوژی نام او را بلند آوازه کرد.

۲) R. Baer ریاضیدان آلمانی که معرّف مدول‌های انژکتیو است و محک انژکتیو بودن را گاه به افتخار او محک بِر می‌نامند.

گفت: ما دربارهٔ اصل انتخاب سخن گفتیم اما به پهلوان بزرگ این میدان هیچ اشاره‌ای نکردیم. منظورم تسرملو است. همان طور که می‌دانید پس از آن که وی در ۱۹۰۴ نشان داد که «هر مجموعه‌ای را می‌توان خوشترتیب کرد» مخالفت‌های بسیاری به پا خاست. مرکز مخالفت‌ها در فرانسه بود؛ لبگ، بورل و پوانکاره احساس خوشایندی به اصل نداشتند ولی آدامار از اصل حمایت می‌کرد [۱]، [۹].

گفتم: و در انگلستان هم راسل در جبههٔ مخالفان بود و هاردی با این اصل موافق بود. طبیعی به نظر می‌رسد که این اصل مولود ذهن ایده‌آلیست آلمانی باشد تا ذهن تجربه‌گرای انگلیسی [۹].

گفت: چهار سال بعد در ۱۹۰۸، تسرملو برای آن که به غائله خاتمه دهد مقالهٔ دیگری با عنوان «امکان یک خوشترتیبی» منتشر کرد [۱] و در آن به منتقدان پاسخ داد. پس از این مقاله سر و صداها تا حدودی خوابید. تسرملو ضمن پاسخ به منتقدان هفت مطلب مهم را برشمرد که بدون اصل انتخاب فراهم آوردن پاسخ برای آنان میسر نبود. البته به بعضی از آنها تا به حال اشاره کرده‌ایم اما چندتایی بررسی نشدند. اجازه می‌دهید دربارهٔ آنها نیز گفتگو کنیم.

گفتم: با کمال میل. راستش را بخواهید آن مقاله را نخوانده‌ام (به گمانم هنگام اقرار به این واقعیت گونه‌هایم سرخ شده بود)، اما یادآوری آنها از این جهت جالب است که ببینیم شخص تسرملو به چه مسائلی توجه کرده است.

گفت: دوست عزیز می‌دانید چیست، من وسواس عجیبی دارم که مطالب را تا سرچشمه‌هایشان دنبال کنم. با آن که کتاب‌های بسیار زیادی تقریباً هر روزه در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها انتشار می‌یابند اما همیشه باز می‌گردم و مقالات کانتور و تسرملو و دیگر بازیگران این عرصه را با دقت می‌خوانم و در هر بار خواندن چیزهای تازه‌تری در می‌یابم.

گفتم: خوش به حالتان که می‌توانید چنین کنید. آخر می‌دانید زندگی حرفه‌ای مجال این کار را نمی‌دهد. به عنوان یک ریاضیدان حرفه‌ای مجبورم و سعی می‌کنم که همهٔ مقالات مهم شاخهٔ تخصصی‌ام را بخوانم و این بخش قابل توجهی از وقتم را پر می‌کند. راستی شما برای نوشتن مقاله در فشار نیستید؟ ما مجبوریم مدام تولید کنیم.

گفت: (با خنده) بله من وقت بسیار دارم ([٦]، رسالهٔ تئتوس) و برای نوشتن چیزهای جدید نیز به هیچوجه تحت فشار نیستم. اصولاً چیزی نمی‌نویسم. مثل یک قاطر عقیم و درست مثل همان موجود چهارپا لجباز هستم. بیشتر ترجیح می‌دهم حقایق زیبای اطرافم را دریابم. می‌دانید من تولید مصرف می‌کنم یا اگر بیشتر دوست بدارید باید بگویم مصرف تولید می‌کنم.

گفتم: واقعاً هیچ چیز ننوشته‌اید؟ باید اسمتان را جایی دیده باشم.

گفت: خیر، من نمی‌توانم چیزی بیافرینم، اما چون آموزگارم وظیفه دارم به شاگردانم کمک کنم تا آنها «تولید» کنند. و آنقدر از این کار لذت می‌برم که فکر می‌کنم این لذت با لذت آفرینندگی نزد شما یا هنرمندان برابری کند. دیدن اینکه جوانی که در آغاز سردرگم و گیج می‌نمود چگونه پس از کمی هدایت و پرسش و پاسخ، اندیشه‌هایش پی در پی شروع به زایش می‌کنند مسرت بخش‌ترین

صحنهٔ عالم است. راستی که جهان بسیار حیرت انگیز است اما در این میان انسان شگفت‌انگیزترین چیزی است که دیده‌ام.

دلم میخواست همینطور حرف می‌زد، طنین صدایش به من آرامش می‌داد. گویی در کنار این «غریبهٔ آشنا» از تمامی اضطراب‌های حرفه‌ای و مشکلات زندگی در امانم. گویی در کنار او تهدیدی در میان نبود. همه امانت بود و سلامت. دیگر نگران تصویب نشدن طرح تحقیقاتی‌ام، طولانی شدن داوری آخرین مقاله‌ام، قطع شدن بورس ملی سازمان ملی علوم و نائل نشدن به افتخار سخنران مدعو کنگرهٔ سال آینده نبودم. از این جا چقدر این چیزها کودکانه می‌نمود... دوباره رشتهٔ افکارم گسسته شد.

گفت: دوست عزیز، لطفاً از ابرهای خیال تشریف بیاورید پائین. نمی دانم با این ذهن بازیگوش چگونه ریاضیدان شدید. داشتم از مقالهٔ تسرملو می‌گفتم. نخستین مسأله‌ای که تسرملو مطرح می‌کند اینست که اگر مجموعهٔ M را به مجموعه‌های مجزای A، B، C، ... افراز کنیم عدد اصلی مجموعهٔ این مجموعه‌های مجزا کمتر یا مساوی عدد اصلی M می‌باشد. بار نخست که این مسأله را می خواندم سؤالی نامربوط به ذهنم رسید: آیا می‌توان $\mathbb{R}$ را به شکل اجتماعی از مجموعه‌های شمارای تو در تو نوشت؟ به عبارتی دیگر آیا زنجیری چون C از زیرمجموعه‌های شمارای $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\cup C = \mathbb{R}$ ؟ آیا مسأله را تا به حال دیده‌اید؟

گفتم: خیر. ولی حالا درک می‌کنم که چرا بارها به سروقت مقالات کلاسیک می‌روید.

گفت: و اما دومین مسأله، اگر $A_\alpha \sim B_\alpha$ و A_αها و B_αها دو به دو مجزا باشند، در آن صورت $\cup A_\alpha \sim \cup B_\alpha$، مطلبی که به زعم تسرملو همهٔ حساب عددهای اصلی بر آن مبتنی است.

گفتم: شاید ذکر نکته‌ای در مورد این مسأله لازم باشد. در نگاه اول ردّ پای اصل انتخاب در اینجا دیده نمی‌شود.

گفت: بله همین طور است. در اینجا بین A_α و B_α ممکن است بینهایت تابع دوسویی وجود داشته باشد. برای تعریف تابعی از $\cup A_\alpha$ به روی $\cup B_\alpha$، به ازای هر α، تنها باید یکی از بینهایت توابعی را که متذکر شدم انتخاب کرد.

گفتم: گاه اصل انتخاب را باید چنین دید «انتخاب هم زمان بینهایت تابع از بینهایت مجموعه از توابع». چنین نیست؟

گفت: چقدر خوب گفتید. در بسیاری از حالات مهم چنین است. من از بیان مسألهٔ سوم تسرملو در می‌گذرم چون خود در گفتگوهایمان به آن اشاره کرده‌ایم. اما مسألهٔ چهارم تسرملو را باید جدّی گرفت: مجموعه‌ای را که با هیچ یک از زیر مجموعه‌های سره‌اش در تناظر یک به یک نباشد همواره می‌توان به گونه‌ای مرتب کرد که هر زیر مجموعهٔ آن عضو اول و آخر داشته باشد.

گفتم: جالب است. با زبان امروزی‌تر کتاب‌های مبانی ریاضی، در واقع مسألهٔ چهارم تسرملو می‌گوید که «هر مجموعهٔ متناهی با قطعه‌ای از اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ..., k\}$ هم عدد

است». یعنی قضیه‌ای که نظریهٔ مجموعه‌های متناهی بر آن استوار است به اصل انتخاب نیاز دارد!

گفت: دقیقاً و این موضوع را ما از قلم انداخته بودیم اما تسرملو توجه ما را بدان معطوف ساخت. میدانید که در همان سال‌ها، ددکیند صورتبندی دیگری از این مسأله ارائه داد که شهرت بیشتری دارد: هر مجموعهٔ نامتناهی زیر مجموعه‌ای شمارا دارد. پس از آن تسرملو مسألهٔ پنجم را مطرح می‌کند «اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های شمارا، شمارا است»، قضیه‌ای که ستون فقرات مجموعه‌های شمارا است.

گفتم: و دوباره مانند مسألهٔ دوم تسرملو، اصل انتخاب برای انتخاب بینهایت تابع به کار می‌آید.

گفت: آفرین، ظاهراً شما ردّ پای اصل انتخاب را فوراً تشخیص می‌دهید. مسأله‌های ششم و هفتم تسرملو به هم مربوطند. در واقع مسألهٔ ششم می‌گوید که $\mathbb{R}$ به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{Q}$ پایه دارد و مسألهٔ هفتم مدعی است که تابع ناپیوسته‌ای وجود دارد که در معادلهٔ تابعی کوشی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند. می‌دانیم که همل[1] به مسأله‌های ششم و هفتم جواب مثبت داد.

گفتم: مرا به یاد تابعی انداختید که همه جا خاصیت مقدار میانی داشته باشد و هیچ جا پیوسته نباشد. برای نشان دادن وجود چنین تابعی نیز به اصل انتخاب نیاز داشتیم.

گفت: (در حالی که با سر تأیید می‌کرد) اما جالب است که مثال وایرشتراس از تابع همه جا پیوستهٔ هیچ جا مشتق‌پذیر به اصل انتخاب نیاز ندارد. اینطور نیست؟

اثبات وایرشتراس به خاطرم نیامد، او نیز اصرار نکرد. خورشید رفته رفته غروب می‌کرد و تپه‌های مشرف به دانشگاه را نارنجی رنگ می‌ساخت. اشعه‌ای بدرون می‌تابید و به اتاق من حالتی رویایی داده بود. سر بزرگ دوباره برافراشته شد و بر روی پاهای خویش ایستاد. بهار بود و گنجشکان آوازخوانان تا فردا با خورشید خداحافظی می‌کردند. گویی دانشگاه در همهمهٔ آنان فرورفته بود.

گفت: می‌بخشید؛ ممکن است برای من یک تاکسی صدا کنید؟ قدری دیرم شده است.

دلم نمی‌خواست برود. تازه بعد از مدتها از یک بحث جدی لذت برده بودم. دلم می‌خواست بماند و همینطور حرف بزند. دیگر گذشت زمان برایم مهم نبود. با خود می‌اندیشیدم که در کنار او، برای لحظاتی هم که شده می‌توان جاودانگی را تجربه کرد. اما مصمم بود که برود. لیوان خالی چای را که در سراسر بحث در دست داشت روی میز گذاشت. به اکراه تقاضای یک تاکسی کردم و او را تا محوطهٔ دانشکده همراهی نمودم. به انتظار ایستادیم تا تاکسی برسد. جرأت نداشتم که دوباره موضوع سقراط را مطرح کنم. دلم میخواست حرفی زده باشم تنها به آن دلیل که او چیزی بگوید.

گفتم: راستی جالب است که چنین موضوعات و ابهاماتی در ریاضیات متناهی پیش نمی‌آید. ریاضیات متناهی خیلی واضح‌تر است، نه؟

1) Hamel

گفت: ظاهرش اینطور است. اما گاه خیلی دشوارتر از ریاضیات نامتناهی است. زمانی از رهگذری شنیدم که می‌گفت: «ریاضیات نامتناهی سرزمینی است که ریاضیدانان متوسط‌تر برای گریز از دشواریهای ریاضیات متناهی آفریده‌اند». نمی‌دانم درست می‌گفت یا نه، اما می‌دانم شمارش گاه بسیار دشوار است.

تاکسی در حال رسیدن بود و می‌دانستم که چند ثانیه‌ای بیشتر به رفتن او باقی نمانده است. پرسیدم آیا ممکن است دوباره ببینمتان؟

گفت: من همیشه دلم برای گفتگوهای صمیمی دو نفره تنگ می‌شود. هیچ چیز بهتر از بحث‌های کریدوری آموزنده نیست. با اینحال اجازه دهید قولی ندهم. اجازه دهید که این خود به خود اتفاق افتد. هروقت که تشنهٔ دانستن باشیم.

یادم آمد که عبارت «بحث کریدوری» را قبلاً از یکی از استادانم شنیده بودم. شنیده بودم که در طبقهٔ فوقانی گروه ریاضی دانشگاه برکلی جایی است که اساتید و دانشجویان می‌نشینند، چای و قهوه می‌نوشند و گپ می‌زنند. آن استاد می‌گفت که «آنجا آموزنده‌ترین قسمت ساختمان ریاضی برکلی است».

سوار تاکسی شده بود. آخرین تلاشم را کردم، گفتم: با این حال شباهت شما به سقراط به معجزه شبیه است، که تاکسی حرکت کرد و کمی فاصله گرفته بود که ناگهان از پنجره سر کشید بیرون و گفت: معجزه‌ها در بهار اتفاق می‌افتند!

توضیح

دربارهٔ ساختگرایی و شهودگرایی: در ساختگرایی برای اثبات وجود یک شیء ریاضی باید آن را ساخت و یا یافت. اگر فرض کنیم که چنین شیء ریاضی وجود ندارد و به تناقضی برسیم و نتیجه بگیریم که وجود شیئی لازم می‌آید از نظر یک ساختگرا کافی نیست. گاهی اوقات ساختگرایی را با شهودگرایی مکتبی مشابه تصور می‌کنند حال آن که چنین نیست. شهودگرایی نوع خاصی از ساختگرایی است. شهودگرایی بنیادهای ریاضی را ساختمان‌های ریاضی ذهنی می‌داند که در ذهن ریاضیدان وجود دارند و از این جهت ریاضیات را نوعی فعالیت ذهنی می‌داند اما همهٔ ساختگرایان لزوماً چنین نمی‌اندیشند و عده‌ای از آنها با واقع‌گرایی در ریاضیات (دیدگاه غالب ریاضیدانان) توافق کامل دارند.

مراجع

[1] Jean van Heijenoort, *FROM FREGE TO GÖDEL, A source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Harvard University Press (1967).

[2] Simone Weil, *Waiting for God*, translated by Emma Craufurd, Perennial classics Publications (2001).

[3] John. Oxtoby, *Measure and category*, Second Edition, Springer - Verlag, (1980).

[4] Eric Schechter, *A home page for axiom of choice*, Vanderbilt University.

[5] Ludwig Wittgenstein, *Remarks on the foundations of Mathematics*, Editted by G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford, (1967).

[۶] افلاطون، مجموعهٔ رسائل افلاطون، ترجمهٔ محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۷۴).

[۷] تئودور گمپرتس، متفکران یونانی، ترجمهٔ محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۷۵).

[۸] کورت گودل، تصمیم ناپذیری در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین (۱۳۶۸).

[۹] رابرت بون، اصل موضوع انتخاب، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۳، (آذر ۱۳۶۸).

[۱۰] آلفرد رنی، گفت و شنودهایی در ریاضیات، ترجمهٔ سعید قهرمانی، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۱] سیمون وی، تأملاتی دربارهٔ استفادهٔ درست از تحصیلات در راستای عشق به خدا، ترجمهٔ احسان ممتحن، ماهنامهٔ ناقد، سال اول شمارهٔ سوم، (خرداد ـ مرداد ۱۳۸۳).

[۱۲] حمید وحید، گرایش‌های موجود در فلسفهٔ ریاضیات، نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، (شهریور ۱۳۷۸).

[۱۳] جیان کارلو روتا، احتمال هندسی، نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، (شهریور ۱۳۷۸).

احسان ممتحن
گروه ریاضی ـ دانشگاه یاسوج
پست الکترونیک: momtahan_e@hotmail.com