فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۵۵ تا ۷۰

اعداد کاتالان

بهناز کوچک شوشتری

چکیده

در بررسی مسائل شمارشی، با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت سر و کار داریم. از جملهٔ این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد دیده می‌شوند، دنبالهٔ اعداد کاتالان است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد، بررسی و اثبات شود و همچنین مثال‌های مختلفی از کاربردهای آن ارائه شده است.

مقدمه

هر کسی که به نوعی با ریاضیات سر و کار دارد، احتمالاً با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت برخورد داشته است. بعضی از آن‌ها مانند ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ... ساده به نظر می‌آیند و بعضی مانند اعداد فیبوناتچی ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ... را بایستی در طول زمان شناخت. از جملهٔ این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد در بررسی مسائل شمارشی دیده می‌شوند، دنبالهٔ اعداد کاتالان[1] است. چند عضو اول این دنباله عبارت است از

۱, ۲, ۵, ۱۴, ۴۲, ۱۳۲, ۴۲۹, ۱۴۳۰, ۴۸۶۲, ۱۶۷۹۶, ۵۸۷۸۶, ۲۰۸۰۱۲, ۷۴۲۹۰۰,
۶۷۴۴۴۰, ۹۶۹۴۸۴۵, ۳۵۳۵۷۶۷۰, ۱۲۹۶۴۴۷۹۰, ۴۷۷۶۳۸۷۰۰, ۱۷۶۷۲۶۳۱۹۰,
۵۶۴۱۲۰۴۲۰, ۲۴۴۶۶۲۶۷۰۲۰, ۹۱۴۸۲۵۶۳۶۴۰, ۳۴۳۰۵۹۶۱۳۶۵۰, ...

دنبالهٔ اعداد کاتالان اولین بار در قرن ۱۸، به‌وسیلهٔ لئونارد اویلر مطرح شد. او مسأله زیر را حل کرد: *به چند طریق می‌توان یک چندضلعی را به‌وسیلهٔ قطرهایش به مثلث‌ها تقسیم نمود به‌طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند؟* در سال ۱۸۳۸، کاتالان مسألهٔ زیر را حل کرد:

1) Catalan Numbers

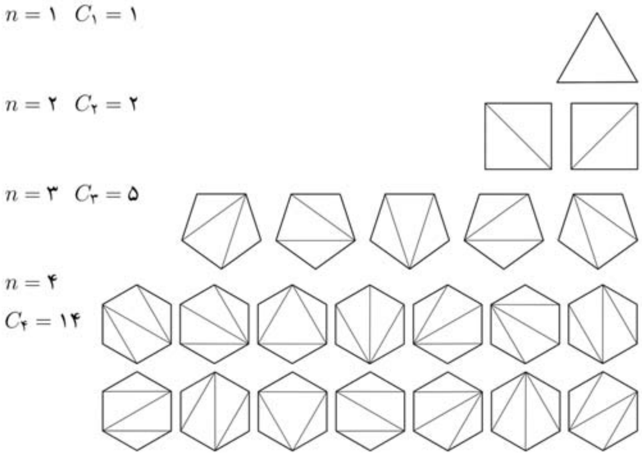
به چند طریق می‌توان یک سری از $(n + ۱)$ حرف را با استفاده از n جفت پرانتز دسته‌بندی کرد به‌طوری که یا دو حرف، یا یک حرف و یک عبارت پرانتزی و یا دو عبارت پرانتزی، بدون تغییر ترتیب حروف، در کنار هم باشند؟

جواب مسألهٔ اویلر برای هر $n + ۲$ ضلعی و جواب مسألهٔ کاتالان برای هر n، n ــ امین عدد کاتالان، C_n است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد بررسی و اثبات شود. همچنین مثال‌های متعددی از کاربردهای آن ارائه خواهد شد. در بخش اول، مسائل مختلف و تناظر یک به یک بین آن‌ها معرفی می‌شوند. در بخش دوم، با شرح نحوهٔ شمارش بعضی از مسائل، رابطهٔ بازگشتی برای تولید دنباله را معرفی کرده و تابع مولد این دنباله را به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم، به معرفی و اثبات فرمول‌های دیگری که اعداد کاتالان را تولید می‌کنند، می‌پردازیم.

۱. مسأله و تناظرهای یک به یک

۱.۱. مسألهٔ مثلث‌بندی کردن یک چندضلعی

اگر تعداد راه‌هایی را که می‌توان یک $n + ۲$ ضلعی منتظم را مثلث‌بندی کرد به‌طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند، بشماریم، اعداد کاتالان به‌دست می‌آیند. در شکل ۱.۱ این کار به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ دیده می‌شود.



شکل ۱.۱

همان‌طور که دیده می‌شود، به‌ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۱۴ طریق برای انجام این کار وجود دارد. برای $n = ۰$، دوضلعی را می‌توان دقیقاً به یک طریق مثلث‌بندی کرد و بنابراین $C_۰ = ۱$ است.

۲.۱. دسته‌بندی $(n+۱)$ حرف با n جفت پرانتز

فرض کنیم $(n+۱)$ حرف با یک ترتیب ثابت کنار هم قرار گرفته باشند. می‌خواهیم با n جفت پرانتز آن‌ها را دسته‌بندی کنیم به‌طوری که درون هر جفت پرانتز دو عامل وجود داشته باشد. این عوامل می‌توانند دو حرف مجاور هم، یک حرف و یک جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شده و یا دو جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شدهٔ مجاور هم باشند. در شکل ۲.۱ به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$، دسته‌بندی‌ها دیده می‌شوند.

$n = ۰$ $C_۰ = ۱$ (a)

$n = ۱$ $C_۱ = ۱$ (ab)

$n = ۲$ $C_۲ = ۲$ ((ab)c), (a(bc))

$n = ۳$ $C_۳ = ۵$ (((ab)c)d), ((ab)(cd)), ((a(bc))d), (a((bc)d)), (a(b(cd)))

$n = ۴$ $C_۴ = ۱۴$ ((((ab)c)d)e), (((a(bc))d)e), (((ab)(cd)e)), (((ab)c)(de)), ((a((bc)d))e), ((a(b(cd)))e), ((a(bc))(de)), ((ab)((cd)e)), ((ab)(c(de))), (a(((bc)d)e)), (a((b(cd))e)), (a((bc)(de))), (a(b((cd)e))), (a(b(c(de))))

شکل ۲.۱

۳.۱. درخت‌های دودویی

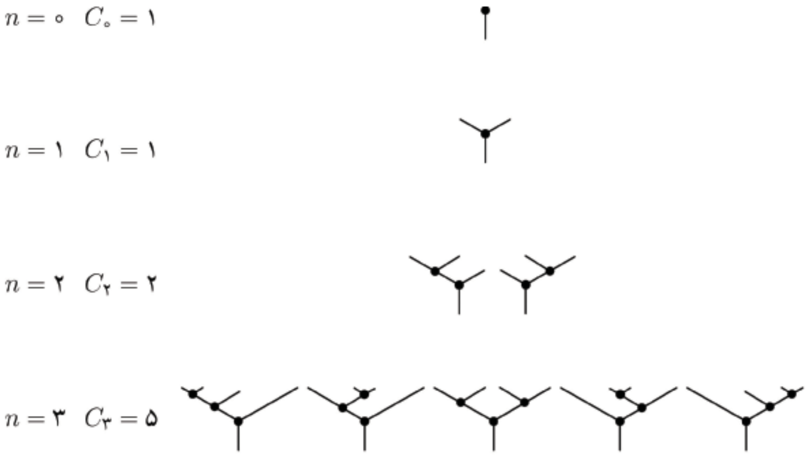
یک درخت دودویی ریشه‌دار با n گرهٔ داخلی، یک مجموعه از نقاط (گره‌ها) و پاره‌خط‌های مرتبط بین آن‌ها است که یک گره به‌عنوان ریشه در نظر گرفته می‌شود و $(n-۱)$ گرهٔ دیگر، آن‌هایی هستند که به دو گرهٔ بالاتر از خودشان وصل می‌شوند. اعداد کاتالان این درخت‌ها را می‌شمارند. در شکل ۳.۱ به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳$، این درخت‌ها دیده می‌شوند.

۴.۱. مسیرهای کاتالان

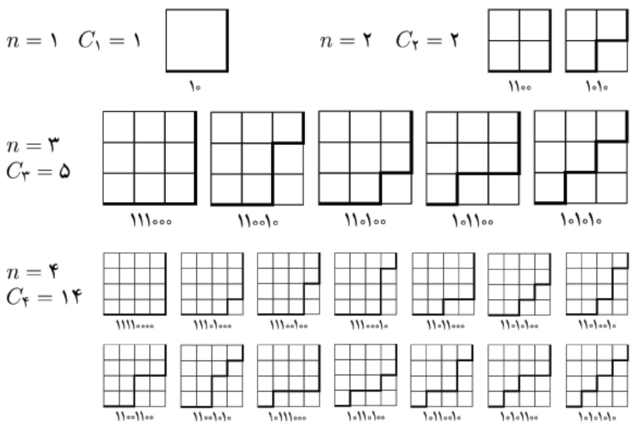
فرض کنیم یک شبکهٔ $n \times n$ داشته باشیم و بخواهیم از گوشهٔ سمت چپ پایین به گوشهٔ سمت راست بالا برویم به‌طوری که مسیر حرکت زیر خط واصل این دو گوشه (قطر اصلی) قرار گرفته باشد و فقط در هر مرحله از حرکت، مجاز به حرکت به راست و بالا باشیم. تعداد این مسیرها با اعداد کاتالان شمرده می‌شوند و n ـ **مسیر کاتالان**[1] نامیده می‌شوند (مانند حرکت مهرهٔ رخ در شطرنج).

1) Catalan n-path

در شکل ۴.۱ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ این مسیرها دیده می‌شوند.



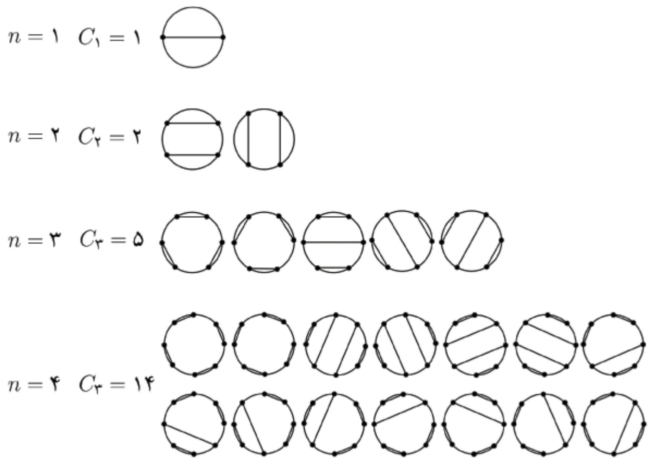
شکل ۳.۱



شکل ۴.۱

۵.۱. دست دادن افراد دور یک میزگرد

اگر $۲n$ نفر دور یک میزگرد نشسته باشند، به چند طریق تمامی آن‌ها می‌توانند دوبه‌دو دست همدیگر را بگیرند به‌طوری که هیچ دو بازویی از هم نگذرند. شکل ۵.۱ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$، حالت‌های مختلف را نشان می‌دهد.



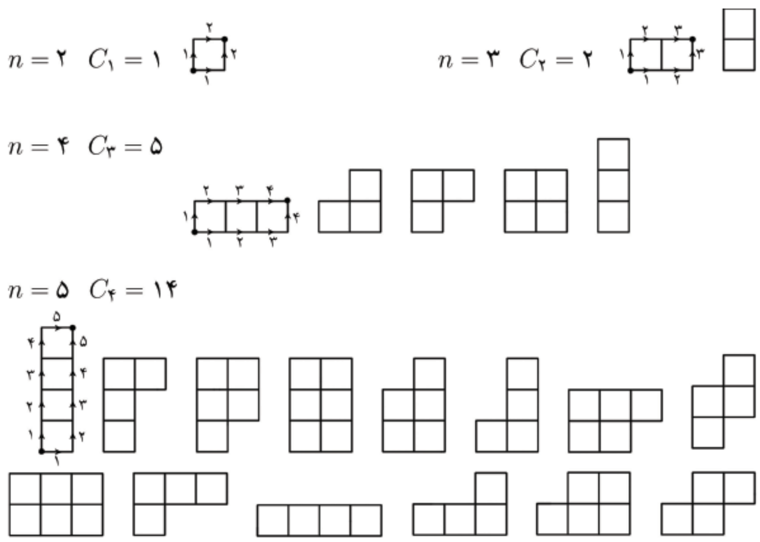
شکل ۵.۱

۶.۱. مسیرهای جفت

یک جفت مسیر[1] با طول n، یک جفت از مسیرها است که از مبدأ شروع می‌شوند و هر کدام شامل n مرحلهٔ تکی است و بعد از n مرحله همدیگر را قطع می‌کنند. حرکت روی این دو مسیر فقط به راست و بالا می‌باشد. این مسیرهای جفت، هم‌چنین پولیومینوهای موازی[2] نامیده می‌شوند، چون ناحیهٔ محصور به این دو مسیر، یک مجموعه از مربع‌هایی است که به‌وسیلهٔ اضلاعشان با هم ارتباط دارند. در هر یک از آن‌ها، ارتفاع ستون‌های متوالی از مربع‌ها از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ یعنی از پایین، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست و از بالا، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست است.

محیط هر یک از این مسیرهای جفت به‌ازای $n \geq ۲$ برابر $۲n$ و تعداد آن‌ها $C_{n-۱}$ است؛ یعنی به‌ازای هر n، محیط ثابت است ولی تعداد مربع‌ها ثابت نیست. شکل ۶.۱ مسیرهای جفت را به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, ۵$ نشان می‌دهد. مساحت کل این $C_{n-۱}$ مسیر جفت، برابر $۴^{n-۲}$ است.

1) path pair 2) Parallello-Polyomino



شکل ٦.١

٧.١. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و عبارت‌های پرانتزی

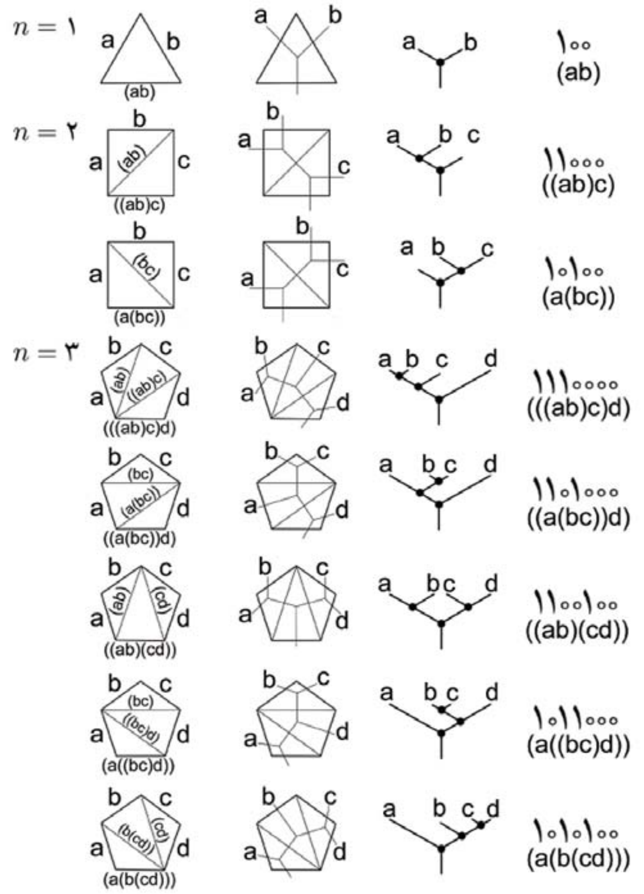
اضلاع چندضلعی را (به غیر از قاعده) به‌صورت گردشی در یک جهت با حروف نام‌گذاری می‌کنیم. هر قطر که با دو ضلع مجاور یک مثلث تشکیل دهد، با استفاده از نام اضلاع در یک جفت پرانتز نام‌گذاری می‌شود. هر قطر بعدی با استفاده از نام دو ضلع مجاور در همان مثلث که این قطر یک ضلع آن است، در یک جفت پرانتز، نام‌گذاری می‌شود. در نهایت ضلعی که به‌عنوان قاعده بود نام‌گذاری می‌شود (شکل ٧.١).

٨.١. تناظر یک به یک بین درخت‌های دودویی و عبارت‌های پرانتزی

اگر گره‌های انتهایی درخت‌های دودویی را به‌ترتیب از چپ به راست با حروف نام‌گذاری کنیم، با عبارت‌های پرانتزی یک تناظر یک به یک تشکیل می‌دهند (شکل ٧.١).

٩.١. تناظر یک به یک بین عبارت‌های پرانتزی و اعداد دودویی

در عبارت‌های پرانتزی به‌ازای هر پرانتزی که باز می‌شود عدد ١ و به‌ازای هر حرف، عدد صفر (٠) را قرار می‌دهیم. پرانتزهای سمت راست «(» نادیده گرفته می‌شود (شکل ٧.١).



شکل ۷.۱

۱۰.۱. تناظر یک به یک بین اعداد دودویی و مسیرهای کاتالان

اگر در مسیرهای کاتالان با n مرحلهٔ تکی، هر مرحله از حرکت به راست را با عدد ۱ و هر مرحله از حرکت به بالا را با صفر (۰) نشان دهیم، متناظر با هر مسیر، یک عدد دودویی داریم. این اعداد دودویی همان اعداد دودویی در ۹.۱ هستند که رقم آخر آن‌ها نادیده گرفته شده است. در شکل ۴.۱ عدد دودویی مربوط به هر مسیر زیر آن نوشته شده است.

۱۱.۱. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و درخت‌های دودویی

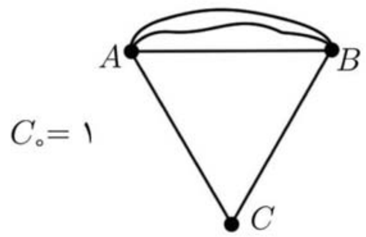
همان‌طور که در شکل ۷.۱ دیده می‌شود، به‌ازای هر چندضلعی یک درخت دودویی وجود دارد

و هر یک از مثلث‌ها با قسمتی از آن درخت، شامل یک گره که دو لبه از آن خارج شده، متناظر است (شکل ۷.۱).

۲. رابطهٔ بازگشتی و تابع مولد

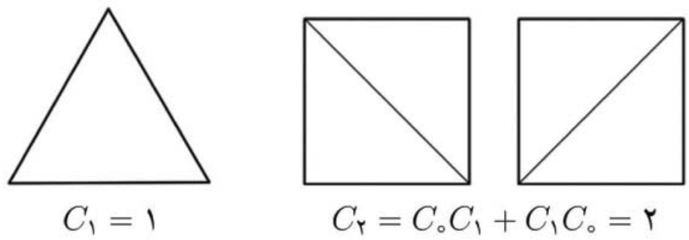
۱.۲. نحوهٔ شمارش در مسألهٔ اویلر و به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی

برای به‌دست آوردن یک رابطهٔ بازگشتی در مسائل شمارشی مطرح شده، نحوهٔ شمارش را در مسألهٔ مثلث‌بندی کردن چندضلعی با $n+۲$ ضلع شرح می‌دهیم. به‌ازای $n=۰$، می‌توان دوضلعی را مثلثی در نظر گرفت که یک ضلع ندارد. مانند شکل ۱.۲ که AC و CB دو ضلع مورد نظر هستند.



شکل ۱.۲

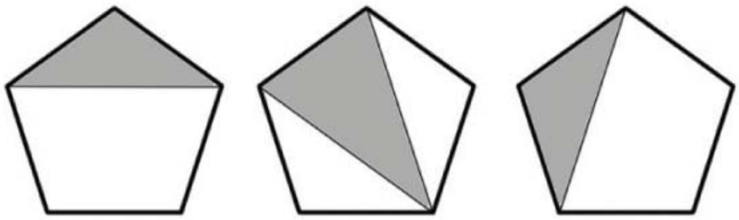
واضح است که فقط به یک طریق می‌توان A را به B وصل کرد به‌طوری که ABC یک مثلث شود، یعنی $C_۰ = ۱$. به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ به‌راحتی می‌توان دریافت که $C_۱ = ۱$ و $C_۲ = ۲$ است (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲

به‌ازای $n = ۳$، در شکل ۳.۲ یک ضلع پنج‌ضلعی را در نظر می‌گیریم. در پنج‌ضلعی سه مثلث وجود دارد که این ضلع خاص، یک ضلع این سه مثلث است. بنابراین سه حالت می‌توان در نظر گرفت. در هر حالت، آن مثلث که انتخاب شود، یک چندضلعی (احتمالاً تهی) در سمت راست و یک چندضلعی در سمت چپ مثلث اصلی است که بایستی خودشان نیز مثلث‌بندی شوند. در

پنج‌ضلعی سمت چپ، یک چهارضلعی در سمت چپ و یک تهی در سمت راست (یک چندضلعی با دو ضلع) دیده می‌شود. با مثلث‌بندی کردن دو طرف، کار مثلث‌بندی کردن، کامل می‌شود. در این حالت به $C_۲$ روش در سمت چپ و $C_۰$ روش در سمت راست و بنابراین به $C_۲C_۰$ روش مثلث‌بندی می‌شود. برای پنج‌ضلعی وسط، دو سه‌ضلعی در دو طرف مثلث اصلی است که هر کدام به $C_۱$ روش مثلث‌بندی می‌شوند، پس در این حالت به $C_۱C_۱$ روش کار انجام می‌شود. برای پنج‌ضلعی سمت راست، یک تهی در سمت چپ و یک چهارضلعی در سمت راست مثلث اصلی وجود دارد که



شکل ۳.۲

سمت چپ به $C_۰$ روش و سمت راست به $C_۲$ روش مثلثی می‌شوند. بنابراین در این حالت به $C_۰C_۲$ روش کار مثلثی کردن پنج‌ضلعی انجام می‌شود. بنابراین برای تمامی سه حالت موجود در شکل ۳.۲، داریم

$$C_۳ = C_۰C_۲ + C_۱C_۱ + C_۲C_۰$$

در حالت کلی، برای یک $n + ۲$ ضلعی، وقتی یک ضلع خاص انتخاب شود، به n حالت می‌توان مثلث انتخاب کرد که این ضلع خاص، یک ضلع آن باشد. در هر یک از این حالت‌ها ممکن است یک تهی در سمت چپ و یک $n - ۱$ ضلعی در سمت راست، یعنی $C_۰C_{n-۱}$ روش، یک سه‌ضلعی در سمت چپ و یک $n - ۲$ ضلعی در سمت راست، یعنی $C_۱C_{n-۲}$ روش و... و یک $n - ۱$ ضلعی در سمت چپ و یک تهی در سمت راست، یعنی $C_{n-۱}C_۰$ روش به‌وجود آید. بنابراین تعداد کل روش‌های مثلث‌بندی کردن یک $n + ۲$ ضلعی از رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n = C_۰C_{n-۱} + C_۱C_{n-۲} + C_۲C_{n-۳} + \ldots + C_{n-۲}C_۱ + C_{n-۱}C_۰ \qquad (۱.۲)$$

که n ـ امین عدد کاتالان است.

۲.۲. تابع مولد

می‌خواهیم با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۱.۲) و روش معروف به تابع مولد، یک فرمول صریح برای اعداد کاتالان، C_n، به‌دست آوریم. تابع $C(x)$ را به‌عنوان تابع مولد برای تمامی اعداد کاتالان

C_0، C_1، C_2، ... به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad (۲.۲)$$

طرفین رابطهٔ (۲.۲) را به توان ۲ می‌رسانیم و در x ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x[C(x)]^2 &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right) \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 \end{aligned} \qquad (۳.۲)$$

بنابراین از (۳.۲) معادلهٔ درجه دوم به‌صورت

$$x[C(x)]^2 - C(x) + 1 = 0 \qquad (۴.۲)$$

به‌دست می‌اید. با حل این معادله، فرمول صریح تابع مولد $C(x)$ به‌دست می‌آید:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad (۵.۲)$$

توجه کنید که در (۵.۲)، $C(x)$ با علامت منفی را در نظر می‌گیریم. چون می‌دانیم

$$C(0) = C_0 = 1 \qquad (۶.۲)$$

بنابراین اگر علامت مثبت را انتخاب کنیم، وقتی $x \to 0$، داریم $C(x) \to \infty$. پس

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad (۷.۲)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای، داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad &+ \quad \frac{1}{2}(-4x) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-4x)^2 \\ &+ \quad \frac{1}{3!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-4x)^3 \\ &+ \quad \frac{1}{4!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-4x)^4 \\ &+ \quad \ldots \\ &+ \quad \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(\frac{1}{2}-n+1)(-4x)^n \\ &+ \quad \ldots \end{aligned} \qquad (۸.۲)$$

اگر از نماد $[x^n]F(x)$ برای نشان دادن ضریب x^n در بسط $F(x)$ استفاده کنیم، آن‌گاه

$$\begin{aligned}[x^n]\sqrt{1-4x} &= \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n}(-1)^n 2^{2n}\\ &= \frac{(-1)2^n[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)]}{n!} \qquad (9.2)\end{aligned}$$

اگر صورت و مخرج کسر (۹.۲) را در $(2n-1)!n!$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)[2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)][1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]}{n!n!(2n-1)}$$

بنابراین

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)(2n)!}{n!n!(2n-1)} = \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n} \qquad (10.2)$$

اینک این مقدار را در معادلهٔ $C(x)$ در (۷.۲) قرار می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned}C(x) &= \frac{1}{2x}\left[1-\sqrt{1-4x}\right] = \frac{1}{2x}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right]\\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}x^n \qquad (11.2)\end{aligned}$$

از مقایسهٔ (۱۱.۲) با (۲.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}[x^n]C(x) = C_n &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!}\\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

بنابراین n ـ امین عدد کاتالان از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n\geq 0.$$

۳. فرمول‌های دیگر برای تولید اعداد کاتالان

۱.۳. فرمول اویلر

اویلر در حل مسأله مثلث‌بندی یک N ضلعی فرمول غیربازگشتی

$$P = \frac{۲ \times ٦ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴N - ۱۰)}{(N - ۱)!} \qquad (N > ۲) \qquad (۱.۳)$$

N	۳	۴	۵	٦	...
P	۱	۲	۵	۱۴	...

را ارائه داد. همان‌طور که دیده می‌شود، این فرمول به‌ازای $N > ۲$، اعداد کاتالان

$$C_n = \frac{۱}{n + ۱}\binom{۲n}{n}, \qquad n \geq ۱ \qquad (۲.۳)$$

را می‌دهد. بنابراین اعداد به‌دست آمده از (۱.۳) همان اعدادی هستند که از آخرین دستور بند قبل، به‌ازای $n = N - ۲$ به‌دست می‌آیند. برای این‌که ثابت کنیم فرمول (۱.۳) تمامی اعداد کاتالان را ارائه می‌دهد، بایستی نشان دهیم

$$P = \frac{۲ \times ٦ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴N - ۱۰)}{(N - ۱)!} = \frac{۱}{N - ۱}\binom{۲N - ۴}{N - ۲} (= C_{N-۲}) \qquad (۳.۳)$$

برای اثبات (۳.۳)، نشان می‌دهیم سمت چپ با راست برابر است. چون

$$\begin{aligned} P &= \frac{۲(۲ \times ۳)(۲ \times ۵)(۲ \times ۷)\ldots(۲(۲N - ۵))}{(N - ۱)!} \\ &= \frac{۲^{N-۲}(۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵))}{(N - ۱)!} \end{aligned}$$

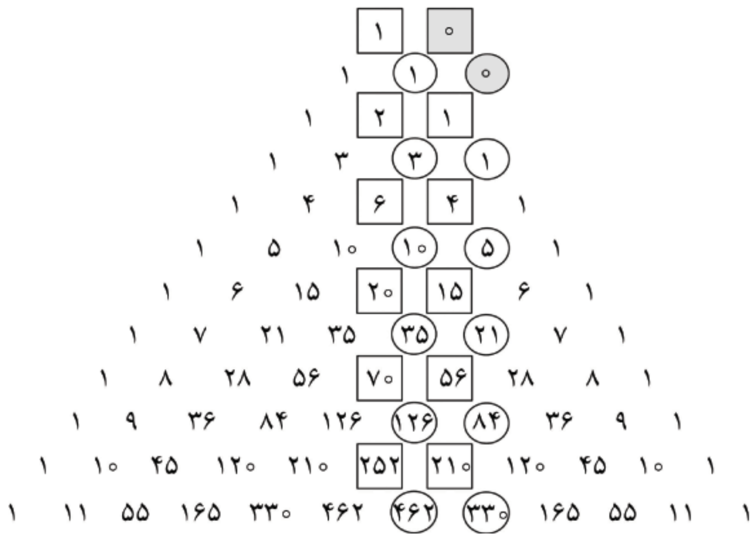
پس با ضرب صورت و مخرج کسر در $(N - ۲)!$ داریم

$$\begin{aligned} P &= \frac{۲^{N-۲}(N - ۲)!(۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵))}{(N - ۲)!(N - ۱)!} \\ &= \frac{[۲ \cdot ۴ \cdot ٦ \cdot \cdots (۲N - ۴)][۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵)]}{(N - ۲)!(N - ۱)!} \\ &= \frac{(۲N - ۴)!}{(N - ۲)!(N - ۱)!} = \frac{۱}{N - ۱}\frac{(۲N - ۴)!}{(N - ۲)!(N - ۲)!} \\ &= \frac{۱}{N - ۱}\binom{۲N - ۴}{N - ۲} = C_{N-۲} \end{aligned}$$

و اثبات تمام است.

این فرمول مقدار $C_۰$ (یعنی وقتی $N = ۲$) را به‌دست نمی‌دهد. با وجود این، همان‌طور که در (۱.۲) دیدیم با یک تعبیر هندسی خواهیم داشت $C_۰ = ۱$.

۲.۳. مثلث پاسکال و اعداد کاتالان



شکل ۱.۳

اگر در مثلث پاسکال به ترتیب از بالا به پایین سطرها را با $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ شماره گذاری کنیم، خواهیم دید که

$C_n =$ عدد مجاور در سطر $۲n$ ـ ام $-$ عدد موجود در ستون مرکزی و در سطر $۲n$ ـ ام

اعداد مورد نظر در مربع‌ها مشخص شده اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{array}{ll} n = ۰ & ۱ - ۰ = ۱ = C_۰ \\ n = ۱ & ۲ - ۱ = ۱ = C_۱ \\ n = ۲ & ۶ - ۴ = ۲ = C_۲ \\ n = ۳ & ۲۰ - ۱۵ = ۵ = C_۳ \\ \vdots & \end{array} \qquad (۴.۳)$$

فرمول (۴.۳) را می‌توان به‌صورت $C_n = \binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱}$ نیز نوشت.

اثبات (۴.۳):

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$
$$=\frac{(2n)!\times(n+1)}{n!n!\times(n+1)}-\frac{(2n)!\times n}{(n+1)!(n-1)!\times n}$$
$$=\frac{(n+1)(2n)!}{n!(n+1)!}-\frac{n(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$
$$=\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$$

با دقت بیشتر در مثلث پاسکال می‌توان دید که به‌ازای $n \geq 1$ داریم

$C_n =$ عدد مجاور در سطر $2n-1$ ـ ام $-$ عدد مجاور در ستون سمت راست ستون مرکزی و در سطر $2n-1$ ـ ام

اعداد مورد نظر در دایره‌ها مشخص شده‌اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می شوند:

$$\begin{array}{ll} n=1 & 1-0=1=C_1 \\ n=2 & 3-1=2=C_2 \\ n=3 & 10-5=5=C_3 \\ n=4 & 35-21=14=C_4 \\ \vdots & \end{array} \tag{5.3}$$

فرمول (۵.۳) را می‌توان به‌صورت $C_n=\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n+1}$ نیز نوشت.

اثبات (۵.۳):

$$\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n+1}=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}-\frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}$$
$$=\frac{(2n-1)!\times(n+1)}{n!(n-1)!\times(n+1)}-\frac{(2n-1)!\times(n-1)}{(n+1)!(n-2)!\times(n-1)}$$
$$=\frac{(n+1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}-\frac{(n-1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}$$
$$=\frac{2(2n-1)!\times n}{(n-1)!(n+1)!\times n}$$
$$=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$
$$=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$$

۳.۳. معرفی و اثبات یک رابطهٔ بازگشتی برای اعداد کاتالان

اعداد کاتالان از رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}, \qquad C_0 = 1 \qquad n \geq 1$$

برای اثبات از فرمول (۴.۳) استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!} \\
&= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} - \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+2)!} \\
&= \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+2)n!(n+1)!} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\left[\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\right] \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+2}\left[\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right] = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n
\end{aligned}$$

۴.۳. یک ویژگی جالب از اعداد کاتالان

در دنبالهٔ اعداد کاتالان به‌ازای $n \geq 2$، هر دو عدد متوالی دارای تعداد ارقام مساوی هستند، یعنی C_2 و C_3 یک‌رقمی، C_4 و C_5، دو رقمی، C_6 و C_7 سه‌رقمی، C_8 و C_9 چهار رقمی، ... و C_n و C_{n+1}، $\frac{n}{2}$ رقمی هستند. نظم تعداد ارقام در هر دو عدد متوالی، اعداد طبیعی می‌باشد.

تشکر و قدردانی: در پایان از راهنمایی‌های بی‌دریغ همکار گرامیم دکتر منصور معتمدی سپاسگزارم.

مراجع

[1] David Callan, A Combinatorial Interpretation of a Catalan Numbers Identity, Department of statistics university of Wisconsin- Madison, *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No. 4. (Oct. , 1999), PP. 295-298.

[2] Tom Davis, Catalan Numbers, tomrdavis@earthlink.net, http://www.geometer.org/mathcircle. November 26, 2006.

[3] Martin Gardner, Mathematical Games, Catalan Numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places. *Scientific American 234*, No. 6 (June 1976), PP. 120-125.

[4] Wen-Jin Woan, Lou Shapiro, and D.G.Rogers, The Catalan Numbers, The Lebesgue Integral and $۴^{n-۲}$. *American Mathematical Monthly* 101 (December 1997), PP. 926-931.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan Numbers

[6] http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal-Catalan.html

[7] http://www.saintanns.k12.ny.us/depart/math/seth

بهناز کوچک شوشتری
دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی
shooshtari_b@scu.ac.ir