

اعداد کاتالان

بهناز کوچک شوشتری

چکیده

در بررسی مسائل شمارشی، با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت سروکار داریم. از جمله این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد دیده می‌شوند، دنباله اعداد کاتالان است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد، بررسی و اثبات شود و همچنین مثال‌های مختلفی از کاربردهای آن ارائه شده است.

مقدمه

هر کسی که به نوعی با ریاضیات سروکار دارد، احتمالاً با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت برخورد داشته است. بعضی از آن‌ها مانند $۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots$ ساده به نظر می‌آیند و بعضی مانند اعداد فیبوناتچی $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, \dots$ را بایستی در طول زمان شناخت. از جمله این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد در بررسی مسائل شمارشی دیده می‌شوند، دنباله اعداد کاتالان^۱ است. چند عضو اول این دنباله عبارت است از

$۱, ۲, ۵, ۱۴, ۴۲, ۱۳۲, ۴۲۹, ۱۴۳۰, ۴۸۶۲, ۱۶۷۹۶, ۵۸۷۸۶, ۲۰۸۰۱۲, ۷۴۲۹۰۰,$
 $۲۷۴۴۴۰, ۹۶۹۴۸۴۵, ۳۵۳۵۷۶۷۰, ۱۲۹۶۴۴۷۹۰, ۴۷۷۶۳۸۷۰۰, ۱۷۶۷۲۶۳۱۹۰,$
 $۵۶۴۱۲۰۴۲۰, ۲۴۴۶۶۲۶۷۰۲۰, ۹۱۴۸۲۵۶۳۶۴۰, ۳۴۳۰۵۹۶۱۳۶۵۰, \dots$

دنباله اعداد کاتالان اولین بار در قرن ۱۸، به وسیله لئونارد اویلر مطرح شد. او مسأله زیر را حل کرد: به چند طریق می‌توان یک چندضلعی را به وسیله قطره‌هایش به مثلث‌ها تقسیم نمود به طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند؟ در سال ۱۸۳۸، کاتالان مسأله زیر را حل کرد:

1) Catalan Numbers

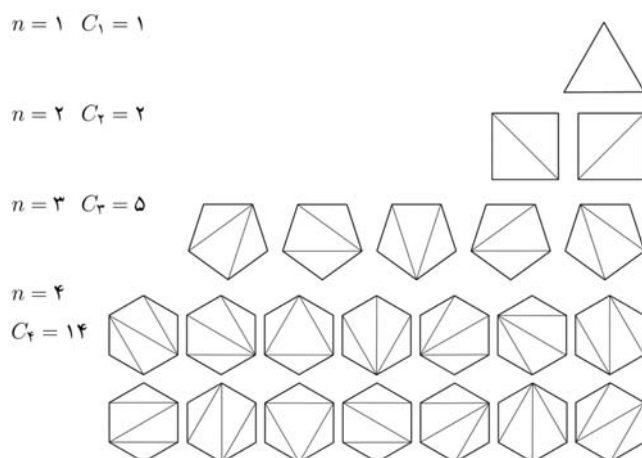
به چند طریق می‌توان یک سری از $(n + 1)$ حرف را با استفاده از n جفت پرانتز دسته‌بندی کرد به طوری که یا دو حرف، یا یک حرف و یک عبارت پرانتزی و یا دو عبارت پرانتزی، بدون تغییر ترتیب حروف، در کنار هم باشند؟

جواب مسألهٔ اویلر برای هر $n + 2$ ضلعی و جواب مسألهٔ کاتالان برای هر n - امین عدد کاتالان، C_n است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد بررسی و اثبات شود. همچنین مثال‌های متعددی از کاربردهای آن ارائه خواهد شد. در بخش اول، مسائل مختلف و تناظر یک به یک بین آن‌ها معرفی می‌شوند. در بخش دوم، با شرح نحوهٔ شمارش بعضی از مسائل، رابطهٔ بازگشتی برای تولید دنباله را معرفی کرده و تابع مولد این دنباله را به دست می‌آوریم. در بخش سوم، به معرفی و اثبات فرمول‌های دیگری که اعداد کاتالان را تولید می‌کنند، می‌پردازیم.

۱. مسأله و تناظرهای یک به یک

۱.۱. مسألهٔ مثلث‌بندی کردن یک چندضلعی

اگر تعداد راه‌هایی را که می‌توان یک $n + 2$ ضلعی منتظم را مثلث‌بندی کرد به طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند، بشماریم، اعداد کاتالان به دست می‌آیند. در شکل ۱.۱ این کار به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ دیده می‌شود.



شکل ۱.۱

همان‌طور که دیده می‌شود، به ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۱۴ طریق برای انجام این کار وجود دارد. برای $n = 0$ ، دو ضلعی را می‌توان دقیقاً به یک طریق مثلث‌بندی کرد و بنابراین $C_0 = 1$ است.

۲.۱. دسته‌بندی $(n + 1)$ حرف با n جفت پرانتز

فرض کنیم $(n + 1)$ حرف با یک ترتیب ثابت کنار هم قرار گرفته باشند. می‌خواهیم با n جفت پرانتز آن‌ها را دسته‌بندی کنیم به طوری که درون هر جفت پرانتز دو عامل وجود داشته باشد. این عوامل می‌توانند دو حرف مجاور هم، یک حرف و یک جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شده و یا دو جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شده مجاور هم باشند. در شکل ۲.۱ به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ دسته‌بندی‌ها دیده می‌شوند.

$$n = 0 \quad C_0 = 1 \quad (a)$$

$$n = 1 \quad C_1 = 1 \quad (ab)$$

$$n = 2 \quad C_2 = 2 \quad ((ab)c), (a(bc))$$

$$n = 3 \quad C_3 = 5 \quad (((ab)c)d), ((ab)(cd)), ((a(bc))d), (a((bc)d)), (a(b(cd))))$$

$$n = 4 \quad C_4 = 14 \quad (((((ab)c)d)e), (((a(bc))d)e), (((ab)(cd)e), (((ab)c)(de))), ((a((bc)d)e), ((a(b(cd)))e), ((a(bc))(de)), ((ab)((cd)e))), ((ab)(c(de))), (a(((bc)d)e)), (a((b(cd))e)), (a((bc)(de))), (a(b((cd)e))), (a(b(c(de))))))$$

شکل ۲.۱

۳.۱. درخت‌های دودویی

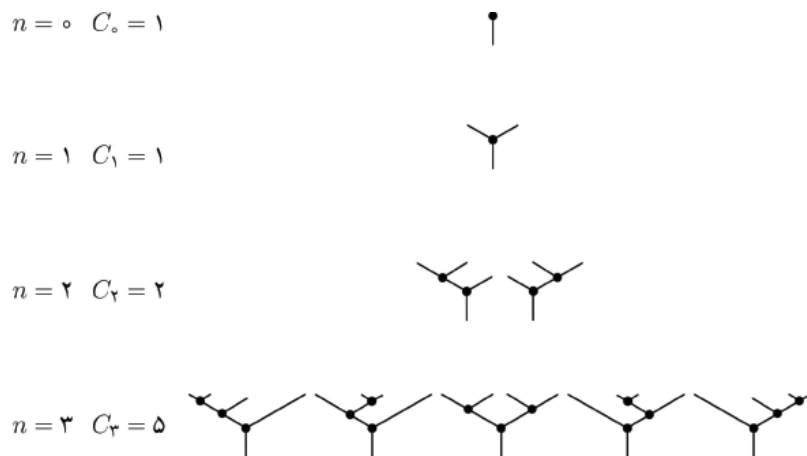
یک درخت دودویی ریشه‌دار با n گره داخلی، یک مجموعه از نقاط (گره‌ها) و پاره‌خط‌های مرتبط بین آن‌ها است که یک گره به عنوان ریشه در نظر گرفته می‌شود و $(n - 1)$ گره دیگر، آن‌هایی هستند که به دو گره بالاتر از خودشان وصل می‌شوند. اعداد کاتالان این درخت‌ها را می‌شمارند. در شکل ۳.۱ به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3$ این درخت‌ها دیده می‌شوند.

۴.۱. مسیرهای کاتالان

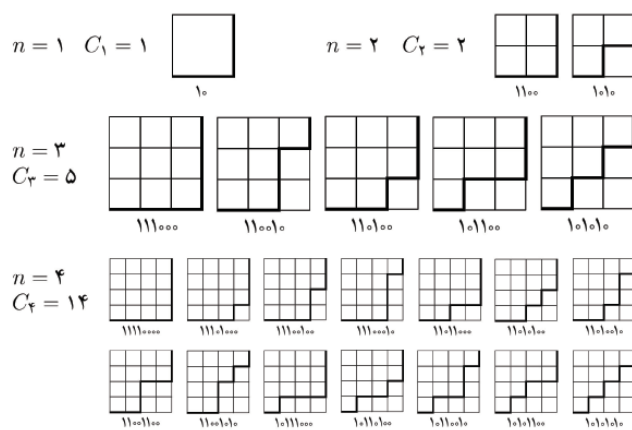
فرض کنیم یک شبکه $n \times n$ داشته باشیم و بخواهیم از گوشه سمت چپ پایین به گوشه سمت راست بالا برویم به طوری که مسیر حرکت زیر خط واصل این دو گوشه (قطر اصلی) قرار گرفته باشد و فقط در هر مرحله از حرکت، مجاز به حرکت به راست و بالا باشیم. تعداد این مسیرها با اعداد کاتالان شمرده می‌شوند و n - مسیر کاتالان^۱ نامیده می‌شوند (مانند حرکت مهره رخ در شطرنج).

1) Catalan n-path

در شکل ۴.۱ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ این مسیرها دیده می شوند.



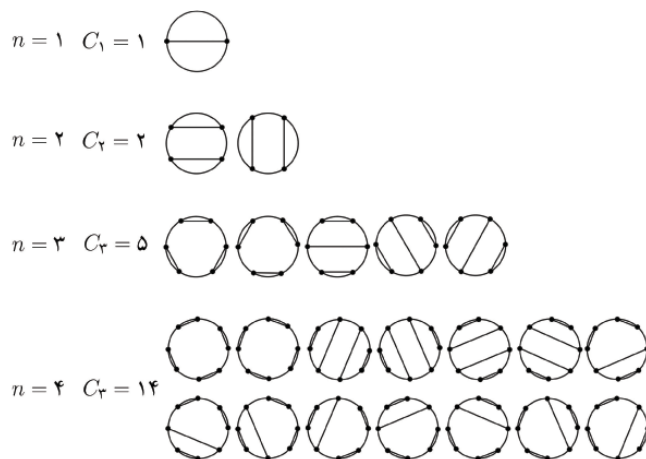
شکل ۳.۱



شکل ۴.۱

۵.۱. دست دادن افراد دور یک میزگرد

اگر $2n$ نفر دور یک میزگرد نشسته باشند، به چند طریق تمامی آن‌ها می‌توانند دوبه‌دو دست همدیگر را بگیرند به طوری که هیچ دو بازویی از هم نگذرند. شکل ۵.۱ به‌ازای $n = 1, 2, 3, 4$ حالت‌های مختلف را نشان می‌دهد.



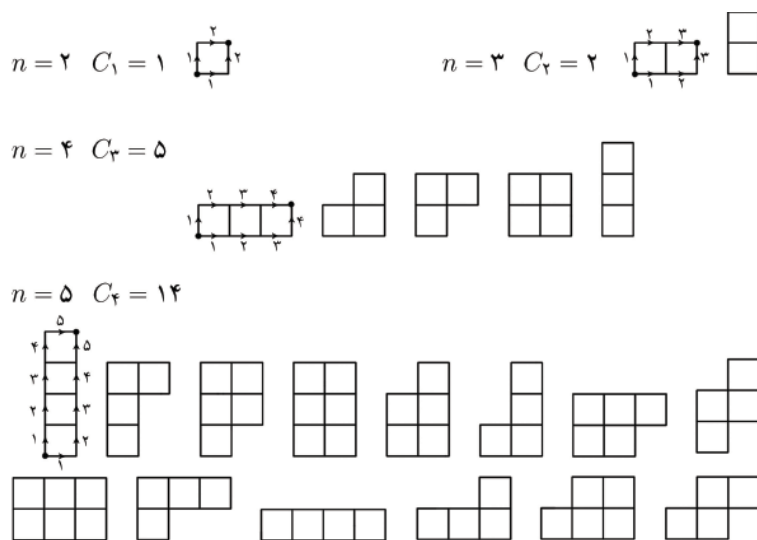
شکل ۵.۱

۶.۱. مسیرهای جفت

یک جفت مسیر^۱ با طول n ، یک جفت از مسیرها است که از مبدأ شروع می‌شوند و هر کدام شامل n مرحله تکی است و بعد از n مرحله همدیگر را قطع می‌کنند. حرکت روی این دو مسیر فقط به راست و بالا می‌باشد. این مسیرهای جفت، هم‌چنین پولیومینوهای موازی^۲ نامیده می‌شوند، چون ناحیه محصور به این دو مسیر، یک مجموعه از مربع‌هایی است که به وسیله اضلاعشان با هم ارتباط دارند. در هر یک از آن‌ها، ارتفاع ستون‌های متوالی از مربع‌ها از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ یعنی از پایین، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست و از بالا، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست است.

محیط هر یک از این مسیرهای جفت به‌ازای $n \geq 2$ برابر $2n$ و تعداد آن‌ها C_{n-1} است؛ یعنی به‌ازای هر n ، محیط ثابت است ولی تعداد مربع‌ها ثابت نیست. شکل ۶.۱ مسیرهای جفت را به‌ازای $n = 2, 3, 4, 5$ نشان می‌دهد. مساحت کل این C_{n-1} مسیر جفت، برابر 4^{n-2} است.

1) path pair 2) Parallelo-Polyomino



شکل ۶.۱

۷.۱. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و عبارتهای پرانتزی

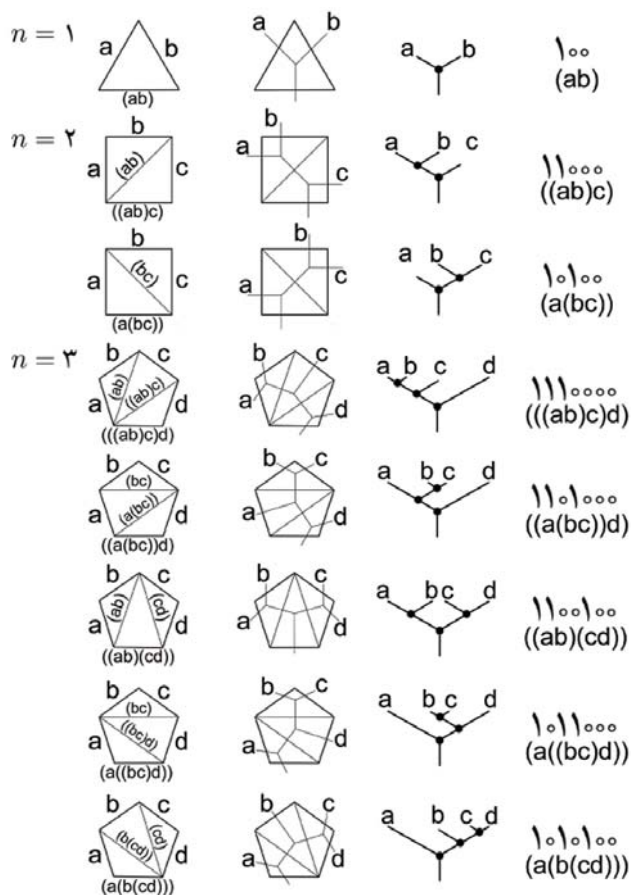
اضلاع چندضلعی را (به غیر از قاعده) به صورت گردش در یک جهت با حروف نام‌گذاری می‌کنیم. هر قطر که با دو ضلع مجاور یک مثلث تشکیل دهد، با استفاده از نام اضلاع در یک جهت پرانتز نام‌گذاری می‌شود. هر قطر بعدی با استفاده از نام دو ضلع مجاور در همان مثلث که این قطر یک ضلع آن است، در یک جهت پرانتز، نام‌گذاری می‌شود. در نهایت ضلعی که به عنوان قاعده بود نام‌گذاری می‌شود (شکل ۷.۱).

۸.۱. تناظر یک به یک بین درخت‌های دودویی و عبارتهای پرانتزی

اگر گره‌های انتهایی درخت‌های دودویی را به ترتیب از چپ به راست با حروف نام‌گذاری کنیم، با عبارتهای پرانتزی یک تناظر یک به یک تشکیل می‌دهند (شکل ۷.۱).

۹.۱. تناظر یک به یک بین عبارتهای پرانتزی و اعداد دودویی

در عبارتهای پرانتزی به ازای هر پرانتزی که باز می‌شود عدد ۱ و به ازای هر حرف، عدد صفر (۰) را قرار می‌دهیم. پرانتزهای سمت راست «(» نادیده گرفته می‌شود (شکل ۷.۱).



شکل ۷.۱

۱۰.۱. تناظر یک به یک بین اعداد دودویی و مسیرهای کاتالان

اگر در مسیرهای کاتالان با n مرحله تکی، هر مرحله از حرکت به راست با عدد ۱ و هر مرحله از حرکت به بالا را با صفر (۰) نشان دهیم، متناظر با هر مسیر، یک عدد دودویی داریم. این اعداد دودویی همان اعداد دودویی در ۹.۱ هستند که رقم آخر آن‌ها نادیده گرفته شده است. در شکل ۴.۱ عدد دودویی مربوط به هر مسیر زیر آن نوشته شده است.

۱۱.۱. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و درخت‌های دودویی

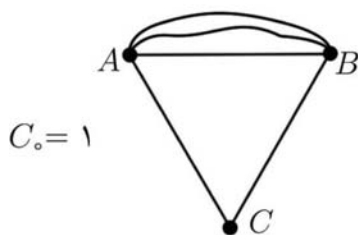
همان‌طور که در شکل ۷.۱ دیده می‌شود، به‌ازای هر چندضلعی یک درخت دودویی وجود دارد

و هر یک از مثلث‌ها با قسمتی از آن درخت، شامل یک گره که دو لبه از آن خارج شده، متناظر است (شکل ۷.۱).

۲. رابطه بازگشتی و تابع مولد

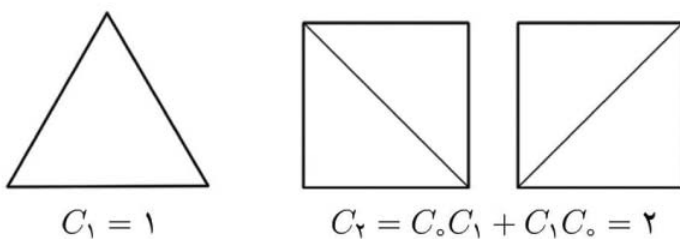
۱.۲. نحوه شمارش در مسأله اویلر و به دست آوردن رابطه بازگشتی

برای به دست آوردن یک رابطه بازگشتی در مسائل شمارشی مطرح شده، نحوه شمارش را در مسأله مثلث‌بندی کردن چندضلعی با $n + 2$ ضلع شرح می‌دهیم. به ازای $n = 0$ ، می‌توان دو ضلعی را مثلی در نظر گرفت که یک ضلع ندارد. مانند شکل ۱.۲ که AC و CB دو ضلع مورد نظر هستند.



شکل ۱.۲

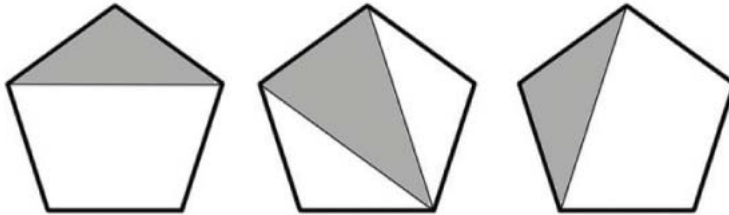
واضح است که فقط به یک طریق می‌توان A را به B وصل کرد به طوری که ABC یک مثلث شود، یعنی $C_0 = 1$. به ازای $n = 1$ و $n = 2$ به راحتی می‌توان دریافت که $C_1 = 1$ و $C_2 = 2$ است (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲

به ازای $n = 3$ ، در شکل ۳.۲ یک ضلع پنج ضلعی را در نظر می‌گیریم. در پنج ضلعی سه مثلث وجود دارد که این ضلع خاص، یک ضلع این سه مثلث است. بنابراین سه حالت می‌توان در نظر گرفت. در هر حالت، آن مثلث که انتخاب شود، یک چندضلعی (احتمالاً تهی) در سمت راست و یک چندضلعی در سمت چپ مثلث اصلی است که بایستی خودشان نیز مثلث‌بندی شوند. در

پنج ضلعی سمت چپ، یک چهارضلعی در سمت چپ و یک تپی در سمت راست (یک چندضلعی با دو ضلع) دیده می شود. با مثلث بندی کردن دو طرف، کار مثلث بندی کردن، کامل می شود. در این حالت به C_2 روش در سمت چپ و C_0 روش در سمت راست و بنابراین به C_2C_0 روش مثلث بندی می شود. برای پنج ضلعی وسط، دو سه ضلعی در دو طرف مثلث اصلی است که هر کدام به C_1 روش مثلث بندی می شوند، پس در این حالت به C_1C_1 روش کار انجام می شود. برای پنج ضلعی سمت راست، یک تپی در سمت چپ و یک چهارضلعی در سمت راست مثلث اصلی وجود دارد که



شکل ۳.۲

سمت چپ به C_0 روش و سمت راست به C_2 روش مثلثی می شوند. بنابراین در این حالت به C_2C_0 روش کار مثلثی کردن پنج ضلعی انجام می شود. بنابراین برای تمامی سه حالت موجود در شکل ۳.۲، داریم

$$C_2 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0.$$

در حالت کلی، برای یک $n + 2$ ضلعی، وقتی یک ضلع خاص انتخاب شود، به n حالت می توان مثلث انتخاب کرد که این ضلع خاص، یک ضلع آن باشد. در هر یک از این حالتها ممکن است یک تپی در سمت چپ و یک $n - 1$ ضلعی در سمت راست، یعنی C_0C_{n-1} روش، یک سه ضلعی در سمت چپ و یک $n - 2$ ضلعی در سمت راست، یعنی C_1C_{n-2} روش و... و یک $n - 1$ ضلعی در سمت چپ و یک تپی در سمت راست، یعنی $C_{n-1}C_0$ روش به وجود آید. بنابراین تعداد کل روش های مثلث بندی کردن یک $n + 2$ ضلعی از رابطه بازگشتی زیر به دست می آید:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \dots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0. \quad (1.2)$$

که n - امین عدد کاتالان است.

۲.۲. تابع مولد

می خواهیم با استفاده از رابطه بازگشتی (۱.۲) و روش معروف به تابع مولد، یک فرمول صریح برای اعداد کاتالان، C_n ، به دست آوریم. تابع $C(x)$ را به عنوان تابع مولد برای تمامی اعداد کاتالان

C_0, C_1, C_2, \dots به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (2.2)$$

طرفین رابطه (۲.۲) را به توان ۲ می‌رسانیم و در x ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x[C(x)]^2 &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} (C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

بنابراین از معادله درجه دوم به صورت

$$x[C(x)]^2 - C(x) + 1 = 0 \quad (4.2)$$

به دست می‌آید. با حل این معادله، فرمول صریح تابع مولد $C(x)$ به دست می‌آید:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \quad (5.2)$$

توجه کنید که در (۵.۲)، $C(x)$ با علامت منفی را در نظر می‌گیریم. چون می‌دانیم

$$C(0) = C_0 = 1 \quad (6.2)$$

بنابراین اگر علامت مثبت را انتخاب کنیم، وقتی $x \rightarrow 0$ ، داریم $C(x) \rightarrow \infty$. پس

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \quad (7.2)$$

با استفاده از بسط دو جمله‌ای، داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}(-4x) + \frac{1}{\frac{1}{2}!} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) (-4x)^2 \\ &+ \frac{1}{\frac{3}{2}!} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{3}{\frac{1}{2}}\right) (-4x)^3 \\ &+ \frac{1}{\frac{5}{2}!} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{3}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{5}{\frac{1}{2}}\right) (-4x)^4 \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{3}{\frac{1}{2}}\right) \dots \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - n + 1\right) (-4x)^n \quad (8.2) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

اگر از نماد $[x^n]F(x)$ برای نشان دادن ضریب x^n در بسط $F(x)$ استفاده کنیم، آن گاه

$$\begin{aligned} [x^n]\sqrt{1-4x} &= \frac{1}{n!}(-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} (-1)^n 2^{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)]}{n!} \end{aligned} \quad (9.2)$$

اگر صورت و مخرج کسر (۹.۲) را در $n!(2n-1)$ ضرب کنیم، به دست می آوریم

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)][1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]}{n!n!(2n-1)}$$

بنابراین

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)(2n)!}{n!n!(2n-1)} = \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n} \quad (10.2)$$

اینک این مقدار را در معادله $C(x)$ در (۷.۲) قرار می دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2x} [1 - \sqrt{1-4x}] = \frac{1}{2x} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \right] \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \binom{2n+2}{n+1} x^n \end{aligned} \quad (11.2)$$

از مقایسه (۱۱.۲) با (۲.۲) نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} [x^n]C(x) = C_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

بنابراین n - امین عدد کاتالان از فرمول زیر به دست می آید:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

۳. فرمول‌های دیگر برای تولید اعداد کاتالان

۱.۳. فرمول اویلر

اویلر در حل مسأله مثلث‌بندی یک N ضلعی فرمول غیربازگشتی

$$P = \frac{2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4N - 10)}{(N - 1)!} \quad (N > 2) \quad (1.3)$$

N	۳	۴	۵	۶	...
P	۱	۲	۵	۱۴	...

را ارائه داد. همان‌طور که دیده می‌شود، این فرمول به‌ازای $N > 2$ ، اعداد کاتالان

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 1 \quad (2.3)$$

را می‌دهد. بنابراین اعداد به‌دست آمده از (۱.۳) همان اعدادی هستند که از آخرین دستوربند قبل، به‌ازای $n = N - 2$ به‌دست می‌آیند. برای این‌که ثابت کنیم فرمول (۱.۳) تمامی اعداد کاتالان را ارائه می‌دهد، بایستی نشان دهیم

$$P = \frac{2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4N - 10)}{(N - 1)!} = \frac{1}{N - 1} \binom{2N - 4}{N - 2} (= C_{N-2}) \quad (3.3)$$

برای اثبات (۳.۳)، نشان می‌دهیم سمت چپ با راست برابر است. چون

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(2 \times 3)(2 \times 5)(2 \times 7) \dots (2(2N - 5))}{(N - 1)!} \\ &= \frac{2^{N-2}(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2N - 5))}{(N - 1)!} \end{aligned}$$

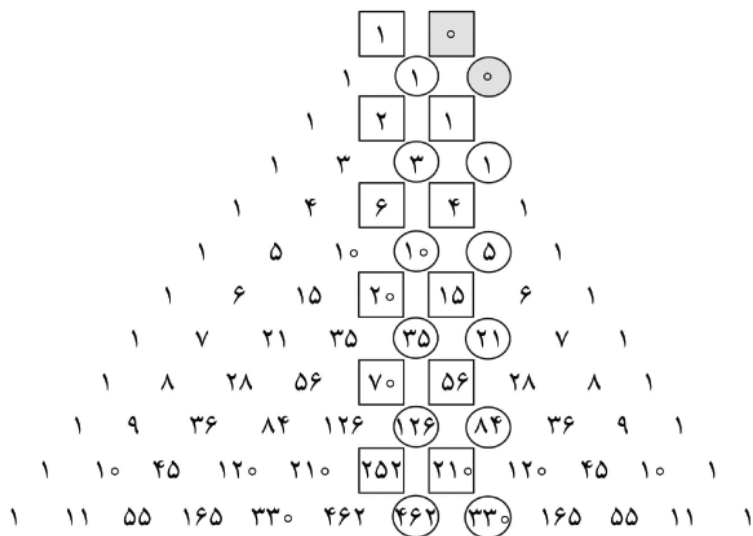
پس با ضرب صورت و مخرج کسر در $(N - 2)!$ داریم

$$\begin{aligned} P &= \frac{2^{N-2}(N - 2)!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2N - 5))}{(N - 2)!(N - 1)!} \\ &= \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2N - 4)][1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2N - 5)]}{(N - 2)!(N - 1)!} \\ &= \frac{(2N - 4)!}{(N - 2)!(N - 1)!} = \frac{1}{N - 1} \frac{(2N - 4)!}{(N - 2)!(N - 2)!} \\ &= \frac{1}{N - 1} \binom{2N - 4}{N - 2} = C_{N-2} \end{aligned}$$

و اثبات تمام است.

این فرمول مقدار C_0 (یعنی وقتی $N = 2$) را به دست نمی دهد. با وجود این، همان طور که در (۱.۲) دیدیم با یک تعبیر هندسی خواهیم داشت $C_0 = 1$.

۲.۳. مثلث پاسکال و اعداد کاتالان



شکل ۱.۳

اگر در مثلث پاسکال به ترتیب از بالا به پایین سطرها را با $n = 0, 1, 2, \dots$ شماره گذاری کنیم، خواهیم دید که

$$C_n = \text{عدد مجاور در سطر } 2n - 1 - \text{عدد موجود در ستون مرکزی و در سطر } 2n - 1 - n$$

اعداد مورد نظر در مربعها مشخص شده اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می شوند:

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad 1 - 0 = 1 = C_0 \\ n = 1 & \quad 2 - 1 = 1 = C_1 \\ n = 2 & \quad 6 - 4 = 2 = C_2 \\ n = 3 & \quad 20 - 15 = 5 = C_3 \\ & \quad \vdots \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

فرمول (۴.۳) را می توان به صورت $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ نیز نوشت.

اثبات (۴.۳):

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)! \times (n+1)}{n!n! \times (n+1)} - \frac{(2n)! \times n}{(n+1)!(n-1)! \times n} \\ &= \frac{(n+1)(2n)!}{n!(n+1)!} - \frac{n(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n \end{aligned}$$

با دقت بیشتر در مثلث پاسکال می‌توان دید که به ازای $n \geq 1$ داریم
 $C_n =$ عدد مجاور در سطر $2n - 1$ - ام - عدد مجاور در ستون سمت راست ستون مرکزی و در سطر $2n - 1$ - ام
 اعداد مورد نظر در دایره‌ها مشخص شده‌اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} n=1 & \quad 1 - 0 = 1 = C_1 \\ n=2 & \quad 3 - 1 = 2 = C_2 \\ n=3 & \quad 10 - 5 = 5 = C_3 \\ n=4 & \quad 35 - 21 = 14 = C_4 \\ & \quad \vdots \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

فرمول (۵.۳) را می‌توان به صورت $\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = C_n$ نیز نوشت.
 اثبات (۵.۳):

$$\begin{aligned} \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} &= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \\ &= \frac{(2n-1)! \times (n+1)}{n!(n-1)! \times (n+1)} - \frac{(2n-1)! \times (n-1)}{(n+1)!(n-2)! \times (n-1)} \\ &= \frac{(n+1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} - \frac{(n-1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{2(2n-1)! \times n}{(n-1)!(n+1)! \times n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n \end{aligned}$$

۳.۳. معرفی و اثبات یک رابطه بازگشتی برای اعداد کاتالان

اعداد کاتالان از رابطه بازگشتی زیر به دست می آیند:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}, \quad C_0 = 1 \quad n \geq 1$$

برای اثبات از فرمول (۴.۳) استفاده می کنیم. داریم

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!} \\ &= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} - \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+2)!} \\ &= \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+2)n!(n+1)!} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \left[\frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \right] \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \left[\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right] = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \end{aligned}$$

۴.۳. یک ویژگی جالب از اعداد کاتالان

در دنباله اعداد کاتالان به ازای $n \geq 2$ ، هر دو عدد متوالی دارای تعداد ارقام مساوی هستند، یعنی C_2 و C_7 یک رقمی، C_4 و C_5 دو رقمی، C_6 و C_7 سه رقمی، C_8 و C_9 چهار رقمی، ... و C_{n+1} و C_n رقمی هستند. نظم تعداد ارقام در هر دو عدد متوالی، اعداد طبیعی می باشد.

تشکر و قدردانی: در پایان از راهنمایی های بی دریغ همکار گرامیم دکتر منصور معتمدی سپاسگزارم.

مراجع

- [1] David Callan, A Combinatorial Interpretation of a Catalan Numbers Identity, Department of statistics university of Wisconsin- Madison, *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No. 4. (Oct. , 1999), PP. 295-298.
- [2] Tom Davis, Catalan Numbers, tomrdavis@earthlink.net, <http://www.geometer.org/mathcircle>. November 26, 2006.
- [3] Martin Gardner, Mathematical Games, Catalan Numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places. *Scientific American* 234, No. 6 (June 1976), PP. 120-125.
- [4] Wen-Jin Woan, Lou Shapiro, and D.G.Rogers, The Catalan Numbers, The Lebesgue Integral and 4^{n-2} . *American Mathematical Monthly* 101 (December 1997), PP. 926-931.
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_Numbers
- [6] <http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal-Catalan.html>
- [7] <http://www.saintanns.k12.ny.us/depart/math/seth>

بهناز کوچک شوشتری
 دانشگاه شهید چمران اهواز
 دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی
 shooshtari_b@scu.ac.ir