فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۳ تا ۱۹

# ریاضیات بدون بنیادها

محمدصالح زارع پور

چکیده

به نظر می‌رسد که امروزه کمتر ریاضی‌دانی را می‌توان یافت که تصویری بنیادگرایانه[۱] از ریاضیات نداشته باشد[۲]. با این همه، فیلسوفانی هستند که تحقق *ریاضیات بدون بنیادها*[۳] را ممکن می‌دانند. یکی از ایشان، هیلاری پاتنم[۴] است که معتقد است «ریاضیات نه بنیادی دارد و نه احتیاجی به آن». پاتنم از یک سو تلاش می‌کند تا نشان دهد که هیچ یک از گزینه‌های مختلف برای قرار گرفتن در جایگاه بنیاد ریاضیات، رجحانی بر سایر گزینه‌ها ندارد و این گزینه‌ها تنها وصف‌هایی هم‌ارز[5] هستند (دیدگاه سلبی) و از سوی دیگر در صدد پی‌ریزی یک نظام معناشناسی[۶] جدید برای گزاره‌های ریاضی است (دیدگاه ایجابی). در این مقاله سعی داریم تا به شرح دیدگاه‌های پاتنم در این زمینه بپردازیم و تأثیرات این دیدگاه‌ها بر دیگر فلاسفهٔ ریاضیات را مختصراً شرح دهیم.

## ۱. مقدمه

کتاب اصول اقلیدس و روش[۷] حیرت‌انگیزی که او در تألیف این کتاب به‌کار بسته بود، برای قرن‌ها موضوع بسیاری از مناقشات جدی ریاضی‌دانان بود؛ چرا که به نظر می‌رسید وی در اثبات

1) foundationalistic

۲) نویسنده برای این ادعا دلیلی جز مشاهدات شخصی‌اش از ریاضی‌دانان و به‌خصوص ریاضی‌دانان حرفه‌ای بی‌علاقه به مسائل فلسفی ریاضیات ندارد. البته این مشاهدات را نقل قول‌هایی شبیه به این تقویت می‌کند: «می‌گویند ریاضی‌دانان در روزهای کاری هفته افلاطونی‌اند و در پایان هفته صورتگرا و تخمین زده‌اند که شصت و پنج درصد ریاضی‌دانان افلاطونی‌اند، سی درصد صورتگرا، پنج درصد شهودگرا» (لاجوردی و اردشیر ۱۳۸۸؛ ۵۵). دست‌کم افلاطونی‌ها بی هیچ مناقشه‌ای، نمونهٔ کامل بنیادگرایان هستند.

3) *Mathematics Without Foundations* 4) Hilary Putnam 5) equivalent descriptions

6) semantics

۷) در اینجا منظور همان روش اصل موضوعی (axiomatic) است.

برخی از قضایای کتاب خود، تلویحاً از گزاره‌ها و احکامی استفاده کرده است که نه در میان اصول موضوعه قید شده و نه قابل استنتاج از آن‌ها بودند؛ یا این‌که برخی از تعاریف او از مفاهیم هندسی، منجر به ابهاماتی می‌شدند (و نیز ایراداتی دیگر). مجموعهٔ این ایرادات و ابهامات، منجر به مناقشات و مباحثاتی شدند که اوج آن‌ها در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ و چند سال ابتدایی قرن ۲۰ شکل گرفت و به بازنویسی و اصلاح اساسی ساختار هندسهٔ اقلیدسی (اصول موضوعهٔ آن و نحوهٔ تعریف مفاهیم اصلی) منتهی شد. موفقیت ریاضی‌دانان در این امر، از یک سو و پارادوکس‌های تازه کشف شده در ریاضیات از سوی دیگر، آنان را ترغیب کرد تا درصدد بنا نهادن چنین ساختاری برای سایر شاخه‌های ریاضیات و، به‌طور خاص، حساب برآیند. به همین منظور، تلاش‌هایی گسترده برای تنظیم برخی اصول به‌عنوان اصول موضوعه و استنتاج تمامی قضایای حساب از آن‌ها (به نحوی که منجر به پارادوکس‌های مذکور نشود) آغاز شد. فیلسوفان و منطق‌دانان بسیاری بر آن شدند تا با فراهم آوردن بنیادی برای ریاضیات، آن را به‌صورت اصل‌موضوعی بازنویسی و سازگاری ساختمان به‌دست آمده را اثبات کنند. در این سال‌ها، کمتر ریاضی‌دانی باوری جز این داشته است که «ریاضیات حتماً بنیادی دارد». صدای اندکْ افرادی هم که باوری جز این داشتند، در هیاهوی تلاش همگانی برای یافتن بنیادی برای ریاضیات به گوش نمی‌رسید[۱]. در نهایت، این هیاهو با اقبال یافتن نظریهٔ مجموعه‌ها در میان سایر گزینه‌هایی که برای بنیاد ریاضیات در نظر گرفته شده بودند، فروکش کرد.

نظریهٔ مجموعه‌ها در رقابت با برخی نظریه‌های دیگر مثل نظریهٔ انواع[۲]، نظریهٔ رسته‌ها[۳] و یا منطق وجهی[۴]، مقبولیتی عام در میان ریاضی‌دانان پیدا کرد و امروزه کمتر ریاضی‌دانی هست که نظریهٔ مجموعه‌ها را بنیاد ریاضیات نداند. یعنی دست‌کم تلقی رایج در بین ریاضی‌دانانی که دغدغه‌های فلسفی جدی ندارند، این است که نظریهٔ مجموعه‌ها بنیاد مناسبی برای ریاضیات است. اما آیا به‌راستی چنین است؟ آیا نظریهٔ مجموعه‌ها حقیقتاً بنیاد ریاضیات است؟ از این مهم‌تر، آیا اساساً ریاضیات بنیادی دارد؟ این‌ها سؤالاتی است که هیلاری پاتنم در مقالهٔ مناقشه‌برانگیز خود، *ریاضیات بدون بنیادها* (Putnam 1967)، مطرح می‌کند و در پاسخ آن‌ها مدعی می‌شود که «ریاضیات نه بنیادی دارد و نه احتیاجی به آن». پاتنم در این مقاله می‌کوشد تا اولاً مقبولیت نظریهٔ مجموعه‌ها و یا برخی جایگزین‌های مهجورتر آن مانند منطق وجهی را برای قرار گرفتن در جایگاه بنیادهای ریاضیات نفی کند و ثانیاً با پی‌ریزی نظام معناشناسی جدیدی مبتنی بر ثنویت شیئی ــ وجهی[۵] گزاره‌های ریاضی، بی‌نیازی ریاضیات به بنیادها را اثبات کند. البته در نگاه اول، ممکن است چنین به نظر برسد که پاتنم، احتیاج ریاضیات به بنیاد را مرتفع نکرده است و تنها گزینه‌ای جدید برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات طرح کرده است؛ اما خود او صریحاً این نظر را تکذیب می‌کند.

۱) این تعابیر، قریب به تعبیری از خود پاتنم است.

2) type theory 3) category theory 4) modal logic 5) objective-modal

در این مقاله سعی داریم تا با تشریح دیدگاه‌های پاتنم، برخی برهان‌هایی را که به تأیید نظر او کمک می‌کنند اقامه و در نهایت، پیامدهای پذیرش این نظر، محاسن و نواقص آن را تحلیل کنیم. اساساً برای نشان دادن این‌که $A$ بنیادی مناسب برای ریاضیات نیست، به دو روش می‌توان عمل کرد. روش اول این است که با بررسی امکاناتی که پذیرفتن $A$ به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات، در اختیار ما قرار می‌دهد و نیز محدودیت‌هایی که به ما تحمیل می‌کند، نشان دهیم که $A$ قابلیت توضیح و توجیه برخی ویژگی‌ها و یا وقایع عالم ریاضی را ندارد. روش دوم این است که نشان دهیم $A$ نسبت به سایر گزینه‌های موجود (برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات)، رجحانی ندارد. در حقیقت، ادعا می‌کنیم که مثلاً $A$ و $B$ در تحلیل دنیای ریاضیات به یک اندازه کارآمد هستند و در نتیجه الزامی برای این‌که یکی بنیاد ریاضیات باشد و دیگری اشتقاقی از آن، وجود ندارد.

پاتنم در اثبات نظریات خود فقط از روش دوم استفاده کرده است؛ شاید به این دلیل که دیدگاه ایجابی او متکی بر همین عدم رجحان گزینه‌های موجود (برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات) بر یکدیگر است. ما در این‌جا علاوه بر استدلال پاتنم که با روش دوم ایراد شده است، به‌عنوان نمونه، استدلالی مبتنی بر روش اول نیز ارائه خواهیم کرد.

## ۲. پارادوکس اسکولم[۱]

اسکولم یکی از معدود ریاضی‌دانانی است که در همان دهه‌های ابتدایی قرن بیستم و در اوج اقبال نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات، این مقبولیت را زیر سؤال برد و آن را نفی کرد. اسکولم در سال ۱۹۲۲ و با پیگیری و تعمیم کارهای لوونهایم[۲]، قضیه‌ای مهم را اثبات کرد که از آن به‌بعد سلاحی برای حمله به نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات شد:

**قضیه ۱.** فرض کنید $A$ مجموعه‌ای سازگار از جمله‌ها در زبان $L$ باشد و $|L| = \kappa$. اگر $A$ مدلی نامتناهی داشته باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد اصلی مانند $\lambda$ که $\lambda \leq \kappa$، مدلی به اندازهٔ $\lambda$ دارد.[۳]

فرض کنید $AST$ مجموعهٔ اصول موضوع دلخواهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. اگر این اصول سازگار باشند (اگر نباشند عملاً بحث منتفی است)، مدلی خواهند داشت و بنابر قضیهٔ بالا، دارای یک مدل شمارا هستند. از سوی دیگر، یکی از گزاره‌هایی که از اصول مورد نظر ما استنتاج می‌شود، تصریح می‌کند که دست‌کم یک مجموعهٔ ناشمارا وجود دارد. مثلاً در $ZF$، این گزاره از اصل مجموعهٔ توانی[۴] و قضیهٔ کانتور[۵] استنتاج می‌شود. در این وضعیت، چون مدل مورد نظر ما باید ارضاکنندهٔ همهٔ نتایج منطقی اصول باشد، لاجرم ارضاکنندهٔ این گزاره هم خواهد بود. یعنی یک مدل شمارا ارضاکنندهٔ گزاره‌ای شده است که وجود یک مجموعهٔ ناشمارا را تصریح می‌کند!

---

1) Skolem paradox 2) Löwenheim

۳) برای مشاهدهٔ برهان این قضیه که به قضیهٔ لوونهایم ـ اسکولم شهرت دارد، به (اردشیر ۱۳۸۳) مراجعه کنید.

4) Axiom of Power Set 5) Cantor's theorem

در نگاه اول، به نظر می‌رسد که به نوعی تناقض رسیده‌ایم اما واقعیت این است که هیچ تناقضی در کار نیست. با این همه، کل مسأله آن‌قدر مناقشه برانگیز بوده است که نام پارادوکس را درخور آن بدانیم. یک مدل می‌تواند آن‌قدر ضعیف باشد که تعریف و اثبات وجود برخی از توابع دوسویی *درون* آن ممکن نباشد و در واقع، مدل شمارایی که برای نظریهٔ مجموعه‌ها ساخته می‌شود نیز چنین است. *درون* این مدل، مجموعه‌هایی وجود دارند که اگرچه از دید ناظر بیرونی شمارا هستند، اما هیچ یک از توابع دوسویی *درون* مدل، این مجموعه‌ها را در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار نمی‌دهند و چون تعریف مجموعهٔ ناشمارا چیزی جز این نیست که مجموعهٔ مورد نظر در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار نگیرد، پس این مجموعه‌ها از دید ناظری *درونی* ناشمارا هستند. بنابراین هیچ تناقضی وجود ندارد و تنها نکتهٔ مناقشه برانگیز، نسبی شدن مفهوم ناشمارایی در مورد این مدل است. اتفاقاً اسکولم صلاحیت نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات را با تکیه بر همین نکته، نفی می‌کند. از نظر او چیزی که بنیاد ریاضیات تلقی می‌شود، دست‌کم باید قابلیت تبیین مفاهیم ریاضی را به‌صورت مطلق داشته باشد، اما چنان‌که دیدیم برخی مفاهیم در نظریهٔ مجموعه‌ها نسبی می‌شوند (Hart 2000).

## ۳. وصف‌های هم‌ارز[1]

در این‌جا می‌خواهیم به استدلالی که خود پاتنم به منظور تشکیک در وجود بنیادی برای ریاضیات طرح کرده است بپردازیم. وی معتقد است که یکی از مهمترین ویژگی‌های گزاره‌ها و احکام ریاضی، وجود صورت‌بندی‌های متعدد از آن‌ها است. به این ترتیب که شما در ریاضیات می‌توانید به طرق مختلف از یک واقعیت[2] صحبت کنید، بی آن‌که حرفی از اشیاء طریق دیگر به میان آمده باشد. مثلاً می‌توان نظریهٔ اعداد را به بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل کرد و حکمی دربارهٔ اعداد را به حکمی دربارهٔ مجموعه‌ها تبدیل کرد؛ و بالعکس. یعنی می‌توان یک واقعیت ریاضی را یک بار با صحبت از اعداد، بدون آن‌که صحبتی از مجموعه‌ها به میان بیاید، شرح داد و بار دیگر همان واقعیت را با صحبت از مجموعه‌ها، بدون آن‌که صحبتی از اعداد به میان بیاید، شرح داد. این تمایز در اشیاء[3] طرق مختلف می‌تواند به حدی باشد که حتی تشخیص این‌که این دو طریق از یک واقعیت ریاضی صحبت می‌کنند، مشکل باشد. پاتنم در تبیین این موقعیت از اصطلاحی که رایشنباخ[4] وضع کرده است کمک می‌گیرد: *وصف‌های هم‌ارز*. رایشنباخ این اصطلاح را به منظور

1) equivalent descriptions 2) fact

۳) دقت کنید که در این‌جا تلقی ما از «شیء» یک تلقی افلاطونی نیست. منظور ما از اشیاء یک طریق آن چیزهایی است که زبان اتخاذ شده در آن طریق ما را متعهد به وجود آن‌ها می‌کند؛ فارق از این‌که *واقعاً* این اشیاء وجود دارند یا خیر. به بیان دیگر، منظور ما از اشیاء یک طریق همان چیزهایی است که در زبان آن طریق، تحت سورها می‌آیند. به تعبیر کواین (Willard Van Orman Quine): «بودن عبارت است از مقدار یک متغیر پابند بودن».

4) Reichenbach

تبیین ثنویت موج ـ ذره در مکانیک کوانتومی وضع کرده است. از نظر پاتنم، وضعیتی که در ریاضیات رخ می‌دهد دقیقاً مشابه وضعیتی است که در مکانیک کوانتومی با ثنویت موج ـ ذره دیده می‌شود. در مکانیک کوانتومی چه بگوییم «موجی با طول موج معین $\lambda$» و چه بگوییم «ذره‌ای با اندازه حرکت $\nu$ و مکان نامعین»، در هر دو حال از یک واقعیت صحبت کرده‌ایم و (در حقیقت) این دو جمله *وصف‌های هم‌ارزی* از یک واقعیت هستند. پر واضح است که این هم‌ارزی به معنای "ترادف" نیست. افزون بر این، هیچ یک از این دو وصف، رجحانی بر دیگری ندارند و بنابراین نمی‌توانیم یکی را *اصل* و دیگری را *اشتقاقی* از آن بدانیم. پاتنم معتقد است که همین وضعیت، دقیقاً در ریاضیات هم اتفاق می‌افتد و بنیادهای متفاوتی که برای ریاضیات پیشنهاد شده‌اند، وصف‌هایی هم‌ارز از گزاره‌های ریاضی ارائه می‌دهند، بی آن‌که هیچ یک از این وصف‌ها رجحانی بر دیگری داشته باشد و بنابراین هیچ دلیلی ندارد که یکی از این گزینه‌ها را به‌عنوان بنیاد ریاضیات و مابقی را به‌عنوان اشتقاق‌های آن در نظر بگیریم.

پاتنم از میان وصف‌های متعددی که برای توصیف بنیادگرانهٔ گزاره‌های ریاضی پیشنهاد شده‌اند، دو وصف را برمی‌گزیند و با مثالی درصدد توجیه هم‌ارزی این دو وصف برمی‌آید. وصف‌هایی که وی انتخاب می‌کند یکی نظریهٔ مجموعه‌ها و دیگری منطق وجهی است. دو وصفی که در یکی، ریاضیات به‌مثابهٔ عالم *اشیاء (مجموعه‌ها و اعداد)* توصیف می‌شود و در دیگری، به‌مثابهٔ عالم *استلزامات منطقی، ضرورت و امکان*. به‌عنوان نمونه، او تلاش می‌کند تا نشان دهد که اگر حدس فرما[1] غلط باشد، چگونه نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق وجهی وصف‌های هم‌ارزی از این واقعیت ارائه می‌دهند. در این‌جا ما همان استدلال پاتنم را در مورد حدس گلدباخ، یعنی این حدس که «هر عدد زوج بزرگتر از ۲، مجموع دو عدد اول است»، بازنویسی می‌کنیم:
فرض کنید که حدس گلدباخ غلط باشد. بنابراین «دست‌کم یک عدد زوج بزرگتر از ۲ موجود است که مجموع هیچ دو عدد اولی نیست». افزون بر این، فرض کنید این جمله را به‌صورت "$\neg Gold$" در حساب مرتبهٔ اول نشان دهیم. اگر $\neg Gold$ اثبات‌پذیر باشد، مجموعه‌ای متناهی از قضایای حساب مرتبهٔ اول موجود است که $\neg Gold$ را نتیجه می‌دهد. چون کل حساب مرتبهٔ اول را می‌توان به‌صورت نظامی متناهی از اصول[2] بیان کرد، پس زیرمجموعه‌ای متناهی از این اصول مانند $Ax$ موجود است که $\neg Gold$ را نتیجه می‌دهد. پیش از ادامهٔ بحث، باید متذکر شویم که اگر $\neg Gold$ درست باشد، می‌توان آن را در حساب مرتبهٔ اول اثبات کرد، اما ممکن است که حتی کل حساب مرتبهٔ اول برای اثبات خود $Gold$ ضعیف باشد. با توجه به این مقدمات، حدس گلدباخ زمانی کاذب است که "$Ax \supset \neg Gold$" معتبر باشد یا

---

۱) این استدلالات در سال ۱۹٦۷ و پیش از اثبات حدس فرما (۱۹۹۴) توسط وایلز، تقریر شده است.

2) axioms

به عبارت دیگر

$$\Box(Ax \supset \neg Gold) \qquad (۱)$$

حالا به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم که صدق (۱) به مفاهیم اساسی حساب وابسته نیست. فرض کنید آن مفاهیم اساسی که $Ax$ و $\neg Gold$ برحسب آن‌ها نوشته شده‌اند، دو نسبت سه‌موضعی «$x$ حاصل جمع $y$ و $z$ است» و «$x$ حاصل ضرب $y$ و $z$ است» باشد. با نشاندن دو محمول سه‌موضعی دلخواه مثل $S$ و $T$ به‌جای این دو جمله، $Ax$ و $\neg Gold$ را به‌صورت $Ax(S,T)$[۱] و $\neg Gold(S,T)$ بازنویسی می‌کنیم. البته باید بین $S$ و $T$ همان نسبت‌هایی وجود داشته باشد که بین دو محمول «$x$ حاصل جمع $y$ و $z$ است» و «$x$ حاصل ضرب $y$ و $z$ است» برقرار است. یعنی مثلاً به همان نحوی که می‌توان ضرب را به جمع تحویل داد، بتوان $T$ را به $S$ تحویل داد. روشن است که در این شرایط اگر (۱) جمله‌ای صادق از منطق وجهی باشد، جملهٔ زیر هم صادق است:

$$\Box[Ax(S,T) \supset \neg Gold(S,T)] \qquad (۲)$$

دو مجموعهٔ (۱) و (۲) وصف‌های هم‌ارز از یک واقعیت (یعنی نقیض حدس گلدباخ) هستند، با این تفاوت که در (۱) صحبت از نوعی وجود *اشیاء مجرد* است، ولی در (۲) بدون آن‌که هیچ صحبتی از اشیاء مجرد به میان بیاید، واقعیت مورد نظر ما یعنی نقیض حدس گلدباخ، صرفاً در قالب *استلزامی منطقی* بیان شده است. به عبارت دیگر، چون "$\neg Gold$" یعنی «دست‌کم یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ موجود است که مجموع هیچ دو عدد اولی نیست»، پس فرمول (۱) از وجود بعضی اشیاء مجرد ــ *اعداد* ــ صحبت می‌کند؛ به‌علاوه از آن‌جایی که تنها حضور محمول‌های جمع و ضرب است که تضمین می‌کند $Ax$ و $\neg Gold$ از اعداد حرف می‌زنند، پس وقتی که جمع و ضرب را با محمول‌های سه‌موضعی *دلخواه* جایگزین کنیم، عملاً در فرمول (۲) حرفی از اعداد (به‌عنوان اشیاء مجرد) به میان نمی‌آید. در واقع، $Ax(S,T)$ و $\neg Gold(S,T)$ وصف‌های هم‌ارزی از $Ax$ و $\neg Gold$ هستند که هیچ اشاره‌ای به عدد (یا هر شئ مجرد دیگری) ندارند و در عوض، دربارهٔ محمول‌ها و روابط بین آن‌ها صحبت می‌کنیم[۲]. این‌جا، جایی است که با چشم‌پوشی از "$\Box$" در مدخل نوعی نامگرایی[۳] تمام‌عیار قرار می‌گیریم. نامگرایی، در حقیقت نامی است که مورخان به یکی از سه دیدگاه رایج دربارهٔ کلیات[۴] در قرون وسطا داده‌اند. نامگرایان بر این باور بودند که کلیات که در حقیقت همان محمول‌های یک‌موضعی (صفات[۵]) یا چندموضعی (روابط[۶]) هستند، چیزی جز نام‌ها نیستند؛

---

۱) طبیعتاً ارتباطی به "$AST$" در صفحهٔ ۴ ندارد.

۲) در این‌جا ممکن است این شائبه به‌وجود بیاید که اگر ما به همان تعبیر منقول از کواین تکیه کنیم، آنگاه به‌ناچار ملتزم به وجود محمول‌ها به‌مثابهٔ اشیاء دیگری خواهیم شد. اما چنان‌که در ادامه خواهیم دید، برخی نظریات هستند که از پذیرش محمول‌ها به‌عنوان موجوداتی حتی مجرد و ذهنی هم طفره می‌روند.

3) nominalism  4) universals  5) properties  6) relations

نام‌هایی که نه به اشیائی افلاطونی ارجاع دارند و نه به اشیاء ذهنی. نامگرایی وجود هرگونه شیء مجردی را رد می‌کند و ریاضیات کلاسیک را صرفاً بازی با نام‌ها و علائمی بدون مدلول می‌داند. صورتگرایی[1] به تعبیر کواین، شکل نوظهور همان نامگرایی قرون وسطایی است. با این توضیحات باید روشن شده باشد که چرا ایدهٔ پاتنم ما را در مدخل یک تعبیر نامگرایانه از ریاضیات قرار می‌دهد. (۱) و (۲) دو تصویر کاملاً متفاوت و متمایز از یک واقعیت را در اختیار شما می‌گذارند. یکی تصویری شکل گرفته از مصداق‌ها و اشیاء مجرد و دیگری تصویری که هیچ شیء خاصی متعلق به آن نیست؛ تصویری که فقط از استلزامات منطقی و روابط میان محمول‌ها (و نه اشیاء مجرد) و نیز ضرورت یا امکان این استلزامات صحبت می‌کند. حال اگر همان دیدگاه نامگرایانهٔ قرون وسطایی نسبت به کلیات و محمول‌ها را اتخاذ کنیم، آنگاه یک فلسفهٔ کاملاً نامگرایانه متولد خواهد شد.

در ادامه، پاتنم مدعی می‌شود که این هم‌ارزی میان نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق وجهی را می‌توان به سایر گزاره‌ها نیز تعمیم داد. چیزی که اگرچه وی استدلال متقنی برای آن ذکر نمی‌کند، اما بعدها و با اثبات قضیهٔ تمامیت حسابی سولوی[2] در ۱۹۷٦، باورپذیر می‌شود:

**قضیه ۲.** $GL \vdash A$ اگر و تنها اگر که به ازای هر ترجمه مانند $f$، $PA \vdash f(A)$.

در این قضیه، $GL$ همان منطق اثبات‌پذیریِ گزاره‌ای است که یک منطق وجهی محسوب می‌شود و بعد از گودل[3] و لُب[4] به این نام خوانده می‌شود. منظور از یک ترجمه[5]، تابعی مثل $f$ است که به هر گزاره از $GL$، گزاره‌ای از $PA$ را نسبت می‌دهد، به‌طوری که:

۱− $f(\bot) = \bot$؛

۲− تابع $f$ حافظ ادات منطقی است، یعنی مثلاً $f(A \supset B) = (f(A) \supset f(B))$؛

۳− $f(\Box A) = Pr(\ulcorner A \urcorner)$، که در آن $Pr$ همان محمول اثبات‌پذیری قضیهٔ گودل و $\ulcorner A \urcorner$ عدد گودلی $A$ است.

در حقیقت، این قضیه بخشی از همان ایدهٔ فلسفی پاتنم را به زبانی ریاضی اثبات می‌کند. چون این قضیه نوعی هم‌ارزی بین $GL$ و $PA$ را نشان می‌دهد و از آن‌جایی که می‌توان $PA$ را به بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل داد، پس این قضیه ابزاری ریاضی برای نشان دادن نوعی هم‌ارزی بین $GL$ به‌عنوان یک منطق وجهی و بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها در اختیار ما می‌گذارد[6].
این مطالب، استدلالات پاتنم را به منظور رد صلاحیت نامزدهای مختلف برای قرار گرفتن در جایگاه

1) formalism 2) Solovay's arithmetical completeness theorem 3) Gödel 4) Löb

۵) در متون مربوط به این موضوع گاهی به‌جای واژهٔ «ترجمه» یا "translation" از واژه‌های "realization" یا "interpretation" استفاده می‌شود.

٦) برای مطالعهٔ برهان دقیق این قضیه به (Smorynski 1995) و برای مطالعهٔ برخی مباحث فلسفی پیرامون این قضیه، به (Verbrugge 2003) مراجعه کنید.

بنیاد ریاضیات، تبیین می‌کند. در گام بعدی او تلاش می‌کند تا دیدگاه ایجابی خود را ارائه دهد. پیش از این‌که به تشریح دیدگاه ایجابی او بپردازیم، باید موانعی را که بر سر راه تحقق ایدهٔ ریاضیات بدون بنیادها سبز می‌شود، برطرف کنیم.

## ۴. برهان و صدق

*برهان* و از آن مهم‌تر، *صدق*، اصلی‌ترین مفاهیمی هستند که در مقابل کوچکترین تغییر موضع در فلسفهٔ ریاضیات، مقاومت می‌کنند و اگر این تغییر موضع به‌قدر کافی محتاطانه نباشد، ممکن است دردسرهایی بیافرینند. حال باید دید که آیا این دنیای جدید فلسفهٔ ریاضیات که پاتنم ما را به آن فراخوانده است تا چه حد در تقابل با تعابیر پذیرفته شده از این مفاهیم است. به نظر می‌رسد که دیدگاه او هیچ خللی به تعبیر معمول از برهان وارد نمی‌کند. تعبیر معمول از برهان یک گزاره، رشته‌ای متناهی از گزاره‌ها است که به آن گزاره ختم می‌شود و در آن هر گزاره، یا یکی از اصول است و یا با قواعد منطقی از گزاره‌های پیشین به‌دست آمده است. به نظر می‌رسد که با پذیرفتن هر یک از گزینه‌های موجود به‌عنوان بنیاد ریاضیات، خللی در این تعبیر ایجاد نمی‌شود و با هر انتخاب تنها صورت گزاره‌هایی که در این رشته‌ها قرار می‌گیرند، تغییر می‌کند. بنابراین با پذیرفتن ایدهٔ ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم نیز همچنان این تعبیر قابل قبول است؛ چرا که تنها نکتهٔ مهم در مورد برهان، تثبیت گزارهٔ مورد نظر است، حال از هر طریقی که ممکن باشد. البته اگر مفهوم برهان را در تقابل با صدق (یعنی مسألهٔ تمامیت[1]) بررسی کنیم، ممکن است مشکلاتی به‌وجود بیاید.

تحلیل مسألهٔ صدق به‌سادگی مسألهٔ برهان نیست به این دلیل که سازگار کردن ایدهٔ پاتنم با موجه‌ترین نظریهٔ صدقی که در اختیار داریم، یعنی نظریهٔ صدق تارسکی کار ساده‌ای نیست. بر اساس نظریهٔ صدق تارسکی، صدق گزاره‌ها با ارجاع به *جهانی* که این گزاره‌ها در توصیف آن جهان ذکر شده‌اند، تعیین می‌شود در حالی که با پذیرفتن ایدهٔ پاتنم عملاً ما هیچ جهانی از اشیاء ریاضی در اختیار نداریم تا با رجوع به آن، صدق و کذب گزاره‌های ریاضی را تعیین کنیم. مخالفان ایدهٔ پاتنم (مثلاً ضدواقع‌گرایان[2]، شهودگرایان[3] و همهٔ فیلسوفان دیگری که قانون طرد شق ثالث[4] را قبول ندارند) مدعی هستند که وقتی جهانی برای تحقیق در صدق و کذب گزاره‌های ریاضی در اختیار نداریم، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر عملاً *ارزش صدق*[5] خود را از دست می‌دهند و این مسأله‌ای فراتر از تصمیم‌ناپذیری است؛ چرا که مثلاً با پذیرش دیدگاه‌های واقع‌گرایانه[6] راجع به ریاضیات، ریاضی‌دانان معترف به وجود جهانی از اشیاء ریاضی‌اند که مستقل از معرفت ما وجود دارد و بنابراین حتی اگر ما نتوانیم بدانیم که فلان گزاره صادق است یا کاذب، باز هم این گزاره در آن جهان مستقل، یا متحقق است و یا نامتحقق و در نتیجه حتی اگر معرفتی نسبت به صدق یا کذب آن نداشته باشیم، ارزش

---

1) completeness 2) anti-realists 3) intuitionists 4) Law of Excluded Middle
5) truth value 6) realistic

صدق این گزاره هم‌چنان حفظ می‌شود. پاتنم اذعان می‌کند که اولاً این‌که ما نتوانیم ارزش صدق یک گزاره را درک کنیم به این معنا نیست که آن گزاره ارزش صدق ندارد و ثانیاً معتبر دانستن چنین استدلالی به این معنی است که «نوعی متافیزیک ایده‌آلیستی در پشت بوته‌ها[ی ذهنمان] مخفی شده است!» (Putnam 1967). به بیان دیگر، پاتنم از یک طرف، واقع‌گرایی در هستی‌شناسی[۱]، یعنی قول به وجود جهانی از هستی‌ها و اشیاء ریاضی (جهانی که مستقل از ما و معرفت ما نسبت به آن، وجود دارد) را با صراحت رد می‌کند و از طرف دیگر، خود را ملتزم به واقع‌گرایی در معناشناسی می‌کند. او بر این باور است که اگرچه هیچ جهانی از هستی‌ها و اشیاء ریاضیِ مستقل از ما وجود ندارد، گزاره‌های ریاضی معنادار هستند و می‌توان به نحو معناداری از صدق و کذب آن‌ها، مستقل از اذهان بشری، صحبت کرد[۲].

به عقیدهٔ پاتنم حتی با وجود قضایای گودل و اثبات وجود گزاره‌های مطلقاً تصمیم‌ناپذیر، عملاً ارزش صدق هیچ گزاره‌ای از دست نمی‌رود. در نظر او، ارزش صدق فرضیهٔ پیوستار به همان اندازه است که ارزش صدق ۴ = ۲ + ۲. وی به سؤال «اصلاً چه معنایی دارد که بگوییم فرضیهٔ پیوستار صادق است؟»، این چنین پاسخ می‌دهد: «معنایش این است که اگر $S$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد که نه متناهی است و نه نامتناهیِ شمارش‌پذیر، آنگاه $S$ می‌تواند در تناظر یک‌به‌یک با بازهٔ [۰, ۱] قرار بگیرد». پاسخ وی آن‌چنان طبیعی است که گویی هم‌چنان به تصویر نظریهٔ مجموعه‌ای از ریاضیات پای‌بند است؛ اما در حقیقت چنین نیست.

باید اذعان کرد که اگرچه پاتنم از تصویر نظریهٔ مجموعه‌ها که وصف ریاضیات به‌مثابهٔ اشیاء است، دست می‌کشد، هم‌چنان خود را متعهد به واقع‌گرایی در معناشناسی می‌داند و همهٔ گزاره‌های ریاضی را دارای ارزش صدق می‌داند. این مسأله وقتی روشن‌تر می‌شود که توجه کنیم او در تثبیتِ ارزش صدق برای گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر ریاضیات، از قیاس این گزاره‌ها با گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر علوم طبیعی بهره می‌برد. او اظهار می‌کند که هیچ‌کس در این‌که گزارهٔ «تعداد ستاره‌های دوقلو بی‌نهایت است» دارای ارزش صدق است، شک نمی‌کند در حالی که «می‌توان جهان منطقاً ممکنی را توصیف کرد که در آن (۱) تعداد ستاره‌های دوقلو بی‌نهایت باشد، و (۲) هرگز نتوان این واقعیت را [...] کشف کرد» (Putnam 1967). پاتنم با ذکر این جملات مدعی می‌شود که هیچ دلیلی برای متمایز دانستن شرایط گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر ریاضیات نسبت به گزاره‌های مشابه در علوم طبیعی وجود ندارد و همین قیاس کافی است تا باور کنیم که او نمی‌خواهد از واقع‌گرایی معناشناسانه دست بکشد. در حقیقت او می‌خواهد معناشناسی واقع‌گرایانهٔ جدیدی از ریاضیات ارائه دهد که صرفاً به وجود اشیاء ریاضی و واقع‌گرایی هستی‌شناسانه وابسته نباشد. حال باید دید که چنین چیزی

---

1) ontology

۲) برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص تمایز واقع‌گرایی در هستی‌شناسی و واقع‌گرایی در معناشناسی به (Landry 1998) مراجعه کنید.

ممکن است یا خیر. شاید قضاوت در مورد امکان تحقق ایده‌های پاتنم، بعد از تشریح دیدگاه‌های ایجابی او ساده‌تر باشد. اما پیش از تشریح این دیدگاه‌ها، خالی از لطف نیست که به نکتهٔ ظریفی توجه کنیم: چنان‌که دیدیم، در ریاضیات بدون بنیادها خللی در مفهوم برهان ایجاد نمی‌شود. این مسأله از آن جهت اهمیت دارد که با یکی دانستن مفهوم برهان و صدق (و تعریف گزارهٔ صادق به‌مثابهٔ گزاره‌ای که برهانی دارد، همانند شهودگرایان)، عملاً از همهٔ دردسرهایی که برای اعادهٔ حیثیتِ صدق در ریاضیات بدون بنیادها، با آن‌ها مواجهیم رهایی خواهیم یافت. البته باید متذکر شد که با اعتقاد به وحدت صدق و برهان، عملاً علاوه بر واقع‌گرایی در هستی‌شناسی، از واقع‌گرایی در معناشناسی هم دست کشیده‌ایم.

## ۵. دیدگاه ایجابی

پاتنم برای ارائهٔ ایدهٔ ایجابی خود از مسألهٔ جدلی الطرفین‌ها [۱] و پارادوکس‌های ریاضی آغاز می‌کند. وی مدعی است که اگرچه جدلی الطرفین‌ها در تقابل با مفهوم "مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها" قرار می‌گیرند، اما هیچ ضربه‌ای به مفهوم "مجموعهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح" نمی‌زنند. به‌علاوه از نظر او، این‌که بگوییم مفهوم مجموعه در بعضی عبارات (مثل "مجموعهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح") روشن است و در بعضی دیگر (مثل "مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها") مبهم، توجیه مناسبی برای این وضعیت نیست؛ چرا که ما عملاً معنای برخی عبارات دربارهٔ همهٔ مجموعه‌ها را، مثل اصل مجموعهٔ توانی یا اصل جفت‌سازی [۲] که در آن‌ها از هر مجموعه‌ای صحبت می‌شود، می‌فهمیم و همین می‌تواند ما را به فهمیدن مفهوم "همهٔ مجموعه‌ها" یا دست‌کم نیل به شهود نسبی از آن امیدوار کند. در مرحلهٔ بعد، پاتنم سعی می‌کند تا با تکیه بر ثنویت شیء ـ وجه، در صدد ایضاح مفهوم مجموعه برآید. در گذشته، برخی از ریاضی‌دانان و فلاسفهٔ ریاضی سعی کرده بودند تا از مفهوم مجموعه برای روشن کردن معنای امکان و ضرورت ریاضی استفاده کنند؛ مثلاً کارناپ در *معنا و ضرورت* [۳] سعی کرد تا با یکی گرفتن مفهوم مدل و جهان ممکن، نظام S5 از منطق وجهی را توجیه کند. حال پاتنم تلاش می‌کند تا عکس این مسیر را بپیماید و با خالی از ابهام فرض کردن مفاهیم ضرورت و امکان، تعبیری روشن از مفهوم مجموعه ارائه دهد. او مدعی است که در بعضی موارد، مفهوم مجموعه روشن‌تر از معنای ضرورت و امکان است حال آن‌که در موارد دیگر ضرورت و امکان از وضوح بیشتری نسبت به مفهوم مجموعه برخوردارند و درست به همین دلیل است که از منظر وصف‌های هم‌ارز امکانات بیشتری برای فهم امور در اختیار داریم و در حقیقت جمع همهٔ اطلاعاتی که از تصویرهای مختلف به‌دست می‌آوریم، اعتبار فهم ما را تعالی می‌بخشد. پاتنم تلاش می‌کند تا جملات نظریهٔ مجموعه‌ها را در زبان منطق وجهی به جملاتی تعبیر کند که *ضرورتاً آن‌طور می‌بودند اگر مدلی استاندارد برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود می‌داشت.*

---

1) antinomies 2) Axiom of Pairing 3) Meaning and Necessity

این توضیح لازم به نظر می‌رسد که در این‌جا بدون کم شدن از کلیت مسأله، صرفاً دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ــ فرنکل[1] یا همان $ZF$ بحث خواهیم کرد. اکنون باید کمی حوصله کنیم تا مقدمات فنی شرح دیدگاه پاتنم فراهم شود. در نظریهٔ مجموعه‌ها مفهومی تعریف شده است به‌نام رتبهٔ[2] مجموعه. اگر با استفاده از استقرای ترامتناهی[3] تعریف کنیم که

$$V_\alpha = \varnothing$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \qquad \text{اگر } \alpha \text{ یک عدد ترتیبی حدی باشد}$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

آنگاه قضیهٔ زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

**قضیه ۳.** به ازای هر مجموعه مانند $x$، عددی ترتیبی مانند $\alpha$ وجود دارد به‌طوری که $x$ عضوی از $V_\alpha$ است[4].

قضیهٔ بالا خوش‌تعریفی مفهوم رتبه را تضمین می‌کند. پاتنم می‌خواهد با تکیه بر مفهوم رتبه، مدل‌هایی انضمامی[5] برای $ZF$ ارائه دهد. به همین منظور، هر مدل را به‌شکل یک گراف طراحی می‌کند. در یک گراف، رأس‌ها به‌مثابهٔ مجموعه‌ها تعبیر می‌شوند البته با این فرض که محدودیت فضایی برای تعداد رأس‌ها به اندازهٔ اعداد اصلی[6] بزرگتر از عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی هم، وجود ندارد. در این گراف، یال‌های جهتدار بین رأس‌ها، نمایندهٔ رابطهٔ تعلق بین مجموعه‌هایی است که رأس‌های گراف، جانشین آن‌ها شده‌اند. چنین مدلی *مدل انضمامی* یا *مدل انضمامی استاندارد* نامیده می‌شود. به یک مدل وقتی استاندارد می‌گوییم که (۱) در گراف آن هیچ دنباله‌ای نزولی و نامتناهی از یال‌های جهتدار وجود نداشته باشد و (۲) توسیع مدل با افزایش تعداد مجموعه‌ها و بدون افزایش در حداکثر رتبهٔ آن‌ها ممکن نباشد. اکنون باید سعی کنیم که گزاره‌های نظریهٔ مجموعه‌ها را در این مدل تعبیر کنیم. یک گزاره را *گزاره‌ای با رتبهٔ کراندار* یا به‌طور خلاصه *گزارهٔ کراندار* می‌نامیم اگر این گزاره تنها از مجموعه‌هایی صحبت کند که رتبهٔ آن‌ها از عدد ترتیبی معینی بیشتر نباشد. این عدد ترتیبی را می‌توان تلویحاً کران بالایی برای این گزاره نامید. حالا اگر (بدون اثبات) بپذیریم که می‌توان گزارهٔ «گراف $G$ مدلی استاندارد برای $ZF$ است» را با نمادهای کاملاً نامگرایانه (به‌جز "$\Box$" که آن هم چندان دردسرساز نخواهد بود) توصیف کرد، در این صورت مانع دیگری بر سر راه تعبیر جملات نظریهٔ مجموعه‌ها در مدل‌های انضمامی نیست. اگر $S$ گزاره‌ای با رتبهٔ کراندار باشد و بتوانیم کران بالایی برای آن پیدا کنیم که نسبت به مدل‌های استاندارد $ZF$ ناوردا باشد، آنگاه $S$ به‌راحتی قابل ترجمه به زبان منطق وجهی است. ترجمهٔ $S$ در زبان منطق وجهی چنین خواهد بود: «اگر $G$

1) Zermelo-Fraenkel 2) rank 3) transfinite induction

۴) برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه، به صفحات ۷۱ و ۷۲ از (Jech 1997) مراجعه کنید.

5) concrete 6) cardinal

یک مدل استاندارد انضمامی برای $ZF$ و شامل رتبهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه $S$ ضرورتاً در $G$ برقرار است». بنابراین، تنها مشکل ما ترجمهٔ گزاره‌های با رتبهٔ بی‌کران یا به‌طور خلاصه گزاره‌های بی‌کران، به زبان منطق وجهی است. برای تشریح روشی که در ترجمهٔ این جملات به‌کار می‌بریم، به بازخوانی مثالی که خود پاتنم ارائه کرده است، اکتفا می‌کنیم. گزارهٔ $\forall x\, \exists y\, \forall z\, Mxyz$ را در نظر بگیرید که در آن $M$ فاقد سور است. ترجمهٔ این گزاره به زبان منطق وجهی و با استفاده از مدل‌های انضمامی چنین است:

«اگر $G$ یک مدل استاندارد انضمامی برای $ZF$ و $x$ نقطه‌ای دلخواه از آن باشد، آنگاه ممکن است که ابرگراف $G'$ برای $G$ و نقطه‌ای مانند $y$ در درون آن موجود باشد به‌طوری که $G'$ یک مدل استاندارد انضمامی برای $ZF$ بشود. افزون بر این، اگر $G''$ ابرگراف $G'$ و یک مدل استاندارد انضمامی برای $ZF$ باشد، آنگاه به‌ازای هر نقطه‌ای از آن مانند $z$، $Mxyz$ *ضرورتاً* در $G''$ برقرار است».

اگرچه این ترجمه چندان ساده نیست، به‌سادگی قابل تعمیم به همهٔ گزاره‌های بی‌کران است. بنابراین، با این ترجمه، مقصود پاتنم برآورده شده است. از آن‌جایی که هیچ مدل انضمامی استاندارد ماکسیمالی وجود ندارد و هر مدلی از این نوع را می‌توان توسیع داد، ترجمهٔ وی شهود مطلوبی از گزاره‌هایی راجع به "همهٔ مجموعه‌ها" در اختیار ما می‌گذارد. به بیان دیگر، با ترجمهٔ پاتنم دیگر نیازی نیست که به مجموعه‌ها به‌عنوان اشیایی در یک جهان نگاه کنیم تا بتوانیم گزاره‌هایی در مورد "همهٔ مجموعه‌ها" را —دست‌کم به‌طور شهودی— ادراک کنیم. اگر سؤال کنید که پارادوکس راسل در این‌جا چگونه تعبیر می‌شود، در جواب باید گفت که معنای پارادوکس راسل در تعبیر پاتنم برای مدل‌های انضمامی، این است که هیچ مدل استاندارد انضمامی‌ای برای مفهوم همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد و هر مدلی قابل توسیع به مدلی با مجموعه‌های بیشتر است.

با تعبیر پاتنم، گزاره‌هایی که در مورد مجموعه‌ها صحبت می‌کنند به گزاره‌هایی ترجمه شده‌اند که از مدل‌های انضمامی استاندارد صحبت می‌کنند. حال از آن‌جایی که می‌توان این مدل‌های انضمامی ممکن و یا حتی وسیع‌تر از آن، جهان‌های ممکن، را به‌صورت اشیاء تعبیر نکرد، در حقیقت گزاره‌های اولیهٔ ما به گزاره‌هایی ترجمه می‌شوند که در آن‌ها صحبت از هیچ شیئی به میان نیامده است. در این‌جا پاتنم با تکیه بر ثنویت شیء ـ وجه در ریاضیات، از منظر وجه به اشیاء نگاه کرده است و عادت پیشینیان در نگاه کردن از منظر شیء به وجه را قلب کرده است. به بیان دیگر، بدون دست کشیدن از واقع‌گرایی معناشناسانه، از اشیاء دست کشیده است. حال باید دید که در عوض پرداخت این بهای سنگین، چه به‌دست می‌آید و چه معضلاتی در فلسفهٔ ریاضی حل می‌شوند.

## ۶ . مؤخره

در بخش پایانی این مقاله، به بررسی چگونگی مواجهٔ ایدهٔ *ریاضیات بدون بنیادهای* پاتنم با برخی مسائل مورد مطالعهٔ دیگر فلاسفهٔ ریاضی خواهیم پرداخت. افزون بر این، به‌اختصار تأثیرات

دیدگاه او بر تحقیقات و آرای برخی فلاسفهٔ متأخر را شرح خواهیم داد.

شاید بتوان گفت که یکی از انگیزه‌های اصلی پاتنم برای نگارش مقالهٔ *ریاضیات بدون بنیادها* پاسخ به سؤالی بوده است که پال بناسراف[1] در سال ۱۹٦۵ و در مقالهٔ *آن‌چه اعداد نمی‌توانند باشند* (Benacerraf 1965)، طرح کرده بود. در آن مقاله، بناسراف ضمن امتناع از پذیرش تلقی نامگرایانه نسبت به اعداد، سؤال می‌کند که اگر تنها ویژگی اعداد، ترتیب آن‌ها در یک $\omega$ ـ دنبالهٔ مشخص است، آنگاه چگونه ممکن است که آن‌ها شیء باشند؟ پاتنم برای پاسخ به این سؤال از همان تعبیر وصف‌های هم‌ارز سود می‌جوید و به تبعیت از کواین، اظهار می‌کند که «اعداد شیء هستند به این معنی که عمل تسویر روی آن‌ها انجام می‌شود». پاتنم معتقد است که اعداد وجود دارند، اما وجود را با تکیه بر همان دیدگاه ثنویت شیء ـ وجه تعبیر می‌کند و می‌گوید که معنای وجود اعداد چیزی جز این نیست که اولاً $\omega$ ـ دنباله‌ها ممکن هستند و ثانیاً حقایقی *ضروری* به‌شکل «اگر $\alpha$ یک $\omega$ ـ دنباله باشد، آنگاه...» در مورد آن‌ها وجود دارد. پاتنم با در نظر گرفتن همین تعبیر و پافشاری بر ثنویت شیء ـ وجه، دو گزارهٔ «مجموعه‌ای از اعداد وجود دارد که در فلان شرط صدق می‌کنند» و «انتخاب اعدادی که شرط فلان را ارضا کنند، ممکن است» را هم‌معنی می‌داند.

نکتهٔ دومی که پاتنم در معنای وجود اعداد از آن یاد می‌کند (یعنی این‌که حقایقی ضروری به‌شکل «اگر $\alpha$ یک $\omega$ ـ دنباله باشد، آنگاه...» وجود دارد)، در حقیقت بنیان همان دیدگاهی است که به دیدگاه *اگر ـ آنگاهی*[2] معروف است. در حقیقت پاتنم برای هم‌ارز کردن وجود اشیاء با وجوه ضرورت یا امکان، چه در تعبیری که از اعداد دارد و چه در تعبیر گزاره‌های نظریهٔ مجموعه‌ها به زبان منطق وجهی (چنان که دیدیم)، از دیدگاه اگر ـ آنگاهی بهره می‌برد. وی از یک سو با دیدگاه اگر ـ آنگاهی، اصالت اشیاء را سلب می‌کند و از سوی دیگر با تکیه بر ثنویت شیء ـ وجه، مُصر است که شیئیت[3] یا به تعبیر دقیق‌تر عینیت را حفظ کند. او باور دارد که «شیئیت یا عینیت بدون شیء» قابل تحقق است (Putnam 2004).

چند سال پس از ارائهٔ مقالهٔ *ریاضیات بدون بنیادها*، بناسراف در ۲۷ دسامبر سال ۱۹۷۳ و در همایش به‌نام *صدق ریاضی* که از طرف انجمن فلسفی آمریکا[4] و انجمن منطق نمادی[5] برگزار می‌شد، سخنرانی چالش‌برانگیزی کرد. او در آن سخنرانی[6] سؤال مهم دیگری، این‌بار در خصوص صدق و معرفت ریاضی، طرح کرد. با توجه به اهمیت این سؤال، خالی از لطف نیست که نگاهی به پاسخ پروژهٔ ریاضیات بدون بنیادها در قبال این سؤال، بیاندازیم. پس اجازه دهید تا ببینیم که سؤال بناسراف چه بوده است:

بسیاری از فلاسفهٔ ریاضیات معتقدند که معناشناسی گزاره‌های ریاضی باید همگن با معناشناسی سایر گزاره‌ها باشد. از سوی دیگر، اکثر این افراد بر این باورند که تعبیر ما از صدق ریاضی باید

1) Paul Benacerraf 2) If-Thenism 3) objectivity 4) American Philosophical Association
5) Association for Symbolic Logic

٦) ناگفته نماند که طرح ابتدایی این سؤال در سخنرانی‌های گذشتهٔ بناسراف در دههٔ ۱۹٦۰ انجام شده بود.

توجیه‌کنندهٔ چگونگی معرفت ما از گزاره‌های ریاضی نیز باشد. بناسراف در سخنرانی مذکور مدعی شد که این دو تمایل قابل جمع در کنار هم نیستند و هرقدر که به ارضای یکی از آن دو نزدیک شویم، امکان ارضای دیگری کمتر خواهد شد. غایت کلام او این است که بهترین نظریهٔ صدقی که در اختیار داریم یعنی نظریهٔ صدق تارسکی[1]، با بهترین نظریهٔ معرفتی که در اختیار داریم یعنی نظریهٔ علّی معرفت[2] (Goldman 1967) سازگار نیست؛ حال آن‌که اگر بخواهیم صدق اشیاء ریاضی همگن با صدق سایر اشیاء و چگونگی معرفت به گزاره‌های ریاضی همگن با چگونگی معرفت به سایر گزاره‌ها تعبیر شود، چاره‌ای جز پذیرفتن این دو نظریه نداریم. نظریهٔ صدق تارسکی شرایط صدق گزاره‌های ریاضی را برحسب تحقق یک امر در میان اشیایی به‌دست می‌دهد که ماهیت آن اشیاء، آن‌ها را فراتر از دسترس متداول‌ترین ابزارهای کسب معرفت ما (یعنی حواس) می‌برد و این چیزی است که با نظریهٔ علی معرفت در تضاد است. دقیقاً به همین دلیل تعابیر کلاسیک مدل‌ها از اعداد و مجموعه‌ها (که در حقیقت بقایای افلاطون‌گرایی است) توجیه کنندهٔ چگونگی معرفت ما از اشیاء ریاضی نیستند. خود گلدمن که مبدع نظریهٔ علّی معرفت است هم تصریح دارد که آنچه می‌گوید ربطی به ریاضیات ندارد و در واقع به‌طور ضمنی معترف است که اگر نظریهٔ او قابل دفاع باشد، معرفت ریاضی با سایر معارف بشری همگن نیست.

روشن است که برای حل این معضل و به حصر عقلی، تنها سه راه پیش رو داریم: اصلاح در نظریه‌ی صدق تارسکی، اصلاح در نظریهٔ علّی معرفت و یا اصلاح در هر دوی آن‌ها. برخی از فلاسفهٔ ریاضی حاضر به دست کشیدن از نظریهٔ صدق کلاسیک نشده‌اند و به‌ناچار نظریهٔ معرفت‌شناسی خود را تغییر داده‌اند. نظریات گودل نمودار کاملی از ذبح نظریهٔ علّی معرفت به پای افلاطون‌گرایی است. گودل به هیچ وجه از این‌که اعداد شیء هستند عدول نمی‌کند و در عوض، قوهٔ *شهود گودلی* را عامل و علت معرفت به اشیاء ریاضی (اشیایی که در دسترس حواس نیستند) می‌داند. شهودی که ابهام در آن، به‌قدری است که امیدی به حل مسألهٔ بناسراف از طریق آن نداشته باشیم. راه دیگری که برای حل مسأله‌ی بناسراف پیش رو داریم، تغییر در نظریهٔ صدق مورد پذیرش خود است. برخی فلاسفهٔ ریاضیات به تعریف صدق بر اساس ملاحظات نحوشناختی[3] روی آورده‌اند و دیدگاه‌هایی ارائه کرده‌اند که بناسراف آن‌ها را دیدگاه‌های ترکیبی[4] می‌نامد. در این دیدگاه‌ها، تعابیر صدق با برخی معیارهای نحوشناختی که عمدتاً ریشه در تعبیر نحوی برهان دارند در هم آمیخته می‌شود. این توضیح لازم به نظر می‌رسد که شهودگرایان نیز با تعبیر صدق به‌مثابهٔ برهان داشتن، عملاً با مسألهٔ بناسراف موجه نیستند، با این تفاوت که در منظر آنان اساساً زبان امری ثانوی است (اردشیر ۱۳۷۶) و بنابراین نمی‌توان گفت که دیدگاه آن‌ها در خصوص صدق، آمیخته‌ای از نحو را به همراه خود دارد.

---

1) Tarski's Theory of Truth 2) Causal Theory of Knowledge 3) syntactic 4) combinatorial

حال ببینیم که دیدگاه ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم، چه جوابی برای مسألهٔ بناسراف دارد. بناسراف در مقالهٔ *صدق ریاضی* می‌گوید که راه دیگری هم در مواجهه با این شکاف معرفت‌شناختی[1] وجود دارد. این راه، تعریف معناشناسی جدیدی برای گزاره‌های ریاضی است به‌گونه‌ای که این معناشناسی جدید مبتنی بر ملاحظات معرفت‌شناختی تعریف شده باشد. اگرچه بناسراف تصریح می‌کند که بسیار بعید است کسی تاکنون عملاً پای در این راه گذاشته باشد اما در (پانوشت) آن مقاله چنین آورده است: «گاهی گمان می‌کنم که این [یعنی تعریف معناشناسی جدید مبتنی بر ملاحظات معرفت‌شناختی]، همان کاری است که پاتنم در مقالهٔ بحث برانگیز *ریاضیات بدون بنیادها* می‌خواهد بکند» (Benacerraf 1973). تعبیر تردیدآمیز بناسراف در خصوص کار پاتنم، چندان هم بیراه به نظر نمی‌رسد. پاتنم از یک سو با ثنویت شیء ــ وجه بر آرمان‌های واقع‌گرایانهٔ خود پافشاری می‌کند و از سوی دیگر، با ارائهٔ معناشناسی جدید از گزاره‌های ریاضی مبتنی بر مدل‌های انضمامی استاندارد و دیدگاه اگر ـ آنگاهی، سعی در حل مسألهٔ بناسراف و گذشتن از این شکاف معرفت‌شناختی دارد.

در انتها مناسب است که با نگاهی اجمالی به بررسی تأثیر ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم بر متأخرین بپردازیم. برجس[2] و روزن[3] در کتاب مشهور خود (*موضوعی بلا شیء*)، کار پاتنم در *ریاضیات بدون بنیادها* را کاری کاملاً نامگرایانه تعبیر می‌کنند. نامگرایی برنامه‌ای در ریاضیات و بیشتر در فلسفهٔ ریاضیات است که با تشکیک در وجود هویات مجرد آغاز می‌شود و درصدد بنای ریاضیاتی بر می‌آید که از هرگونه تعهد وجودشناسانه نسبت به این هویات اجتناب کند (پارسونز ۱۳۷۸). برجس و روزن اگرچه تأکید می‌کنند که کار پاتنم کاملاً نامگرایانه است، معتقدند که «پاتنم در مقالهٔ خود، نظریهٔ بازساختی‌اش را نامگرایانه نمی‌داند؛ چرا که او نامگرایی را شامل نفی وجه [ضرورت و امکان] درست به‌شکل نفی شیء مجرد، می‌داند» (Burgess & Rosen 1997;201). حال آن‌که به عقیدهٔ آن‌ها، تعبیر ادعاهای وجودی در مورد اعداد به‌صورت ادعاهایی دربارهٔ وجود ممکن، یعنی همان کاری که پاتنم کرده است، تعبیر نامگرایانه‌ای از حساب براساس منطق وجهی است. چیهارا[4] همین کار را در مورد آنالیز محمولی کرده و به موفقیت‌هایی هم دست یافته است. نمونهٔ دیگری از استفادهٔ این ایده برای طرح تعابیر نامگرایانه از ریاضیات، در کارهای هلمن[5] دیده می‌شود[6]. خلاصه این که نمود تأثیرات عمدهٔ کار پاتنم بر فلاسفهٔ ریاضی را باید در میان نامگرایان جست.

---

1) epistemological gap 2) John P. Burgess 3) Gideon Rosen 4) Charles S. Chihara
5) Geoffrey Hellman

٦) فصل دوم از (Burgess & Rosen 1997) به شرح دیدگاه‌های چیهارا و هلمن، با تکیهٔ بیشتر بر دو کتاب (Chihara 1990) و (Hellman 1994) اختصاص دارد.

## قدردانی

نسخهٔ ابتدایی این مقاله در روز ۷ اسفند ۱۳۸۴ در *سمینار دو روزهٔ فلسفهٔ ریاضی* در *مؤسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران* ارائه شد. مقالهٔ حاضر تکمیل‌شدهٔ همان نسخهٔ اولیه با بهره‌مندی از تذکرات داور(ان) محترم مجلهٔ *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی* و نیز با بهره‌مندی از گفت‌وگوهایی است که با دکتر محمد اردشیر، دکتر ضیاء موحد، بهرام اسدیان و کاوه قاسملو داشته‌ام. از همهٔ ایشان سپاسگزارم.

## مراجع

[۱] اردشیر، محمد، "شهودگرایی براوئری"، *نشر ریاضی*، سال ۹، شمارهٔ ۱ (۱۳۷۶).

[۲] اردشیر، محمد، *منطق ریاضی*، انتشارات هرمس، ۱۳۸۳.

[۳] پارسونز، چارلز، "موضوعی بلا شیء" [نقدی بر (Burgess & Rosen 1997)]، ترجمهٔ محمد اردشیر، *نشر ریاضی*، سال ۱۱، شماره ۱ (۱۳۷۸).

[۴] کواین، ویلرد ون اورمن، "در باب آنچه هست"، ترجمهٔ منوچهر بدیعی، مجله *ارغنون*، شماره‌های ۷ و ۸، چاپ دوم، صص ۲۴۹ – ۲۳۱ (۱۳۸٦).

[۵] لاجوردی، کاوه و اردشیر، محمد، "مناظره‌ای دربارهٔ فلسفهٔ براوئر"، *نشر ریاضی*، سال ۱۷، شماره ۲، صص ٦۰ – ۵۷ (۱۳۸۸).

[6] Benacerraf, Paul, "What Numbers Could Not Be", *The Philosophical Review*, **74** (1965), No. 1, 47–73.

[7] Benacerraf, Paul, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, **70** (1973), No. 19, 661–679.

[8] Burgess, John P. and Rosen, Gideon, *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

[9] Chihara, Charles S., *Constructability and Mathematical Existence*, Oxford University Press, 1990.

[10] Goldman, Alvin, "A Causal Theory of Knowing", *The Journal of Philosophy*, **64** (1967), No. 12, 357–372.

[11] Hart, W. D., "Skolem Redux", *Notre Dame Journal of Philosophy*, **41** (2000), No. 4, 399–414.

[12] Hellman, Geoffrey, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford University Press, 1994.

[13] Jech, Thomas, *Set Theory*, 2nd Ed, Springer–Verlag, 1997.

[14] Landry, Elaine, "Semantic Realism: Why Mathematicians Mean What They Say?", *Proceedings of The Twentieth Word Congress of Philosophy*, Boston, 1998, web: http://www.bu.edu/wcp/MainMath.htm/

[15] Putnam, Hilary, "Mathematics without Foundations", *Journal of Philosophy*, **64** (1967), No. 1, 5–22.

[16] Putnam, Hilary, "Objectivity without Objects", pp. 52–70 in *Ethics without Ontology*, Harvard University Press, 2004.

[17] Smorynski, Craig, *Self-reference and Modal Logic*, New York, Springer–Verlag, 1995.

[18] Verbrugge, Rineke, "Provability Logic", Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2003, web: http://www.illc.uva.nl/~seop/entries/logic-provability/

محمدصالح زارع پور zarepour@modares.ac.ir و ms_zarepour@yahoo.com
دانشگاه تربیت مدرس
دانشکدهٔ علوم انسانی، گروه فلسفه