فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۱۷ تا ۳۱

انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (قسمت دوم)

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرحی تاریخی ـ توصیفی از شکل‌گیری و تکامل مفهوم انتگرال از ابتدا تا زمان لبگ ارائه می‌کنیم. همچنین با تمرکز بر روی برخی جنبه‌های خاص نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ و با ارائه مثال‌هایی، به برخی کاستی‌های این دو نظریهٔ انتگرال‌گیری اشاره خواهیم کرد.

۶. به‌سوی چارچوبی نظریه ـ اندازه‌ای برای انتگرال ریمان

اشاره کردیم که هانکل، یکی از شاگردان ریمان، در سال ۱۸۷۰ به‌دنبال شرایط لازم و کافیی بود که انتگرال‌پذیری تابع مثال ریمان را مستقیماً بررسی کند. در این راستا، او مجموعهٔ نقاطی را که جهش‌های تابع در آن‌ها بزرگ‌تر از عدد مثبت δ است، S_δ، مورد مطالعه قرار داد. هانکل می‌پنداشت ثابت کرده است که تابع کراندار f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\delta > 0$، S_δ هیچ‌جا چگال باشد. لذا این قضیه، حدس دیریکله را تصدیق می‌کرد بدین مضمون که اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی یک تابع کراندار، هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه تابع انتگرال‌پذیر است. اما قضیهٔ هانکل به‌طور یک طرفه برقرار است، یعنی اگر f انتگرال‌پذیر باشد، برای هر $\delta > 0$، $c_e(S_\delta) = 0$ و لذا برای هر $\delta > 0$، S_δ هیچ‌جا چگال است (در اینجا c_e محتوای بیرونی است که بعداً تعریف می‌کنیم). عکس این مطلب برقرار نیست. در بررسی جهت عکس، وی نشان داد که هر مجموعهٔ هیچ‌جا چگال را می‌توان در تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک قرار داد و می‌پنداشت یک معیار به‌اصطلاحِ امروزی ما، توپولوژیک، برای انتگرال‌پذیری برحسب S_δ به‌دست آورده است و لذا دیگر نیازی به پروراندن مشخصه‌سازی نظریهٔ اندازه‌ای نیست. اما اثباتش درست نبود. در واقع، مشکل اینجا بود که تفاوت پوچ بودنِ توپولوژیکی و نظریهٔ اندازه‌ای روشن نشده بود، زیرا در ۱۸۷۰ هنوز ابزارهای کنونیِ نظریهٔ مجموعه‌ها ابداع نشده بود و برهان‌هایی که به مجموعه‌های

بی‌پایان از نقاط مربوط می‌شد اغلب بسیار خام، ابتدایی و غیردقیق بودند ([9]).

مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ را اندازه (محتوا) ــ صفر می‌نامیم اگر آن را بتوان با تعداد شمارا (متناهی) از بازه‌ها با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشاند. هانکل فکر می‌کرد مجموعه‌های به‌لحاظ توپولوژیکی کوچک (هیچ‌جا چگال) به‌مفهوم نظریهٔ اندازه‌ای نیز کوچک (اندازه ــ صفر) هستند و به‌عکس. اما این طور نیست، زیرا بعداً مجموعه‌هایی کشف شدند که هیچ‌جا چگال ولی با اندازهٔ مثبت هستند.

ورود گئورگ کانتور (۱۹۱۸ ــ ۱۸۴۵) به صحنه با تحقیقاتش در نظریهٔ مجموعه‌ها که ریشه در مطالعات مربوط به سری‌های فوریه داشتند، به سردرگمی مذکور افزود. کانتور در سال ۱۸۶۷ از رساله دکتری خود در نظریهٔ اعداد دفاع کرد. پس از دریافت مدرک استادی، به آنالیز روی آورد و به دانشگاه هاله که ادوارد هاینه در آنجا بود و روی سری‌های مثلثاتی کار می‌کرد، رفت. هاینه استعداد فوق‌العادهٔ کانتور را تشخیص داد و به وی پیشنهاد کرد روی یکی از مسائل مهم آنالیز قرن نوزدهم کار کند. هاینه خود مشغول چنین کاری بود، یعنی کار روی مسألهٔ یکتایی ضرایب سری‌های فوریه. کانتور یکی از قضایای هاینه در این باره را با افزودن شرطی برحسب نقطهٔ انباشتگی یک مجموعهٔ بی‌پایان، گسترش داد. در کار بعدی که در سال ۱۸۷۲ در این باره منتشر ساخت، یک بخش مقدماتی به آن مبحث افزود که به نوشتهٔ خودش «در اغلب وضعیت‌هایی که یک تعداد متناهی یا نامتناهی از کمیت‌های عددی داده شده است، پیش می‌آید». مفهوم‌های نقطهٔ حدی و مجموعهٔ مشتق در بحث او اهمیت اساسی دارند. گرچه مفهوم نقطهٔ حدی یک مجموعه را اولین بار کانتور در سال ۱۸۷۲ منتشر کرد و برای آن، واژهٔ «Grenzpunkt» را به‌کار برد، وایرشتراس آن را ابداع کرده بود. این مفهوم در بیان او از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس به‌کار گرفته شده است. بد نیست توجه کنیم که قضیهٔ مذکور در هیچ نوشته‌ای از بولتسانو ظاهر نشده است. آنچه در کارهای بولتسانو دیده می‌شود، روش نصف کردن بازه‌ها است که در اثبات وایرشتراس از این قضیه، به‌کار رفته است. نقطهٔ حدی در ایتالیا نیز با انتشار کتاب اولیسّه دینی در سال ۱۸۷۸ رواج یافت. دینی در آن کتاب، صورت دقیق‌تری از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس را بیان و اثبات کرد. همچنین برای اولین بار نشان داد که هر مجموعهٔ نوع اول، محتوای صفر دارد.

کانتور مجموعهٔ P را از نوع νام نامگذاری کرد اگر مجموعهٔ مشتق $(\nu + ۱)$ام آن، $P^{(\nu+۱)}$، تهی باشد. سپس برحسب این مفاهیم، قضیه‌ای دربارهٔ منحصربه‌فرد بودن ضرایب سری‌های فوریه عرضه کرد. کانتور مجموعهٔ E را که $E^{(n)} = \{۰\}$، به‌ازای یک n، مجموعه‌ای از نوع اول نامید. او دریافت که برخی خواصِ مجموعه‌های متناهی به‌استقرا، برای مجموعه‌های نوع اول نیز برقرار است. به‌سادگی دیده می‌شود مجموعه‌های نوع اول هیچ‌جا چگال هستند و با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند. بنابراین برای این دسته از مجموعه‌ها، دو مفهوم پوچی توپولوژیکی و نظریهٔ اندازه‌ای، یکسان است. بسیاری از ریاضیدانان می‌پنداشتند مجموعه‌های نوع اول، تنها مجموعه‌های هیچ‌جا چگال هستند. لذا مجموعهٔ هیچ‌جا چگال باید به‌لحاظ نظریهٔ اندازه

نیز پوچ باشند. به‌نظر می‌رسد اولین مثال نقض را هنری جی. استفان اسمیت در سال ۱۸۷۵ عرضه کرده است. مثال‌های دیگری نیز ساخته شده‌اند که همگی از یک ساختار کلی پیروی می‌کنند. اسمیت به تحلیل برهان هانکل می‌پردازد و اشاره می‌کند که برهان فقط برای مجموعه‌های متناهی، پذیرفتنی است. نه اسمیت و نه معاصرانش اهمیت مثال را درک نکردند. اما در آلمان مثال ولترا و اسمیت هر دو شناخته شده بودند و در ابتدای قرن هجدهم پیشرفت‌هایی در شرف وقوع بود.

علاوه بر پال دوبوا ــ ریموند که در سال‌های ۱۸۸۰ و ۱۸۸۲ اهمیت مثال‌ها را متذکر شده بود، باید به نقش آکسل هارناک (۱۸۰۵ ــ ۱۸۸۸) نیز اشاره کنیم. هارناک در ابتدا به مسألهٔ سری‌های مثلثاتی و نمایش‌پذیری توابع دلخواه علاقه‌مند بود و در یکی از کارهایش در سال ۱۸۸۰ تحت تأثیر تأکید وایرشتراس بر مسألهٔ همگرایی یکنواخت، به موضوع نمایش‌پذیری توابع می‌پردازد و به اهمیت مجموعهٔ نقاطی که با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند، اشاره می‌کند. پرسش اصلی هارناک این بود که آیا متمم اجتماع شمارا از بازه‌ها برابر اجتماع شمارایی از بازه‌هاست؟ پاسخ او مثبت بود که البته اشتباه است.

در کار هارناک نیز در ابتدا قدری سردرگمی رایج دربارهٔ این مفاهیم را می‌بینیم. لیکن او بر این مشکلات فائق آمد به‌طوری که در کتاب درسی که دربارهٔ ریاضیات می‌نویسد شاهد تعریف دقیق مفاهیم هستیم. در آنجا به مجموعهٔ ناپیوستگی‌های توابع در مبحث انتگرال می‌پردازد و دو دسته مجموعه را در این باره از هم تمیز می‌دهد. اما باید مطلب دیگری دربارهٔ هارناک اضافه کنیم و آن این که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۵ اشاره می‌کند که در تعریفِ، به‌اصطلاح امروزی، مجموعهٔ با محتوای صفر (یا مجموعهٔ گسسته به‌اصطلاح هارناک) محدودیت تعداد متناهی بازه وجود دارد و برای اجتناب از سوء تفاهم باید گفت که هر مجموعهٔ شمارا دارای این خاصیت است که می‌توان آن را با بازه‌هایی که مجموع طول آن‌ها به‌دلخواه کوچک است پوشاند. او مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $[0, 1]$ را مثال می‌زند که با بازه‌های مجزا از هم با طول ϵ_i، $i \in \mathbb{N}$، پوشیده شود که $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \delta$ و $\delta > 0$ دلخواه است. لذا اگر خود را به تعداد متناهی بازه مقید نکنیم، مجموعه‌های به‌لحاظ توپولوژیکی بزرگ (مثل مجموعه‌های چگال) ممکن است به‌لحاظ نظریهٔ اندازه‌ای کوچک باشند. برای کانتور هم عجیب بود که با محتوای بیرونی که او معرفی کرده بود، محتوای مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $[0, 1]$ برابر ۱ می‌شد و نه صفر؛ در حالی که همین مجموعه در مطالعاتش دربارهٔ مجموعه‌های شمارا قابل صرف‌نظر کردن بود. بنابراین حذف محدودیت تعداد متناهی بازه به نتایج عجیبی می‌انجامید. سپس این پرسش مطرح شد که اندازهٔ مجموعهٔ شمارا چیست؟ کانتور مسأله را در حالت n ــ بعدی نیز بررسی کرد، اما از طرف جامعهٔ ریاضی چندان اقبالی نیافت.

کشف مجموعه‌ای با بزرگی صفر، منجر به مفهوم اندازهٔ یک مجموعه شد. اندازه را با پوشاندن مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ مجموعه‌های مقدماتی که طول، مساحت، ... آن‌ها شناخته شده بود و در دسترس بودند تعریف کردند. اما اولین کسی که به‌طور صریح تعریفی از محتوی بیرونی ارائه کرد، اوتو شتولتس (۱۸۴۲ ــ ۱۹۰۵) است. او در ضمن کار روی مسألهٔ تعریف طول خم، متوجه شد که

حجم و مساحت باید برحسب انتگرال تعریف شوند. مستقل از او، کانتور نیز در سال ۱۸۸۳ برای محتوا، تعریفی بر اساس انتگرال چندگانه ارائه کرد. کمی بعد نیز هارناک در سال ۱۸۸۴ تعریف معادلی آورد. ولی نظریهٔ انتگرال چندگانه تا قبل از ژُردان، به هیچ وجه دقت منطقی نداشت. واژهٔ محتوا را کانتور به‌کار برد. تمایز بین محتوای درونی و بیرونی را پئانو در ۱۸۸۷ بیان کرد و با انتشار کتاب دوره‌ای در آنالیز ژُردان این مفاهیم رواج عام یافتند. به این ترتیب، با کارهای هانکل، کانتور و دیگران در مشخص کردن ارتباط خواص مجموعه‌های نقاط و انتگرال‌پذیری توابع، چهارده سال بعد از مقالهٔ ریمان، عناصر نظریهٔ اندازه‌ای مخفی در محک انتگرال‌پذیری ریمان، مفهوم‌سازی شدند.

جوزپّه پئانو (۱۸۵۸ ــ ۱۹۳۲) که در دانشگاه تورین تحصیل و تدریس کرده بود، در سال ۱۸۸۳ انتگرال بالایی و پایینی داربو را که ولترا ابداع کرده بود، به‌منظور ارائه برهان‌های ساده‌تر برای برخی قضایای ریمان به‌کار گرفت. وی جزء اولین کسانی بود که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۳، تعریف دقیقی از درون و مرز یک مجموعه عرضه کرد. همچنین از تعریف انتگرال بر اساس مفهوم مساحت ناخرسند بود، زیرا تعریف مساحت نیز از دقت کافی برخوردار نبود. به همین دلیل، در سال ۱۸۸۳ میلادی سعی کرد تعریفی برای مساحت ناحیه‌های ساده ارائه دهد. روش او مبتنی بر محاط و محیط کردن چندضلعی‌ها و محاسبهٔ سوپریمم و اینفیمم مساحت‌های به‌دست آمده بود. وی تعریف اندازه برای مجموعه‌های دوبعدی و سه‌بعدی را جداگانه بررسی کرد. پئانو برای یک مجموعهٔ دوبعدی A، مساحت درونی را برابر سوپریمم مساحت چندضلعی‌هایی که A را در بر دارند و مساحت بیرونی را برابر اینفیمم مساحت چندضلعی‌هایی که در A هستند تعریف می‌کند. او مساحت را مقدار مشترک این دو (در صورت وجود) در نظر می‌گیرد. همچنین در سال ۱۸۸۷، به ارتباط این تعریف و تعریف انتگرال می‌پردازد. در واقع، ثابت می‌کند انتگرال پایینی برابر مساحت درونی و انتگرال بالایی برابر مساحت بیرونی است. بنابراین تابع f انتگرال‌پذیر است اگر ناحیهٔ محصور به نمودار f و محور حقیقی، اندازه‌پذیر باشد؛ به‌عبارت دیگر، دارای مساحت باشد. به بیانی دیگر، تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $E(f,[a,b]) = \{(x,y) : x \in [a,b]\ 0 \leq y < f(x)\}$ اندازه‌پذیر به‌مفهوم پئانو ـ ژُردان باشد و به‌علاوه، $\int_a^b f(x)\,dx = c(E(f^+,[a,b])) - c(E(f^-,[a,b]))$.

خوب است اشاره کنیم که نقطهٔ درونی که کانتور تعریف می‌کند، بسیار شبیه به نقطهٔ درونی است که پئانو در کتابش با عنوان کاربردهای هندسی حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها در ۱۸۸۷ تعریف کرده است. البته پئانو فراتر می‌رود و نقطهٔ بیرونی را نیز تعریف می‌کند. ایده پئانو به‌راحتی می‌توانست به تعریف مجموعهٔ باز منتهی شود ولی نشد. این کار را ژُردان در سال ۱۸۹۲ انجام داد. پئانو می‌توانست مجموعهٔ باز را مجموعه‌ای تعریف کند که با مجموعهٔ نقاط درونی خودش برابر است. عجیب است که مفاهیم مشابهی را ددکیند مدت‌ها پیش در درس‌گفتارهای منتشرنشده‌اش به سال ۱۸۷۹ بیان کرده بود. این دست‌نوشته‌ها بعداً در ۱۹۳۱ به‌چاپ رسید. در زمان پئانو تعمیم این مفاهیم و گسترش آن‌ها در دستور کار فعالیت‌های ریاضیدانان نبود و بنابراین نتایج درخوری هم از این مفاهیم به‌دست نیامد؛ همان‌طور که کُشی نیز تعریف انتگرال را برای توابع پیوسته بیان کرد، زیرا

در زمان او نیازی به انتگرال‌گیری از توابع ناپیوسته احساس نمی‌شد.

مسألهٔ دیگری که نقش مهمی در توسعهٔ نظریهٔ انتگرال داشت، انتگرال‌گیری از توابع چندمتغیره بود. راه‌حل طبیعی، جایگزین کردن افراز بازه‌ها با افراز مستطیل‌ها و در نظر گرفتن مجموع‌هایی مشابه مجموع کُشی ـ ریمان بود. ولی کدام مستطیل‌ها را باید در مجموع لحاظ کرد؟ آن‌هایی که در ناحیهٔ مربوطه قرار می‌گیرند یا با آن اشتراک دارند؟ دیدگاه عموم این بود که در هر دو روش، مساحت کلی مرزِ ناحیه، با ظریف‌تر کردنِ افرازها به صفر میل می‌کند و هر دو روش یک عدد به‌دست می‌دهند. اما وقتی پئانو خمی در مربع واحد کشف کرد که تمام مربع را می‌پوشانْد، فرض مذکور مورد پرسش اساسی واقع شد. سؤال این بود که چه شرایطی روی ناحیه باید اعمال شود تا یک عدد منحصر به‌فرد برای انتگرال به‌دست آید؟ اولین کسی که درصدد پاسخ به این مسائل برآمد، کامیل ژُردان (۱۸۳۸ ـ ۱۹۲۲)، ریاضیدان فرانسوی، بود که ۲ سال بعد از انتشار خم پئانو، رویکرد جدیدی را به انتگرال ارائه کرد. انگیزهٔ او در این کار، تعریف انتگرال دوگانه بود. مفهوم اندازه‌پذیری هنگام تعمیم انتگرال دوگانه به مجموعه‌های دلخواه اهمیت می‌یابد. البته این اولین بار نبود که اندازه‌پذیری بررسی می‌شد. در خلال سال‌های ۱۸۵۰ تا ۱۸۹۲، کارهایی مربوط به انتگرال دوگانه انجام شده بود که در آن‌ها، به مفهوم اندازه‌پذیری اشاره کرده بودند. ژُردان در سال ۱۸۹۲ می‌نویسد: «گرچه نقش تابع f در انتگرال‌گیری کاملاً روشن است ولی به‌نظر می‌رسد اثر دامنه با همان دقت بررسی نشده است.» از این‌رو، ابتدا نظریهٔ محتوای مجموعه‌ها در $\mathbb{R}^n$ را بسط داد.

مسألهٔ اندازه‌پذیری در قضیهٔ فوبینی نیز مطرح می‌شود. کُشی در اوایل قرن ۱۹ اشاره می‌کند که قضیهٔ جابه‌جایی انتگرال‌های مکرر برای توابع بی‌کران برقرار نیست و وقتی تومی در سال ۱۸۷۸ تابع کرانداری با این خاصیت پیدا کرد، این موضوع بیشتر مورد توجه قرار گرفت. مسائلی از این دست، نشان می‌دهند که اگرچه مفهوم انتگرالِ توابع یک متغیره دقت و کلیتی یافته بود ولی فاقد چنین کیفیتی در کاربست به توابع دو متغیره بود. به عبارت دیگر، دامنهٔ انتگرال‌گیری به همان نسبتِ مفهوم تابع موشکافی نشده بود.

تا اینجا سه ضعفِ انتگرال ریمان مشخص شد:

۱ — توابعی با مشتق کراندار وجود دارند که مشتق آن‌ها انتگرال‌پذیر نیست. پس مشتق و انتگرال عمل‌های عکس یکدیگر نیستند؛

۲ — انتگرال ریمان با فرآیندهای حدی در حالت کلی سازگاری ندارد؛

۳ — برای انتگرال چندگانه راه‌حل رضایت بخشی وجود ندارد.

ژُردان که از شیوه تعریف انتگرال ریمان برای توابع چندمتغیره خرسند نبود، بیشترین سهم را در دقیق ساختن و تعریف مجدد و اصولی انتگرال چندمتغیره دارد. روش کار چنین بود که ناحیهٔ E در صفحه را چنان می‌پنداشتند که به یک خم بستهٔ ساده محدود شده است. سپس با افراز ناحیه به مستطیل‌هایی با اضلاع موازی محورها، مجموع کُشی ـ ریمان را تشکیل می‌دادند. ژُردان این روش

را در ویرایش اول کتابش در سال ۱۸۸۳ به‌کار برد. اما در ۱۸۹۰ پئانو با کشف خمی در صفحه که مربع واحد را پر می‌کرد، فرض پذیرفته شده دربارهٔ مرز یک ناحیه را مورد سؤال قرار داد. به نظر می‌رسد مثال پئانو باعث شد ژُردان فرض مرسوم محدود بودنِ ناحیه به یک خم را کنار بگذارد. لذا در سال ۱۸۹۲ پیشنهاد کرد ناحیهٔ انتگرال‌گیری همچون مجموعه‌ای از نقاط همچون دیدگاه کانتور در نظر گرفته شود. به این ترتیب، فرض محدود بودن به یک خم با فرض اندازه‌پذیری جایگزین شد. او مرز ناحیه را مجموعهٔ نقاطی مانند p تعریف کرد که هر گوی حول p نقاطی از E و متمم آن را در بر داشته باشد و ثابت کرد E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر مرز E دارای محتوای بیرونی صفر باشد. بنابراین شرطی که خم مرزی ناحیه انتگرال‌گیری باید می‌داشت، اندازه‌پذیری بود. پس از این، ژُردان انتگرال تابع دومتغیره را روی ناحیهٔ E تعریف می‌کند و سپس به توابع nمتغیره تعمیم می‌دهد.

ویرایش دوم کتاب ژُردان با عنوان دوره‌ای در آنالیز که در ۱۸۹۳ منتشر شد و در آن به‌طور جدی نظریهٔ مجموعه‌های کانتور در آنالیز به‌کار گرفته شده است، به سبب تأثیر ژُردان در فضای ریاضیات فرانسه، باعث مقبولیت کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها در آنالیز ریاضی شد. چند سال بعد از انتشار کتاب مذکور، سه ریاضیدان فرانسوی تأثیرگذار در نظریهٔ انتگرال‌گیری، یعنی امیل بورل، رنه بِر و هانری لبگ به‌طور وسیعی از آن بهره بردند. لبگ، به حق، ژُردان را سنت‌گرای نوآور نامیده است. ژُردان آنچه را از قبل بود با نوآوری خاصِ خود، رویکردی متمایز (نظریه ـ مجموعه‌ای) بخشید.

برای یک افراز ناحیهٔ E توسط مستطیل‌هایی با قطر r، S را اجتماع مستطیل‌هایی که تماماً در E قرار می‌گیرند و S' را اجتماع مستطیل‌هایی که مرز E را می‌پوشانند، در نظر بگیرید. ژُردان در سال ۱۸۹۲ نشان داد که اگر افراز ناحیه چنان تغییر کند که r به سمت صفر میل کند، مساحت S و $S \cup S'$ به اعداد ثابت A و a میل می‌کنند. اثبات او نه‌تنها از شهود هندسی سرچشمه می‌گیرد، بلکه بسیار دقیق نیز هست. اگر دو مقدار a و A مساوی باشند، مساحت مجموعهٔ S' که مرز را می‌پوشاند باید به سمت صفر میل کند. از اینجا تعریف اندازه‌پذیری و محتوا به‌دست می‌آید.

در واقع، با استفاده از نمادهای امروزی، اگر $E \subseteq [a,b]$ و $l(I)$ طول بازهٔ I را نشان دهد، محتوای بیرونی و درونی E به‌ترتیب، به‌صورت $c_e(E) = \inf_P\{\sum l(I_k) \ : \ I_k \cap E \neq \emptyset\}$ و $c_i(E) = \sup_P\{\sum l(I_k) \ : \ I_k \subseteq E\}$ تعریف می‌شوند که در اینجا، سوپریمم و اینفیمم روی همهٔ افرازهای P برای بازهٔ $[a,b]$ گرفته می‌شود. مجموعهٔ Eژُردان ــ اندازه‌پذیر نامیده می‌شود اگر $c_i(E) = c_e(E)$ که در این حالت، محتوای آن را با $c(E)$ نشان می‌دهند.

حال اگر $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار روی درون مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subseteq \mathbb{R}^۲$ باشد، فرض کنید P افراز E به تعداد متناهی مجموعهٔ اندازه‌پذیر است: $E = \cup_{i=۱}^n E_i$. برای $۱ \leq k \leq n$ قرار دهید $m_k = \inf\{f(x) \ \mid x \in E_k\}$ و $M_k = \sup\{f(x) \ \mid x \in E_k\}$ و مجموع‌های بالایی و پایینی داربوی تعمیم‌یافته را به‌صورت $S(P) = \sum_{k=۱}^n M_k c(E_k)$ و $s(P) = \sum_{k=۱}^n m_k c(E_k)$ تعریف کنید. ژُردان اشاره می‌کند که «داربو نشان داده است که اگر افرازها به‌گونه‌ای تغییر کنند که قطر اعضای آن‌ها به سمت صفر میل کند، آن‌گاه S و s به حدود ثابتی میل می‌کنند». سپس اثبات

جدیدی برای این مطلب ارائه می‌کند و آن حدود را انتگرال‌های بالایی و پایینی و اگر این دو با هم برابر باشند تابع را انتگرال‌پذیر می‌نامد. با اثباتی اساساً مشابه با تومی، نشان می‌دهد که $\mathcal{U}$ (اینفیمم Sها) و $\mathcal{L}$ (سوپریممSها) به مقدار مشترکی میل می‌کنند، به‌شرطی که ابعاد E_iها به صفر نزدیک شود. او انتگرال چندگانهٔ f روی E را برابر با این مقدار مشترک تعریف می‌کند. اکنون ژُردان قادر بود قضیهٔ فوبینی را در کلی‌ترین حالت خود اثبات کند.

گرچه اثبات‌ها و مفاهیم فوق به‌نوعی، قبل از او نیز شناخته شده بودند، ژُردان بحث را در یک چارچوب نظریهٔ مجموعه‌ای کامل قرار داد و با تعریف اندازه‌پذیری، به این نظریه کلیت و شفافیت خاصی بخشید. اندازه‌پذیری و مفاهیم وابسته به آن، به‌دلیل ظرافتی که ژُردان در ارائهٔ آن‌ها به‌کار گرفت، بیش از پیش مورد قبول واقع شدند. توجه کنید که اندکی پس از انتشار کارهای ریمان، مشخصه‌سازی ریمان ــ انتگرال‌پذیری برحسب انتگرال بالایی و پایینی نیز عرضه شد ولی آنچه ژُردان انجام داد، وارد کردن مفاهیم نظریهٔ اندازه‌ای است؛ هرچند خودش آگاه نبود که راه را برای یک نظریهٔ کلی‌تر باز کرده است.

مقالهٔ سال ۱۸۹۲ ژُردان نظریهٔ ریمان را در بستر نظریهٔ اندازه قرار داد و زمینه را برای نظریهٔ جدید انتگرال مهیا کرد اما اندازه به‌مفهوم جدید آن، از جای دیگری سرچشمه گرفته است. آن سرچشمه، کارهای امیل بُرل در نظریهٔ توابع بود. امیل بورل ۲۲ ساله بود که مدیر بخش ریاضی در دانشگاه لیل شد. در سال ۱۹۰۹ استاد توابع مختلط در سوربن شد و در ۱۹۲۰ ریاست بخش آمار و فیزیکِ ریاضی آنجا را بر عهده گرفت. او در امور سیاسی نیز فعالیت داشت. مجامع و مؤسسات علمی بسیاری را تأسیس و مدیریت کرد. بُرل بی‌شک یکی از تأثیر گذارترین ریاضیدانان قرن بیستم بود. بُرل به‌دنبال حل مسألهای که ریمان مطرح کرده بود، به مجموعه‌های چگال که دارای اندازهٔ صفر به‌مفهومی متفاوت از معنای رایج این اصطلاح، برخورد کرد. او دریافت که بحث‌های کانتور را می‌توان در یک مسأله از توابع مختلط به‌کار گرفت. مسأله از آنجا شروع شد که پوانکاره در سال ۱۸۸۳ بسط تحلیلی $f(z)=\sum_{1}^{\infty}A_n(z-a_n)^{-1}$ را برای اعداد مختلط a_n، A_n، z که $\sum_{1}^{\infty}\mid A_n\mid<\infty$ در نظر گرفت و نشان داد که اگر C خم سادهٔ بسته در صفحهٔ مختلط و $\{a_n\}$ زیرمجموعه‌ای چگال از C باشد، آن‌گاه $f(z)$ دو تابع تحلیلی متفاوت تعریف می‌کند؛ یکی داخل C و دیگری بیرون C.

بُرل در تز دکترایش در سال ۱۸۹۴، ایدهٔ کانتور را به‌کار برد و نشان داد که این دو تابع می‌توانند به یکدیگر مرتبط شوند و یک تابع از نوع ادامهٔ تحلیلی تعمیم‌یافته به‌دست دهند. در این بین، به ماهیت مجموعهٔ نقاط همگرایی برخی سری‌های حاصل در این مسأله برخورد کرد. لذا باید نوعی اندازه برای مجموعه‌های شمارا می‌یافت. مفاهیم محتوا و اندازه‌پذیری به‌مفهوم ژُردان انتظارات وی را برآورده نمی‌کردند، زیرا ماهیت جمع‌پذیری متناهی داشتند و نه جمع‌پذیری شمارا. در کتابی که مجموعهٔ درس‌های او در دانشسرای عالی معلمین در دورهٔ ۱۸۹۶ ــ ۱۸۹۷ بود و به احتمال زیاد، لبگ که در آن زمان در آنجا دانشجو بود، در کلاس‌های وی حضور داشته است، تعریف جدیدی

برای اندازه‌پذیری مجموعه‌ها پیشنهاد می‌کند و بر مبنای فلسفهٔ ریاضی‌اش تعریفی ساختنی عرضه می‌کند. او با سه فرض آغاز کرد:

۱ــ اندازهٔ بازه‌های کراندار برابر طول آن‌ها است؛

۲ــ اندازهٔ اجتماع شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیرِ دوبه‌دو مجزا برابر جمع اندازهایشان است؛

۳ــ اگر R و S اندازه‌پذیر باشند و $R \subseteq S$، آن‌گاه $S \setminus R$ نیز اندازه‌پذیر است و اندازهٔ آن برابر با تفاضل اندازه‌های S و R است.

اندازهٔ بُرل بسیار به مفهوم اندازهٔ امروزی نزدیک است، الّا این که بُرل خود را به مجموعه‌هایی محدود ساخته بود که از طریق اجتماع شمارا و متمم‌گیری از بازه‌ها ساخته می‌شود. بُرل یک مجموعه را اندازه‌پذیر نامید اگر بتوان با حفظ اصول بالا، به آن اندازه نسبت داد. در این بررسی، به حالت خاصی از قضیهٔ به‌اصطلاح ما، هاینه ــ بُرل می‌پردازد که بعداً یکی از مفیدترین ابزارها در اثبات قضایا در نظریهٔ اندازه و انتگرال لبگ شد. کسی اهمیت کار بُرل را در اواخر قرن نوزدهم درک نکرد به‌جز یک ریاضیدان جوان که در زمان ارائهٔ درس‌های بُرل، در دانشسرای عالی معلمین دانشجو بود و کار بُرل را به ثمر رساند: هانری لبگ.

در پایان این بخش، به مطلبی درباره نقطهٔ حدی و مجموعه‌های باز که بی‌ربط به کارهای بُرل هم نیست اشاره می‌کنیم. در فرانسه، مفهوم نقطهٔ حدی یک مجموعه را پوانکاره و ژولی تانری به‌کار بردند. اما از همه مهم‌تر ژُردان بود که آن را به‌صورتی که ما امروز تعریف می‌کنیم، بیان کرد. اما ژُردان مجموعهٔ باز را به‌طور کاملاً طبیعی یعنی مجموعه‌ای که با مجموعهٔ نقاط درونی خودش برابر باشد، تعریف نکرد. شاید نیازی به چنین مفهومی احساس نمی‌کرد. در عوض، به نقاط مرزی علاقه‌مند بود. اما جایی که اولین بار مجموعهٔ باز به‌طور اساسی نیاز است، قضیهٔ هاینه ــ بُرل یا در اصطلاح فرانسوی‌ها، بُرل ــ لبگ، است که مفهوم فشردگی در آن استفاده می‌شود. صورتی از این قضیه را بُرل در رسالهٔ دکتری خود بیان کرده است ولی اشاره‌ای به مجموعهٔ باز نمی‌کند. بُرل بیان می‌کند که اگر روی خطی تعداد نامتناهی بازهٔ جزئی چنان باشند که هر نقطه از خط در حداقل یکی از آن‌ها قرر گیرد، آن‌گاه می‌توان تعداد متناهی از همان بازه‌ها یافت که همان خاصیت را داشته باشند (یعنی هر نقطه از خط در یکی از آن‌ها باشد). سی سال طول کشید تا این صورت اولیهٔ قضیهٔ بُرل به‌شکل جدیدِ قضیهٔ هاینه ــ بورل تبدیل شود. اما اولین تعریف از مجموعهٔ بُرل را چهار سال بعد از قضیهٔ بُرل، رنه ــ لویی بِر (۱۸۷۴ ــ ۱۹۳۲) در رسالهٔ دکتری خود عرضه کرد. او در بحث از توابع نیم‌پیوستهٔ پایینی، دامنهٔ باز در فضای n ــ بعدی را تعریف کرد. عبارت مجموعهٔ باز را لبگ در رسالهٔ دکتری خود در سال ۱۹۰۲ به‌منظور تعریف اندازهٔ لبگ به‌کاربرده است. وی تحت تأثیر ژُردان با استفاده از نقطهٔ درونی و مرز مجموعه، مجموعهٔ باز را تعریف کرد. تعریف مجموعهٔ باز به‌کندی در جامعهٔ ریاضی رواج یافت. برای مطالعهٔ بحثی جالب و دقیق در این باره، به [12] مراجعه کنید.

۷. انتگرال لبگ

هانری لبگ بین سال‌های ۱۸۹۴ تا ۱۸۹۷ در دانشسرای عالی معلمین در پاریس، دانشجو بود و به‌نظر می‌رسد در درس‌های بُرل شرکت می‌کرده است. او در زمانی تعلیم ریاضیات دید که کتاب ژُردان و شیوه‌های نظریهٔ مجموعه‌ای حاکم بودند. نتایجش تحقیقاتش را در سال‌های ۱۸۹۹ تا ۱۹۰۱ منتشر ساخت و رسالهٔ وی در ۱۹۰۲ رسماً پذیرفته شد. در مقاله‌اش به سال ۱۸۹۹ به مسألهٔ مساحت می‌پردازد. در این مسأله، نسبت دادن یک عدد به نام مساحت به هر سطح محدود به یک خم سادهٔ بسته مورد نظر است به‌طوری که دو سطح معادل دارای یک مساحت باشند و مساحت اجتماع باپایان و یا بی‌پایان از سطوح که همپوشانی نکنند، برابر مجموع مساحت‌های آن‌ها باشد. لبگ دریافت که به اندازه‌ای نیاز دارد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر ژُردان و مجموعه‌های اندازه‌پذیر بُرل را در بر گیرد. بعد از شک و تردیدهایی، سرانجام مسألهٔ مساحت را به‌عنوان موضوع رسالهٔ دکتری خود انتخاب کرد. رسالهٔ دکترایش با عنوان «انتگرال، طول، مساحت» در سال ۱۹۰۲ در مجلهٔ ایتالیایی Annali di Mathematica چاپ می‌شود. لبگ مسألهٔ نسبت دادن عددی نامنفی به مجموعهٔ کراندار $E \subseteq \mathbb{R}$، $m(E)$، را که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) مجموعه‌های همنهشت، اندازهٔ مساوی داشته باشند؛

(ب) اندازهٔ اجتماع شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا، برابر مجموع اندازه‌های آن‌ها باشد؛

(ج) اندازهٔ بازهٔ $[0, 1]$ برابر یک باشد،

مطرح کرد. او برخلاف بُرل به‌دنبال وسیع‌ترین خانواده از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ بود که اندازه‌ای با سه خاصیت بالا برایش وجود داشته باشد. به‌راحتی می‌توان دید که اگر $m(E)$ برای E قابل تعریف باشد، باید $m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ که در آن، $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i و $\{I_i\}$ دنبالهٔ بازه‌هایی با درون مجزا هستند که E را می‌پوشانند. لبگ به‌منظور یافتن راهی برای گسترش مفهوم طول، راه کم و بیش طولانی زیر را برگزید.

فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$. اندازه بیرونی E به‌صورت $m^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i\}$ تعریف می‌شود. اما m^* در شرط (ب) بالا صدق نمی‌کند. لبگ که خود را به بازهٔ $[a, b]$ محدود کرده بود، اندازهٔ درونی را برای $E \subseteq [a, b]$ به‌صورت $m_*(E) = b - a - m^*([a, b] \setminus E)$ تعریف می‌کند. اکنون به‌طور کاملاً طبیعی، مجموعهٔ E را اندازه‌پذیر نامید اگر $m^*(E) = m_*(E)$. شرط لبگ به‌صورت $m^*([a, b]) = m^*(E) + m^*([a, b] \setminus E)$ نیز قابل بیان است. اندازهٔ لبگ گسترش محتوای ژُردان است. یعنی اگر مجموعه‌ای ژُردان ــ اندازه‌پذیر باشد، لبگ ــ اندازه‌پذیر نیز هست و مقدار محتوای آن با اندازهٔ لبگش برابر می‌شود. ولی متأسفانه، چنانچه بخواهیم زیرمجموعه‌های دلخواه اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، مشخصه‌سازی بالا دیگر به‌کار نمی‌آید. کاراتئودوری اولین کسی است که بسیار زیبا و زیرکانه تعریف معادلی برای اندازه‌پذیری در حالت کلی ارائه داد. کنستانتین کاراتئودوری (۱۸۷۳ ــ ۱۹۵۰) که تباری یونانی داشت در بلژیک رشد و نمو یافت و در آنجا مهندسی خواند. او در خلال سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۰ در اوقات فراغت، کتاب ژُردان

را مطالعه می‌کرد. سپس به دانشگاه برلین رفت و تحت‌نظر هرمان مینکوفسکی در ریاضیات دکتری گرفت. وی در ۱۹۱۴ تعریف جایگزینی برای اندازه‌پذیری معرفی کرد. منشأ این تعریفِ جایگزین، گسترشی از مفهوم اندازهٔ زیر مجموعه‌های k ـ بعدی $\mathbb{R}^n$ است که قبلاً ارائه کرده بود و در ۱۹۱۹، هاسدورف آن را برای بررسی ساختار مجموعه‌ها با بُعد غیرصحیح به‌کار برد. در واقع، $E \subseteq \mathbb{R}$ را اندازه‌پذیر می‌نامیم اگر $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ برای هر $A \subseteq \mathbb{R}$. خانوادهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم. تحدید m^* به $\mathcal{M}$ رااندازه لبگ می‌نامیم و با m نشان می‌دهیم. می‌توان مجموعه‌هایی ساخت که اندازه‌پذیر نیستند. در سال ۱۹۰۵ جوزپّه ویتالی (۱۸۷۵ ـ ۱۹۳۲)، ریاضیدان ایتالیایی، مثالی از یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیرِ $\mathbb{R}$ منتشر کرد. وی از دانشسرای عالی معلمین در پیزا تحت نظر اولیسّه دینی فارغ‌التحصیل شده بود. مسألهٔ اندازه برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌صورتی که اشاره کردیم حل می‌شود. اما باید توجه کرد که در حالت کلی، مسأله جواب ندارد. می‌توان به طریق مشابه، اندازهٔ لبگ را برای زیرمجموعه‌های فضای n ـ بعدی $\mathbb{R}^n$ تعریف کرد.

نظریهٔ اندازهٔ لبگ گرچه بسیار روشن‌تر از نظریهٔ بُرل است، همان اندیشه‌ها را دنبال می‌کند. اما کار اساسی لبگ ارتباط دادن انتگرال با مفهوم اندازه است. با رابطهٔ $\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$ که در آن، E^+ و E^- به‌ترتیب، مساحت‌های محدود به نمودار تابع f و محور xها از بالا و پایین است، شروع می‌کند. قبلاً به رابطه‌ای مشابه که پئانو به‌دست آورده بود، اشاره کردیم. لبگ سپس به ارائهٔ تعریفی تحلیلی و نه هندسی اقدام می‌کند. تعریفی که مانند تعریف ریمان بر اساس مجموع‌ها باشد. انتگرال ریمان مبتنی بر افراز دامنه و جمع کردن مساحت مستطیل‌های محیطی و محاطی در ناحیهٔ E، بناشده بر افراز مفروض است. ایدهٔ لبگ افراز بُرد تابع به‌جای افراز دامنهٔ آن است. لبگ در سال ۱۹۰۴ کتابی با عنوان «درس‌هایی در باب انتگرال و جستجوی توابع اولیه» منتشر کرد که تسلط و آشنایی عمیق وی با مباحث انتگرال را به‌خوبی نشان می‌دهد. فصل آخر کتاب، به نظریهٔ انتگرال اختصاص دارد. به تقلید از بُرل، آن فصل را با مسألهٔ انتگرال‌گیری آغاز می‌کند: یافتن عددی است متناظر به تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\int_a^b f = \int_{a+h}^{b+h} f$؛

ب) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$؛

پ) $\int_۰^۱ ۱ = ۱$؛

ت) $\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = ۰$؛

ث) $\int_a^b f \geq ۰$ اگر و تنها اگر $f \geq ۰$؛

ج) اگر (f_n) دنباله ای از توابع همگرا به f باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

به عبارت دیگر، او خواصی را که انتگرال باید داشته باشد معرفی و توصیف می‌کند. این چنین تعریفی از انتگرال را تعریف توصیفی می‌نامند. به‌راحتی می‌توان دید که از شرایط فوق نتیجه می‌شود که اگر تابعی ریمان ـ انتگرال‌پذیر باشد، باید مقدار انتگرال لبگ آن با مقدار انتگرال ریمانش برابر باشد.

اکنون فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و $\mathcal{P}=\{l_\circ,\cdots,l_n\}$ افرازی از برد f است. چنانچه قرار دهیم $E_i=\{x\in[a,b]:l_{i-1}\leq f(x)<l_i\}$ و تابع سادهٔ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i\chi_{E_i}(x)$ را درنظر بگیریم، داریم $f\leq\varphi$. بنابر خاصیت خطی، $\int_a^b\varphi=\sum_{i=1}^{n}l_{i-1}\int_a^b\chi_{E_i}$. حال اگر $\mathcal{P}_\circ$ افراز دلخواهی باشد، $\{\mathcal{P}_n\}$ را دنبالهای از افرازهای بُرد می‌گیریم که $\mathcal{P}_{n-1}\subseteq\mathcal{P}_n$ و $\mu(\mathcal{P}_n)\leq 1/2\mu(\mathcal{P}_{n-1})$ و فرض می‌کنیم φ_n را تابع سادهٔ نظیر افراز $\mathcal{P}_n$ باشد. واضح است $\varphi_n\to f$ و در نتیجه $\int_a^b\varphi_n\to\int_a^b f$. بنابراین محاسبهٔ انتگرال تابع f به محاسبهٔ انتگرال توابع سادهٔ φ_n و آن هم در نهایت، به محاسبهٔ انتگرال تابع مشخصهٔ یک مجموعه منتهی می‌شود. به عبارت دیگر، همان‌طور که لبگ اشاره می‌کند، برای دانستن این‌که چگونه انتگرال تابعی محاسبه می‌شود، کافی است انتگرال تابعی که فقط مقدار صفر یا یک می‌گیرد را بدانیم. اکنون انتگرال تابع مشخصهٔ یک بازه با طول آن برابر می‌شود. پس مسألهٔ انتگرال‌گیری به مسأله گسترش مفهوم طول از بازه‌های $\mathbb{R}$ به زیرمجموعه‌های دلخواه آن منجر می‌شود. به عبارت دیگر، به مسألهٔ اندازه. برای مطالعهٔ بحثی کامل و جالب از چگونگی شکل‌گیری انتگرال لبگ و مفاهیم وابسته، به [9] مراجعه کنید.

در اینجا لبگ به‌خوبی ضرورت تعریف‌هایی را که در رسالهٔ دکتری خود آورده بود، نشان می‌دهد. به‌راحتی دیده می‌شود اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $\int_a^b\chi_E=m(E)$. تعریف توصیفی لبگ از انتگرال به‌طور طبیعی منجر به تعریف اندازه برای مجموعه‌های $\mathbb{R}$ شد. اکنون با داشتن مفهوم اندازه می‌توانیم مسئلهٔ انتگرال را حل کنیم.

گوییم تابع $f:E\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است اگر مجموعهٔ $\{x\in E:f(x)>\alpha\}$ برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد. اگر $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ تابعی ساده باشد که در آن، E_iها اندازه‌پذیرند، تعریف می‌کنیم $\int\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_im(E_i)$. چنانچه $f:E\to\mathbb{R}$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، تعریف می‌کنیم $\int_E f=\sup\{\int_E\varphi:\circ\leq\varphi\leq f\}$ که در آن، φها توابع ساده هستند. از آنجا که برای هر تابع دلخواه $f:E\to\mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم $f=f^+-f^-$ که f^+، f^- به‌ترتیب، قسمت مثبت و منفی f را نشان می‌دهند، می‌توانیم انتگرال f را به‌صورت $\int_E f=\int_E f^+-\int_E f^-$ (در صورت متناهی بودن حداقل یکی از انتگرال‌های طرف راست) تعریف کنیم. به‌راحتی می‌توان دید انتگرالی که بدین صورت به‌دست می‌آید، دارای خواص یکنوایی و خطی بودن است. لبگ همچنین قضیهٔ اندازه‌پذیری حد نقطه‌ای دنبالهٔ توابع اندازه‌پذیر را بیان و اثبات می‌کند. با اثبات این قضیه که یک تابع کراندار، ریمان ــ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن اندازه ــ صفر باشد، نشان می‌دهد که حوزهٔ توابع انتگرال‌پذیر نسبت به نظریهٔ ریمان وسعت قابل ملاحظه‌ای یافته است.

نظریهٔ جدید اندازه، در ابتدا خیلی به مذاق ریاضیدانان به‌ویژه ریاضیدانانی که جوانی‌شان در دهه‌های ۱۸۷۰ و ۱۸۸۰ گذشته بود خوش نیامد، زیرا آن‌ها نظریهٔ ریمان را نظریهٔ نهایی انتگرال‌گیری می‌پنداشتند. با این حال، گزارهٔ زیر یکی از تفاوت‌های انتگرال لبگ را با انتگرال ریمان نشان می‌دهد. در واقع، توابع انتگرال‌پذیر لبگ برخلاف توابع ریمان ــ انتگرال‌پذیر، به‌طور مطلق

انتگرال‌پذیرند.

گزاره. فرض کنید $f : E \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد. آن‌وقت f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ انتگرال‌پذیر باشد.

برای مثال، تابع $f(x) = (\sin x)/x$ روی $[0, \infty)$ انتگرال‌پذیر به مفهوم لبگ نیست؛ در حالی که روی این فاصله دارای انتگرال ریمان ناسره است.

بعد از انتشار کارهای لبگ، ریاضیدانان دیگری به مطالعهٔ آن‌ها پرداختند و اثبات‌های بهتری برای آن‌ها عرضه کردند. یکی از این افراد بِپّو لوی (۱۸۷۵ ـ۱۹۶۱) بود که در فهم بهترِ ما از انتگرال لبگ کمک فراوانی کرد. قضیهٔ همگرایی یکنوا را وی در سال ۱۹۰۶ اثبات کرد. این قضیه راه بسیار مؤثری برای اثبات قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ در اختیار می‌گذارد. همچنین باید به پی‌یر فاتو (۱۸۷۸ ـ ۱۹۲۹)، ریاضیدان فرانسوی، اشاره کنیم که لم فاتو اکنون در هر کتاب آنالیز حقیقی به چشم می‌خورد. او این لم را اولین بار در رسالهٔ دکتری خودش اثبات کرد. اکثر کارهای ریاضی وی صرف اثبات وجود جواب برای دستهٔ خاصی از معادلات دیفرانسیل شده است.

اکنون به بررسی رفتار انتگرال لبگ نسبت به دو موضوع مهم، یعنی قضیهٔ اساسی حسابان و قضیهٔ همگرایی می‌پردازیم. خواهیم دید در ازای بهای پرداخت شده، آنچه به‌دست آورده‌ایم بسیار قابل توجه است.

قضیه. (قضیهٔ همگرایی یکنوا) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر E و f حد نقطه‌ای این دنباله باشد. در این صورت، $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

قضیه زیر مشهورترین و قوی‌ترین قضیهٔ همگرایی در این نظریه است.

قضیه. (قضیهٔ همگرایی تسلطی) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی E باشد که تقریباً همه‌جا روی E به تابع حدی f همگراست. همچنین فرض کنید تابع انتگرال‌پذیر g موجود است به‌طوری که $|f_n(x)| \le g(x)$ برای هر n و تقریباً هر $x \in E$. آن‌وقت f انتگرال‌پذیر است و $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

علی‌رغم این‌ها، باید توجه کرد که در این نظریه هم بدون اعمال شرایط اضافی نمی‌توان انتظار جابه‌جایی حد و انتگرال را در کلی‌ترین حالت داشت.

لبگ در کتابی با عنوان درس‌گفتارهایی دربارهٔ انتگرال، بحثی عالی دربارهٔ انتگرال ریمان و قوت و ضعف‌های آن ارائه می‌کند و هنوز هم یکی از منابع جالب دربارهٔ نظریه انتگرال لبگ است. لبگ در آن کتاب با داشتن تمام ابزار لازم، نتایج و قضایای بیشتری دربارهٔ قضیه اساسی حسابان بیان می‌کند. اثبات‌ها بسیار موجز و در مواردی نارسا هستند و تلاش‌های او برای اثبات کلی‌ترین حالت قضیهٔ اساسی حسابان و بازیابی تابع از مشتق آن توسط فرآیند انتگرال‌گیری، به موفقیت نمی‌انجامد. ایده‌های او را بعدها دانژوا برای یافتن چنین فرآیندی به‌کار گرفت. مثال زیر نشان می‌دهد انتظار

اینکه در حالت کلی تابع از مشتقش به‌وسیلهٔ انتگرال‌گیری قابل بازیابی باشد، بی‌جاست.

مثال. تابع f در مثال ۴.۵ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم تابع f' انتگرال‌پذیر نیست. چون f' روی $[a,b]$ با شرط $0 < a < b < 1$ پیوسته است، پس $\int_a^b f' = b^2 \cos \frac{\pi}{b^2} - a^2 \cos \frac{\pi}{a^2}$. حال اگر قرار دهیم $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $a_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}$، آن‌گاه $\int_{a_n}^{b_n} f' = 1/2n$ و چون بازه‌های $[a_n, b_n]$ دوبه‌دو مجزا هستند، $\int_0^1 |f'| \geq \sum \int_{a_n}^{b_n} |f'| \geq \sum \frac{1}{2n}$ که نشان می‌دهد f' نمی‌تواند انتگرال‌پذیر به مفهوم لبگ باشد.

دینی در کتابش به این نکته توجه می‌کند که اگر تابع f مشتق دینی داشته باشد و از بالا یا پایین کراندار باشد، آن‌گاه f را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این مطلب با توجه به قضیهٔ دیریکله دربارهٔ سری‌های فوریه اهمیت پیدا می‌کند. سه سال بعد، ژُردان در مقاله‌ای شرطی ساده بیان کرد که معادل است با این‌که بتوان تابعی را به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این، همان شرط کراندار بودنِ تغییرات تابع است.

تعریف. تغییر کل تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ روی $[a,b]$ عبارت است از

$$V(f,[a,b]) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)|\}$$

که در آن، سوپریمم روی تمام مجموعه‌های متناهی $\{[c_i,d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ از بازه‌هایی با درون مجزا در $[a,b]$ محاسبه می‌شود. تابع f را با تغییر کراندار گویند اگر $V(f,[a,b])$ متناهی باشد.

ویژگی پیوستگی مطلق انتگرال معین را اولین بار آکسل هارناک در ۱۸۸۴ دریافت. واژهٔ پیوستهٔ مطلق را ویتالی در ۱۹۰۵ به‌کار برد، گرچه ریاضیدانانی مثل پواسون، ژُردان، شتولتس، و ای. اچ. مور نیز از این خاصیت آگاه بودند. تعریف امروزین آن از این قرار است.

تعریف. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را پیوستهٔ مطلق گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ یافت شود به‌طوری که اگر $\{[c_i,d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ مجموعه متناهی از بازه‌ها در $[a,b]$ با درون مجزا باشد و $\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$

اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ اساسی حسابان را برای انتگرال لبگ بیان کنیم.

قضیه. (قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۱)) فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $F(x) = \int_a^x f$ برای هر $x \in [a,b]$. آن‌وقت F پیوسته مطلق است و تقریباً همه‌جاروی $[a,b]$ داریم $F'(x) = f(x)$.

قضیه. (قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۲)) اگر تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوستهٔ مطلق باشد، آن‌گاه f' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$.

انتگرال لبگ در جهت رفع کاستی‌های انتگرال ریمان بسط داده شد. کاربرد قضیه‌های همگرایی در نظریهٔ لبگ در جابه‌جایی حد و انتگرال و قضیهٔ اساسی حسابان، و وسیع‌تر شدن حوزهٔ توابع انتگرال‌پذیر، پیشرفت‌های قابل توجهی نسبت به نظریهٔ انتگرال ریمان محسوب می‌شوند. در خلال

سال‌های ۱۹۰۲ تا ۱۹۰۷ کارهای بسیار مهمی که قدرت نظریهٔ لبگ را نشان می‌دادند، انجام شد ولی همان‌طور که شرح دادیم، در این نظریه هم کاستی‌هایی وجود دارد. شرط انتگرال‌پذیری همچنان در صورت قضیهٔ اساسی حسابان نیاز است و این مسألهای است که باید بررسی شود. در مسائل کاربردی، بسیار اتفاق می‌افتد که به‌صورت کلی‌تری از قضیهٔ اساسی حسابان نیاز است. رفع این کاستی‌ها، انگیزهٔ معرفی نظریه‌های انتگرال دیگری بوده است که در [۱۷] به بررسی برخی از مهم‌ترین آن‌ها پرداخته‌ایم.

مراجع

[1] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[2] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weirstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[3] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publication, New York, 1959

[4] W. Dunham, “Touring the calculus gallery”, *Amer. Math. Monthly*, **112**(2005), 1–19.

[5] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. GSM Vol. 4, Providence, Rohde Island, 1994.

[7] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusetts, 1970.

[8] I. Grattan-Guinness, *From the calculus to set theory, 1630-1910: An introductory history*, Princeton University Press, Princeton, 2000.

[9] T. Hawking, *Lebesgue's theory of integration: It's origins and development*, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

[10] H. N. Janke, *A history of analysis*, Amer. Math. Soc. History of Math. Vol. 24, Providence, Rhode Island, 2003.

[11] I. Kleiner, "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Ed. Stud. Math.*, **48**(2001), 137–174.

[12] G. H. Moore, "The emeregence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Math.*, **35**(2008), 220–241.

[13] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[14] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[15] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[۱۶] م. رجبعلی‌پور، «کسرهای مصری»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۲، تابستان ۱۳۸۸، ۱—۳۸.

[۱۷] س. مقصودی، «نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون، و هنستاک ــ کورزویل روی خط حقیقی»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۷، تابستان ۱۳۹۰، ۱۹—۳۵.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir