فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷) صص. ۱۰۹ تا ۱۲۷

توپولوژی تعمیم‌یافته چیست و منشأ آن کجاست؟

محمدرضا احمدی زند، رسول خیّری، و رستم محمدیان

تقدیم به استاد گرانقدرمان، دکتر فریبرز آذرپناه

چکیده

توپولوژی تعمیم‌یافته بر مجموعهٔ X با جایگزین کردنِ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X به‌جای خانوادهٔ مجموعه‌های باز به‌دست می‌آید. مجموعهٔ X مجهز به توپولوژی تعمیم‌یافته، فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته نامیده می‌شود. در این مقاله، تاریخچهٔ توپولوژی‌های تعمیم‌یافته را به‌تفصیل دنبال می‌کنیم تا خواننده دریابد که چگونه توپولوژی‌دانان به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته رهنمون شدند. در این راه، با مفاهیم اولیهٔ فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته و برخی از ویژگی‌های ابتدایی آنها آشنا می‌شویم.

۱. سرآغاز

آغاز داستان توپولوژی‌های تعمیم‌یافته[۱] به‌نوعی به سال ۱۹۶۳ باز می‌گردد؛ زمانی که لوین [۳۵] سعی کرد مفهوم توپولوژی را با جایگزین کردنِ مجموعه‌های نیم‌باز به‌جای مجموعه‌های باز، تعمیم دهد. پس از او نیز کارهایی مشابه انجام شد. مثلاً در سال ۱۹۶۵ مجموعه‌های α-*باز* [۵۰]، در سال ۱۹۷۹ مجموعه‌های *به‌طور ضعیف باز*[۲] [۴۰]، در سال ۱۹۸۲ مجموعه‌های *پیش‌باز*[۳] [۴۶] و در سال ۱۹۸۳ مجموعه‌های β-*باز* [۱۶] معرفی شدند. سرانجام، در سال ۱۹۹۷ چاسار[۴] [۱۳] تا اندازه‌ای به این گوناگونی‌ها نظم بخشید و مفهومی کلی‌تر به‌نام مجموعهٔ γ-*باز* را معرفی کرد. او متوجه شد که مجموعه‌های γ-باز، نسبت به اجتماع دلخواه بسته‌اند و مجموعهٔ تهی نیز γ-باز است. این ویژگی‌ها او را در سال ۲۰۰۲ به معرفی فضاهای

عبارات و کلمات کلیدی. توپولوژی تعمیم‌یافته؛ مجموعهٔ μ-باز؛ مجموعهٔ β-باز؛ تابع نیم‌پیوسته؛ مجموعهٔ γ-باز.

[۱] generalized topology [۲] feebly open [۳] pre-open [۴] Á. Császár

توپولوژیک تعمیم‌یافته [۱۵] رهنمون شد. از این‌رو می‌توان زمان تولد توپولوژی‌های تعمیم‌یافته را سال ۲۰۰۲ و چاسار را ابداع‌کنندهٔ آن دانست.

یادآوری می‌کنیم که زیرخانواده‌ای از $\mathscr{P}(X)$، مجموعهٔ توانیِ X، یک *توپولوژی* خوانده می‌شود اگر شامل دو مجموعهٔ تهی و X باشد و نسبت به اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی بسته باشد. البته شرط تعلق مجموعهٔ تهی به این خانواده را می‌توان از شرط دوم به‌دست آورد، زیرا اجتماع خانوادهٔ تهی از مجموعه‌ها بنابر قرارداد، تهی است. در فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته لزومی به برقراریِ همهٔ شرطهای بالا نیست. *توپولوژی تعمیم‌یافته* در حالت کلی با جایگزین کردنِ زیرخانواده‌ای دلخواه از $\mathscr{P}(X)$ به‌جای خانوادهٔ مجموعه‌های باز به‌دست می‌آید [۱۶]. مجموعهٔ X مجهز به توپولوژی تعمیم‌یافته را *فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته* می‌نامیم. یک حالت خاص از توپولوژی تعمیم‌یافته، زیرخانواده‌ای مانند μ از $\mathscr{P}(X)$ است که شامل مجموعهٔ تهی است و نسبت به اجتماع دلخواه بسته است. در این نوشته، بیشتر با فضای توپولوژیک تعمیم‌یافتهٔ (X, μ) سروکار داریم که از این پس، آن را به‌اختصار *فضای تعمیم‌یافته* می‌نامیم. همچنین اگر این خانواده شامل خودِ X نیز باشد، به پیروی از چاسار، آن را *فضای تعمیم‌یافتهٔ قوی* می‌نامیم.

در سراسر این مقاله، درون و بستار زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X را به‌ترتیب، با iA و cA یا گاهی با A° و $\overline{A}$ نمایش خواهیم داد.

۲. انگیزهٔ پیدایش

شاید دقیقاً نتوان گفت که چه چیزی ایدهٔ مجموعهٔ باز تعمیم‌یافته را به ذهن ریاضیدانان انداخت. با مطالعهٔ تاریخ توپولوژی، می‌بینیم که دستکاری فضاهای توپولوژیک، عملی نبوده است که نخستین بار برای فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته انجام گرفته باشد. ریاضیدانانِ بسیاری سعی کرده‌اند تا چیزی بزرگتر یا کوچکتر از یک فضای توپولوژیک بسازند. گرچه فضاهای توپولوژیک خاص مانند فضاهای فشرده، نرمال، منتظم و ... را می‌توان به‌نوعی فضای توپولوژیک کوچکتر دانست ولی ابداع فضاهای آلکساندرُف[۱] [۳] که تعریف فضاهای توپولوژیک را هدف قرار می‌دهد، اقدامی متمایز در این راستا است. از سوی دیگر، بزرگ کردن یک توپولوژی هم مورد علاقهٔ توپولوژی‌دانان بوده است که از آن جمله می‌توان به توسیع ساده [۷، ۳۶]، توسیع ماکسیمال [۳۱]، توسیع از طریق یک یا چند پالایه [۱۷]، توسیع بسته یا باز، توسیع H-بسته، توسیع هاوسدُرف و ... [۲۶] اشاره کرد. اما موضوع بحث ما «تعمیم» است نه «توسیع»؛ بزرگتر کردن «مفهوم» توپولوژی است نه بزرگتر کردن خودِ توپولوژی! این موضوع نیز تازه نیست و برای نمونه، می‌توان به فضاهای پیش-توپولوژیک و توپولوژی مونادی[۲] اشاره کرد [۲۷، ۲۸].

---

[۱] که در آن، توپولوژی باید نسبت به اشتراک دلخواه بسته باشد.

[۲] monadic topology

فضاهای پیش-توپولوژیک: همان‌طور که می‌دانیم، یک توپولوژی را می‌توان به‌کمک عملگر *بستار کوراتُفسکی*[۱]، عملگر درون یا مرز تعریف کرد. یک فضای پیش-توپولوژیک نیز به‌روش مشابه به‌کمک *عملگر بستار* چک[۲] (که آن را *عملگر پیش-بستار* نیز می‌گویند) تعریف می‌شود. عملگر بستار چک، همهٔ ویژگی‌های عملگر بستار کوراتُفسکی را بجز ویژگیِ خودتوانی دارد.

توپولوژی مونادی: موناد یک چهارتایی است که بر روی یک رسته تعریف می‌شود. توپولوژی مونادی با استفاده از یک موناد جزئاً مرتب Φ ساخته می‌شود. از این‌رو آن را Φ-توپولوژی هم می‌نامند.

فضاهای یکنواخت: توپولوژی را می‌توان دانش مطالعهٔ مفهوم تقریب با کنارگذاشتنِ مفهوم «متر» و تکیه بر مجموعه‌های باز تعریف کرد [۵۴]؛ یعنی سعی در رها کردنِ آنالیز ریاضی از بند «متر» و بنیان نهادنِ دوبارهٔ مفاهیم آن برحسب مفهوم کلیِ مجموعهٔ باز. در این راه، خیلی از مفاهیم آنالیزی مانند پیوستگی به‌خوبی به فضاهای توپولوژیک انتقال می‌یابند، زیرا برحسب مجموعه‌های باز به‌راحتی قابل توصیف هستند. اما مفاهیمی مانند پیوستگیِ یکنواخت و همگراییِ یکنواخت در فضاهای متری، در فضاهای توپولوژیک قابل بیان نبودند. اینجا بود که *فضاهای یکنواخت* پا به عرصهٔ توپولوژی گذاشتند. این اقدام نخستین بار توسط آندره وِی [۵۳] انجام گرفت و توسط بورباکی [۸] زیربنایی درست و منطقی یافت. ییفرِماویچ[۳] نیز به‌سبب همین کاستی، *فضاهای مجاورت*[۴] را ابداع کرد. البته او این کار را با اصل‌موضوعی کردنِ مفهوم «نزدیکیِ[۵] دو مجموعه» انجام داد. بعضی هم بر آن شدند تا فضاهای توپولوژیک، فضاهای یکنواخت و فضاهای مجاورت را در قالبی واحد درآورند که از آن جمله می‌توان به ابداع فضاهای *توپو-همگون* توسط چاسار [۱۰]، فضاهای زیرتوپولوژیک توسط دویچینوف [۲۰]، فضاهای *مروتوپیک*[۶] توسط کاتیتُف [۳۳] و *فضاهای نزدیکی* توسط هرلیش [۳۰] اشاره کرد. تعمیم فضاهای یکنواخت نیز در همین راستا و توسط برخی از ریاضیدانان انجام گرفت که همگیِ این تعمیم‌ها با حذف یک یا چند شرط از شرط‌های این فضاها حاصل می‌شدند. مشهورترینِ این تعمیم‌ها، مفهوم *فضای شبه‌یکنواخت*[۷] است که نَشبین[۸] آن را ابداع کرد. اهمیت کارهای نَشبین زمانی مشخص گردید که آشکار شد هر فضای توپولوژیک، یک فضای شبه‌یکنواختی‌پذیر است. این کشف جدید، انگیزه‌ای شد برای اینکه فضاهای توپولوژیک و فضاهای متری بر پایهٔ فضاهای یکنواخت تعمیم‌یافته تعریف شوند نه بر پایهٔ مفاهیم توپولوژیک، زیرا در غیر این صورت بسیاری از مفاهیم سودمند در فضاهای متری، در فضاهای توپولوژیک بی‌استفاده می‌ماندند. با این ملاحظات بود که ساز[۹] [۵۲] با برداشتنِ همهٔ اصول فضاهای یکنواخت بجز یکی، به معرفی فضاهای *رابطه‌ساز*[۱۰] پرداخت و نشان داد که چگونه مفاهیم و ویژگی‌های اولیهٔ فضاهای توپولوژیک و فضاهای متری به این فضاها تعمیم پیدا می‌کنند. او یک خانوادهٔ ناتهی $\mathscr{R}$ از رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ X را یک

[۱] Kuratowski [۲] Čech closure operator [۳] V. A. Efremovich [۴] proximity spaces [۵] nearness
[۶] merotopic [۷] quasi-uniform space [۸] Leopoldo Nachbin [۹] Á. Száz [۱۰] relator space

رابطه‌ساز و $(X,\mathscr{R})$ را *فضای رابطه‌ساز* نامید. سپس $\mathscr{R}$-*درون* زیرمجموعهٔ A از X را با

$$\mathrm{int}_{\mathscr{R}}(A)=\{x\in X|\exists R\in\mathscr{R}, R(x)\subseteq A\}$$

و خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $\mathscr{R}$-*باز* را به‌صورت $\tau_{\mathscr{R}}(A)=\{V\subseteq X|V\subseteq \mathrm{int}_{\mathscr{R}}(V)\}$ تعریف کرد تا ابزارهایی شبیه آنچه در فضاهای توپولوژیک و متری وجود دارند، در اختیار داشته باشد.[1] در همان مقاله، واژهٔ *توپولوژی تعمیم‌یافته* با تعبیری شبیه بیان کنونیِ آن به‌کار رفته است. ساز، خانوادهٔ $\mathscr{A}$ را یک توپولوژی تعمیم‌یافته روی X می‌نامد اگر شامل X و نسبت به اجتماع دلخواه بسته باشد.

هرچند ساز [۵۲] از زیرخانواده‌ای از $\mathscr{P}(X)$ سخن می‌گوید که شامل X است و نسبت به اجتماع دلخواه بسته است، اشاره نمی‌کند که آیا خودش خالق این موجود است یا اینکه وامدار فردی دیگر است. اما با اندکی جستجو در مراجع، ردی از این موجود می‌یابیم. مفهوم فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته را دقیقاً با همین نام، نخستین بار لوگوژن [۳۹] تعریف کرد. اما چون این مقاله به زبان فرانسوی بود، نادیده گرفته شد. تقریباً همزمان با او، در [۴۷] همین مفهوم با نامی دیگر[2] تعریف شد. مطالعهٔ چکیدهٔ این مقاله، هدف مؤلفان آن را از معرفی این مفهوم آشکار می‌کند: اینکه برخی از مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته و پیوستگی‌های وابسته به آنها را که پس از لوین تعریف شده‌اند، در قالبی واحد درآورند. همان‌طور که در سرآغاز مقاله هم ذکر کردیم، بعدها چاسار با همین انگیزه، شرط تعلق X را حذف کرد و به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته به‌معنای کنونیِ آن پرداخت. با این اوصاف، ریشهٔ تاریخیِ پیدایش فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته را می‌توان مجموعه‌های باز و بستهٔ لوین دانست.

تعمیم مفهوم مجموعهٔ باز و مجموعهٔ بسته در فضاهای توپولوژیک، با کارهای مستقل دو تن از ریاضیدانان شروع شد. چنان‌که کارهای انجام‌شده در این زمینه به‌ویژه [۳۵]، [۵۰] و [۱۳] نشان می‌دهند، این ویژگی که در هر فضای توپولوژیک زیرمجموعهٔ A باز است اگر و تنها اگر $A\subseteq i(A)$، شاید انگیزهٔ اصلی این تعمیم باشد. لوین [۳۵] و نیوستاد[3] [۵۰] مستقل از هم، بررسی مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته در فضاهای توپولوژیک را آغاز کردند. نیوستاد در چکیدهٔ مقاله‌اش می‌نویسد:

> «مجموعهٔ باز در یک فضای توپولوژیک، مجموعه‌ای مانند A است که $A\subseteq i(A)$. بنابراین طبیعی است که بتوان مجموعه‌هایی با ویژگی $A\subseteq ici(A)$ (که آنها را α-مجموعه می‌نامیم) و یا با ویژگی $A\subseteq ci(A)$ (که آنها را β-مجموعه می‌نامیم) را به‌عنوان مجموعه‌های *تقریباً باز* مورد بررسی قرار داد.[4]»

[1] با همین مفاهیم و ابزارها بود که بعدها، مالا [۴۵] ثابت کرد که با هر رابطه‌ساز تک‌نقطه‌ای می‌توان یک توپولوژی آلکساندرُف بنا کرد.

[4] نامگذاریِ α-مجموعه‌ها و β-مجموعه‌ها احتمالاً متأثّر از کتاب توپولوژی بورباکی [۸] بوده است. در این کتاب، برای زیرمجموعهٔ A از X، $ic(A)$ با $\alpha(A)$ و $ci(A)$ با $\beta(A)$ نامگذاری شده است.

[2] supratopological spaces [3] Olav Njåstad

لوین هم اگرچه مجموعه‌های نیم‌باز را به گونه‌ای متفاوت تعریف می‌کند، اولین نتیجه‌ای که از تعریف خود می‌گیرد، همان ویژگی‌ای است که نیوستاد به آن اشاره می‌کند و شاید همان چیزی باشد که لوین را به تعریف مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته برانگیخته بود. با نگاهی به مقاله‌های بعدی در زمینهٔ مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته، خواهیم دید که همهٔ مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته بر اساس ویژگی‌هایی شبیه به ویژگی بالا تعریف شده‌اند (تعریف ۱.۳ را ببینید). چاسار هم وقتی می‌خواست انواع مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته را در چارچوبی واحد به‌نام *مجموعه‌های* γ-*باز* قرار دهد، از همین ویژگی استفاده کرد. او با در دست داشتنِ تابع $\gamma : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$، زیرمجموعهٔ A از $\mathscr{P}(X)$ را γ-*باز* نامید اگر $A \subseteq \gamma(A)$.

۳. سیر تاریخی: پیش از چاسار

اکنون که با انگیزهٔ تعریف فضاهای تعمیم‌یافته آشنا شده‌ایم، می‌خواهیم سیر تاریخی این شاخه از توپولوژی را از آغاز و با جزئیات بیشتر دنبال کنیم. این تاریخ را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: پیش از پیدایش توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ چاسار و پس از آن.

به آغاز داستان توپولوژی‌های تعمیم‌یافته باز می‌گردیم، یعنی به سال ۱۹۶۳. در آن زمان، لوین [۳۵] مجموعه‌های نیم‌باز را این گونه تعریف کرد: «مجموعهٔ A را در فضای توپولوژیک X *نیم‌باز* گوییم در صورتی که مجموعهٔ باز U وجود داشته باشد به‌طوری که A بین U و بستار U قرار بگیرد.» او بی‌درنگ ثابت کرد که مجموعهٔ A نیم‌باز است اگر و تنها اگر $A \subseteq ci(A)$. او به یک ویژگی مهم مجموعه‌های نیم‌باز پی برد که ۴۰ سال بعد، سنگ‌بنای فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته شد. این ویژگی که بعدها چاسار را در سال ۲۰۰۲ به آفرینش فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته رهنمون ساخت، چیزی نبود جز اینکه «خانوادهٔ مجموعه‌های نیم‌باز نسبت به اجتماع دلخواه بسته است.» سپس خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های نیم‌باز از یک فضای توپولوژیک X را با $S.O.(X)$ نشان داد و ثابت کرد که

(الف) هر مجموعهٔ باز در X، یک مجموعهٔ نیم‌باز است. به عبارت دیگر، خانوادهٔ مجموعه‌های نیم‌باز در فضای توپولوژیک X دربرگیرندهٔ خودِ توپولوژی است؛

(ب) هر زیرمجموعه از X که بین یک مجموعهٔ نیم‌باز A و $c(A)$ قرار بگیرد، یک مجموعهٔ نیم‌باز است؛[۱]

(پ) $S.O.(X)$ کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X است که در (الف) و (ب) صدق می‌کند؛

(ت) هر مجموعهٔ نیم‌باز در X، در هر زیرفضای X شامل آن مجموعه نیز یک مجموعهٔ نیم‌باز خواهد بود؛

(ث) تصویر هر مجموعهٔ نیم‌باز تحت یک تابع باز و پیوسته، یک مجموعهٔ نیم‌باز است؛

---

[۱] شبیه به این ویژگی همبندی که هر مجموعه که بین یک مجموعهٔ همبند و بستار آن قرار بگیرد، همبند است.

(ج) خانوادهٔ درون‌های مجموعه‌های نیم‌باز چیزی جز توپولوژیِ روی X نیست؛
(ج) حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ نیم‌باز از دو فضای توپولوژیک، در فضای حاصل‌ضربی، نیم‌باز است؛
(چ) اگر τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی X باشند و $S.O.(X,\tau_1) \subseteq S.O.(X,\tau_2)$، آنگاه $\tau_1 \subseteq \tau_2$. بنابراین اگر خانوادهٔ مجموعه‌های نیم‌باز دو توپولوژی روی X یکسان باشند، آن دو توپولوژی یکسان خواهند بود (این نتیجه، خیلی زود[1] توسط هَملِت [۲۹] رد شد).

انتخاب واژهٔ «نیم‌باز» برای مفهوم معرفی‌شده و اثبات ویژگی‌های بالا به‌خصوص ویژگی (الف)، کافی است تا بتوان کار لوین را نخستین گام مهم در تعمیم فضاهای توپولوژیک دانست. ولی آنچه او را پرچمدار حرکتی کرد که تا به امروز ادامه دارد، این بود که سعی کرد با استفاده از مجموعه‌های نیم‌باز، مفهوم پیوستگی را نیز تعمیم دهد: یک تابع بین دو فضای توپولوژیک را *نیم‌پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ باز، یک مجموعهٔ نیم‌باز باشد.[2] سپس ثابت کرد که هر تابع پیوسته، نیم‌پیوسته است و حاصل‌ضرب دو تابع نیم‌پیوسته، تابعی نیم‌پیوسته است.

پس از او نیز کارهایی مشابه انتشار یافت. برای مثال، در سال ۱۹۶۵ مفهوم مجموعه‌های α-باز [۵۰]، در سال ۱۹۷۹ مجموعه‌های به‌طور ضعیف باز [۴۰]، در سال ۱۹۸۲ مجموعه‌های پیش‌باز [۴۹] و در سال ۱۹۸۳ مجموعه‌های β-باز [۱۶] معرفی شدند.

تعریف ۱.۳ (مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته در فضای توپولوژیک). فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک و i و c به‌ترتیب، نشان‌دهندهٔ عملگرهای درون و بستار در این فضا باشند. زیرمجموعهٔ A از X را

(الف) *نیم‌باز* گوییم اگر $A \subseteq ci(A)$ [۳۵]؛
(ب) *پیش‌باز* گوییم اگر $A \subseteq ic(A)$ [۴۹]؛
(پ) α-*باز* گوییم اگر $A \subseteq ici(A)$ [۵۰]؛
(ت) β-*باز* (یا *نیم‌پیش‌باز* [۲۲]) گوییم اگر $A \subseteq cic(A)$ [۱۶].

متمم یک مجموعهٔ نیم‌باز (به‌ترتیب، پیش‌باز، α-باز و β-باز) را *نیم‌بسته* (به‌ترتیب، *پیش‌بسته*، α-*بسته* و β-*بسته*) می‌گوییم. خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های نیم‌باز (به‌ترتیب، پیش‌باز، α-باز و β-باز) روی فضای توپولوژیک (X,τ) را با $\sigma(\tau)$ (به‌ترتیب، $\pi(\tau)$، $\alpha(\tau)$ و $\beta(\tau)$) نمایش می‌دهیم. همچنین

[1] در واقع ۱۵ سال بعد! اما اینکه در این فاصله چند مقاله به این ویژگی اشاره یا از آن استفاده کرده‌اند، می‌تواند جالب باشد!
عیب پاکان زود بر مردم هویدا می‌شود   موی اندر شیر خالص زود پیدا می‌شود! (صائب)

[2] این تعریف از نیم‌پیوستگی را با تعریف نیم‌پیوستگی بالایی و پایینی که برای توابع حقیقی‌مقدار روی یک فضای توپولوژیک تعریف می‌شوند، اشتباه نگیرید: «فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع $f: X \to \mathbb{R}$ را *نیم‌پیوستهٔ پایینی (بالایی)* گوییم اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعهٔ $f^{-1}(a,\infty)$ ($f^{-1}(-\infty,a)$) در X باز باشد.»

کوچکترین مجموعهٔ نیم‌بسته (به‌ترتیب، پیش‌بسته، α-بسته و β-بسته) که حاوی مجموعهٔ A باشد، σ-بستار (به‌ترتیب، *پیش‌بستار*، α-*بستار* و β-*بستار*) نامیده می‌شود و آن را با c_σ (به‌ترتیب، c_π، c_α و c_β) نمایش می‌دهیم.

معرفی مجموعه‌های α-باز توسط نیوستاد [۵۰] با انتشار مقالهٔ لوین تقریباً همزمان بود. نیوستاد که از پژوهش‌های لوین آگاه نبود، در مقالهٔ خود مجموعه‌های نیم‌باز را (که β-مجموعه نامیده بود) مجدداً تعریف کرد و همچون لوین ثابت کرد که اجتماع هر تعداد مجموعهٔ نیم‌باز، مجموعه‌ای نیم‌باز است و اینکه هر مجموعهٔ نیم‌باز را می‌توان به‌صورت اجتماعی از یک مجموعهٔ باز و یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال نوشت. بجز این شباهت‌ها که بخشی ناچیز از مقاله را تشکیل می‌داد، لوین بیشترِ توجهٔ خود را بر α-توپولوژی‌ها متمرکز کرد و نشان داد که خانوادهٔ مجموعه‌های α-باز (که آنها را α-مجموعه می‌نامید) تشکیل یک توپولوژی ظریف‌تر از توپولوژی اولیه می‌دهند. او توپولوژی‌ای را که خانوادهٔ مجموعه‌های α-باز آن، همان توپولوژی اولیه است، α-*توپولوژی* نامگذاری و ثابت کرد که

(الف) مجموعه‌های نیم‌باز در یک فضای توپولوژیک مجموعه‌های α-باز آن را مشخص می‌کنند؛

(ب) مجموعه‌های α-باز در یک فضای توپولوژیک تشکیل یک توپولوژی (ظریف‌تر از توپولوژی اولیه) می‌دهند؛

(پ) یک مجموعه α-باز است اگر و تنها اگر به‌صورت تفاضل یک مجموعهٔ باز و یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال نوشته شود.

او مجموعه‌ای را که خود و متمم‌اش هر دو نیم‌باز باشند، *به‌طور مینیمال کراندار*[۱] نامید که در واقع تعمیمی از مفهوم منظم است، زیرا برای یک مجموعهٔ باز این مفهوم با مفهوم باز منظم معادل است. او همچنین تعریف شبه‌پیوستگی را از مقالهٔ کَمپیستی [۳۴] یادآور می‌کند:

> «تابع $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ را *شبه‌پیوسته* گوییم اگر برای هر $x\in X$، هر $V\in\tau$ شامل x و هر $U\in\sigma$ شامل $f(x)$، مجموعه‌ای ناتهی مانند $W\in\tau$ مشمول در V وجود داشته باشد که $f(W)\subseteq U$.»

سپس متذکر می‌شود که یک تابع، شبه‌پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ باز، یک β-مجموعه (یعنی مجموعهٔ نیم‌باز) باشد که دقیقاً همان تعریف نیم‌پیوستگی لوین است. پس می‌توان گفت که کَمپیستی تابع‌های نیم‌پیوسته را ۳۰ سال قبل از لوین و نیوستاد، بر اساس مفهوم شبه‌پیوستگی ابداع کرده بود.

هرچند لوین و نیوستاد مستقل از هم، مجموعه‌های نیم‌باز و مفهوم نیم‌پیوستگی را بررسی کردند و ویژگی‌هایی مشابه را نتیجه گرفتند، آنچه نام لوین را بر سر زبان‌ها انداخت، انتشار نتایجش ۲ سال زودتر

[۱] minimally bounded

از نیوستاد، تمرکز بر مجموعه‌های نیم‌باز و تلاش برای جایگزینیِ مجموعه‌های نیم‌باز در سایر ساختارهای توپولوژی بود.[۱] بخشی دیگر از شهرت لوین[۲] مربوط به مقالهٔ [۳۷] به سال ۱۹۷۰ است. او در این مقاله، در را به‌روی دنیایی تازه از مجموعه‌های بازِ تعمیم‌یافته گشود ولی این بار از طریق مجموعه‌های بسته. او به‌عکسِ مقالهٔ قبلی‌اش [۳۵] که در آن، خانواده‌ای بزرگتر از مجموعه‌های باز را به‌دست آورده بود، درصدد برآمد تا این بار خانوادهٔ مجموعه‌های بسته در یک فضای توپولوژیک را گسترش دهد.

تعریف ۲.۳ (بستهٔ تعمیم‌یافته). زیرمجموعهٔ A از یک فضای توپولوژیک X را *بستهٔ تعمیم‌یافته* (به‌اختصار g-بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ باز حاوی A، حاوی $c(A)$ نیز باشد.

او ثابت کرد که A مجموعه‌ای g-بسته است اگر و تنها اگر $c(A) - A$ شامل هیچ مجموعهٔ بستهٔ ناتهی نباشد. برخلافِ خانوادهٔ مجموعه‌های بسته در یک فضای توپولوژیک، خانوادهٔ مجموعه‌های g-بسته نسبت به اشتراک متناهی بسته نیست. اما

(الف) اشتراک یک مجموعهٔ بسته و یک مجموعهٔ g-بسته، مجموعه‌ای g-بسته است؛

(ب) اجتماع دو مجموعهٔ g-بسته، مجموعه‌ای g-بسته است؛

(پ) هر زیرمجموعه از X که بین یک مجموعهٔ g-بسته مانند B و $c(B)$ قرار بگیرد، مجموعه‌ای g-بسته خواهد بود؛[۳]

(ت) هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای منتظم، مجموعه‌ای g-بسته است؛[۴]

(ث) هر مجموعهٔ g-بسته در هر زیرفضای X شامل آن مجموعه، یک مجموعهٔ g-بسته است؛

(ج) در یک فضای توپولوژیک نرمال، دو مجموعهٔ جدا از هم را که یکی بسته و دیگری g-بسته باشد، می‌توان با دو مجموعهٔ باز مجزا، از هم جدا کرد. ولی این مطلب برای دو مجموعهٔ g-بسته لزوماً درست نیست؛

(چ) تصویر هر مجموعهٔ g-بسته تحت یک تابع بسته و پیوسته، مجموعه‌ای g-بسته است؛

(ح) حاصل‌ضرب هر تعداد مجموعهٔ g-بسته در فضای حاصل‌ضربی، مجموعه‌ای g-بسته است.

لوین نشان داد که مجموعه‌های g-بسته از ویژگی‌هایی شبیه مجموعه‌های بسته برخوردارند. برای مثال، یک زیرمجموعهٔ g-بسته از یک فضای فشرده (لیندلوف، شمارا فشرده، پیرافشرده و نرمال)، فشرده (لیندلوف، شمارا فشرده، پیرافشرده و نرمال) خواهد بود. او مجموعهٔ g-باز را مجموعه‌ای می‌داند که متمم آن یک مجموعهٔ g-بسته باشد. سپس سعی می‌کند تا ویژگی‌های آنها را بررسی کند:

---

[۱] هرچند شهرت مجلهٔ American Mathematical Monthly را نیز نباید نادیده گرفت.

[۲] در توپولوژی‌های تعمیم‌یافته! وگرنه لوین خود یک توپولوژی‌دان بزرگ است.

[۳] بنابراین مجموعه‌های بستهٔ تعمیم‌یافتهٔ لوین همچون نیم‌بازهای او از همان ویژگی معروف مجموعه‌های همبند برخوردارند!

[۴] مشابه این ویژگی در فضاهای توپولوژیک این است که هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای نرمال، بسته است.

(خ) A مجموعهٔ g–بسته است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $A - c(A)$، g–باز باشد؛

(د) A مجموعه‌ای g–باز است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ بسته از A، زیرمجموعه‌ای از $i(A)$ نیز باشد؛

(ذ) اجتماع دو مجموعهٔ g–باز از هم جدا شده، مجموعه‌ای g–باز است؛

(ر) هر زیرمجموعه از X که بین یک مجموعهٔ g–باز مانند A و $i(A)$ قرار بگیرد، g–باز است؛

(ز) حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ g–باز، در فضای حاصل‌ضربی g–باز است.

روشن است که در یک فضای توپولوژیک، هر مجموعهٔ باز، g–باز و هر مجموعهٔ بسته، g–بسته است. ولی عکس این مطلب لزوماً صادق نیست. لوین ثابت کرد که یک مجموعهٔ g–بسته مانند A بسته است اگر و تنها اگر $A - c(A)$ بسته باشد. او فضایی را که در آن هر مجموعهٔ g–بسته، بسته است، *فضای* $T_{1/2}$ نامید[1] و نشان داد که نماد به‌کار رفته برای این اصل جداسازی، کاملاً معنادار است؛ یعنی اصل $T_{1/2}$ اکیداً بین T_0 و T_1 قرار می‌گیرد. او همچنین اصل جداسازی دیگری به‌نام *فضاهای متقارن* را این چنین معرفی کرد: «برای هر دو نقطهٔ x و y اگر $x \in c(y)$، آن‌گاه $y \in c(x)$» و ثابت کرد که این اصل جدید، با g–بسته بودنِ مجموعه‌های تک‌عضوی معادل است؛ اگر با T_0 همراه شود، با اصل T_1 معادل خواهد بود؛ و دیگر اینکه در فضاهای متقارن، اصل‌های T_0، $T_{1/2}$ و T_1 همگی با هم معادل‌اند.[2]

کارهای لوین در مورد مجموعه‌های بستهٔ تعمیم‌یافته، توسط سایرین پیگیری شد و انواع مشابه دیگری پا به عرصهٔ وجود نهادند:

تعریف ۳.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت A را

(الف) *نیم‌بستهٔ تعمیم‌یافته* (به‌اختصار sg–بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ نیم‌باز حاوی A، حاوی $c_\sigma(A)$ نیز باشد [۶]؛

(ب) *تعمیم‌یافتهٔ نیم‌بسته* (به‌اختصار gs–بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ باز حاوی A، حاوی $c_\sigma(A)$ نیز باشد [۴]؛

(پ) *تعمیم‌یافتهٔ α–بسته* (به‌اختصار $g\alpha$–بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ α–باز حاوی A، حاوی $c_\alpha(A)$ نیز باشد [۴۳]؛

(ت) *α–بستهٔ تعمیم‌یافته* (به‌اختصار αg–بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ باز حاوی A، حاوی $c_\alpha(A)$ نیز باشد [۴۲]؛

---

[1] بعدها دونهام [۲۴] توصیفی زیباتر برای چنین فضاهایی به‌دست آورد: یک فضا $T_{1/2}$ است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ تک‌عضویِ آن، باز یا بسته باشد.

[2] شبیه همان اتفاقی که در هر فضای توپولوژیک می‌افتد: اگر مجموعه‌های تک‌عضوی بسته باشند، دو اصل T_0 و T_1 با هم معادل هستند.

(ث) *تعمیم‌یافتهٔ β-بسته* (به‌اختصار $g\beta$-بسته) گوییم اگر هر مجموعهٔ باز حاوی A، حاوی $c_\beta(A)$ نیز باشد [۲۲].

مجموعهٔ sg-باز (به‌ترتیب، gs-باز، $g\alpha$-باز، $g\beta$-باز) مجموعه‌ای است که متمم آن sg-بسته (به‌ترتیب، gs-بسته، $g\alpha$-بسته، $g\beta$-بسته) باشد.

همچنین پیوند میان انواع مجموعه‌های بستهٔ تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفتند که برای نمونه، می‌توانید به [۹] و [۲۳] رجوع کنید. کار لوین در تعمیم مفهوم پیوستگی با جایگزینیِ مجموعه‌های نیم‌باز به‌جای مجموعه‌های باز، سرمشقی برای دیگر توپولوژی‌دانان شد:

تعریف ۴.۳. فرض کنیم f تابعی بین دو فضای توپولوژیک X و Y باشد. f را

(الف) *پیش‌پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ بسته، پیش‌بسته باشد [۴۶]؛

(ب) g-*پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ بسته، g-بسته باشد [۵]؛

(پ) α-*پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ بسته، α-بسته باشد [۴۸]؛

(ت) β-*پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ بسته، β-بسته باشد [۱۶]؛

(ث) αg-*پیوسته* گوییم اگر تصویر وارون هر مجموعهٔ بسته، αg-بسته باشد [۱۹].

مقاله‌های لوین، توپولوژی‌دانان زیادی را برانگیخت تا به مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته و بستهٔ تعمیم‌یافته روی آورند. حجم مقالات نگارش‌یافته و تعداد ریاضیدانانی که در این زمینه دستی داشته‌اند، خیلی زیاد است. تا ۲۷ سال بعد، بررسی ویژگی‌های جدید مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته و بستهٔ تعمیم‌یافته، در مسیری که لوین آن را پایه‌گذاری کرده بود، ادامه یافت. از جمله مهم‌ترینِ این ویژگی‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد: (الف) هر مجموعهٔ α-باز، یک مجموعهٔ نیم‌باز است؛ (ب) یک مجموعه α-باز است اگر و تنها اگر هم نیم‌باز و هم پیش‌باز باشد [۵۱]؛ (پ) هر مجموعهٔ β-باز، یک مجموعهٔ نیم-پیش‌باز است [۲۱].

تعداد زیادی از مجله‌های ریاضی، پذیرای چاپ مطالب مربوط به مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته و بستهٔ تعمیم‌یافته شدند که از آن جمله می‌توان به *اکتا متمتیکا هانگاریکا*[۱] اشاره کرد. تنوع و پراکندگی مقاله‌های نگارش‌یافته در این زمینه، چاسار را که سردبیر این مجله بود، بر آن داشت تا به این گوناگونی‌ها نظم ببخشد. او در سال ۱۹۹۷ مفهومی کلی‌تر به‌نام مجموعهٔ γ-*باز* را معرفی کرد [۱۳]:

تعریف ۵.۳ ([۱۳]). تابع $\gamma : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ را

(الف) *یکنوا* (یا یک *عمل* [۱۱]) گوییم در صورتی که برای هر دو زیرمجموعهٔ A و B از X اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$. مجموعهٔ همهٔ تابع‌های یکنوا روی $\mathscr{P}(X)$ را با $\Gamma(X)$ (به‌اختصار با Γ) نمایش می‌دهیم؛

[۱] Acta Mathematica Hungarica

(ب) *خودتوان* گوییم اگر برای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$؛

(پ) *افزایشی*[۱] (*کاهشی*[۲]) گوییم اگر برای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $A \subseteq \gamma(A)$ ($\gamma(A) \subseteq A$).

تابعی که یکنوا و افزایشی باشد، یک *پوش ضعیف*[۳] و اگر خودتوان نیز باشد، *پوش* نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۳ (γ-باز و γ-بسته، [۱۳]). فرض کنیم $\gamma \in \Gamma(X)$. زیرمجموعهٔ A از $\mathscr{P}(X)$ را γ-*باز* گوییم اگر $A \subseteq \gamma(A)$. همچنین B را γ-*بسته* می‌نامیم اگر $X - B$ مجموعه‌ای γ-باز باشد.

چاسار همچون لوین متوجه شد که خانوادهٔ مجموعه‌های γ-باز، نسبت به اجتماع دلخواه بسته است (گزارهٔ ۱.۱ از [۱۳]) و بنابراین هر اشتراک از مجموعه‌های γ-بسته نیز γ-بسته است. بنابراین به‌طور طبیعی به فکرِ تعریفِ درون و بستار بر اساس مجموعه‌های γ-باز افتاد. او درون و بستار متناظر با خانوادهٔ مجموعه‌های جدید را به‌گونه‌ای تعریف کرد که تعریف‌های قبلی را هم شامل شود.

تعریف ۷.۳ (γ-بستار و γ-درون، [۱۳]). فرض کنیم $\gamma \in \Gamma(X)$ و $A \subseteq X$.

(الف) اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌های γ-باز A را γ-*درون* A می‌نامیم و با $i_\gamma A$ نمایش می‌دهیم. $i_\gamma A$ بزرگترین زیرمجموعهٔ γ-باز A است؛

(ب) اشتراک همهٔ مجموعه‌های γ-بستهٔ حاوی A را γ-*بستار* A می‌نامیم و با $c_\gamma A$ نمایش می‌دهیم.

او نشان داد که شبیه فضاهای توپولوژیک، مجموعهٔ γ-باز (به‌ترتیب، γ-بسته) مجموعه‌ای است که با γ-درونش (به‌ترتیب، γ-بستارش) برابر باشد و متوجه شد که با در نظر گرفتن $\gamma = ci$ (به‌ترتیب، $\gamma = ic$، $\gamma = ici$ و $\gamma = cic$) در تعریف ۶.۳، به مفهوم مجموعهٔ نیم‌باز (به‌ترتیب، پیش‌باز، α-باز و β-باز) و نیم-بسته (به‌ترتیب، پیش‌بسته، α-بسته و β-بسته) در تعریف ۱.۳ خواهیم رسید. او همچنین توانست خانوادهٔ مجموعه‌های به‌طور ضعیف باز را زیر لوایِ مجموعه‌های γ-باز آورد [۴۰]، زیرا کافی بود γ به‌صورت $\gamma = c_{ci}i$ اختیار شود. از این‌رو مجموعه‌های نیم‌بسته، پیش‌بسته، α-بسته، β-بسته و به‌طور ضعیف بسته، چیزی جز خانوادهٔ مجموعه‌های γ-بسته به‌ازای یک γ مناسب، نخواهند بود. همان‌طور که در بخش ۲ گفتیم، مشهور[۴] و همکارانش همین کار را برای بعضی از بازها و پیوستگی‌های تعمیم‌یافته انجام داده بودند. اما آنچه کار چاسار را ممتاز کرد این بود که به کمترین شرایط بسنده کرد و تعداد بیشتری از بازها و پیوستگی‌ها را در یک قالب یکسان، متّحد کرد. همچنین ثابت کرد که در هر فضای توپولوژیک، مجموعه‌های i-باز و i-بسته به‌ترتیب، همان مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بستهٔ فضا هستند، $i_i = i$، $c_i = c$ و دیگر اینکه $icic = ic$ و $cici = ci$. پس هر حاصل‌ضرب از این نوع، با یکی از نگاشت‌های

---

[۱] enlarging [۲] restricting [۳] weak envelope [۴] A. S. Mashhour

i، c، ic، ci، cic یا ici برابر خواهد شد. در همان مقاله به بررسی γ-بازها در فضاهای توپولوژیک، اشتراک γ-بازها و γ-بازها در زیرفضاها پرداخت و نشان داد که اگر $X_\circ$ یک زیرفضای توپولوژیک X باشد، $A \subseteq X_\circ$ و عملگر $\hat{\gamma}$ را به‌صورت $\hat{\gamma}(A) = \gamma(A) \cap X_\circ$ تعریف کنیم، آن‌گاه عملگر بستار $c_\circ$ که از تحدید c به زیرفضای $X_\circ$ به‌دست می آید، با عملگر $\hat{c}$ که با جایگزینیِ $\hat{\gamma}$ در تعریف ۷.۳ حاصل می‌شود، یکسان است ولی این مطلب برای عملگر درون لزوماً صادق نیست.

بسته بودنِ خانوادهٔ مجموعه‌های γ-باز نسبت به اجتماع دلخواه، سودی دیگر نیز داشت. در واقع چاسار از پیشینهٔ تاریخی که در بخش ۲ به آن اشاره کردیم، آگاه بود و لزوم تعریف چنین مفهومی در ریاضیات را احساس می‌کرد. ولی همان‌طور که در مقدمهٔ [۱۵] ذکر می‌کند، بسته بودنِ خانوادهٔ مجموعه‌های γ-باز نسبت به اجتماع دلخواه و اینکه مجموعهٔ تهی نیز γ-باز است، او را در سال ۲۰۰۲ به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته رهنمون ساخت [۱۵].

۴. سیر تاریخی: پس از چاسار

کشف چاسار که یکی از پیشرفت‌های قابل توجه در توپولوژی عمومی در سال‌های اخیر بوده است، خیلی زود مورد توجه توپولوژی‌دانان قرار گرفت. چاسار توپولوژی تعمیم‌یافته را زیرخانواده‌ای مانند μ از $\mathscr{P}(X)$ تعریف کرد که شامل مجموعهٔ تهی و نسبت به اجتماع دلخواه، بسته باشد:

تعریف ۱.۴ (فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته، [۱۵]). فرض کنیم X یک مجموعه باشد.[1] زیرخانوادهٔ μ از $\mathscr{P}(X)$ را یک *توپولوژی تعمیم‌یافته* روی X می‌نامیم اگر

(الف) μ شامل $\emptyset$ باشد؛

(ب) اجتماع هر خانوادهٔ دلخواه از اعضای μ، عضوی از μ باشد.

مجموعهٔ X به‌همراه توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ μ را یک *فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته* (به‌اختصار، یک *فضای تعمیم‌یافته*) می‌نامیم و آن را با (X, μ) نمایش می‌دهیم.

او هر عضو μ را مجموعهٔ μ-باز و متمم آن را مجموعهٔ μ-بسته نامید. درون (بستار) یک زیرمجموعهٔ دلخواه از X را نیز مشابه فضاهای توپولوژیک تعریف کرد: اجتماع (اشتراک) همهٔ زیرمجموعه‌های μ-باز (مجموعه‌های μ-بستهٔ حاوی) آن مجموعه. اما برای اینکه از درون و بستار توپولوژیک متمایز باشند، آنها را μ-*درون* و μ-*بستار* نامید و به‌ترتیب، با i_μ و c_μ نمایش داد. او ثابت کرد که هر توپولوژی تعمیم‌یافته را می‌توان، به‌ازای یک $\gamma \in \Gamma$ مناسب، خانوادهٔ مجموعه‌های γ-باز تصوّر کرد. به عبارت دیگر، برای هر توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ μ، تابع یکنوای $\gamma \in \Gamma$ وجود دارد که μ برابر با خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های γ-باز

[1] همانند [۴۱] از قرار دادن شرط $X \neq \emptyset$ خودداری می‌کنیم تا اشتراک زیرفضاها، زیرفضا باشد و غیره.

است: برای هر مجموعهٔ A، کافی است $\gamma(A)$ را اجتماع همهٔ μ-زیرمجموعه‌های باز A بگیریم. در واقع γ چیزی جز عملگر درون i_μ نیست. از این‌رو خانوادهٔ مجموعه‌های μ-باز در واقع حالتی خاص از خانوادهٔ مجموعه‌های γ-باز است.

همچنین تعریفی از پیوستگی بر اساس مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته ارائه کرد:

تعریف ۲.۴ ([۱۵]). فرض کنیم (X,μ) و (X',μ') دو فضای توپولوژیک تعمیم‌یافته باشند. تابع $f:X\to X'$ را (μ,μ')-پیوسته گوییم اگر برای هر $U\in\mu'$ داشته باشیم $f^{-1}(U)\in\mu$.

به‌علاوه نشان داد که اگر (X,τ) و (X',τ') دو فضای توپولوژیک باشند، آن‌گاه با تعریف ۲.۴، می‌توان انواع پیوستگی‌ها را در قالبی واحد گنجانید به این صورت که (τ,τ')-پیوستگی، همان پیوستگی بین فضاهای توپولوژیک است؛ $(\sigma(\tau),\tau')$-پیوستگی، همان نیم‌پیوستگی؛ $(\pi(\tau),\tau')$-پیوستگی، همان پیش‌پیوستگی؛ و $(\beta(\tau),\tau')$-پیوستگی، همان β-پیوستگی است (تعریف ۴.۳ را ببینید).

او می‌دانست که همانند توپولوژی، دستگاه‌های همسایگی‌های یک نقطه باید اساس شناخت فضاهای تعمیم‌یافته باشند:

تعریف ۳.۴ ([۱۵]). فرض کنیم $\psi:X\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ تابعی باشد با این ویژگی که برای هر V، $x\in V$، $V\in\psi(x)$. در این صورت $V\in\psi(x)$ را یک همسایگی تعمیم‌یافتهٔ x و ψ را *دستگاه همسایگی‌های تعمیم‌یافته* روی X می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ دستگاه‌های همسایگی‌های تعمیم‌یافته روی X را با $\Psi(X)$ نمایش می‌دهیم.

با در دست داشتنِ هر دستگاه همسایگی تعمیم‌یافتهٔ ψ، می‌توان یک توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ $g=g_\psi$ ساخت [۱۵]. g_ψ متشکل از زیرمجموعه‌هایی مانند G از X است که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\forall x\in G\,\exists V\in\psi(x): V\subseteq G$$

و از هر توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ g نیز می‌توان یک دستگاه همسایگی $\psi=\psi_g$ به‌دست آورد: $V\in\psi_g(x)$ اگر و تنها اگر $x\in V\in g$. $\psi=\psi_g$ به گونه‌ای است که $g_{\psi_g}=g$.

چاسار برای اینکه بتواند انواع دیگری از پیوستگی‌ها را در قالب پیوستگی‌های تعمیم‌یافته درآورد، ناگزیر شد تعریف پیوستگی را بر اساس دستگاه همسایگی‌های تعمیم‌یافته ارائه کند:

تعریف ۴.۴ ([۱۵]). فرض کنیم (X,μ) و (X',μ') دو فضای تعمیم‌یافته باشند، $\psi\in\Psi(X)$ و $\psi'\in\Psi(X')$. تابع $f:X\to X'$ را (ψ,ψ')-پیوسته گوییم اگر به‌ازای هر $x\in X$ و هر $V'\in\psi'(f(x))$ مجموعهٔ $V\in\psi(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(V)\subseteq V'$.

چاسار با استفاده از دو ابزار g_ψ و ψ_g نشان داد که (ψ,ψ')-پیوستگی کلی‌تر از (g,g')-پیوستگی است:

قضیه ۵.۴ ([۱۵]). *هر تابع (ψ, ψ')-پیوسته، $(g_\psi, g_{\psi'})$-پیوسته است.*

قضیهٔ ۵.۴ می‌گوید که اگر تابعی برحسب دو دستگاه همسایگی تعمیم‌یافته، پیوسته باشد، آن‌گاه برحسب توپولوژی‌های تعمیم‌یافتهٔ تولید شده توسط آنها نیز پیوسته است. چاسار نشان داد که ممکن است عکس قضیهٔ ۵.۴ برقرار نباشد. با وجود این،

قضیه ۶.۴ ([۱۵]). *اگر f تابعی $(g_\psi, g_{\psi'})$-پیوسته باشد و یک توپولوژی تعمیم‌یافتهٔ g' وجود داشته باشد به‌طوری که $\psi' = \psi_{g'}$، آن‌گاه f، (ψ, ψ')-پیوسته نیز خواهد بود.*

همچنین اگر (X, τ) و (X', τ') دو فضای توپولوژیک باشند، آن‌گاه $(\psi_\tau, \psi_{\tau'})$-پیوستگی، چیزی جز پیوستگی بین فضاهای توپولوژیک نخواهد بود. او نشان داد که پیوستگی بر اساس مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته و بر اساس دستگاه همسایگی‌های تعمیم‌یافته، همهٔ مفاهیم گوناگون پیوستگی را که قبلاً برای فضاهای توپولوژیک تعریف شده‌اند (تعریف ۴.۳)، دربر می‌گیرد.

بی‌شک هدف اصلی چاسار از ابداع فضاهای تعمیم‌یافته، چیزی جز نظم بخشیدن به انواع بازهای تعمیم‌یافته و پیوستگی‌های تعمیم‌یافته در فضاهای توپولوژیک، نبود. اما او اکنون فضایی جدید در دست داشت که کم‌وبیش مانند فضاهای توپولوژیک رفتار می‌کرد. بسیاری از مفاهیم و قضیه‌های توپولوژی، برای فضاهای تعمیم‌یافته نیز قابل بررسی بود. بنابراین دور از ذهن نبود که بتوان مفهوم مجموعهٔ باز تعمیم‌یافته (مانند نیم‌باز، پیش‌باز، α-باز و β-باز) و پیوستگیِ تعمیم‌یافته را که برای فضاهای توپولوژیک تعریف می‌شوند، برای فضاهای تعمیم‌یافته نیز بررسی کرد. این کار توسط خودِ چاسار انجام گرفت:

تعریف ۷.۴ (مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته در فضاهای تعمیم‌یافته، [۱۴]). فرض کنیم (X, μ) یک فضای تعمیم‌یافته و i_μ و c_μ به‌ترتیب، نشان‌دهندهٔ عملگرهای درون و بستار در این فضا باشند. زیرمجموعهٔ A از X را

(الف) μ-*نیم‌باز* گوییم اگر $A \subseteq c_\mu i_\mu(A)$؛
(ب) μ-*پیش‌باز* گوییم اگر $A \subseteq i_\mu c_\mu(A)$؛
(پ) μ-α-*باز* گوییم اگر $A \subseteq i_\mu c_\mu i_\mu(A)$؛
(ت) μ-β-*باز* گوییم اگر $A \subseteq c_\mu i_\mu c_\mu(A)$؛
(ث) μ-ζ-*باز* گوییم اگر $A \subseteq c_\mu i_\mu(A) \cup i_\mu c_\mu(A)$؛
(ج) μ-ρ-*باز* گوییم اگر $A \subseteq c_{\pi(\mu)} i_{\pi(\mu)}(A)$؛
(چ) μ-ν-*باز* گوییم اگر $A \subseteq c_{\pi(\mu)} i_{\pi(\mu)} c_{\pi(\mu)}(A)$.

چاسار سپس نشان داد که خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های μ-نیم‌باز (به‌ترتیب، μ-پیش‌باز، μ-α-باز، μ-β-باز، μ-ζ-باز، μ-ρ-باز و μ-ν-باز) در فضای تعمیم‌یافتهٔ (X, μ) تشکیل یک فضای تعمیم‌یافتهٔ

دیگر روی (X,μ) می‌دهد که آنها را با $\sigma(\mu)$ (به‌ترتیب، $\pi(\mu)$، $\alpha(\mu)$، $\beta(\mu)$، $\zeta(\mu)$، $\rho(\mu)$ و $\nu(\mu)$) نمایش داد. او مجموعه‌های بالا را به‌اختصار با σ، π، α، β، ζ، ρ و ν نشان داد و ترکیب‌های دوتاییِ آنها را مورد بررسی قرار داد و ثابت کرد که کلیهٔ ترکیب‌های دوتاییِ این مجموعه‌ها، یکی از همین‌ها خواهد بود [۱۴]. او هرچند مجموعه‌های γ-باز را پیش از مجموعه‌های μ-باز معرفی کرد، بعدها مفهوم (μ,ν)-پیوستگی را به حالت کلی‌ترِ (γ,γ')-پیوستگی تعمیم داد:

تعریف ۸.۴ ((γ,γ')-پیوستگی، [۱۲]). فرض کنیم $\gamma\in\Gamma(X)$ و $\gamma'\in\Gamma(X')$. در این صورت تابع $f:X\to X'$ را (γ,γ')-پیوسته گوییم اگر برای هر مجموعهٔ γ'-باز A'، $f^{-1}(A')$ مجموعه‌ای γ-باز باشد.

با این تعریف، چاسار توانست شماری دیگر از تعریف‌های پیوستگی را متحد کند. در واقع اگر (X,τ) و (X',τ') دو فضای توپولوژیک باشند، آن‌گاه تابع‌های $(\sigma(\tau),\sigma(\tau'))$-پیوسته، $(\pi(\tau),\pi(\tau'))$-پیوسته، $(\beta(\tau),\beta(\tau'))$-پیوسته، به‌ترتیب چیزی جز تابع‌های غیرقاطع[1]، پیش غیرقاطع و β-غیرقاطع [۳۲] نیستند.

چاسار که همواره به دنبال تعمیم و کلیّت بخشیدن به مفاهیم موجود بود، با مشاهدهٔ ویژگی‌های مشترک ساختارهای مینیمال (زیرخانواده‌هایی از $\mathscr{P}(X)$ که شامل تهی و خود X باشند [۴۴])، توپولوژی‌ها و توپولوژی‌های تعمیم‌یافته، به این فکر افتاد که شاید بتوان ویژگی‌های اولیهٔ مشترک آنها را در یک زیرمجموعهٔ دلخواه از $\mathscr{P}(X)$ گردآورد. از این‌رو به فکر ابداع ساختارهای ضعیف افتاد [۱۸]. طبق تعریف او، یک *ساختار ضعیف* روی X، زیرخانواده‌ای مانند ν از $\mathscr{P}(X)$ است که فقط شامل $\emptyset$ باشد.[2] او هر عضو ν را *ν-باز* و متمم آن را *ν-بسته* نامید و به تعریف درون، بستار و مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته بر اساس آن دست زد و ویژگی‌های اولیهٔ چنین ساختارهایی را نتیجه گرفت. البته او پیش از آن در [۱۴، ۱۶] نیز شانس خود را با یک زیرخانوادهٔ دلخواه λ از $\mathscr{P}(X)$ آزموده بود و در [۱۶] سعی کرد تا با λ یک پوش بسازد و مجموعه‌های باز و بسته را بر اساس آن پوش تعریف کند. در همانجا، اصول جداسازی را نیز بر اساس λ تعریف کرد. سپس در [۱۴] به معرفی درون و بستار بر اساس λ پرداخت: فرض کنیم λ یک زیرخانواده از $\mathscr{P}(X)$ و μ خانوادهٔ متشکل از متمم‌های عضوهای λ باشد و $A\subseteq X$. درون A که آن را با $i_\lambda(A)$ نمایش می‌دهیم، برابر است با اجتماع همهٔ عضوهایی از λ که زیرمجموعهٔ A هستند. همچنین بستار A که آن را با نماد $c_\lambda(A)$ نمایش می‌دهیم، اشتراک عضوهایی از μ که حاوی A هستند. او ثابت کرده بود که حتی با یک زیرمجموعهٔ دلخواه λ از $\mathscr{P}(X)$ نیز، همان رابطهٔ معروف $c_\lambda(A)=X-i_\lambda(X-A)$ بین درون و بستار برقرار است. پژوهش‌های انجام گرفته پس از آن،

[2] به‌شوخی می‌توان گفت که او حتی تعمیم‌یافته‌ها را نیز تعمیم داد و به چیزی رسید که فقط به $\emptyset$ بند است!

[1] irresolute

راجع به بازهای تعمیم‌یافته و بسته‌های تعمیم‌یافته را می‌توان به چهار حوزهٔ اصلی تقسیم کرد: (۱) بازها و بسته‌های تعمیم‌یافتهٔ لوین؛ (۲) γ-بازها؛ (۳) μ-بازها؛ (۴) ساختارهای ضعیف و ساختارهای مینیمال.

۵. لزوم آگاهی از توپولوژی تعمیم‌یافته

توپولوژی‌های تعمیم‌یافته برخلاف ظاهر ساده و آسان‌گیری که دارند، در عمل خیلی پیچیده و سخت‌گیر هستند. رفتاری نامعلوم و متناقض از خود نشان می‌دهند. با این حال، توپولوژی‌های تعمیم‌یافته و به‌ویژه مجموعه‌های باز تعمیم‌یافته، کاربردهایی در سایر شاخه‌های ریاضی و علوم یافته است. مجموعه‌های بستهٔ تعمیم‌یافته، ویژگی‌هایی جدید از فضاهای توپولوژیک را پیش روی ما قرار می‌دهند. با استفاده از مجموعه‌های بستهٔ تعمیم‌یافته، گاهی توصیف‌هایی جدید از فضاهای شناخته‌شدهٔ قبلی به‌دست می‌آید و گاهی اشیایی کاملاً جدید ساخته می‌شود. توصیف فضاهای شدیداً ناهمبند و توپولوژی نیم‌منظم‌سازی[۱]، ایجاد فضاهایی شبیه فضاهای زیرماکسیمال، اصول جداسازی و پیوستگی‌های جدید، همگی از کاربردهای این گونه توپولوژی‌ها است. آنها نه‌تنها با اشیای دیگر ریاضی مانند مشبکه‌ها و شاخه‌های دیگر ریاضی مانند جبرخطی در پیوند هستند، بلکه پا را از مرزهای ریاضی فراتر گذاشته‌اند و با ابزارهایی چون توپولوژی دیجیتال و نظریهٔ نَرم مجموعه‌ها[۲] کم‌وبیش در علوم رایانه، شیمی، محیط‌زیست، علوم پزشکی، اقتصاد، مهندسی و علوم اجتماعی، سرک می‌کشند. خواننده می‌تواند برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ رفتار توپولوژی‌های تعمیم‌یافته، مقاله‌های [۹، ۲۳، ۲۵، ۳۸] را بخواند.

سپاسگزاری: نویسندگان وظیفهٔ خود می‌دانند از داور(ان) مقاله برای نظرات سازنده‌شان سپاسگزاری نمایند. همچنین نویسندهٔ دوم مایل است از نویسندگان اول و سوم که به‌ترتیب، استادان راهنمای دوره‌های دکتری و کارشناسی ارشد او بوده‌اند، به‌خاطر حوصله و زحماتشان صمیمانه قدردانی کند.

مراجع

[۱] خیّری، رسول، *μ-جداسازی‌ها در فضاهای توپولوژیک تعمیم‌یافته*، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۹۰.

[2] Abd El-Monsef, M. E., El-Deeb, S. N., Mahmoud, R. A., β-open sets and β-continuous mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.*, **12** (1983), 77–90.

[3] Alexandroff, P., Diskrete Räume, *Mat. Sb. (N.S.)*, **2** (1937), 501–518.

[4] Arya, S., Nour, T., Characterizations of s-normal spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **21** (1990), 717–719.

[5] Balachandran, K., Sundaram, P., Maki, H., On generalized continuous maps in topological spaces, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, **12** (1991), 5–13.

[۱] semi-regularization topology [۲] soft set theory

[6] Bhattacharya, P., Lahiri, B. K., Semi-generalized closed sets in topology, *Indian J. Math.*, **29** (1987), 375–382.

[7] Borges, C. J. R., On extensions of topologies, *Can. J. Math.*, **19** (1967), 474–487.

[8] Bourbaki, N., *General Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] Cao, J., Ganster M., Reilly, I., On generalized closed sets, *Topology & Appl.*, **123** (2002), 37–46.

[10] Császár, Á., *Foundations of General Topology*, Macmillan, London, 1963.

[11] Császár, Á., Further remarks on the formula for γ-interior, *Acta. Math. Hungar.,* **113** (2006), no. 4, 325–332.

[12] Császár, Á., γ-connected sets, *Acta. Math. Hungar.,* **101** (2003), no. 4, 273–279.

[13] Császár, Á., Generalized open sets, *Acta. Math. Hungar.,* **75** (1997), no. 1-2, 65–87.

[14] Császár, Á., Generalized open sets in generalized topologies, *Acta. Math. Hungar.,* **106** (2005), no. 1-2, 53–66.

[15] Császár, Á., Generalized topology, generalized continuity, *Acta. Math. Hungar.*, **96** (2002), 351–357.

[16] Császár, Á., Separation axioms for generalized topologies, *Acta. Math. Hungar.*, **104** (2004), 63–69.

[17] Császár, Á., Simultaneous extensions of topologies through traces of neighbourhood filters, *Acta. Math. Hungar.*, **91** (2001), 187–193.

[18] Császár, Á., Weak structures, *Acta. Math. Hungar.*, **131** (2011), 193–195.

[19] Devi, R., Balachandran, K., Maki, H., On generalized α-continuous maps and α-generalized continuous maps, *Far East J. Math. Sci.,* **1** (1997), 1–15.

[20] Doitchinov, D. B., A unified theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 595–598.

[21] Dontchev, J., Characterization of some peculiar topological spaces via $\mathcal{A}$- and $\mathcal{B}$-sets, *Acta. Math. Hungar.*, **69** (1995), no. 1-2, 67–71.

[22] Dontchev, J., On generating semi-preopen sets, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, **16** (1995), 35–48.

[23] Dontchev, J., Ganster, M., On δ-generalized closed sets and $T_{3/4}$-spaces, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, **17** (1996), 15–31.

[24] Dunham, W., $T_{1/2}$-spaces, *Kyungpook Math. J.*, **17** (1977), 161–169.

[25] Flamm, C., Stadler, B. M. R., Stadler, P. F., Generalized topologies: Hypergraphs, chemical reactions and biological evolution, *Advances in Mathematical Chemistry and Applications*, vol. 2, 2015, pp. 300–328.

[26] Fomin, S., Extensions of topological spaces, *Annals of Math.*, **44** (1943), no. 3, 471–480.

[27] Gahler, W., Monadic topology: a new concept of generalized topology in: Recent Developments of General Topology, *Mathematical Research*, **67** (1992), 136–149, Akademie-Verlag, Berlin.

[28] Gahler, W., General topology: The monadic case, examples, applications, *Acta. Math. Hungar.*, **88** (2000), 279–290.

[29] Hamlett, T. R., A correction to the paper "semi-open sets and semicontinuity in topological spaces" by Norman Levine, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49** (1975), no. 2, 458–460.

[30] Herrlich, H., Topological structures, *Math. Centre Tracts.*, **52** (1974), 59–122.

[31] Hewitt, E., A problem of set-theoretic topology, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 309–333.

[32] Jafari, S., Noiri, T., Properties of β-connected spaces, *Acta Math. Hungar.*, **101** (2003), no. 3, 227–236.

[33] Katětov, M., On continuity structures and spaces of mappings, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, **6** (1965), 257–278.

[34] Kempisty, S., Sur les fonctions quasicontinues, *Fund. Math.*, **19** (1932), 184–197.

[35] Levine, N., Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 36–41.

[36] Levine, N., Simple extensions of topologies, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 22–25.

[37] Levine, N., Generalized closed sets in topology, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **19** (1970), 89–96.

[38] Li, Z., Xie, T., The relationship among soft sets, soft rough sets and topologies , *Soft. Comput.*, **18** (2014), 717–728.

[39] Lugojan, S., Generalized topology (Romanian with English summary), *Stud. Cerc. Mat.*, **34** (1982), 348–360.

[40] Maheshvari S. N., Tapi, U., Note on some applications of feebly open sets, *M. B. J. Univ. of Saugar*, (1979).

[41] Makai Jr., E., Peyghan, E., Samadi, B., Weak and strong structures and the $T_{3.5}$ property for generalized topological spaces, *Acta Math. Hungar.*, **150** (2016), no. 1, 1–35.

[42] Maki, H., Balachandran, K., Devi, R., Associated topologies of generalized α-closed sets and α-generalized closed sets, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, **15** (1994), 51–63.

[43] Maki, H., Devi, R., Balachandran, K., Generalized α-closed sets in topology, *Bull. Fukuoka Univ. Ed.*, **42** (1993), no. 3, 13–21.

[44] Maki, H., Umehara J., Noiri, T., Every topological space is pre-$T_{1/2}$, *Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Ser. A Math.*, **139** (1996), no. 17, 33–42.

[45] Mala, J., Relators generating the same generalized topology, *Acta Math. Hungar.*, **60** (1992), no. 1-2, 291–297.

[46] Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E., El-Deeb, S. N., On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, **53** (1982), 47–53.

[47] Mashhour, A. S., Allam, A. A., Mahmoud F. S., Khedr, F. H., On supratopological spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **14** (1983), 502–510.

[48] Mashhour, A. S., Hasanein, I. A., El-Deeb, S. N., α-continuous and α-open mappings, *Acta Math. Hungar.*, **41** (1983), 213–218.

[49] Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E., El Deeb, S. N., On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, **53** (1982), 47–53.

[50] Njåstad, O., On some classes of nearly open sets, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 961–970.

[51] Noiri, T., On α-continuous functions, *Casopis Pest. Mat.*, **109** (1984), 118–126.

[52] Száz, Á., Basic tools and mild continuities in relator spaces, *Acta. Math. Hungar.*, **50** (1987), 177–201.

[53] Weil, A., *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Hermann, Paris, 1937.

[54] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley, New York, 1970.

محمدرضا احمدی زند: دانشگاه یزد، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: mahamdi@yazd.ac.ir

رسول خیّری: دانشگاه یزد، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: rasoul.khayyeri@yahoo.com

رستم محمدیان: دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

رایانامه: mohamadian_ r@scu.ac.ir