فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸)، صص. ۱۴۳تا ۱۶۰

آشنایی با معادلات دیفرانسیل تأخیری

محمدرضا رزوان و نیلوفر فرج‌زاده طهرانی

چکیده

در این مقاله، دستگاه‌های دینامیکی متناظر با معادلات دیفرانسیل تأخیری را معرفی و برخی نتایج آشنا و مهم دربارهٔ آنها را بیان می‌کنیم. همچنین به برخی از پیچیدگی‌هایی که در اثر وجود تأخیر در معادلات بروز پیدا می‌کنند، اشاره می‌کنیم. همانند معادلات دیفرانسیل عادی، با مطالعهٔ دستگاه‌های خطی و دستگاه‌های خطی‌سازی‌شده حول نقاط تعادل، شناخت خوبی نسبت به معادلات دیفرانسیل تأخیری و پایداری نقاط تعادل می‌توان کسب کرد. هرچند روش‌ها شبیه روش‌هایی هستند که در مورد معادلات دیفرانسیل عادی به‌کار می‌رود، بررسی معادلات خطی تأخیری چالش‌های ویژهٔ خود را دارد. ماهیت فضای جواب نیز نسبت به معادلات دیفرانسیل عادی متفاوت است و جواب‌ها در فضای تابعی بی‌نهایت بُعدی واقع می‌شوند. در این راستا به انشعاب‌ها در دستگاه‌های تأخیری نیز اشاره می‌کنیم.

۱. سرآغاز

از زمانی که نیوتون و لایب‌نیتس حساب دیفرانسیل و انتگرال را در قرن هفدهم پایه‌گذاری کردند، مسائل بسیاری در فیزیک، زیست‌شناسی، مکانیک، اقتصاد و ... به‌وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل عادی بررسی و حل شده‌اند. معادلات دیفرانسیل عادی، مدل‌های مناسبی برای توصیف دستگاه‌هایی هستند که قوانین لحظه‌ایِ علیّت را توصیف می‌کنند؛ به این معنی که آهنگ تغییرات حالت دستگاه، تنها به حالت فعلی دستگاه بستگی دارد نه به گذشتهٔ آن. این در حالی است که تأخیر زمانی[۱] در بسیاری از فرآیندها قابل چشم‌پوشی نیست. برای مثال، یک سیگنال برای رسیدن به مقصد مورد نظر، به زمان نیاز دارد؛ یک

عبارات و کلمات کلیدی. معادلات دیفرانسیل تأخیری؛ دستگاه‌های دینامیکی؛ انشعاب؛ پایداری.

[۱] time delay

© ۱۳۹۸ (انجمن ریاضی ایران)

راننده برای عکس‌العمل نشان دادن در مقابل تصادف احتمالی، به زمان نیاز دارد؛ بسیاری از سازوکارها و بازخوردهای زیستی با تأخیر همراه هستند. تأخیر برای توصیف برخی از جنبه‌های بیماری‌های عفونی نیز به‌کار می‌رود: سرایت اولیه، دورهٔ درمان دارویی و مرحلهٔ ایمنی یافتن نسبت به بیماری. به‌علاوه، چون برخی موجودات برای امکان باروریِ مجدد به زمان نیاز دارند، مطالعات آماری حکایت از وجود شواهدی از تأثیر تأخیر در دینامیک جمعیتیِ برخی از گونه‌های زنده دارند. در این مثال‌ها تأثیر یک تغییر، لزوماً آنی نیست. از این‌رو آیندهٔ دستگاه به گذشتهٔ آن نیز وابسته است. در مدل‌سازیِ کنترل سطح دی‌اکسید کربن در خون، فاصلهٔ زمان بازیابیِ اکسیژن خون در ریه‌ها و تحریک گیرندهٔ شیمیایی در ساقهٔ مغز، به‌عنوان تأخیر در مدل لحاظ می‌شود. در بررسی انتقال اطلاعات بین نورون‌ها، مشاهده شده است که انتقال سیگنال بین نورون‌های متصل و یا اعمال بازخورد یک سلول به خود، در حالت کلی آنی نیست و در برخی از نواحیِ مغز، تأخیر زمانی در انتقال اطلاعات قابل صرف‌نظر کردن نیست. این تأخیر، ناشی از سرعت متناهی هدایت سیگنال در سیناپس است. چنین دستگاه‌هایی با معادلات دیفرانسیل تابعی[۱] یا معادلات دیفرانسیل تأخیری[۲] مدل‌سازی می‌شوند.

معادلات دیفرانسیل تأخیری و تابعی بیش از ۲۰۰ سال است که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱]. برخی از کارهای اولیه برگرفته از مسائلی در هندسه و نظریهٔ اعداد است. بسیاری از پژوهشگران به‌خوبی از وجود اثر تأخیر بر دستگاه‌های فیزیکی آگاه بودند اما نبودِ نظریه‌های کافی مانع از به‌کار بردن و تحلیل چنین مدل‌هایی می‌شد. در طول ۵۰ سال اخیر، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تابعی به‌طور گسترده‌ای مطالعه شده که این، گامی بزرگ در بررسی و تحلیل معادلات دیفرانسیل تأخیری بوده است. اما یافتن ایده‌هایی برای معادلات دیفرانسیل تابعی با توجه به آنچه از معادلات دیفرانسیل عادی می‌دانیم، کاری زمان‌بر بوده و هست [۲]. برای دیدن معادلات دیفرانسیل مربوط به مدل‌هایی که در بالا به آنها اشاره شد و مثال‌های بیشتر، [۳] را بخوانید.

در قرن نوزدهم، اویلر، لاگرانژ و لاپلاس به مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تأخیری در ارتباط با مسئله‌های هندسی متعددی پرداختند. اواخر دههٔ سی و اوایل دههٔ چهل میلادی، ولترا طی بررسی‌های خود روی مدل شکار–شکارچی، تعدادی معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری معرفی کرد و اولین کسی بود که به مطالعهٔ سازمان‌یافتهٔ چنین معادلاتی پرداخت. تقریباً ده سال بعد، مینورسکی[۳] هنگام بررسی تثبیت‌کننده‌های کشتی و فرمان اتوماتیک، اهمیت تأخیر در سازوکار خودبازخورد را نشان داد. کمبود ابزارهای نظری لازم تا دههٔ شصت میلادی، محدودیت‌هایی در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تابعی ایجاد کرد. از آن زمان به بعد، پیش‌زمینهٔ نظریِ آن به‌اندازهٔ قابل توجهی پایه‌گذاری شده است.

[۱] functional differential equations [۲] delay differential equations [۳] Nicolas Minorsky

بین نظریهٔ معادلات دیفرانسیل عادی و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تأخیری، شباهت‌های زیادی وجود دارد و هرجا که امکان‌پذیر بوده است، ابزارهای تحلیلی معادلات دیفرانسیل عادی برای معادلات دیفرانسیل تأخیری تعمیم داده شده‌اند. اما تفاوت‌های مهمی نیز بین این دو دسته وجود دارد. برای مثال، فضای حالت یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی، دارای بُعد متناهی است، در حالی که یک معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری، یک دستگاه دینامیکی با بُعد نامتناهی پدید می‌آورد. این ویژگی ناشی از نیاز دستگاه تأخیری به یک تابع اولیه به‌جای مقدار اولیه است. آنچه ما را برای مطالعهٔ دستگاه‌های تأخیری تشویق و ترغیب می‌کند، بروز تأخیر در طیف گسترده‌ای از پدیده‌های زیستی است. این طیف شامل مدل‌هایی در زیست‌شناسیِ جمعیتی، فیزیولوژی، همه‌گیر شناسی، اقتصاد و شبکه‌های عصبی می‌شود. همچنین می‌توان به کاربرد تأخیر در کنترل دستگاه‌های مکانیکی نیز اشاره کرد.

۲. مشاهدهٔ اثر تأخیر در یک معادلهٔ ساده

در این بخش، به بررسی یک مثال از معادلات دیفرانسیل تأخیری می‌پردازیم [۳]. خواهیم دید که تأخیر تا چه اندازه می‌تواند بر دینامیک دستگاه اثرگذار باشد. معادلهٔ دیفرانسیل تأخیریِ

$$\dot{u}(t) = -u(t-\tau) \tag{۱.۲}$$

را در نظر بگیرید که در آن، τ پارامتر تأخیر زمانی است و علامت منفی در سمت راست معادله، نشان‌دهندهٔ بازخورد منفی است. اگر $\tau = ۰$، آن‌گاه معادلهٔ (۱.۲) به معادلهٔ دیفرانسیل عادی[۱] $\dot{u}(t) = -u(t)$ تبدیل می‌شود که جواب عمومی آن، $u(t) = u(۰)e^{-t}$ است و این جواب به صفر نزول می‌کند، وقتی $t \to \infty$. برای بررسی جواب‌های (۱.۲)، به یک تابع اولیه نیاز داریم. برای مثال، با انتخابِ $u(t) = ۱$ به‌ازای $-\tau \leq t \leq ۰$، معادلهٔ (۱.۲) برای $t > ۰$ دارای جواب یکتا است. پس شرط اولیه برای (۱.۲) به‌صورت

$$u(t) = ۱, \qquad -\tau \leq t \leq ۰ \tag{۲.۲}$$

است. برای به‌دست آوردن جواب، از روش گام به گام[۲] استفاده می‌کنیم. روی بازهٔ $۰ \leq t \leq \tau$ داریم $-\tau \leq t-\tau \leq ۰$ و در نتیجه $\dot{u}(t) = -u(t-\tau) = -۱$. بنابراین

$$u(t) = u(۰) + \int_۰^t (-۱)ds = ۱ - t, \qquad ۰ \leq t \leq \tau. \tag{۳.۲}$$

[۱] ordinary differential equation [۲] method of steps

برای به‌دست آوردن جواب روی بازهٔ $\tau \le t \le ۲\tau$، می‌گوییم چون $\circ \le t-\tau \le \tau$، با استفاده از (۳.۲) به‌عنوان تابع اولیه برای بازهٔ جدید، به‌دست می‌آوریم

$$\dot{u}(t) = -u(t-\tau) = -[۱-(t-\tau)], \qquad \tau \le t \le ۲\tau.$$

بنابراین برای $\tau \le t \le ۲\tau$ داریم

$$\begin{aligned} u(t) &= u(\tau) + \int_\tau^t [-۱+(s-\tau)]ds \\ &= ۱-\tau+[-s+\frac{۱}{۲}(s-\tau)^۲]\Big|_{s=\tau}^{s=t} \\ &= ۱-t+(t-\tau)^۲/۲. \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

با ادامهٔ این رَوَند، می‌توان دید که جواب در حالت کلی عبارت است از

$$u(t) = ۱+\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^k\frac{(t-(k-۱)\tau)^k}{k!}, \qquad (n-۱)\tau \le t \le n\tau. \tag{۵.۲}$$

در نتیجه $u(t)$ روی زیربازهٔ $[(n-۱)\tau, n\tau]$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است. بنابراین بجز در زمان‌های $n\tau$، $n \ge \circ$، $u(t)$ یک تابع هموار است. از (۳.۲)، (۴.۲) و (۵.۲) نتیجه می‌گیریم که

(۱) $\dot{u}(\circ^-) = \circ$ و $\dot{u}(\circ^+) = -۱$ که در نتیجه $\dot{u}$ در $t=\circ$ یک ناپیوستگی دارد؛

(۲) $\ddot{u}(\tau^-) = \circ$ و $\ddot{u}(\tau^+) = ۱$ که در نتیجه $\ddot{u}$ در $t=\tau$ یک ناپیوستگی دارد؛

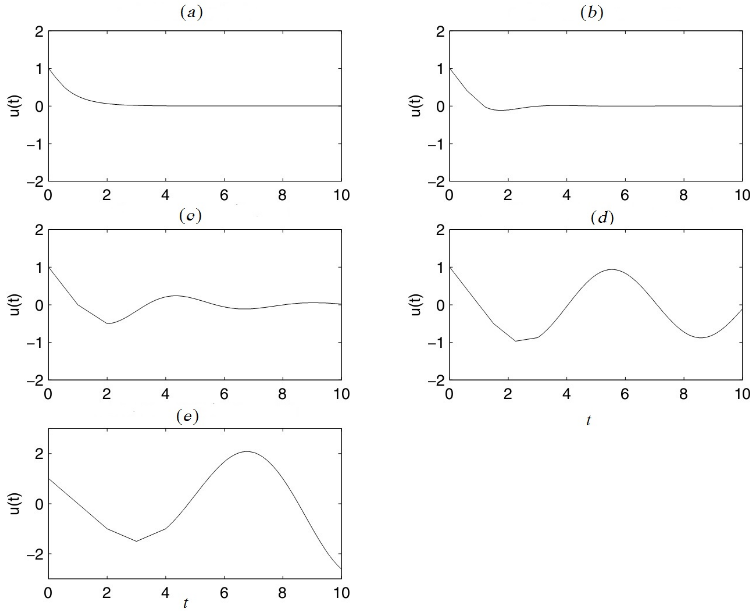
(۳) $u^{(n)}((n-۱)\tau^-) = \circ$ و $u^{(n)}((n-۱)\tau^+) = (-۱)^n$؛

(۴) u روی $((n-۱)\tau, \infty)$، n مرتبه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

در اینجا $u^{(j)}(s^+)$ مشتق jاُم راست و $u^{(j)}(s^-)$ مشتق jاُم چپ در s است. توجه کنید که با افزایش t، u هموارتر می‌شود. در شکل ۱، $u(t)$ به‌ازای چند مقدار τ به‌صورت عددی محاسبه شده است. به‌ازای تأخیر کوچک، مشاهده می‌شود که جواب‌ها لزوماً به صفر نزول نمی‌کنند، بلکه نوسان می‌کنند. روشن است که $u \equiv \circ$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل تأخیریِ (۱.۲) است. می‌توان بررسی کرد که به‌ازای $\tau < \pi/۲$، این جواب پایدار است و به‌ازای $\tau > \pi/۲$، ناپایدار.

۳. معادلات دیفرانسیل تأخیری و دستگاه‌های دینامیکی

در این بخش، به معرفی معادلات دیفرانسیل تأخیری و دستگاه دینامیکی متناظر با آنها می‌پردازیم. همچنین برخی احکام پایه‌ای و مهم دربارهٔ این دسته از معادلات را بیان خواهیم کرد. تعریف‌ها و قضیه‌ها



شکل ۱. جواب‌های معادلهٔ (۱.۲) به‌ازای مقادیر مختلف τ. (a) بدون نوسان به‌ازای $\tau = ۰/۲۵$. (b) بروز علائم نوسان به‌ازای $\tau = ۰/۶$. (c) نوسان میرا به‌ازای $\tau = ۱$. (d) نوسان میرای بسیار کند به‌ازای $\tau = ۱/۵$. (e) نوسان غیر میرا به‌ازای $\tau = ۲$.

بر اساس کتاب‌های کوانگ [۴]، اسمیت [۳]، هیل [۵] و آرینو [۲] هستند که برای دیدن اثبات‌ها و سایر احکام، می‌توانید آنها را بخوانید.

فرض کنیم $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد که در آن، $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ و $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, ۰], \mathbb{R}^n)$ فضای باناخ توابع پیوسته روی بازهٔ $[-r, ۰]$ است. در حالت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری غیرخطی عبارت است از

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{۱.۳}$$

که در آن، $\tau > ۰$ پارامتر تأخیر است و $\tau \in [۰, r]$. اگر $s \in \mathbb{R}$ و $\phi : [s-\tau, s] \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد، تابع x جواب معادلهٔ (۱.۳) نامیده می‌شود اگر برای یک مقدار $\sigma > ۰$، به‌ازای $s \leq t < s+\sigma$ در معادلهٔ (۱.۳) صدق کند و داشته باشیم

$$x(t) = \phi(t), \qquad s-\tau \leq t \leq s. \tag{۲.۳}$$

در ادامه گاهی از نماد x_t استفاده می‌کنیم که به‌صورت

$$x_t(\theta) := x(t-\theta), \qquad \theta \in [\circ, r]$$

تعریف می‌شود. توجه می‌کنیم که منظور از مشتق در معادلهٔ (۱.۳)، مشتق راست در s است. اگر جواب معادلهٔ (۱.۳) یکتا باشد، به‌ازای هر $t \geq \circ$ تعریف می‌کنیم

$$T(t)\phi = x_t(s, \phi).$$

عملگر $T(t)$، فضای $\mathcal{C}$ را به خودش می‌نگارد: اگر $\phi \in \mathcal{C}$، آن‌گاه $x_t(s,\phi) \in \mathcal{C}$. T نگاشت جواب

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x_s = \phi, \qquad t \geq s - \tau \end{cases}$$

نامیده می‌شود. معادلهٔ (۱.۳) می‌تواند شامل معادلات دیفرانسیل عادی، معادلات دیفرانسیل تفاضلی و معادلات دیفرانسیل انتگرالی نیز باشد. در واقع یافتن جوابی برای معادلهٔ (۱.۳) هم‌ارز با حل معادلهٔ انتگرالی

$$\begin{cases} x(t) = \phi(\circ) + \displaystyle\int_s^t f(\sigma, x_\sigma) d\sigma, \qquad t \geq s, \\ x_s = \phi. \end{cases}$$

است. برای اثبات وجود جواب با شرط $(s,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$، یک $\alpha > \circ$ و مجموعهٔ همهٔ توابع x را که روی بازهٔ $[s-r, s+\alpha]$ پیوسته هستند و روی $[s-r, s]$ بر ϕ منطبق می‌شوند، در نظر می‌گیریم. مقادیر چنین تابع‌هایی روی بازهٔ $[s, s+\alpha]$ باید در شرط $| x(t) - \phi(\circ) | \leq \beta$ صدق کنند. نگاشت T که از معادلهٔ انتگرالی متناظر به‌دست می‌آید، خوش‌تعریف است و می‌توان نشان داد که با انتخاب مناسبِ α و β، نگاشت T این رده را به خودش می‌نگارد و کاملاً پیوسته است (به این معنی که پیوسته است و مجموعه‌های کراندار را به مجموعه‌های فشرده می‌نگارد). با این شرایط، وجود جواب از قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر[1] نتیجه می‌شود.

فرض کنیم x جوابی برای معادلهٔ (۱.۳) روی بازهٔ $[\sigma, a)$ باشد. $\hat{x}$ توسیعی از x نامیده می‌شود اگر $b > a$ وجود داشته باشد که $\hat{x}$ روی بازهٔ $[\sigma-\tau, b)$ تعریف شود، با x در بازهٔ $[\sigma-\tau, a)$ برابر باشد و روی بازهٔ $[\sigma, b)$ در معادلهٔ (۱.۳) صدق کند. اگر برای جوابی مانند x چنین توسیعی وجود نداشته باشد، یعنی (σ, a) بازهٔ ماکسیمال وجود جواب باشد، آن‌گاه جواب x توسیع‌ناپذیر نامیده می‌شود. وجود یک جواب توسیع‌ناپذیر از لم تسورن نتیجه می‌شود.

[1] Schauder fixed point theorem

قضیه ۱.۳. فرض کنیم Ω یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$، $f : \Omega \to \mathcal{C}$ یک تابع کاملاً پیوسته و x یک جواب توسیع‌ناپذیر برای معادلهٔ (۱.۳) روی $[\sigma - \tau, b)$ باشد. در این صورت به‌ازای هر مجموعهٔ بسته و کراندار $U \subseteq \Omega$، یک مقدار t_U وجود دارد به‌طوری که به‌ازای $t_U \leq t < b$ داریم $(t, x(t-\tau)) \notin U$.

به بیان دیگر، جواب معادلهٔ (۱.۳) یا برای هر $t \geq \sigma$ وجود دارد و یا اینکه در یک زمان متناهی بی‌کران می‌شود. به‌علاوه، منظور از اینکه تابع $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ کاملاً پیوسته است، این است که مجموعه‌های کراندار در $\mathcal{C}$ را به مجموعه‌های کراندار در $\mathbb{R}^n$ می‌نگارد.

می‌گوییم $x : [s - \tau - \alpha, s] \to \mathbb{R}^n$ برای $\alpha > ۰$ یک جواب پسرو برای معادلهٔ (۱.۳) است اگر x پیوسته باشد، $x_s = \phi$ و x در معادلهٔ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad t \in [s - \alpha, s] \tag{۳.۳}$$

صدق کند. چون $x_s = \phi$ نیز باید برقرار باشد، $x_t = \phi(t - s)$ باید به‌ازای $t \in [s - \alpha, s]$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد؛ معادلاً ϕ در بازهٔ $[-\alpha, ۰]$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. در نتیجه ϕ باید عضوی خاص از $\mathcal{C}$ باشد، چراکه اغلب اعضای $\mathcal{C}$ مشتق‌پذیر نیستند. همچنین علاوه بر شرط یادشده، باید داشته باشیم

$$\dot{\phi}(۰) = \dot{x}(s) = f(s, x_s) = f(s, \phi)$$

که $\dot{\phi}(۰)$ مشتق چپ ϕ در ۰ است. این شرط یادآور شرایط مسائل با قید مرزی در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است و باز هم نشان‌دهندهٔ خاص بودن تابعی است که دارای شرایط یادشده است. در نتیجه برای یک تابع معمولی $\phi \in \mathcal{C}$، غالباً جواب پسرو برای معادلهٔ (۱.۳) وجود ندارد. توسیع پسرو به معنی حل معادلهٔ (۱.۳) برای $t < s$ است. لازم به ذکر است که تقارن ذاتی که در وجود جواب برای زمان‌های مثبت و منفی (پیشرو و پسرو) در معادلات دیفرانسیل عادی دیده می‌شود، برای معادلات دیفرانسیل تأخیری برقرار نیست.

۴. دستگاه‌های دینامیکی تأخیری

قبل از تعریف دستگاه‌های دینامیکی در فضای کلی معادلات دیفرانسیل تأخیری، نیاز است که مفهوم فرآیند را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $u : \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^+ \to X$ یک نگاشت باشد. برای $\sigma \in \mathbb{R}$ و $t \in \mathbb{R}^+$، نگاشت $U(\sigma, t) : X \to X$ را به‌صورت $U(\sigma, t)x = u(\sigma, x, t)$ تعریف می‌کنیم. یک فرآیند روی X نگاشت $u : \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^+ \to X$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) u پیوسته باشد؛
(ب) $U(\sigma,\circ)=I$ که I نگاشت همانی است؛
(پ) $U(\sigma+s,t)U(\sigma,s)=U(\sigma,s+t)$.

فرض کنیم $f:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ تابعی کاملاً پیوسته و $x(\sigma,\phi)$ جواب معادلهٔ

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\qquad x_\sigma=\phi \tag{۱.۴}$$

باشد که به‌طور یکتا برای $t\geq\sigma$ تعریف شده است. از قضیه‌های پیوستگی نسبت به شرط اولیه و پارامترها، نتیجه می‌شود که $x(\sigma,\phi)(t)$ نسبت به σ، ϕ و t که $\sigma\in\mathbb{R}$، $\phi\in\mathcal{C}$ و $\sigma\leq t$ پیوسته است. اگر تعریف کنیم

$$u(\sigma,\phi,\tau)=x_{\sigma+\tau}(\sigma,\phi),$$

آن‌گاه u یک فرآیند روی $\mathcal{C}$ است. فرض کنیم $T(t,\sigma)$ عملگر جواب برای معادلهٔ (۱.۴) باشد که با

$$T(t,\sigma)\phi=x_t(\sigma,\phi) \tag{۲.۴}$$

تعریف می‌شود. در این صورت $U(\sigma,\tau)=T(\sigma+\tau,\sigma)$ که $U(\sigma,\tau)\phi=u(\sigma,\phi,\tau)$. در واقع، $u(\sigma,\phi,\tau)$ حالت دستگاه در زمان $\sigma+\tau$ است با این شرط که در زمان اولیهٔ σ در ϕ بوده است.

تعریف ۲.۴. فرآیند u را دستگاه دینامیکی (پیوسته) می‌نامیم اگر $U(\sigma,t)$ مستقل از σ باشد، یعنی با فرضِ $T(t)=U(\circ,t)$ برای $t\geq\circ$، $T(t)x$ در $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times X$ پیوسته باشد و

$$T(\circ)=I,\quad T(t+\tau)=T(t)T(\tau)\qquad \forall t,\tau\in\mathbb{R}^+.$$

همچنین $\{T(t):t\geq\circ\}$ هم دستگاه دینامیکی (پیوسته) خوانده می‌شود. جواب‌های پیشرو وجود دارند ولی جواب‌های پسرو لزوماً قابل تعریف نیستند. بنابراین دستگاه دینامیکی وابسته به یک معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری، در واقع یک نیم–دستگاه دینامیکی ($t\geq\circ$) است.

فرض کنیم u یک فرآیند روی X باشد. مسیر $\gamma^+(\sigma,x)$ گذرنده از $(\sigma,x)\in\mathbb{R}\times X$ عبارت است از

$$\gamma^+(\sigma,x)=\left\{(\sigma+t,U(\sigma,t)x):t\in\mathbb{R}^+\right\}\subseteq\mathbb{R}\times X.$$

مدار $O^+(\sigma,x)$ گذرنده از (σ,x) نیز عبارت است از مجموعهٔ

$$O^+(\sigma,x)=\left\{U(\sigma,t)x:t\in\mathbb{R}^+\right\}\subseteq X.$$

اگر H زیرمجموعه‌ای از X باشد، آن‌گاه

$$\gamma^{+}(\sigma, H)=\bigcup_{x\in H}\gamma^{+}(\sigma, x),\quad O^{+}(\sigma, H)=\bigcup_{x\in H}O^{+}(\sigma, x).$$

نقطهٔ $C\in X$ یک نقطهٔ تعادل فرآیند u خوانده می‌شود اگر $U(\sigma,t)C=C$ برای هر $t\in\mathbb{R}^{+}$. اگر $\sigma\in\mathbb{R}$، $p>0$ و $x\in X$ وجود داشته باشند به‌طوری که $U(\sigma,t+p)x=U(\sigma,t)x$ برای هر $t\in\mathbb{R}^{+}$، آن‌گاه مدار $O^{+}(\sigma,x)$، p–تناوبی نامیده می‌شود. تعریف مجموعهٔ حدی، مشابه دستگاه دینامیکی متناظر با معادلات دیفرانسیل عادی است:

$$\omega(\phi)=\{\Psi\in\mathcal{C}: x_{t_n}(\phi)\to\Psi \quad \text{و}\quad t_n\to\infty\ \text{وجود دارد به‌طوری که}\ \{t_n\}\ \text{دنبالهٔ}\}. \qquad (۳.۴)$$

یادآوری می‌کنیم که منظور از همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ به ϕ در $\mathcal{C}$ همگرایی یکنواخت روی بازهٔ $[-r,0]$ است.

قضیه ۳.۴. اگر f تابعی کاملاً پیوسته و $O^{+}(\phi)$ کراندار باشد، آن‌گاه $\overline{O^{+}(\phi)}$ در $\mathcal{C}$ فشرده است.

نتیجه ۴.۴. اگر f تابعی کاملاً پیوسته و $O^{+}(\phi)$ در $\mathcal{C}$ کراندار باشد، آن‌گاه $\omega(\phi)$ مجموعه‌ای ناتهی، فشرده، همبند و ناوردا است. همچنین وقتی $t\to\infty$، داریم $x_t(\phi)\to\omega(\phi)$.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم برای یک مقدار ثابت c داشته باشیم $\lim_{t\to\infty}x(t,\phi)=c$. اگر $\hat{c}$ عضوی از C باشد که مقادیر آن برابر با c است، آن‌گاه $\hat{c}$ یک نقطهٔ تعادل است، $f(\hat{c})=0$ و $\omega(\phi)=\{\hat{c}\}$.

در ادامه به مفاهیم پایداری و پایداری مجانبی اشاره می‌کنیم [۳، ۵]. دستگاه معادلات دیفرانسیل تأخیریِ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t).$$

فرض کنیم برای هر $t\in\mathbb{R}$، $f(t,0)=0$ و $x(t)=0$ یک جواب برای این معادله باشد. این جواب، پایدار است اگر برای هر $\sigma\in\mathbb{R}$ و $\epsilon>0$ عدد $\delta=\delta(\sigma,\epsilon)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $\phi\in\mathcal{C}$ اگر $\|\phi\|<\delta$ داشته باشیم $\|x_t(\sigma,\phi)\|<\epsilon$ برای هر $t\geq 0$. همچنین جواب یادشده پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و یک $b(\sigma)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $\phi\in\mathcal{C}$ اگر $\|\phi\|<b(\sigma)$ داشته باشیم $x_t(\sigma,\phi)\to 0$ هرگاه $t\to\infty$. سرانجام، $x=0$ ناپایدار است اگر پایدار نباشد.

۵. معادلهٔ مشخصه

روش قدیمی در بررسی پایداریِ معادلات دیفرانسیل عادی، خطی‌سازی حول نقاط تعادل دستگاه و تعیین نرخ توانی رشد یا زوال مربوط به دستگاه خطی متناظر است. هرچند در مورد دستگاه‌های تأخیری نیز همین رَوَند را دنبال می‌کنیم، ماهیت متفاوت معادلهٔ مشخصه، باعث بروز پیچیدگی‌هایی می‌شود. هدف ما در این بخش، بررسی معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری خطی

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \tag{۱.۵}$$

است که در آن، L تابعی خطی و کراندار است (در واقع L از خطی‌سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل تأخیری حول نقطهٔ تعادل به‌دست می‌آید). با توجه به شکل جواب‌های اساسی معادله، دستگاه (۱.۵) جوابی به‌صورت $x(t) = e^{\lambda t}\nu$ دارد که λ مختلط و ν یک بردار ناصفر با درایه‌های مختلط است. برای اینکه $x(t)$ جواب معادله باشد، باید داشته باشیم

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}\nu = L(x_t).$$

در نتیجه معادلهٔ مشخصه برای (۱.۵) از حل $\det(\lambda I - L(e^{\lambda\tau} I)) = ۰$ به‌دست می‌آید.

در ادامه مفاهیم طیف، طیف نقطه‌ای، مقدار ویژه و مجموعهٔ حلال را یادآوری می‌کنیم. برای دیدن جزئیات، می‌توانید [۴، ۶، ۵] را بخوانید. برای یک عملگر خطی مانند $A : X \to X$ که X یک فضای باناخ است، مجموعهٔ حلال A که با $\rho(A)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط λ است که به‌ازای آنها $\lambda I - A$ دارای وارون کراندار با دامنهٔ چگال در X است. مکمل $\rho(A)$ طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود. در حالت کلی طیف یک عملگر یکی از این سه نوع است: طیف مانده‌ای[۱]، طیف پیوسته[۲] و طیف نقطه‌ای[۳]. طیف مانده‌ای شامل λهایی در $\sigma(A)$ است که وارون $\lambda I - A$ وجود دارد اما دامنهٔ آن در X چگال نیست. طیف پیوسته شامل λهایی در $\sigma(A)$ است که وارون $\lambda I - A$ بی‌کران می‌شود با دامنهٔ چگال. طیف نقطه‌ای شامل λهایی در $\sigma(A)$ است که $\lambda I - A$ وارون ندارد.

ثابت می‌شود که $\lambda \in \rho(A)$ اگر و تنها اگر معادلهٔ

$$(A - \lambda I)\phi = \psi \tag{۲.۵}$$

به‌ازای هر ψ در یک زیرمجموعهٔ چگال در X دارای جواب $\phi \in D(A)$ باشد و این جواب به‌طور پیوسته به ψ وابسته باشد. معادلهٔ (۲.۵) برای هر ψ در X یک جواب دارد تنها اگر $\det \Delta(\lambda) \neq ۰$. همچنین $\det \Delta(\lambda) \neq ۰$ نتیجه می‌دهد که برای هر ψ در X معادلهٔ (۲.۵) دارای یک جواب است که به‌طور پیوسته به ψ وابسته است. در نتیجه $\rho(A) = \{\lambda : \det \Delta(\lambda) \neq ۰\}$. اگر λ در $\det \Delta(\lambda) = ۰$

[۱] residual spectrum [۲] continuous spectrum [۳] point spectrum

صدق کند، به آن مقدار ویژهٔ A و به جواب ناصفر معادلهٔ (۲.۵) به‌ازای λ، تابع ویژه (یا بردار ویژه) گفته می‌شود. به‌ازای $\lambda \in \sigma(A)$ فضای ویژهٔ تعمیم‌یافتهٔ متناظر با λ، کوچکترین زیرفضای X متشکل از همهٔ $\phi \in X$هایی است که $(\lambda I - A)^k \phi = \circ$ برای یک $k \in \mathbb{N}$.

فرض کنیم $x_t(\phi)$ جواب معادلهٔ (۱.۵) با تابع اولیهٔ $x_\circ = \phi \in \mathcal{C}$ باشد. تابع $T(t) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ را با $x_t(\phi) = T(t)\phi$ تعریف می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که $T(t)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) برای هر $t, \tau \geq \circ$ داریم $T(t+\tau) = T(t)T(\tau)$؛

(ب) به‌ازای هر $t \geq \circ$، $T(t)$ کراندار است، $T(\circ) = I$ و $T(t)$ روی بازهٔ $[\circ, \infty)$ به‌طور قوی پیوسته است، یعنی برای هر $\phi \in \mathcal{C}$ و $t \geq \circ$،

$$\lim_{\tau \to t} |T(t)\phi - T(\tau)\phi| = \circ;$$

(پ) به‌ازای $t \geq r$، $T(t)$ کاملاً پیوسته است، یعنی $T(t)$ برای $t \geq r$ مجموعه‌های کراندار را به مجموعه‌های پیش-فشرده می‌نگارد. مجموعهٔ $\{x_t : t \geq r\}$ در فضای $\mathcal{C}$ پیش-فشرده خوانده می‌شود اگر $\overline{(\bigcup_{t \geq r} x_t)}$ در $\mathcal{C}$ فشرده باشد. در نتیجه به‌ازای $t \geq \circ$، $T(t)$ یک نیمگروه به‌طور قوی پیوسته از عملگرهای خطی روی $\mathcal{C}$ و بازهٔ $[\circ, \infty)$ است و مولد بی‌نهایت کوچک آن با

$$A\phi = \lim_{t \to \circ^+} \frac{1}{t}(T(t)\phi - \phi) \qquad (\text{در نرم تعریف شده روی } \mathcal{C}). \tag{۳.۵}$$

تعریف می‌شود. $D(A)$ (دامنهٔ A) در $\mathcal{C}$ چگال است و $R(A)$ (بُرد A) نیز در $\mathcal{C}$ واقع است. اگر $\phi \in D(A)$، آن‌گاه

$$\frac{d}{dt}T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi.$$

در این زمینه، قضیه‌های زیر را داریم که برای دیدن اثبات آنها، می‌توانید [۴، ۶] را بخوانید.

قضیه ۱.۵. (الف) برای عملگر T مولد بی‌نهایت کوچک A برابر است با

$$D(A) = \{\phi \in C : \dot{\phi}(\circ) = L(\phi)\}, \qquad A\phi = \dot{\phi}(\circ) \quad \forall \phi \in D(A);$$

(ب) $\sigma(A)$ طیف نقطه‌ای است و $\sigma(A) = \sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det \Delta(\lambda) = \circ\}$.

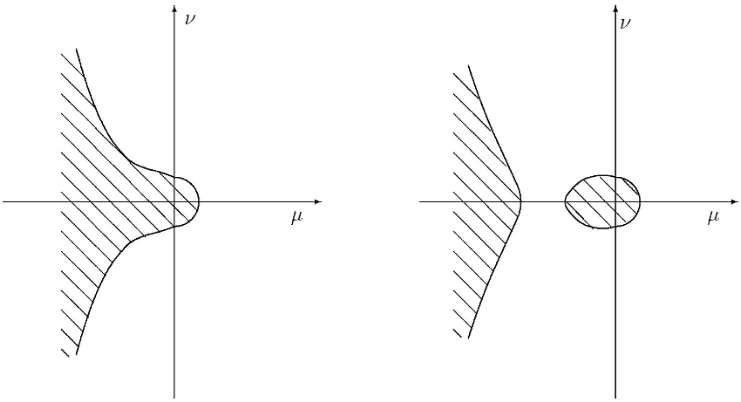
قضیه ۲.۵. (الف) $\sigma(L)$ ناتهی است و همهٔ نقاط آن در $\mathbb{C}$ تنها[۱] هستند. اگر $\sigma(L)$ متناهی باشد، آن‌گاه $\det \Delta(\lambda)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب λ است؛

(ب) $\rho > \circ$ وجود دارد به‌طوری که

$$\sigma(L) \subseteq \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \geq \circ,\ |\lambda| \leq \rho\} \cup \{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) < \circ,\ |\lambda| e^{\mathrm{Re}(\lambda)} \leq \rho\}.$$

---

[۱] isolated



شکل ۲. محدودهٔ طیف.

قضیه ۳.۵. برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعهٔ $\sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(\lambda) \geq \alpha\}$ متناهی است.

قضیه ۴.۵. تابع $\det \Delta(\lambda)$ تام[1] است و از این‌رو مرتبهٔ صفرهای آن متناهی است.

قضیه ۵.۵. اگر برای هر $\lambda \in \sigma(L)$، $\mathrm{Re}(\lambda) < \mu$، آن‌گاه ثابت‌های M و $\gamma > 0$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $\phi \in \mathcal{C}^1([\tau - \gamma, \tau], \mathbb{R})$، جواب معادلهٔ (۱.۵) در

$$\|x(t;\phi)\| \leq M\|\phi\|e^{\mu t}$$

صدق می‌کند.

به عبارت دیگر، اگر همهٔ مقدارهای ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آن‌گاه جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی به‌طور نمایی به صفر میل می‌کند که این حکم، مشابه حالت معادلات دیفرانسیل عادی است. حال به تعریف نقطهٔ تعادل هذلولوی و غیرهذلولوی می‌پردازیم.

۰ یک نقطهٔ تعادل هذلولوی معادلهٔ (۱.۳) نامیده می‌شود اگر مقدارهای ویژه آن دارای قسمت حقیقی ناصفر باشند وگرنه غیرهذلولوی نامیده می‌شود. اگر ۰ یک نقطهٔ تعادل هذلولوی معادلهٔ (۱.۳) باشد و Λ مجموعهٔ مقدارهای ویژه با قسمت حقیقی مثبت باشد، آن‌گاه فضای $\mathcal{C}$ به‌صورت $\mathcal{C} = U \oplus S$ تجزیه می‌شود. اگر ۰ یک نقطهٔ تعادل غیرهذلولوی معادلهٔ (۱.۳) باشد، فضای $\mathcal{C}$ به‌صورت $\mathcal{C} = U \oplus N \oplus S$ تجزیه می‌شود که U دارای بُعد متناهی است و فضای ویژهٔ تعمیم‌یافته متناظر با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت است. همچنین N دارای بُعد متناهی است و فضای ویژهٔ تعمیم‌یافته متناظر با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی صفر است.

[1] entire

γ یک مدار تناوبی معادلهٔ (۱.۳) نامیده می‌شود اگر $\gamma = \{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ که در آن، $p(t)$ یک جواب تناوبی معادلهٔ (۱.۳) است. اگر $\gamma = \{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ یک مدار تناوبی باشد، معادلهٔ وردشی[۱] خطی حول γ به‌صورت

$$\frac{d}{dt}x_t = L(t)x_t, \qquad L(t) = D_\gamma f(p(t)). \tag{۴.۵}$$

است که دارای ضرایب تناوبی نسبت به t است. ضرایب فلوکه برای یک مدار تناوبی γ، ضرایب فلوکهٔ معادلهٔ تغییراتی (۴.۵) هستند بجز ۱ که اگر ضریب سادهٔ (۴.۵) باشد، ضریب γ نخواهد بود. مدار تناوبی γ هذلولی نامیده می‌شود اگر همهٔ ضرایب فلوکهٔ آن دارای قدرمطلق مخالف ۱ باشند. شاخص مدار هذلولوی γ تعداد ضرایب فلوکه با اندازهٔ بزرگتر از یک است. مدار تناوبی γ برای معادلهٔ (۱.۳) یک مدار تناوبی ناتباهیده[۲] نامیده می‌شود اگر ۱ یک ضریب فلوکه برای γ نباشد.

مثال ۶.۵. معادلهٔ مشهور لجستیک[۳] مدلی برای توصیف رشد جمعیت است و کاربردهای فراوانی نیز در سایر زمینه‌ها دارد. این معادله در حالت تأخیری نیز پُر کاربرد است. معادلهٔ لجستیک تأخیری عبارت است از

$$\dot{N}(t) = N(t)[۱ - N(t-\tau)]. \tag{۵.۵}$$

به‌روشنی $N = ۱$ یک نقطهٔ تعادل دستگاه است. با قرار دادن $N(t) = n(t) + ۱$ و سپس با خطی‌سازی حول مبدأ، به دستگاه خطی

$$\dot{n}(t) = -n(t-\tau) \tag{۶.۵}$$

می‌رسیم. این دستگاه خطی، مشابه دستگاه (۱.۲) است که پیش از این، شکل جواب‌های آن را بررسی کردیم. قصد داریم با استفاده از معادلهٔ مشخصه، به بررسی دینامیک موضعی دستگاه حول نقطهٔ تعادل بپردازیم. به دنبال جواب‌هایی به‌صورت $n(t) = ce^{\lambda t}$ هستیم که در آن، c ثابت و $\lambda \in \mathbb{C}$ مقدار ویژهٔ دستگاه است. با قرار دادن این جواب در دستگاه خطی، معادلهٔ مشخصهٔ $\lambda = -e^{-\lambda\tau}$ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $\lambda = \mu + i\omega$ و بررسی می‌کنیم که آیا شرایطی وجود دارند که تحت آنها داشته باشیم $\mu < ۰$، یعنی نقطهٔ تعادل دستگاه، پایدار باشد. با جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی معادلهٔ مشخصه، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = -e^{-\mu\tau}\cos\omega\tau, \quad \omega = e^{-\mu\tau}\sin\omega\tau.$$

[۱] variational equation [۲] nondegenerate [۳] logistic

در جستجوی بازه‌ای از پارامتر τ هستیم که روی آن داشته باشیم $\mu < 0$. ابتدا حالت $\omega = 0$ را در نظر می‌گیریم که نتیجه می‌دهد $\mu = -e^{-\mu\tau} < 0$. پس در این حالت، $\mu < 0$. برای بررسی حالت $\omega \neq 0$ (چون اگر ω یک جواب باشد، $-\omega$ هم جواب خواهد بود)، بدون کاستن از کلیّت فرض می‌کنیم $\omega > 0$. شرط $\mu < 0$ نتیجه می‌دهد که $\omega\tau < \pi/2$. اولین مقدار پارامتر τ را می‌خواهیم که $\mu(\tau)$ از $\mu < 0$ به $\mu > 0$ تغییر علامت دهد. بنابراین باید حالت $\mu = 0$ را بررسی کنیم که نتیجه می‌دهد $\omega\tau = \pi/2$ و از رابطهٔ دوم هم نتیجه می‌شود $\omega = 1$ و $\tau = \pi/2$. در نتیجه به‌ازای $0 < \tau < \pi/2$ نقطهٔ تعادل مورد نظر، پایدار خواهد بود.

۶. انشعاب در دستگاه‌های تأخیری

در این بخش، با ذکر یک مثال به اهمیت نقش تأخیر در دینامیک دستگاه و تأثیر آن بر بروز تغییرات دینامیکی اشاره می‌کنیم. این مثال، مقدمه‌ای است برای بیان اهمیت بررسی انشعاب در دستگاه‌های تأخیری. معادلهٔ دیفرانسیل تأخیری را

$$\dot{u}(t) = au(t-\tau) + bu(t) \tag{۱.۶}$$

در نظر بگیرید که در آن، $b < 0$. معادلهٔ مشخصه متناظر با نقطهٔ تعادل بدیهی $u = 0$ عبارت است از

$$-\lambda + ae^{-\lambda\tau} + b = 0.$$

به دنبال بررسی شرایطی هستیم که تحت آنها $\lambda = i\omega$ یک ریشه از معادلهٔ مشخصه باشد. با جایگذاریِ $\lambda = i\omega$ در معادلهٔ مشخصه داریم

$$-i\omega + a\cos(\omega\tau) - ia\sin(\omega\tau) + b = 0.$$

با جداسازیِ قسمت حقیقی و موهومی آن، به‌دست می‌آوریم

$$\omega + a\sin(\omega\tau) = 0, \qquad b + a\cos(\omega\tau) = 0.$$

در نتیجه $\omega^2 = a^2 - b^2$ و برای اینکه $\lambda = i\omega$ با شرط $\omega \neq 0$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه باشد، باید داشته باشیم $|a| > |b| > 0$. حال توجه کنید که به‌ازای $b < 0$، دستگاهِ بدون تأخیر یعنی وقتی $\tau = 0$، پایدار است و اگر $t \longrightarrow \infty$، جواب‌های آن به صفر میل می‌کنند اما در حالت تأخیری، یعنی وقتی $\tau \neq 0$، با وجود اینکه یک جملهٔ نزول‌دهنده داریم (جملهٔ $bu(t)$) در دستگاه، انشعاب هوپف[۱] می‌تواند رخ دهد و نوسان کند. در واقع آنچه باعث بروز نوسان می‌شود، جملهٔ $u(t-\tau)$ است که اگر قدرت ضریب آن بیش از قدرت ضریب جملهٔ نزول‌دهنده باشد، آن‌گاه در دستگاه، انشعاب هوپف رخ می‌دهد. چنان‌که در مثال بالا

---
[۱] Hopf

دیدیم، بروز تغییرات دینامیکی موضعی و متناظر با آن، بروز انشعاب‌ها برای دستگاه‌های تأخیری بسیار محتمل است و این امر مطالعهٔ انشعاب‌ها در دستگاه‌های تأخیری را، حتی بیش از معادلات دیفرانسیل عادی، ضروری می‌سازد.

برای تعریف انشعاب‌های دستگاه‌های دینامیکیِ تأخیری، به قضیه‌ای مشابه قضیهٔ هارتمن-گروبمن[۱] نیازمندیم. اما چون یک‌به‌یک بودنِ جواب‌ها برای همهٔ زمان‌ها ($t \in \mathbb{R}$) لزوماً برقرار نیست، این قضیه نیز همه‌جا قابل استفاده نخواهد بود. فرض کنیم p_f نقطهٔ تعادل دستگاه $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ باشد که $f \in C^1([0, r], \mathbb{R}^n)$. به این دستگاه، معادلهٔ دیفرانسیل تابعی تأخیری[۲] گفته می‌شود. اگر نقطهٔ تعادل هذلولوی باشد، قضیهٔ تابع ضمنی نتیجه می‌دهد که همسایگی U از f و همسایگی V از p_f در $C([0, r], \mathbb{R}^n)$ وجود دارند به‌طوری که برای هر $g \in U$ یک نقطهٔ تعادل هذلولوی یکتای p_g در V وجود دارد. همچنین خمینه‌های موضعی پایدار $W^s_{loc}(p_f)$ و ناپایدار $W^u_{loc}(p_f)$ با خمینه‌های متناظر برای p_g، وابریخت[۳] هستند. وابریخت بودنِ این مجموعه‌ها لزوماً هم‌ارزیِ شار دو دستگاه را نتیجه نمی‌دهد، یعنی همهٔ مدارهای f در نزدیکی p_f قابل نگاشتن به مدارهای g در نزدیکی p_g توسط یک همسانریختی نیستند. ویژگیِ همواریِ شارها مانعی برای ساختن چنین همسانریختی است. از این‌رو قضیهٔ هارتمن-گروبمن برقرار نیست اما تعمیمی از آن برقرار است، زیرا خمینه‌های موضعی ناپایدار دارای بُعد متناهی هستند و در نتیجه تحدید شارها به آنها توسط معادلات دیفرانسیل عادی قابل توصیف است. بنابراین شارهای $\phi^f_t \mid W^u_{loc}(p_f)$ و $\phi^g_t \mid W^u_{loc}(p_g)$ همسانریخت هستند و می‌توان همسانریختی $h : W^u_{loc}(p_f) \to W^u_{loc}(p_g)$ را که حافظ جهت روی مدارها است، معرفی کرد [۷].

در ادامه هم‌ارزیِ دو دستگاه معادلات دیفرانسیل تأخیری را تعریف می‌کنیم. قبل از آن لازم است مجموعهٔ $A(f)$ شامل تمام جواب‌های کراندار سراسری را معرفی کنیم که هم‌ارزی نسبت به آن تعریف می‌شود:

$$A(f) = \{\varphi \in C : \text{برای هر } t \in \mathbb{R} \ \phi^f_t \varphi \ \text{وجود دارد و کراندار است}\}.$$

مجموعهٔ $A(f)$ از همهٔ نقاط ω-حدی و α-حدی مدارهای کراندار f تشکیل شده است و شامل نقاط تعادل، مدارهای تناوبی و خمینه‌های ناپایدار کراندارِ هر دو است. در واقع $A(f)$ شامل همهٔ نقاط مدار جواب‌هایی است که دارای توسعهٔ پسرو هستند، یعنی در زمان منفی تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۶. معادله‌های دیفرانسیل تابعی تأخیری متناظر با f و g هم‌ارز خوانده می‌شوند و می‌نویسیم $f \sim g$ اگر همسانریختی $h : A(f) \to A(g)$ وجود داشته باشد که مدارها و جهت افزایش زمان را حفظ کند.

---
[۱] Hartman-Grobman [۲] retarded functional differential equation [۳] diffeomorphic

هر معادلهٔ دیفرانسیل عادی روی خمینهٔ M را می‌توان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تأخیری روی M با فضای فاز $C([\circ,r],M)$ در نظر گرفت. به‌ویژه اگر X یک میدان برداری روی خمینهٔ M باشد و $\rho : C([\circ,r],M) \to M$ نگاشت تحوّل $\rho(\varphi) = \varphi(\circ)$ باشد، آن‌گاه تابع $f = X \circ \rho$ نظیر یک معادلهٔ دیفرانسیل تابعی تأخیری روی M خواهد بود. به‌ازای هر $p \in M$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل عادی که در لحظهٔ $t = \circ$ از p می‌گذرد، توسط میدان برداری X تعریف می‌شود. نگاشت $\Sigma_X : M \to C([\circ,r],M)$ به‌طوری که $\Sigma_X(p)$ تحدید جواب X به $[\circ,r]$ است و در لحظهٔ $t = \circ$ از p می‌گذرد، نسبت به ρ اریب است. همچنین مجموعهٔ جاذب f خمینه‌ای است که با M وابرریخت است و با $A(f) = \Sigma_X(M)$ مشخص می‌شود. رفتار کیفی شار وابسته به f روی $A(f)$ در تناظر مستقیم با رفتار کیفی شار معادلهٔ دیفرانسیل عادی تعریف‌شده توسط X روی M است. از این‌رو همهٔ انشعاب‌هایی که برای معادلات دیفرانسیل عادی رخ می‌دهند، برای معادلات دیفرانسیل تابعی تأخیری نیز رخ می‌دهند [۷]. در نتیجه به دنبال بررسی شرایط انشعاب‌های معادلات تاخیری بر اساس شناختمان از انشعاب‌های معادلات دیفراسیل معمولی هستیم.

قبل از معرفی انشعاب‌ها، صورتی از قضیهٔ هارتمن–گروبمن را که در مقالهٔ استرنبرگ [۸] آمده است، بیان می‌کنیم. برای دیدن جزئیات ساخت همسانریختی و اثبات‌ها، به [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۶. (هارتمن–گروبمن) فرض کنیم f نظیر یک معادلهٔ دیفرانسیل تابعی تأخیری روی $\mathbb{R}^n$ با مجموعهٔ جذب فشردهٔ $A(f)$ باشد، p_f یک نقطهٔ تعادل هذلولوی برای f، ϕ نگاشت جواب دستگاه غیرخطی f و L نگاشت جواب دستگاه خطی متناظر با آن باشد. همچنین فرض کنیم ϕ روی $A(f)$ یک‌به‌یک است. در این صورت همسایگی باز W از p_f در $A(f)$، $\epsilon > \circ$ و نگاشت h از $A(f)$ به فضای فاز $C([\circ,r],\mathbb{R}^n)$ وجود دارند به‌طوری که $h\ |_W$ یک همسانریختی از W به $h(W)$ است، $h(p_f) = \circ$ و به‌ازای هر $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ روی W داریم $L(t) \circ h = h \circ \phi(t)$.

۷. روش تابع لیاپانف

روش تابع لیاپانف[۱] را به‌طور کلی می‌توان برای تعیین پایداری موضعی، پایداری مجانبی و پایداری سراسری نقاط تعادل معادلات دیفرانسیل تأخیری، همانند معادلات دیفرانسیل عادی، به‌کار برد. همچنین در مورد معادلات دیفرانسیل تأخیری مستقل از زمان، قضیهٔ لیاپانف–لاسال[۲] روشی بسیار کارآمد برای به‌دست آوردن شرایط کافی برای پایداری نقاط تعادل یا جاذب‌های دستگاه است. نتایج پایداری که با این روش به‌دست می‌آیند، در مقایسه با نتایج پایداری موضعی که از تحلیل معادلات مشخصه حاصل می‌شوند،

[۱] Liapunov [۲] Liapunov-LaSalle

اغلب سراسری هستند. دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \qquad (۱.۷)$$

که در آن، نگاشت $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ کاملاً پیوسته است و جواب (۱.۷) یکتا و به‌طور پیوسته به شرط اولیه وابسته است. جواب دستگاه (۱.۷) با شرط اولیهٔ $(\circ, \phi)$ را با $x_t(\phi)$ نشان می‌دهیم. برای تابع پیوستهٔ $V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق مداری V در طول جواب‌های (۱.۷) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dot{V(\phi)} = \overline{\lim}_{h\to\circ^+} \frac{۱}{h}[V(x_h(\phi)) - V(\phi)].$$

تعریف ۱.۷. تابع $V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لیاپانف برای معادلهٔ (۱.۷) روی مجموعهٔ G در $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود اگر روی بستار G پیوسته باشد و در G، $\dot{V} \leq \circ$. همچنین تعریف می‌کنیم

$$E = \{\phi \in G : \dot{V}(\phi) = \circ\}$$

و M را بزرگترین زیرمجموعهٔ E می‌گیریم که نسبت به معادلهٔ (۱.۷) پایا است.

قضیهٔ لیاپانف-لاسال برای معادلهٔ (۱.۷) از این قرار است.

قضیه ۲.۷. اگر V یک تابع لیاپانف روی مجموعهٔ G و $x_t(\phi)$ یک جواب کراندار (۱.۷) باشد که در مجموعهٔ G می‌ماند، آن‌گاه $\omega(\phi) \subseteq M$؛ یعنی وقتی $t \to +\infty$، $x_t(\phi) \to M$.

اکنون برای دستگاه (۱.۶) که در فصل ۶ به بررسی آن پرداختیم، از تابع لیاپانف کمک می‌گیریم و پایداریِ سراسری مبدأ را برای ناحیهٔ مورد نظر از پارامترها نشان می‌دهیم. تابع

$$V(u(t)) = u^۲(t) + |a| \int_{t-\tau}^{t} u^۲(s)ds \qquad (۲.۷)$$

را در نظر بگیرید که در آن، $u(t)$ جواب دستگاه (۱.۶) است. نشان می‌دهیم که V یک تابع لیاپانف است. مشتق مداری این تابع را در طول جواب‌های (۱.۶) به‌ازای $b < -|a|$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= ۲u\frac{du}{dt} + |a|[u^۲(t) - u^۲(t-\tau)] \\
&= ۲bu^۲(t) + ۲au(t)u(t-\tau) + |a|[u^۲(t) - u^۲(t-\tau)] \\
&\leq ۲bu^۲(t) + |a|[u^۲(t) + u^۲(t-\tau)] + |a|[u^۲(t) - u^۲(t-\tau)] \\
&= ۲(b+|a|)u^۲(t) \leq \circ.
\end{aligned}$$

در نتیجه V یک تابع لیاپانف است. از طرفی $\dot{V} = ۰$ نتیجه می‌دهد $u = ۰$. بنابراین شرایط قضیهٔ لیاپانف–لاسال برقرار است و به‌ازای $b < -|a|$ و بدون اعمال هیچ‌گونه محدودیتی روی پارامتر تأخیر τ مبدأ پایدار سراسری است؛ نه صرفاً پایدار خطی. البته با کمی بررسی آنالیزی می‌توان دید که ناحیهٔ پایداری مبدأ کمی بزرگتر از ناحیهٔ مشخص شده است که ما از انجام آن صرف‌نظر می‌کنیم.

مراجع

[1] Schmidt, E., Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen*, **70** (1911), no.4, 499–524

[2] Arino, O., Hbid, M. L., Ait Dads, E., Delay differential equations and applications, *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, Morocco 9-21 September 2002, Springer-Verlag, 2007.

[3] Smith, H., *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*,Texts in Applied Mathematics, **57**, Springer-Verlag, 2010.

[4] Kuang, Y., Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, New York, 1993.

[5] Hale, Jack K., Verduyn Lunel, S. M., *Introduction to Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, Berlin, 2013.

[6] Hale, Jack K., Delay differential equations and applications, *NATO Sciences Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, O. Arino, M. L. Hbid, E. Ait Dads (eds.), 2006.

[7] Hale, Jack K., Magalhaes, Luis T, Oliva, W., *Dynamics in Infinite Dimensions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 2006.

[8] Sternberg, N., A Hartman-Grobman theorem for a class of retarded functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **176** (1993), no. 1, 156–165.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۹/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۲/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۲/۱

محمدرضا رزوان: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: `http://sharif.ir/~razvan`

رایانامه: `razvan@sharif.ir`

نیلوفر فرج‌زاده طهرانی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: `http://mehr.sharif.edu/~farajzadeh/`

رایانامه: `farajzadeh@mehr.sharif.ir`