

گراف‌ها و شبکه‌های اتصال در آبرایانه‌ها

بهنام خسروی و بهمن خسروی

چکیده

در این مقاله، درباره کاربرد گروه‌های متناهی و گراف‌های کیلی نظیرشان در طراحی آبرایانه‌ها بحث می‌کنیم. به این منظور در گام اول، از دیدگاهی عمومی و بدون استفاده از مفاهیم تخصصی جبری، درباره این موضوع خواهیم نوشت و با ارائه مثال‌هایی عینی از آبرایانه‌ها، سعی خواهیم کرد تا اصول کلی را توضیح دهیم. در گام بعدی، بحث را تخصصی‌تر پی می‌گیریم و با ارائه مثال‌هایی از آبرایانه‌های امروزی، شیوه استفاده از نظریه گروه‌ها و نظریه گراف را در طراحی این ماشین‌های محاسباتی توضیح می‌دهیم.

۱. سرآغاز

بی‌شک یکی از قدیمی‌ترین و شناخته‌شده‌ترین کاربردهای ریاضی، در طراحی و ساخت سازه‌ها است. دانشی که از دوران باستان تاکنون بر پایه استفاده از ساختارهای متقارن و منتظم بوده است. روش طراحی این سازه‌ها، مبتنی بر ابزارهای هندسی است و لذا در بخشی بزرگ از ریاضیات قدیم، به طراحی و رسم شکل‌های هندسی با خط‌کش و پرگار پرداخته شده است. اما در دنیای سازه‌های مجازی و رایانه‌ای، چگونه سازه‌ها ساخته می‌شوند و الگوریتم‌های ساخت این سازه‌ها چگونه ارائه می‌شوند؟ هدف این نوشتار، معرفی یکی از قوی‌ترین و شناخته‌شده‌ترین الگوریتم‌های جبری و گرافی برای ساخت شبکه‌های پردازنده‌ها در آبرایانه‌ها است که بر پایه مفهوم گراف‌های کیلی استوار است. آبرایانه‌ها، ماشین‌هایی محاسباتی هستند که قدرت انجام محاسبات بسیار بیشتری را در مقایسه با رایانه‌های معمولی دارند. نخستین بار در دهه ۱۹۶۰ بود که آبرایانه‌ها به جهان معرفی شدند و

عبارات و کلمات کلیدی. گراف؛ شبکه اتصال؛ آبرایانه؛ گراف کیلی؛ گراف یال-تراپی.

جایگاهی ویژه در دنیای علم کسب کردند. امروزه آبرایانه‌ها نقشی اساسی در علوم محاسباتی دارند و در پیش‌بینی هوا، پژوهش‌های اقلیم‌شناسی، اکتشاف نفت و گاز و ... نقش دارند. اساس طراحی این ماشین‌ها، فعالیت تعداد زیادی پردازنده به صورت موازی (همزمان) است. به این منظور باید پردازنده‌ها را طوری در یک شبکه به یکدیگر متصل کنیم که تبادل داده‌ها در بین آنها به بهترین شکل برقرار شود.

به شبکه‌ای که برای تعیین مسیر حرکت داده بین پردازنده‌ها در یک سیستم محاسباتی چندپردازنده‌ای استفاده می‌شود، شبکه *اتصال*^۱ گفته می‌شود. بسیاری از آبرایانه‌های قوی امروزی، دارای بیش از نیم میلیون پردازنده هستند و روشن است که بدون استفاده از روش‌های ریاضیاتی، از جمله نظریه گراف و نظریه جبری گراف، طراحی چنین شبکه‌هایی ناممکن است.

با هدف مطالعه شبکه‌های اتصال و پس از بیان تعریف‌ها و مفاهیم کلی در مورد ساختارهای گرافی، بحث را به سه بخش تقسیم می‌کنیم. در بخش بعدی، با رویکردی عمومی، مطالبی را ارائه می‌دهیم که برای خواننده علاقه‌مند ولی ناآشنا با مفاهیم جبری، قابل استفاده باشد و او بتواند با مطالعه بخش‌های سوم و چهارم، به درکی درست از بحث طراحی شبکه‌های پردازنده‌ها در آبرایانه‌ها دست یابد. در بخش چهارم، با استفاده از مفاهیم پایه‌ای در نظریه گروه و نظریه گراف، بحث را تخصصی‌تر پی می‌گیریم و روش‌هایی بر پایه مفاهیم جبری و به ویژه نظریه گروه‌ها ارائه می‌کنیم. همچنین ریشه مطالب بخش سوم را به زبان نظریه گروه‌ها و نظریه گراف ذکر خواهیم کرد. در سرتاسر متن سعی شده است با معرفی مراجع مناسب، به خواننده علاقه‌مند کمک شود تا ادامه بحث را در آنها بیابد و در صورت تمایل، مطالعات خود را ادامه دهد.

۲. مقدمات

کار را با یادآوری مفهوم محاسبات موازی آغاز می‌کنیم. چنان‌که پیشتر ذکر کردیم، اساس کار آبرایانه‌ها بر پایه محاسبات موازی است. به این دلیل، نخست تعریف محاسبات موازی را بیان می‌کنیم و با مثال، به توضیح آن می‌پردازیم. محاسبات موازی، گونه‌ای از محاسبات است که در آن، تعداد زیادی محاسبه به طور همزمان انجام می‌شود. این فرآیند به ما کمک می‌کند تا برای حل مسائل بزرگ، آنها را به مسائلی کوچکتر تقسیم کنیم و با حل همزمان آنها و در کنار هم قرار دادن جواب‌ها، جواب نهایی مسئله اصلی را بیابیم.

برای درک بهتر این نوع محاسبات، به مثال ساده زیر توجه کنید. می‌خواهیم مجموع اعداد زیر را حساب کنیم:

$$\{7, 11, 15, 26, 42, 16, 27, 75, 3, 13\}.$$

^۱interconnection network

برای این کار، مجموعه را به زیرمجموعه‌هایی دو عضوی مانند

$$\{7, 11\}, \{15, 26\}, \{42, 16\}, \{27, 75\}, \{3, 13\}$$

افراز می‌کنیم. درگام بعدی، مجموع عضوهای مجموعه‌های دو عضوی بالا را همزمان حساب می‌کنیم و جواب‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$18, 41, 58, 102, 16.$$

در مرحله بعد، بار دیگر اعداد به دست آمده را به مجموعه‌هایی حداکثر دو عضوی مانند

$$18 + 41 = 59, \quad 58 + 102 = 160, \quad 16$$

افراز و مجموع آنها را همزمان حساب می‌کنیم. در مرحله بعد، با تکرار روند بالا، به اعداد زیر می‌رسیم:

$$59 + 160 = 219, \quad 16.$$

درگام پایانی، با کنار هم گذاشتن دو جواب مرحله قبل، جواب نهایی ۲۳۵ به دست می‌آید. حال به بیان برخی مفاهیم کلی از نظریه گراف می‌پردازیم که در توصیف مدل شبکه‌های اتصال، به آنها نیازمندیم. یک گراف Γ زوج مرتبی مانند (V, E) است که در آن، V یک مجموعه ناتهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. عضوهای V را رأس‌های گراف Γ و عضوهای E را یال‌های گراف Γ می‌نامیم. تعداد عضوهای مجموعه V را مرتبه گراف Γ می‌نامیم. در این مقاله، فرض می‌کنیم که مرتبه همه گراف‌ها متناهی است. مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های Γ را به ترتیب، با نمادهای $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. اگر $e = \{x, y\}$ یالی از Γ باشد، می‌گوییم x و y مجاور هستند و رأس‌های x و y بر یال $\{x, y\}$ قرار دارند. مجموعه رأس‌هایی از Γ را که با رأس v مجاورند، همسایگی v و تعداد عضوهای همسایگی v را درجه v می‌نامیم. کوچکترین و بزرگترین درجه رأس‌های گراف Γ را به ترتیب، با نمادهای $\delta(\Gamma)$ و $\Delta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. رأسی را که درجه‌اش صفر باشد، رأس تنها می‌خوانیم. اگر در گراف Γ ، درجه همه رأس‌ها برابر با عدد k باشد، آن گراف را k -منتظم (به اختصار، منتظم) می‌گوییم. در این مقاله، از برخی گراف‌های شناخته شده استفاده می‌کنیم که برای اجتناب از طولانی شدن نوشتار، به بحث درباره آنها نمی‌پردازیم ولی خواننده‌ای که با گراف کامل n رأسی K_n ، گراف دوبخشی، گراف کامل دوبخشی $K_{n,m}$ ، گراف‌های ستاره‌ای یا همان $K_{1,n}$ و گراف n -دور C_n آشنا نیست، می‌تواند به [۵] مراجعه کند.

در گراف Γ ، به دنباله‌ای بدون تکرار از رأس‌ها مانند v_0, \dots, v_n که در آن، دو رأس متوالی مجاور هستند، یک مسیر به طول n می‌گوییم و آن را با نماد

$$v_0 - v_1 - \dots - v_{n-1} - v_n$$

نشان می‌دهیم. قطر گراف Γ برابر بیشینه فاصله بین رأس‌های آن گراف است. به دو مسیر بین رأس‌های s و t از یک گراف که هیچ رأس مشترکی بجز خود s و t ندارند، دو $s-t$ مسیر مستقل^۱ می‌گویند. گرافی را که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد، همبند وگرنه آن را گراف ناهمبند می‌خوانیم.

اکنون یک مدل گرافی برای شبکه‌ها می‌سازیم به این صورت که به هر شبکه اتصال، یک گراف نظیر می‌کنیم: مجموعه پردازنده‌ها را مجموعه رأس‌های گراف در نظر می‌گیریم و دو رأس در این گراف را با یک یال به هم وصل می‌کنیم اگر یک ارتباط مستقیم (سیم) بین پردازنده‌های نظیرشان وجود داشته باشد. در عمل، همیشه می‌توان یک گراف را یک شبکه و یک شبکه را یک گراف دانست. به همین دلیل، در متون علوم رایانه و به‌ویژه شبکه‌ها، معمولاً از این دو واژه به‌جای یکدیگر استفاده می‌شود [۲۲]. به کمک مدل گرافی شبکه‌ها، می‌توان مفاهیم و کمیت‌های مطلوب در یک شبکه اتصال را به زبان گراف‌ها ترجمه و از قضیه‌ها و نتایج نظریه گراف، برای طراحی و ساخت یک شبکه اتصال استفاده کرد. به‌طور کلی، در طراحی شبکه‌های اتصال، با دو نوع مسئله مواجه هستیم. اول، مسائلی نظری مربوط به ساخت شبکه‌ای با ویژگی‌های مطلوب و دوم، مسائلی که با توجه به محدودیت‌های فناوری ایجاد می‌شوند و به دنبال آن، بر روی مسائل دسته اول نیز محدودیت‌هایی ایجاد می‌کنند. برای توضیح این دو نوع مسئله، اندکی درباره محدودیت‌های ناشی از سیم‌ها و سوئیچ‌ها بحث می‌کنیم.

از مهم‌ترین پارامترهای مؤثر در بازده یک شبکه اتصال، میزان کل داده‌ای است که می‌تواند در یک واحد زمانی از یک اتصال عبور کند. این مقدار را پهنای مسیر داده^۲ می‌نامیم. در یک شبکه، برای اتصال ارتباط‌های مستقیم (سیم‌ها) به پردازنده‌ها، از قطعاتی موسوم به سوئیچ استفاده می‌شود که مسئولیت تنظیم و تبادل داده‌های ورودی و خروجی را به عهده دارند. توجه کنید که میزان داده‌ای که می‌تواند از یک سوئیچ داخل شبکه در یک واحد زمانی عبور کند، عددی ثابت است که بیشینه پهنای باند سوئیچ^۳ نامیده می‌شود. پهنای مسیر داده و بیشینه پهنای باند یک سوئیچ، قیدهایی در طراحی شبکه اتصال مطلوب هستند که از محدودیت‌های فناوری ناشی می‌شوند. دو کمیت بالا، هر دو از مشخصات سیم‌ها و سوئیچ‌های استفاده‌شده هستند و هرچه بزرگتر باشند، انجام محاسبات و تبادل اطلاعات در شبکه، با سرعت بیشتری انجام می‌شود [۲۲]. از سوی دیگر، میزان داده ورودی

^۱ independent path ^۲ data path width ^۳ maximum bandwidth of a switch

به یک سوئیچ در شبکه، برابر با حاصلضرب پهنای مسیر در تعداد اتصالات مستقیم متصل به آن سوئیچ است. پس چون در زمان طراحی شبکه، داده ورودی به یک سوئیچ نمی‌تواند بزرگتر از بیشینه پهنای باندش باشد، این دو محدودیت فناوری باعث ایجاد یک کران بالا برای بیشینه درجه گراف مورد استفاده در طراحی شبکه‌ها می‌شوند. برای مثال، در سال ۱۹۹۲ میزان داده قابل عبور از هر سوئیچ در ماشین‌های محاسباتی مورد مطالعه در [۲۲]، برابر با ۱۰۰۰ بیت بر ثانیه و پهنای مسیر داده نیز برابر با ۱۵۰ بیت بر ثانیه بود. در نتیجه گراف‌هایی که در [۲۲] بررسی شده‌اند، درجه‌هایی کوچکتر از $\lceil \frac{1000}{150} \rceil = 7$ داشتند. اما در سال ۲۰۱۲ در ابررایانه معروف شرکت فوجیتسو، یعنی K رایانه فوجیتسو^۱، از سیم‌ها و سوئیچ‌هایی استفاده شد که هر ارتباط مستقیم آن قابلیت انتقال ۴ گیگابایت بر ثانیه را داشت و هر سوئیچ آن نیز می‌توانست ۴۰ گیگابایت بر ثانیه داده را عبور دهد. توجه کنید که شبکه اتصال این آبرایانه موسوم به توفو^۲، یک گراف ۱۰-منتظم است [۱]. بنابراین با تغییر اساسی این قیدها در طراحی شبکه‌ها در اثر گذشت زمان، دیده می‌شود که گراف‌هایی که به دلیل محدودیت بیشینه پهنای باند سوئیچ‌ها نمی‌توانند در زمان حال مورد استفاده قرار گیرند، ممکن است در آینده گزینه‌هایی بسیار مناسب باشند. این حقیقت، مبنای انجام مطالعات نظری درباره شبکه‌ها است و به این دلیل، ارائه طرح‌های شبکه‌هایی که بازدهی بالایی دارند ولی به دلیل محدودیت‌های فناوری، در حال حاضر قابل استفاده نیستند و یا توجیه اقتصادی ندارند، امری طبیعی است.

اکنون برخی از ویژگی‌های اساسی یک شبکه اتصال مطلوب در طراحی یک ابررایانه سریع را ذکر می‌کنیم. در بخش بعدی، به کمک مدل گرافی شبکه‌های اتصال، آنها را به زبان نظریه گراف ترجمه می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند جزئیات بیشتر را در [۲۲] بخواند که در واقع از بنیادی‌ترین مقالات در زمینه استفاده از نظریه گروه‌ها در طراحی شبکه‌های اتصال و اصلی‌ترین مرجع ما در این مقاله است.

(۱) در یک شبکه اتصال، می‌خواهیم فاصله بین هر دو پردازنده، کمترین میزان ممکن باشد، زیرا زمان مورد نیاز برای ارسال یک داده از یک پردازنده به پردازنده‌ای دیگر و سپس زمان بازگشت پیام به پردازنده اول، تأخیر ارتباطی در شبکه است و هرچه این تأخیر بزرگتر باشد، محاسبات با سرعت کمتری انجام می‌شوند. این مسئله، از نظر مصرف انرژی نیز حائز اهمیت است و هرچه قطر شبکه اتصال کوچکتر باشد، مصرف انرژی نیز کمتر می‌شود.

(۲) در یک شبکه اتصال، می‌خواهیم ارتباط بین پردازنده‌ها، با از کار افتادن تعدادی از آنها و یا با از بین رفتن برخی ارتباط‌های مستقیم، تا حد ممکن برقرار بماند. به این منظور، سعی می‌کنیم شبکه را به گونه‌ای طراحی کنیم که تعداد پردازنده‌ها و یا ارتباط‌های مستقیمی که با از کار افتادن

^۱Fujitsu's K computer ^۲Tofu

آنها، همچنان ارتباط بین پردازنده‌ها در شبکه اتصال قطع نشود، تا آنجا که ممکن است، بزرگ باشد. از این مسئله با نام *تحمل-تقصیر* یاد می‌شود.

(۳) در طراحی یک شبکه اتصال، هرچه تعداد ارتباط‌های مستقیم بین پردازنده‌ها (تعداد سیم‌هایی که بین پردازنده‌ها قرار دارند) بیشتر باشد، هزینه ساخت ابررایانه نظیرش بیشتر می‌شود. به همین دلیل، مطلوب این است که تعداد کل سیم‌های مورد استفاده در یک شبکه اتصال، تا آنجا که ممکن است، کم باشد.

(۴) در طراحی یک شبکه اتصال، می‌خواهیم برای ارسال داده‌ها بین هر دو پردازنده، الگوریتمی ساده برای مسیریابی در شبکه وجود داشته باشد. اگر این الگوریتم، به محاسبات زیادی نیاز داشته باشد، زمان لازم برای مسیریابی باعث ایجاد تأخیر در شبکه اتصال و سرعت محاسبات می‌شود. با این هدف و به منظور ساده‌سازی بیشتر مسیریابی در شبکه، بهتر است الگوریتم به‌کار رفته در همهٔ رأس‌ها یکسان باشد.

(۵) چون گاهی به دلیل تراکم بار روی یک اتصال (گره) نمی‌توانیم از مسیر معمول بین دو رأس شبکه، برای انتقال داده استفاده کنیم، داشتن روشی که بتواند مسیری جایگزین را فراهم کند، ضروری است. لذا تمایل داریم که در طراحی شبکه‌های اتصال، الگوریتمی ساده نیز برای یافتن مسیرهای جایگزین در اختیار داشته باشیم.

۳. گراف‌ها و شبکه‌های اتصال

در این بخش، نخست به ترجمهٔ ویژگی‌های معرفی‌شده در بخش قبل برای یک شبکه مطلوب، به زبان نظریهٔ گراف می‌پردازیم و سپس کار خود را با ارائهٔ مثال‌هایی از گراف‌هایی که این ویژگی‌ها را دارند، پی می‌گیریم.

(i) قطر گراف نظیر یک شبکه اتصال، نشان‌دهندهٔ بیشینهٔ تأخیر برای ارسال یک پیام از یک رأس به رأسی دیگر است. در واقع، ویژگی (۱) در طراحی شبکه‌ها، معادل ساخت شبکه‌ای است که دارای کوچکترین قطر ممکن باشد.

(ii) برای تعبیر ویژگی (۲) به زبان نظریهٔ گراف، دو کمیت گرافی را معرفی و کار را با بحث حذف رأس‌ها آغاز می‌کنیم. *تحمل-نقص* یک گراف Γ که آن را با $f(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم، برابر با بیشینهٔ تعداد رأس‌هایی است که با حذف آنها، گراف نه ناهمبند شود و نه تبدیل به یک رأس تنها شود (در این تعریف، بدترین حالت ممکن در نظر گرفته می‌شود؛ برای مثال، اگر گراف $K_{1,5}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه چون با حذف رأس با درجهٔ ۵ در $K_{1,5}$ ، گراف ناهمبند می‌شود،

تحمّل-نقص این گراف صفر است). یک مجموعه از رأس‌های گراف Γ را مجموعه‌ای جدا ساز^۱ می‌نامیم اگر با حذف آنها، گراف باقیمانده ناهمبند شود. اگر W مجموعه‌ای جدا ساز با کمترین تعداد عضو باشد، آن‌گاه گراف Γ حداکثر می‌تواند $|W| - 1$ نقص را تحمّل کند؛ یعنی قادر به تحمّل $|W|$ نقص نیست. تعریف می‌کنیم $\kappa(\Gamma) = |W|$ و آن را همبندی رأسی^۲ می‌نامیم. در این صورت، $f(\Gamma) = \kappa(\Gamma) - 1$. در نتیجه حل مسئله محاسبه همبندی رأسی گراف، به حل مسئله محاسبه تحمّل-نقص گراف منجر می‌شود و به عکس. به طریق مشابه، مسئله همبندی یالی^۳ یک گراف مطرح می‌شود. همبندی یالی گراف Γ که آن را با نماد $\lambda(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم، برابر با کمترین تعداد یال‌هایی است که با حذف آنها، گراف ناهمبند می‌شود. روشن است که برای هر رأس v در گراف Γ ، حذف همه یال‌های واقع بر v و به‌طور مشابه، رأس‌های مجاور v ، گراف را ناهمبند می‌کند و لذا

$$\kappa(\Gamma) \leq \delta(\Gamma), \quad \lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma).$$

می‌گوییم گراف Γ دارای همبندی رأسی بیشینه ممکن (یا تحمّل-نقص بهینه^۴) است اگر $\kappa(\Gamma) = \delta(\Gamma)$. مشابهاً، گراف Γ را دارای همبندی یالی بیشینه ممکن گوئیم در صورتی که $\lambda(\Gamma) = \delta(\Gamma)$. بنابراین با توجه به ویژگی (۲) در طراحی شبکه‌های اتصال، بهترین شرایط مورد انتظار، منجر به مسئله یافتن گراف‌هایی با همبندی رأسی بیشینه ممکن و همبندی یالی بیشینه ممکن می‌شود.

(iii) ویژگی (۳) در طراحی شبکه‌ها، معادل ساخت گرافی با کوچکترین تعداد یال ممکن است. یکی از روش‌های رایج در حل این مسئله که ما نیز از آن استفاده خواهیم کرد، روشی بسیار کارا و ساده مبتنی بر گراف‌های منتظم است. توجه کنید که اگر یک گراف k -منتظم n رأسی داشته باشیم، آن‌گاه تعداد کل یال‌های گراف برابر با $nk/2$ است. پس در مسئله ساخت شبکه مطلوب، برای کوچک کردن تعداد کل سیم‌های به‌کار رفته، از گراف‌های منتظمی استفاده می‌کنیم که درجه آنها تا حد ممکن کوچک باشد. استفاده از گراف‌های منتظم در طراحی شبکه‌ها، تنها به دلیل سادگی بحث بالا نیست و این کار، مزیت دیگری نیز دارد. توجه کنید که در ساختارهای هندسی متقارن که در ساخت سازه‌ها استفاده می‌شوند، وزن به‌صورت یکسان توزیع می‌گردد. بدیهی است که در ساخت شبکه‌های اتصال نیز سعی کنیم با انتخاب گراف‌های منتظم، جریان داده را به‌صورت یکسان توزیع کنیم.

^۱separating set ^۲Vertex-connectivity ^۳Edge-connectivity ^۴optimal fault-tolerance

(iv) با توجه به تعریف گراف نظیر یک شبکه اتصال، مسئله مسیریابی بین دو پردازنده، در عمل همان مسئله پیدا کردن مسیری از یک رأس گراف به رأسی دیگر است. این مسئله که از شناخته شده ترین مسائل در نظریه گراف است، دارای الگوریتم‌هایی متنوع (مانند الگوریتم دیکسترا) است که به کمک آنها می‌توان کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس در یک گراف را یافت. اما اشکال اغلب این الگوریتم‌ها این است که نیازمند محاسباتی هستند که علاوه بر صرف توان ماشین برای انجام آنها، باعث ایجاد تأخیر در شبکه اتصال نیز می‌شود. اما یک الگوریتم مسیریابی ساده چگونه نوشته می‌شود؟ برای پاسخ به این سؤال، در بخش بعدی، نخست با استفاده از ابرمکعب‌ها به توضیح شهودی این بحث می‌پردازیم و سپس در بخش آخر، به‌طور کلی‌تر و با استفاده از مطالبی در نظریه گروه‌ها، ریشه ساخت این الگوریتم‌ها را روی گراف‌هایی موسوم به گراف‌های کیلی توضیح می‌دهیم.

(v) مسئله پیدا کردن مسیرهای جایگزین در گراف‌ها را نیز می‌توان مشابه (iv) به کمک الگوریتم‌های مسیریابی در گراف‌ها حل کرد. اگرچه توجه داریم که برای ارائه الگوریتم‌هایی مناسب در این مورد، باز هم مانند بالا نیازمند استفاده از ابزارهایی پیشرفته هستیم. در ادامه نخست این موضوع را در مورد ابرمکعب‌ها و سپس در مورد گراف‌های کیلی توضیح خواهیم داد.

به این ترتیب، مسئله ساخت شبکه اتصال مطلوب، منجر به مسئله ساخت گرافی k -منتظم مانند Γ با قطر D می‌شود که در آن، D و k تا جای ممکن کوچک باشند و در عین حال، همبندی رأسی و همبندی یالی آن تا جای ممکن بزرگ باشند. پس تا اینجا می‌توان دید که مسئله طراحی شبکه اتصال مطلوب، به مسئله ساخت گرافی با قید درجه بیشینه Δ و قطر D منجر می‌شود (که با توجه به نیازهای امروزه، تمایل داریم تا جای ممکن، تعداد رأس‌هایش عددی بزرگ باشد). این مسئله که از مهم‌ترین مسائل نظریه گراف به حساب می‌آید، به مسئله درجه-قطر موسوم است و تاکنون با ابزارهای مختلف به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است [۸، ۱۵]. ساخت گرافی منتظم که هم دارای قطر کوچک و هم دارای درجه کوچک باشد، چندان ساده نیست، زیرا عموماً گراف‌های با قطر کوچک، دارای درجه بزرگ هستند. لذا این دو ویژگی یک شبکه مطلوب، به‌نوعی در تضاد با یکدیگر هستند.

مسئله دیگر در طراحی شبکه‌های اتصال، رابطه بین پهنای مسیر داده و قطر شبکه است که کار طراحی را به‌طور مستقیم تحت تأثیر قرار می‌دهد. برای درک بهتر این ارتباط، فرض کنید شبکه N_1 دارای پهنای باند داده d و قطر μ باشد و شبکه N_2 دارای پهنای باند داده $\frac{d}{2}$ و قطر $\frac{\mu}{2}$ باشد. اگرچه در شبکه N_2 قطر و پهنای باند داده، نصف قطر و پهنای باند داده در شبکه N_1 است، این دو شبکه

¹Dijkstra's algorithm

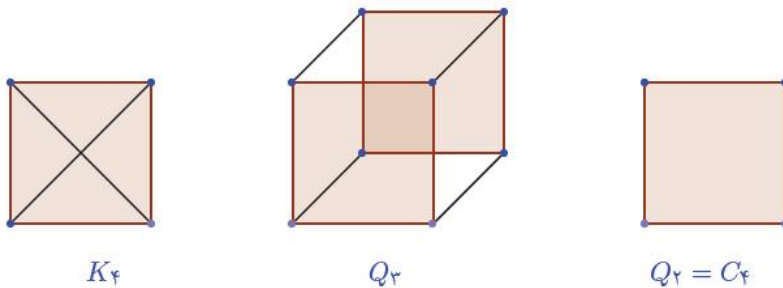
یک بازده دارند؛ یعنی زمان لازم برای فرستادن و دریافت میزان یکسانی از داده‌ها، در هر دو برابر است. توجه کنید که زمان لازم برای فرستادن d بایت از یک رأس N_1 به رأسی دیگر و سپس بازگشت پیام به رأس اولیه، برابر با 2μ است. از طرف دیگر، در شبکه N_2 چون پهنای باند داده، $d/2$ است، زمان لازم برای فرستادن d بایت از یک رأس N_2 به رأسی دیگر نیز برابر با 2μ است. بنابراین بازده این دو شبکه یکسان است و لذا کوچک کردن پارامترهای مؤثر یک شبکه اتصال، لزوماً به معنای بهبود بازده آن نیست [۲۲].

بین همبندی رأسی یا همبندی یالی و درجه یک شبکه مطلوب نیز نوعی تضاد وجود دارد. در واقع، هرچه درجه یک گراف منتظم بیشتر باشد، همبندی رأسی و همبندی یالی آن بیشتر است و هرچه درجه کمتر باشد، همبندی رأسی و همبندی یالی کمتر می‌شود. برای مثال، در شکل ۱ گراف‌های C_4 و K_4 را مقایسه کنید.

فرض کنیم در گرافی مثل Γ ، بین هر دو رأس متمایز s و t ، حداقل p مسیر مستقل وجود داشته باشد. در این صورت، اگر بخواهیم ارتباط بین رأس‌های s و t را در این گراف قطع کنیم، باید از هر $s - t$ مسیر مستقل، یک رأس را حذف کنیم که چون این رأس‌ها دوه‌دو متمایز هستند، $p \leq \kappa(\Gamma)$. بنابراین هرچه تعداد $s - t$ مسیرهای مستقل در بین زوج رأس‌های s و t در گراف بیشتر باشد، همبندی رأسی بیشتر خواهد بود. در بخش بعدی خواهیم دید که تعداد این مسیرها، پیوندی دقیق‌تر با مفهوم همبندی رأسی دارد (قضیه ۳.۴ را ببینید) ولی آنچه در این مرحله از آن استفاده خواهیم کرد، تنها همین کران پایین برای $\kappa(\Gamma)$ است.

اکنون به بحث روی دو گونه از گراف‌های مشهور در ساخت شبکه‌های اتصال می‌پردازیم و با مثال، ویژگی‌های گراف‌هایی را توضیح می‌دهیم که دارای شرایط بالا هستند. سپس با مقایسه این گراف‌ها، نشان می‌دهیم که چرا بعضی شبکه‌ها دارای برتری نسبی در مقایسه با شبکه‌های دیگر هستند. در اینجا منظور ما از برتری یک شبکه، از دید نظری است و در دیدگاه عملی، طراحی یک شبکه اتصال ایده‌آل، به پارامترهای متعدد دیگری مانند طول سیم‌ها و هزینه سیم‌کشی، یا هزینه پیاده‌سازی فیزیکی شبکه و غیره نیز وابسته است که بحثی سخت‌افزاری است و مطالعه آن، از بحث ما خارج است [۸].

۱.۳. آبرمکعب‌ها. یکی از نخستین گراف‌های به‌کار رفته در طراحی شبکه‌های اتصال، آبرمکعب‌ها هستند. این گراف‌ها را به روش‌های گوناگون می‌توان معرفی کرد که در اینجا برای سادگی، از نمایش آنها به‌کمک دنباله‌های 0 و 1 استفاده می‌کنیم. در بخش بعد و پس از معرفی مفهوم گراف کیلی، ریشه اصلی این تعریف را بیان خواهیم کرد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، گراف Q_n را به این صورت تعریف می‌کنیم



شکل ۱. مثال‌هایی از ابرمکعب‌ها، دورها و گراف‌های کامل

که مجموعه رأس‌های آن، مجموعه همه n تایی‌های مرتب با درایه‌های ۰ و ۱ است، یعنی

$$V(Q_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$$

و دو رأس $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در این گراف مجاور هستند اگر اندیس $j \in \{1, \dots, n\}$ موجود باشد که x و y فقط در درایه j ام با هم فرق داشته باشند، یعنی $x_j \neq y_j$. این گراف را ابرمکعب n بُعدی می‌گویند (شکل ۱).

برای بیان ویژگی‌های پایه‌ای ابرمکعب‌ها، از بحث روی گراف Q_3 استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که چون مجموعه رأس‌های Q_n از n تایی‌های با درایه‌های ۰ و ۱ تشکیل شده است، پس این مجموعه دارای 2^n رأس است. از طرف دیگر، دقت کنید که هر رأس $x = (x_1, \dots, x_n)$ در Q_n دقیقاً به n رأس دیگر متصل است، زیرا با تغییر هر درایه $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، یک رأس جدید در Q_n به دست می‌آید که با آن مجاور است. به‌ازای هر دو رأس x و y ، حداکثر این دو n تایی مرتب ممکن است که در n درایه متمایز باشند و لذا با شروع از $x = (x_1, \dots, x_n)$ و تغییر گام به گام درایه‌های آن با درایه‌هایی در $y = (y_1, \dots, y_n)$ که دارای مقادیر متفاوت هستند، حداکثر با یک مسیر به طول n می‌توان از x به y رسید. بنابراین می‌توان کوتاه‌ترین مسیر بین x و y را یافت. در نتیجه قطر گراف Q_n برابر n است. از سوی دیگر، در هر مرحله از فرآیند بالا، اگر بخواهیم یک مسیر جایگزین به دست آوریم، کافی است یک درایه دیگر را تغییر دهیم و از رأس جدید به دست آمده، بر اساس همان الگوریتم بالا، مسیری به y بسازیم. به دلیل قانون اتصال ساده ابرمکعب‌ها، مسیریابی و یافتن مسیر جایگزین در آنها، دارای الگوریتم‌های ساده‌ای است که به کمک ابزارهای جبری و یا هندسی ارائه می‌شوند [۱۰].

توجه کنید که به ازای هر دو رأس x و y دلخواه در Q_3 ، همیشه سه مسیر مستقل بین آن دو وجود دارد. برای مثال، بین $(0, 0, 0)$ و $(1, 0, 1)$ مسیرهای زیر را داریم.

$$(1, 0, 1) - (1, 0, 0) - (0, 0, 0), \quad (1, 0, 1) - (0, 0, 1) - (0, 0, 0),$$

$$(0, 0, 0) - (0, 1, 0) - (0, 1, 1) - (1, 1, 1) - (1, 0, 1).$$

در حالت کلی ثابت می‌شود که بین هر دو رأس Q_n ، حداقل n مسیر مستقل وجود دارد [۸]. لذا برای ناهمبند شدن گراف Q_n یا رأس تنها شدن آن، نیازمند حذف دست کم n رأس هستیم. همان‌طور که دیدیم، همبندی رأسی گراف، کوچکتر از یا مساوی با کوچکترین درجه گراف Q_n است. پس

$$n \leq \kappa(Q_n) \leq \delta(Q_n) = n$$

و بنابراین $\kappa(Q_n) = n$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که همبندی یالی Q_n نیز برابر با n است، یعنی $\lambda(Q_n) = n$. از این‌رو آپرمکعب‌ها دارای همبندی رأسی و همبندی یالی بیشینه هستند. با جمع‌بندی بحث‌های بالا، می‌توان گفت که این گراف دارای 2^n رأس، درجه n و قطر n است و به‌علاوه دارای همبندی رأسی بیشینه و همبندی یالی بیشینه است.

توجه کنید که به‌دلیل استفاده از n تایی‌های مرتب برای ساخت این گراف‌ها، می‌توان رأس‌های گراف Q_n را به‌نحوی به دو بخش تقسیم کرد که هر بخش، یک گراف Q_{n-1} باشد (به گراف‌های $Q_2 = C_4$ و Q_3 در شکل ۱ دقت کنید). این حقیقت امکان استفاده از روش‌های بازگشتی در کار با این گراف‌ها را فراهم می‌کند که یکی دیگر از مزیت‌های آپرمکعب‌ها به حساب می‌آید. در سوی مقابل، پیاده‌سازی فیزیکی آپرمکعب‌ها در فضای دو بُعدی یا سه بُعدی، کاری دشوار است و به این دلیل، ساخت آنها نسبتاً گران است.

ویژگی‌های تقارنی آپرمکعب‌ها و ساختار ساده آنها باعث شده است که این گراف‌ها، انتخابی مناسب در طراحی شبکه‌های اتصال باشند و از همان ابتدا، ماشین‌های محاسباتی زیادی بر مبنای آنها ساخته شدند که بعدها به نام آپرایانه‌های آپرمکعبی معروف شدند [۲۴]. نخستین مطالعات روی این آپرایانه‌ها در سال ۱۹۶۳ توسط اسکویر^۱ و پلی^۲ از دانشگاه میشیگان انجام شد. سخت‌افزار مورد نیاز برای اجرای طرح پیشنهادی آنها که بر مبنای یک آپرمکعب ۱۲ بُعدی بود، تقریباً بیست برابر سخت‌افزار به‌کار رفته در سریع‌ترین ابررایانه سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۶۴، یعنی آی‌بی‌ام استرتیج^۳ بود. در نتیجه با وجود مزیت‌های نسبی در مقایسه با آی‌بی‌ام استرتیج، این طرح ساخت آپرایانه توجیه اقتصادی نداشت و عملیاتی نشد.

^۱Squire ^۲Palais ^۳IBM Stretch

با پیشرفت فناوری ریزپردازنده‌ها در اوایل دهه ۱۹۷۰، این گراف‌ها دوباره مورد توجه قرار گرفتند و تا اوایل دهه ۱۹۸۰، طرح‌هایی گوناگون بر مبنای آنها ارائه شد که علی‌رغم مزیت‌های فراوان، باز به دلایل اقتصادی و گران بودن هزینه‌های ساخت، اجرایی نشدند. تا اینکه در سال ۱۹۸۳، اولین آبرایانهٔ آبرمکعبی موسوم به مکعب کیهانی^۱ توسط سایتز^۲ و همکارانش در مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا ساخته شد که در واقع، نخستین آبرایانهٔ آبرمکعبی از این سری در این مؤسسه بود. این آبرایانه در زمان خودش در ردهٔ رایانه‌های هم‌قیمت، از عملکرد بسیار بهتری برخوردار بود و بسیاری از وظایف محاسباتی خود را به بهترین شکل انجام داد [۱۰، ۲۳]. پس از آن، انواع دیگری از این آبرایانه‌ها در مؤسسات و دانشگاه‌های متعدد جهان ساخته شدند که البته امروزه، صدرنشین آبرایانه‌های سریع جهان به حساب نمی‌آیند. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای دیدن فهرستی از این ماشین‌های محاسباتی، به [۱۰] مراجعه کند.

۲.۳. گراف‌های کیلی ستاره‌ای. گراف‌های کیلی ستاره‌ای، نخستین بار توسط اکرز^۳ و کریشنامورتی^۴ [۳] به‌عنوان گراف مناسب در طراحی شبکه‌ها معرفی شدند و بعدها به‌طور گسترده توسط پژوهشگران دیگر مورد مطالعه قرار گرفتند. برای معرفی گراف‌های کیلی ستاره‌ای، نخست تعریف چند مفهوم را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. تابع دوسویی f روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ را یک ترانهش گوئیم اگر $1 \leq i < j \leq n$ موجود باشند به طوری که

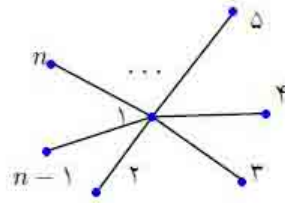
$$f(x) = \begin{cases} i & \text{اگر } x = j \\ j & \text{اگر } x = i \\ x & \text{اگر نه} \end{cases}$$

این ترانهش را با نماد (ij) نمایش می‌دهیم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، به تعداد $\binom{n}{2}$ ترانهش روی مجموعه $\{1, \dots, n\}$ وجود دارد. فرض کنیم T یک مجموعه از ترانهش‌ها روی $\{1, \dots, n\}$ باشد. گراف ترانهشی نظیر T گرافی است که مجموعهٔ رأس‌هایش $\{1, \dots, n\}$ است و دو رأس در این گراف مجاور هستند اگر $(ij) \in T$. بنابراین در این گراف، هر یال توسط یک ترانهش (ij) ایجاد می‌شود که عضو T است و در واقع، مجموعهٔ یال‌های این گراف عبارت است از

$$\{(i, j) \mid (ij) \in T\}.$$

مثلاً گراف ترانهشی نظیر مجموعه $T = \{(12), (13), \dots, (1n)\}$ همان گراف $K_{1, n-1}$ است که در شکل ۲ رسم شده است. حال گراف کیلی ستاره‌ای ST_n را تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ

^۱cosmic cube ^۲Seitz ^۳Akers ^۴Krishnamurth



شکل ۲. گراف جایگشتی مجموعه $\{(12), \dots, (1n)\}$

تابع‌های دوسویی روی $\{1, \dots, n\}$ را مجموعه رأس‌های ST_n در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تابع‌های دوسویی f و g در ST_n مجاورند اگر $1 \leq i \leq n$ موجود باشد به طوری که

$$f(1) = g(i), f(i) = g(1)$$

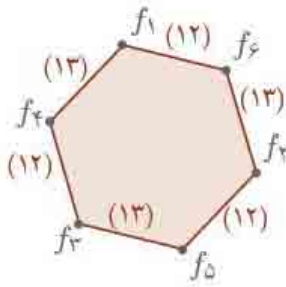
و برای هر $i, x \neq 1$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$. در این صورت، به سادگی می‌توان دید که برای ترانهش $(1i)$ داریم $f \circ (1i) = g$. در این حالت می‌گوییم یال $\{f, g\}$ در گراف ST_n ، توسط ترانهش $(1i)$ ایجاد شده است. برای توضیح بهتر این ساختار، گراف ST_3 را محاسبه می‌کنیم. با محاسبه می‌توان دید که تابع‌های دوسویی روی مجموعه $\{1, 2, 3\}$ عبارت‌اند از

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } x = 1 \\ 1 & \text{اگر } x = 2 \\ 3 & \text{اگر } x = 3 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & \text{اگر } x = 1 \\ 2 & \text{اگر } x = 2 \\ 1 & \text{اگر } x = 3 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1 \\ 3 & \text{اگر } x = 2 \\ 2 & \text{اگر } x = 3 \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} 3 & \text{اگر } x = 1 \\ 1 & \text{اگر } x = 2 \\ 2 & \text{اگر } x = 3 \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } x = 1 \\ 3 & \text{اگر } x = 2 \\ 1 & \text{اگر } x = 3 \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1 \\ 2 & \text{اگر } x = 2 \\ 3 & \text{اگر } x = 3 \end{cases}$$

بنابر تعریف گراف کیلی ستاره‌ای ST_3 ، یال‌ها توسط ترانهش‌های (12) و (13) ایجاد می‌شوند. در شکل ۳ ضمن ارائه این گراف، برای نشان دادن شیوه اتصال رأس‌ها، هر یال را با ترانهشی

شکل ۳.۳ ST_7

که آن را ایجاد کرده است، برجسبگذاری می‌کنیم. شاید با نگاه به این گراف و مقایسه آن با گراف ستاره‌ای رایج در نظریه گراف، یعنی همان گراف $K_{1,m}$ ، این سؤال ایجاد شود که منشأ این نامگذاری چیست. در پاسخ باید گفت که دلیل این امر در شکل گراف ترانهشی نظیر مجموعه $T = \{(12), (13), \dots, (1n)\}$ نهفته است که به شکل گراف ستاره‌ای $K_{1,n-1}$ است. در بخش بعد، به بیان دقیق‌تر پیوند گراف‌های کیلی ستاره‌ای و گراف‌های ترانهشی خواهیم پرداخت.

چون اثبات ویژگی‌های گراف‌های کیلی ستاره‌ای، نیازمند بحث‌های تخصصی است، برخی از این ویژگی‌های را بدون اثبات بیان می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند جزئیات بیشتر را در [۳، ۸، ۲۲] بیابد. می‌دانیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، تعداد تابع‌های دوسویی روی $\{1, \dots, n\}$ برابر با $n!$ است. همچنین برای هر تابع دوسویی f و هر $1 \leq i \leq n$ ، یک تابع دوسویی یکتا مانند g وجود دارد که $f(i) = g(1)$ ، $f(i) = g(1)$ و برای هر x دیگر، $f(x) = g(x)$. لذا درجه هر رأس f در گراف ST_n برابر با تعداد عضوهای مجموعه $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$ ، یعنی $n - 1$ است.

ثابت می‌شود که قطر گراف ST_n برابر با $\lfloor \frac{3(n-1)}{4} \rfloor$ است و همچنین برای هر دو رأس f و g ، تعداد $f - g$ مسیرهای مستقل در ST_n برابر با $n - 1$ است [۳، ۲۲]. مشابه بحث محاسبه همبندی رأسی و همبندی یالی اُتر مکعب‌ها، می‌توان نشان داد که چون درجه هر رأس این گراف $n - 1$ است، همبندی رأسی و همبندی یالی ST_n برابر با $n - 1$ و در واقع بیشینه ممکن است.

برای مسیریابی روی گراف‌های کیلی ستاره‌ای ST_n ، الگوریتم‌های متفاوتی وجود دارد که در بخش بعد به‌طور دقیق‌تر به شرح آنها خواهیم پرداخت و در اینجا تنها به ذکر این نتیجه معروف بسنده می‌کنیم که به کمک الگوریتمی که توسط شیبیل^۱ و استافورد^۲ ارائه شده است [۲۲]، می‌توان بین هر دو رأس دلخواه ST_n ، مسیری ساده با طول حداکثر $3 - 2n$ به دست آورد.

^۱Schibell ^۲Stafford

۳.۳. مقایسهٔ آبرمکعب‌ها و گراف‌های کیلی ستاره‌ای. پس از شناخت کلی گراف‌های کیلی ستاره‌ای و آبرمکعب‌ها، به مقایسهٔ آنها می‌پردازیم. برای عدد طبیعی n ، مشخصات Q_n و ST_n یکسان نیستند. بنابراین مقایسهٔ این دو گراف را به دو صورت انجام می‌دهیم. در صورت اول، اعداد طبیعی n و m را طوری انتخاب می‌کنیم که قطرهای گراف‌های ST_n و Q_m یکی باشند. در صورت دوم، این دو گراف را وقتی مقایسه می‌کنیم که تقریباً به یک تعداد رأس داشته باشند.

مثال ۱.۳. الف) گراف Q_9 را در نظر می‌گیریم. این گراف، $512 = 2^9$ رأس دارد و دارای قطر ۹ و درجهٔ ۹ است. اگر بخواهیم گرافی با قطر ۹ به کمک گراف‌های کیلی ستاره‌ای بسازیم، کافی است با توجه به فرمول قطر آن، n را ۷ بگیریم. اما گراف ST_7 دارای $5040 = 7!$ رأس و درجهٔ ۶ است. پس تعداد پردازنده‌ها در شبکهٔ ساخته‌شده با آبرمکعب‌ها و با قطر ۹، تقریباً یک‌دهم تعداد پردازنده‌های در شبکهٔ ساخته‌شده بر پایهٔ گراف‌های کیلی ستاره‌ای و با قطر ۹ است. از سوی دیگر، درجهٔ رأس‌ها در گراف ساخته‌شده به کمک گراف‌های کیلی ستاره‌ای، پایین‌تر است و لذا هزینهٔ ساخت کمتری دارد. بالأخره مسیریابی بین هر دو رأس دلخواه در Q_9 ، الگوریتمی با طول حداکثر ۹ است و در گراف ST_7 مسیریابی، الگوریتمی با طول حداکثر $11 = 3 - 7 * 2$ است که با توجه به تعداد رأس‌ها، این گراف دارای عملکردی بهتر است.

ب) گراف‌های ST_n و آبرمکعب $Q_{\lceil \log_2(n!) \rceil}$ را در نظر می‌گیریم. درجهٔ گراف ST_n برابر با $n - 1$ است ولی آبرمکعب $Q_{\lceil \log_2(n!) \rceil}$ دارای درجهٔ $\lceil \log_2(n!) \rceil$ است. چون تابع لگاریتم، صعودی است و داریم

$$\log_2(n!) = \sum_{i=1}^n \log_2(i) \geq \frac{n}{2} \log_2(1) + \frac{n}{2} \log_2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \log_2\left(\frac{n}{2}\right),$$

پس گراف ST_n دارای درجهٔ بسیار کوچکتری است و در نتیجه انتخاب بهتری در مقایسه با آبرمکعب $Q_{\lceil \log_2(n!) \rceil}$ به حساب می‌آید. همچنین قطر گراف ST_n برابر با $\lceil \frac{3(n-1)}{2} \rceil$ و قطر $Q_{\lceil \log_2(n!) \rceil}$ برابر با $\lceil \log_2(n!) \rceil$ است. چون برای هر $n \geq 4$

$$\lceil \log_2(n!) \rceil \geq \lceil \frac{n}{2} \log_2\left(\frac{n}{2}\right) \rceil \geq \lceil \frac{3(n-1)}{2} \rceil,$$

پس در این حالت نیز گراف‌های کیلی ستاره‌ای عملکردی بهتر دارند.

در نتیجه گراف‌های کیلی ستاره‌ای در مقایسه با آبرمکعب‌ها دارای برتری هستند و گزینه‌های بهتری در طراحی شبکه‌های اتصال آبرایانه‌ها به نظر می‌آیند. اما بدون عیب هم نیستند و برای مثال،

می‌توان به رشد بسیار سریع تعداد رأس‌های این گراف‌ها اشاره کرد. توجه کنید که

$$۱۰! = ۳۶۲۸۸۰۰, \quad ۹! = ۳۶۲۸۸۰, \quad ۴۰۳۲۰ = ۸!$$

این اعداد، زیرمجموعه‌ای تُنک از اعداد طبیعی را تشکیل می‌دهند و همین فاصله زیادِ تعداد رأس‌های این گراف‌ها است که محدودیتی جدی در استفاده از آنها ایجاد می‌کند. به‌لحاظ هزینه پیاده‌سازی فیزیکی نیز گراف‌های کیلی ستاره‌ای انتخاب‌هایی گرانتر از ابرمکعب‌ها هستند.

۴. گراف‌های کیلی و شبکه‌های اتصال

پیشنهاد استفاده از گراف‌های کیلی برای ساخت شبکه‌های متقارن، نخستین بار توسط اکرز و کریشنامورتی مطرح شد [۳] و خیلی زود مورد توجه قرار گرفت. اساس این دیدگاه مبتنی بر ویژگی رأس-ترایا بودن گراف‌های کیلی است. در این بخش، به‌اجمال دربارهٔ این ویژگی و تقارن‌های ایجاد شده توسط آن سخن خواهیم گفت.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، گروه جایگشتی روی n عضو و گروه دوری n عضوی را به‌ترتیب، با نمادهای S_n و \mathbb{Z}_n نشان می‌دهیم. همچنین در سرتاسر متن، بجز مباحث مربوط به گروه‌های دوری \mathbb{Z}_n ، عضو همانی گروه G را با ۱ نشان می‌دهیم. زیرمجموعهٔ C از گروه متناهی G طوری که هر عضو دلخواه G را بتوان به‌صورت حاصلضرب عضوهایی از C نوشت، یک مجموعهٔ مولد برای G نامیده می‌شود.

۱.۴. گراف‌های کیلی و خودریختی‌های آنها. گراف‌های کیلی از شناخته‌شده‌ترین ساختارها هستند که امروزه کاربردهای فراوانی در ریاضیات، علوم رایانه و شاخه‌های گوناگون مهندسی و پزشکی دارند. این گراف‌ها اولین بار در سال ۱۸۷۸ توسط آرتور کیلی^۱ ریاضیدان سرشناس بریتانیایی در [۷] معرفی شدند. امروزه مفهوم گراف کیلی به صورتی کلی‌تر از آنچه ما در اینجا ارائه می‌دهیم، تعریف می‌شود ولی چون قصد بحث دربارهٔ شبکه‌های جهتدار را نداریم، از ذکر آن پرهیز می‌کنیم. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند شکل کلی‌تر این تعریف و ویژگی‌های بنیادی آن را در [۱۳] ببیند.

فرض کنیم G یک گروه و C مجموعه‌ای مولد برای G باشد به‌طوری که $C = C^{-1}$ (یعنی مجموعهٔ C نسبت به عمل وارون، بسته باشد) و $۱ \notin C$. گراف کیلی G را نسبت به C گرافی با مجموعهٔ رأس‌های G تعریف می‌کنیم که در آن، دو رأس g و g' مجاورند اگر $g^{-1}g' \in C$ (معادلاً عضو $c \in C$ موجود باشد که $g' = gc$). این گراف را با نماد $\text{Cay}(G, C)$ نمایش می‌دهیم و C را مجموعهٔ همبندی گراف $\text{Cay}(G, C)$ می‌نامیم. چون در گروه‌ها، قانون حذف برقرار است، همسایگی هر رأس g در گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ برابر با $\{gc \mid c \in C\}$ است و درجهٔ g نیز

^۱Arthur Cayley

برابر با تعداد عضوهای C است. بنابراین گراف‌های کیلی $\text{Cay}(G, C)$ منتظم هستند. گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ همبند است: فرض کنیم که $g, g' \in G$ دو عضو متمایز و دلخواه باشند. چون $g^{-1}g'$ یک عضو غیرهمانی گروه G است، پس $c_1, \dots, c_n \in C$ وجود دارند به طوری که $g^{-1}g' = c_1 \cdots c_n$ بنابراین

$$g' = (gc_1 \cdots c_{n-1})c_n - (gc_1 \cdots c_{n-2})c_{n-1} - \cdots - gc_1 - g$$

مسیری در گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ است و در نتیجه این گراف، همبند است.

در هر گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ می‌توان به کمک عضوهای C ، یک برچسب‌گذاری (رنگ‌آمیزی) طبیعی روی یال‌های این گراف تعریف کرد. برای هر یال $\{g, g'\}$ در این گراف، عضو $c \in C$ وجود دارد که $g' = gc$ و $g = g'c^{-1}$. با توجه به بسته بودن مجموعه C نسبت به عمل وارون، $c^{-1} \in C$. پس به هر یال گراف کیلی می‌توان مجموعه دو عضوی $\{c, c^{-1}\}$ را نظیر کرد که در واقع آن را ایجاد کرده است. به این ترتیب، یک برچسب‌گذاری روی یال‌های $\text{Cay}(G, C)$ با استفاده از مجموعه‌های دو عضوی $\{c, c^{-1}\}$ به دست می‌آید که چیزی شبیه کاری است که در گراف کیلی ستاره‌ای ST_n انجام دادیم.

در بحث‌های روی گراف‌های کیلی، عضو نظیر هر رأس را به عنوان برچسبی روی رأس نظیرش می‌نویسیم و سپس با استفاده از برچسب‌گذاری بالا و نوشتن مجموعه $\{c, c^{-1}\}$ روی یال‌های نظیرش، عملاً نحوه ایجاد اتصالات در $\text{Cay}(G, C)$ را نمایش می‌دهیم.

یک تفاوت روشن بین گراف‌های کیلی ستاره‌ای و گراف‌های کیلی وجود دارد. در گراف‌های کیلی ستاره‌ای، هر یال توسط تنها یک ترانهش ایجاد می‌شود ولی در گراف‌های کیلی، یال‌ها توسط مجموعه‌های دو عضوی $\{c, c^{-1}\}$ ایجاد می‌شوند. این تفاوت به دلیل مرتبه دو بودن عضوهای مجموعه همبندی در گراف‌های کیلی ستاره‌ای است. در واقع، چون هر عضو مرتبه دو، با وارونش مساوی است، پس برچسب (یا رنگ) هر یال گراف کیلی ستاره‌ای، یک مجموعه تک‌عضوی است. بنابراین در نمایش گراف‌های کیلی ستاره‌ای، برای سادگی می‌توان خود آن عضو را برچسب (یا رنگ) روی یال‌های نظیرش در نظر گرفت.

در اینجا نظر خواننده را به ارزش عضوهای مرتبه ۲ در طراحی شبکه‌ها جلب می‌کنیم. یکی از اهداف ما، ساختن گراف‌هایی منتظم بود که درجه آنها تا حد ممکن کوچک باشد. همسایگی هر رأس g در یک گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ برابر با $\{gc \mid c \in C\}$ است. چون $C = C^{-1}$ ، برای هر عضو $c' \in C$ که مرتبه‌اش ۲ نیست، رأس g دارای دو همسایه متفاوت gc' و gc'^{-1} است.

حالی که برای هر عضو مرتبه ۲ مثل c داریم $gc = gc^{-1}$. پس یکی از بهترین روش‌های ساخت گراف‌های با درجه پایین، استفاده از عضوهای مرتبه ۲ است.

مثال ۱.۴. توجه داریم که $T = \{(12), (13), \dots, (1n)\}$ یک مجموعه مولد برای S_n است و هر عضو T نیز از مرتبه ۲ است. لذا هر عضو، وارون خودش است و داریم $T = T^{-1}$. به سادگی می‌توان دید که گراف کیلی $\text{Cay}(S_n, T)$ همان ST_n است و می‌توان ریشه قانون اتصال بیان شده در بخش قبل را فهمید. برای مثال، به ازای $n = 3$ ، گراف کیلی با برجسب‌های نظیرش در شکل ۳ نشان داده شده است.

مثال ۲.۴. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، حاصلضرب مستقیم گروه \mathbb{Z}_2 به تعداد n بار در خودش را با نماد \mathbb{Z}_2^n نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم که برای هر n ، $1 \leq i \leq n$ ، عضو e_i باشد که درایه i ام آن، ۱ و بقیه درایه‌هایش ۰ است. روشن است که $C = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ یک مجموعه مولد برای \mathbb{Z}_2^n است و $C = C^{-1}$. به سادگی می‌توان دید که گراف کیلی $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, C)$ همان Q_n است و منشأ قانون اتصال تعریف شده برای گراف Q_n در بخش قبل روشن می‌شود.

سؤالی که به‌طور طبیعی پیش می‌آید، این است که آیا پیوندی معنادار بین گراف‌های کیلی و قضیه کیلی وجود دارد؟ نشان می‌دهیم که در واقع، قضیه کیلی یک تفسیر بسیار زیبا در گراف‌های کیلی دارد که حتی به درک بهتر خود این قضیه نیز کمک می‌کند. توجه کنید که در یک n ضلعی منتظم، می‌توان با دَوَران، هر رأس را به مکان رأس دیگری بُرد. همچنین می‌توان با دَوَران، هر ضلع را به مکان ضلع دیگری بُرد. پس در عمل، هر دو رأس و هر دو ضلع یک n ضلعی منتظم، درست مانند یکدیگر هستند و ویژگی‌های یکسانی دارند.

در زیربخش بعدی، معادل این ویژگی‌های تقارنی را برای گراف‌ها بیان می‌کنیم و به مطالعه آنها روی گراف‌های کیلی می‌پردازیم. این ویژگی‌ها بر مبنای وجود توابع دَوَران هستند. به این منظور، نخست همزادی برای مفهوم توابع دَوَران در گراف‌ها ارائه می‌دهیم و سپس از آن برای تعریف تقارن در گراف‌ها استفاده می‌کنیم. دقت کنید که با دَوَران شکل، نه اتصالی جدید در شکل ایجاد می‌شود و نه اتصالی از بین می‌رود. لذا می‌گوییم تابع دَوَران، حافظ اتصال است.

برای گراف $\Gamma = (V, E)$ تابع $\phi : V \rightarrow V$ را یک درونریختی گرافی می‌نامیم اگر به ازای هر یال $\{u, v\} \in E$ داشته باشیم $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E$. در صورتی که برای یک درونریختی ϕ ، تابع ϕ^{-1} موجود و یک درونریختی گرافی باشد، آن‌گاه ϕ را یک خودریختی گرافی می‌نامیم. مجموعه خودریختی‌های گراف Γ همراه با عمل ترکیب توابع را با نماد $\text{Aut}(\Gamma)$ نشان می‌دهیم و آن را گروه خودریختی‌های گراف Γ می‌نامیم.

در گراف‌های متناهی که موضوع بحث ما است، به سادگی می‌توان نشان داد که ϕ یک خودریختی گرافی است اگر و تنها اگر درونریختی یک به یک گرافی باشد. توجه کنید که این حکم برای گراف‌های نامتناهی همیشه درست نیست. به علاوه، هر یال، توسط یک درونریختی به یک یال نگاشته می‌شود. چون وارون هر خودریختی نیز یک درونریختی است، دو رأس غیرمجاور، تحت یک خودریختی نمی‌توانند به دو رأس مجاور نگاشته شوند. بنابراین می‌توان دید که خودریختی‌های یک گراف، همان توابع حافظ اتصال روی گراف‌ها هستند.

۲.۴. پیوند میان گراف‌های کیلی و قضیه کیلی. در این زیربخش، به بحث درباره قضیه کیلی و پیوند آن با گراف‌های کیلی می‌پردازیم و علاوه بر بحث بیشتر و ارائه مثال‌هایی ملموس از خودریختی‌های گرافی، پیوندی آشکار بین خودریختی‌های یک گراف کیلی و قضیه کیلی برقرار می‌کنیم.

فرض کنیم C مجموعه‌ای مولد برای گروه G باشد که $1 \notin C$ و $C = C^{-1}$. برای عضو دلخواه $h \in G$ ، تابع λ_h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_h : G \rightarrow G, \quad \lambda_h(g) = hg.$$

فرض کنیم $g_1, g_2 \in E(\text{Cay}(G, C))$. بنابراین $c \in C$ وجود دارد که $g_2 = g_1c$. چون $hg_2 = hg_1c$ پس $hg_1, hg_2 \in E(\text{Cay}(G, C))$. بنابراین λ_h یک درونریختی گرافی است. مشابهاً، چون $\lambda_h^{-1} = \lambda_{h^{-1}}$ داریم $\lambda_h \in \text{Aut}(\text{Cay}(G, C))$. از سوی دیگر، برای هر $h, h' \in G$ داریم $\lambda_h \lambda_{h'} = \lambda_{hh'}$ (توجه کنید که برای 1 λ_g ، $g = 1$ تابع همانی روی G است). پس مجموعه $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ یک زیرگروه $\text{Aut}(\text{Cay}(G, C))$ است. این زیرگروه را معمولاً با نماد G_L نمایش می‌دهیم و آن را نمایش منتظم چپ G می‌نامیم. $\text{Aut}(\text{Cay}(G, C))$ یک زیرگروه $\text{Sym}(G)$ است. حال نگاشت

$$\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\text{Cay}(G, C)) \leq \text{Sym}(G)$$

را برای هر $g \in G$ با $\alpha(g) = \lambda_g$ تعریف می‌کنیم. بنابر بحث‌های بالا، α یک خودریختی گروهی است. این خودریختی، همان نشاندۀ طبیعی مذکور در قضیه کیلی است. پس می‌توان گفت که قضیه کیلی نشان می‌دهد که گروه خودریختی هر گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ ، شامل نمایش منتظم چپ G به عنوان یک زیرگروه است.

توجه کنید که گروه خودریختی یک گراف کیلی دلخواه، لزوماً برابر با G_L نیست و مشخص‌سازی آن، از مسائل پیچیده در ریاضیات است و با وجود پاسخ‌های متعددی که به این مسئله داده شده است،

هنوز جزو مسائل باز به حساب می‌آید. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای دیدن جزئیات بیشتر به [۹] و [۱۱] مراجعه کند.

۳.۴. ویژگی‌های تقارنی گراف‌های کیلی. اکنون می‌توانیم با در دست داشتن همزادی در گراف‌ها برای دَوَران‌های چندضلعی‌های منتظم، به بحث دربارهٔ انواع تقارن‌های موجود در گراف‌ها بپردازیم. در این زیربخش، توضیح می‌دهیم که هر یک از ویژگی‌های ارزندهٔ مذکور در بخش قبل، نتیجهٔ کدام ویژگی تقارنی گراف‌ها است.

گراف Γ را رأس-ترایا می‌گوییم اگر برای هر دو رأس u و v در Γ ، یک خودریختی مانند $\phi \in \text{Aut}(\Gamma)$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(u) = v$ و آن را یال-ترایا می‌نامیم اگر برای هر دو یال $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$ ، یک خودریختی مانند $\phi \in \text{Aut}(\Gamma)$ وجود داشته باشد به طوری که $\{\phi(a), \phi(b)\} = \{c, d\}$.

به‌سادگی می‌توان دید که تعریف اول، همزاد ویژگی انتقال هر رأس چندضلعی منتظم با دَوَران به مکان رأس دیگر است و تعریف دوم، همزاد ویژگی مشابه برای ضلع‌های یک چندضلعی منتظم است. پس رأس‌ها در گرافی که رأس-ترایا است، درست مانند یکدیگر هستند و به‌ویژه هم‌درجه هستند. مشابهاً در گرافی که یال-ترایا است، هر دو یال درست مانند یکدیگر هستند و به‌ویژه روی یک تعداد رأس واقع‌اند. لذا گرافی که هم رأس-ترایا و هم یال-ترایا باشد، مانند یک چندضلعی منتظم، از تقارن بسیار بالایی برخوردار است. توجه کنید که گراف‌هایی وجود دارند که یال-ترایا هستند ولی رأس-ترایا نیستند و گراف‌هایی وجود دارند که رأس-ترایا هستند ولی یال-ترایا نیستند. خواننده علاقه‌مند می‌تواند مثال‌هایی از این گراف‌ها را در [۸] بیابد.

برای هر گروه G و مجموعهٔ مولد C ، گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ رأس-ترایا است: فرض کنیم $g, g' \in G$. می‌دانیم که برای $h = g'g^{-1}$ داریم $\lambda_h \in \text{Aut}(\text{Cay}(G, C))$ و $\lambda_h(g) = g'$. لذا بنا بر تعریف، گراف $\text{Cay}(G, C)$ رأس-ترایا است. این حقیقت ساده، یکی از با ارزش‌ترین ویژگی‌های گراف‌های کیلی است که آنها را تبدیل به ابزارهای سادهٔ جبری برای ساخت گراف‌های منتظم و به‌ویژه گراف‌های رأس-ترایا می‌کند.

گراف کیلی $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{1, -1\})$ در واقع همان C_n است و یال-ترایا است. گراف معرفی‌شده در مثال ۲.۴ برای $n = 3$ ، یعنی گراف کیلی

$$\text{Cay}(\mathbb{Z}_3, \{e_i \mid 1 \leq i \leq 3\})$$

همان مکعب است که یال-ترایا است. در حالت کلی نیز ثابت می‌شود که به‌دلیل تقارن بین e_i ها، گراف Q_n یال-ترایا است.

توجه کنید که گرچه گراف‌های کیلی همیشه رأس-ترایا هستند، همیشه یال-ترایا نیستند. مسئله مشخص‌سازی گراف‌های کیلی یال-ترایا، یکی از مسائل پیچیده در ریاضیات است و تاکنون پژوهش‌های زیادی در این زمینه انجام شده است [۱۴، ۱۹].

یک خودریختی مانند ϕ روی گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ را حافظ رنگ گوئیم اگر برای هر $g \in G$ و هر $c \in C$ داشته باشیم

$$\phi(gc) \in \{\phi(g)c, \phi(g)c^{-1}\}.$$

به زبان ساده می‌توان گفت که خودریختی ϕ حافظ رنگ است اگر برای هر $c \in C$ ، خودریختی ϕ دو سر یک یال با رنگ $\{c, c^{-1}\}$ را به یک یال با همین رنگ بنگارد. توجه کنید که برای هر $h \in G$ ، خودریختی λ_h حافظ رنگ است و برای هر $g, g' \in G$ و عضو $h = g'g^{-1}$ داریم $\lambda_h(g) = g'$. بنابراین چون G_L زیرگروه $\text{Aut}(\text{Cay}(G, C))$ است، می‌توان هر رأس را به کمک خودریختی‌های حافظ رنگ، به رأسی دیگر نگاشت. در ادامه و در بحث مسیریابی در گراف‌های کیلی، از این ویژگی استفاده خواهیم کرد.

در بخش قبل دیدیم که کوچکترین درجه، کران بالایی برای همبندی رأسی و همبندی یالی گراف‌ها است. قضیه زیر که توسط ویتنی^۱ در [۲۶] ثابت شده است، پیوند میان این دو کمیت را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۴. فرض کنیم گراف Γ دست‌کم یک یال دارد. در این صورت،

$$\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma).$$

بنابراین می‌توان دید که اگر $\kappa(\Gamma) = \delta(\Gamma)$ ، آن‌گاه $\lambda(\Gamma) = \delta(\Gamma)$ و نیازی به محاسبه مستقیم همبندی یالی نداریم. همچنین به یاد آورید که در بخش قبل، از مسیرهای مستقل برای محاسبه کران پایینی برای همبندی رأسی و همبندی یالی گراف‌ها استفاده کردیم. منگر^۲ در [۱۸] رابطه دقیق‌تری ارائه می‌دهد که در اینجا آن را با بیان زیر، مشهور به نسخه جهانی قضیه منگر، ذکر می‌کنیم.

قضیه ۴.۴ ([۸]). همبندی رأسی یک گراف، دست‌کم k است اگر و تنها اگر هر دو رأس گراف، توسط k مسیر مستقل به هم وصل شده باشند.

بنابر این قضیه، می‌توان نشان داد که اگر s و t دو رأس نامجاور در گراف Γ باشند، آن‌گاه کمترین تعداد رأس‌هایی که با حذف آنها، s و t جدا می‌شوند برابر با بیشترین تعداد $s - t$ مسیرهای مستقل است. پس اگر بتوانیم گرافی بسازیم که دارای همبندی رأسی بیشینه باشد، آن‌گاه بیشترین تعداد مسیر مستقل ممکن در این گراف وجود خواهد داشت.

^۱Whitney ^۲Menger

قضیه ۵.۴ ([۱۷]). اگر Γ یک گراف همبند رأس-تراپا باشد، آنگاه همبندی یالی آن گراف برابر با کمترین درجه‌اش است، یعنی $\lambda(\Gamma) = \delta(\Gamma)$.

می‌دانیم که هر گراف کیلی، رأس-تراپا است. لذا قضیه بالا، مسئله محاسبه همبندی یالی گراف‌های کیلی را به پایان می‌رساند و می‌توانیم الگوریتم ساده زیر را برای ساخت گراف‌هایی با همبندی یالی بیشینه ارائه دهیم.

نتیجه ۶.۴. برای هر گروه متناهی مانند G با مجموعه مولد C که $C = C^{-1}$ و $1 \notin C$ ، داریم

$$\lambda(\text{Cay}(G, C)) = \delta(\text{Cay}(G, C))$$

در ادامه به بحث روی مسئله محاسبه همبندی رأسی گراف‌های کیلی می‌پردازیم که البته چون نمی‌توانیم آن را در حالت کلی حل کنیم، به سراغ گراف‌هایی با ویژگی تقارنی بالاتر و یا فرض‌های بیشتر می‌رویم.

قضیه ۷.۴ ([۱۶]). اگر Γ یک گراف همبند رأس-تراپا باشد که شامل هیچ چهار رأسی نیست که دوه‌دو مجاور یکدیگر باشند (K_4 -آزاد باشد)، آنگاه همبندی رأسی Γ برابر با کمترین درجه‌اش است، یعنی $\delta(\Gamma) = \lambda(\Gamma) = \kappa(\Gamma)$.

قضیه زیر که توسط واتکینز^۱ ثابت شده است [۲۵]، علاوه بر اینکه اهمیت گراف‌های همبند یال-تراپا را در طراحی شبکه‌های اتصال نشان می‌دهد، به مسئله محاسبه همبندی رأسی گراف‌ها نیز در حالتی خاص پاسخ می‌دهد.

قضیه ۸.۴. اگر Γ یک گراف همبند یال-تراپا باشد، آنگاه همبندی رأسی آن، برابر با کمترین درجه‌اش است، یعنی $\delta(\Gamma) = \kappa(\Gamma)$.

از نتایج فوری این قضیه یکی این است که برای هر گروه متناهی مانند G با مجموعه مولد C که $C = C^{-1}$ و $1 \notin C$ ، اگر گراف $\text{Cay}(G, C)$ یال-تراپا باشد، آنگاه

$$\kappa(\text{Cay}(G, C)) = \delta(\text{Cay}(G, C))$$

و دیگر اینکه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، همبندی رأسی اَبَرَمکعب Q_n برابر با n است.

^۱Watkins

۴.۴. گروه‌های جایگشتی و شبکه‌های اتصال. خاطرنشان می‌کنیم که بنابر قضیه کیلی، هر گروه از مرتبه n ، با زیرگروهی از S_n یکرخت است. به همین دلیل، در بسیاری از مقاله‌های مربوط به مطالعات شبکه‌های اتصال، به‌جای بحث روی گروه‌های دلخواه، فقط به بحث روی گروه‌های جایگشتی می‌پردازند و تاکنون به این روش، احکام زیادی ارائه و گراف‌های کیلی گوناگونی به‌کمک گروه‌های جایگشتی مطالعه شده است. در ادامه به ذکر چند نتیجه مشهور دربارهٔ این گراف‌های کیلی می‌پردازیم.

با توجه به قضیه ۸.۴، در [۸] مشخص‌سازی ویژگی یال-تراپایی گراف‌های کیلی گروه‌های جایگشتی مطالعه و نتیجه زیر که به‌خوبی، یکی از ارزش‌های گراف‌های جایگشتی را نشان می‌دهد، ثابت شده است.

قضیه ۹.۴ ([۸]). فرض کنیم S یک مجموعه از جایگشت‌ها باشد که مولد S_n است. گراف کیلی $Cay(S_n, S)$ یال-تراپا است اگر و تنها اگر گراف جایگشتی نظیر مجموعه S یال-تراپا باشد.

برای مثال، چون $T' = \{(12), (23), (34)\}$ یک مجموعه مولد برای S_4 است و گراف جایگشتی آن، به‌شکل یک مسیر به طول ۳ است، پس بنابر قضیه بالا، گراف $Cay(S_4, T')$ یال-تراپا نیست. به‌کمک توابع دوران می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \geq 2$ ، گراف $K_{1, n-1}$ یال-تراپا است. لذا با استفاده از قضیه بالا، نتیجه می‌گیریم که:

نتیجه ۱۰.۴. برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ ، گراف ST_n یال-تراپا است.

حکم زیر را هم می‌توان نتیجه قضیه‌های ۸.۴ و ۹.۴ دانست که پیشتر در بخش دوم، حالت خاص آن را در مورد گراف‌های کیلی ستاره‌ای ارائه داده بودیم.

نتیجه ۱۱.۴ ([۸]). فرض کنیم S یک مجموعه از جایگشت‌ها باشد که مولد S_n است. اگر گراف جایگشتی نظیر S ، یال-تراپا باشد، آنگاه همبندی راسی گراف کیلی $Cay(S_n, S)$ بیشینه است.

۵.۴. الگوریتم‌های مسیریابی و مسیرهای جایگزین در گراف‌های کیلی. در این زیربخش به بررسی مسیریابی و یافتن مسیر جایگزین در گراف‌های کیلی می‌پردازیم. می‌دانیم که در این گراف‌ها می‌توان هر رأس را با یک خودریختی حافظ رنگ، به راسی دیگر نگاشت. خواهیم دید که این حقیقت ساده، این امکان را فراهم می‌کند که در همهٔ رأس‌های یک گراف کیلی، از یک الگوریتم مسیریابی یکسان استفاده کنیم.

برای استفاده از ابزارهای جبری در مسیریابی، نخست ارتباطی بین مسیرها و تجزیهٔ عضوهای گروه ایجاد می‌کنیم. فرض کنیم G یک گروه و C مجموعه‌ای مولد برای آن باشد که $C = C^{-1}$

و $1 \notin C$. در گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ ، اگر مسیری از رأس g به رأس g' موجود باشد، آن‌گاه دنباله‌ای مانند

$$g = g_0 - g_1 - \dots - g_m = g'$$

وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq m$ ، عضو $c_i \in C$ موجود است که $g_i = g_{i-1}c_i$. بنابراین

$$g' = g_m = g_{m-1}c_m = (g_{m-2}c_{m-1})c_m = \dots = g_1c_2 \dots c_m.$$

لذا هر مسیر در $\text{Cay}(G, C)$ ، به یک حاصلضرب به صورت $g^{-1}g'$ از عضوهای C منجر می‌شود. به عکس، به کمک تعریف گراف‌های کیلی می‌توان دید که هر تجزیه $g^{-1}g'$ به حاصلضرب عضوهای C نیز به یک مسیر از g به g' در $\text{Cay}(G, C)$ منجر می‌شود. در نتیجه یافتن مسیر بین هر دو رأس دلخواه در گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ ، معادل با یافتن تجزیه عضوهای G به صورت حاصلضربی از عضوهای مجموعه مولد C است. پس می‌توان الگوریتمی برای مسیریابی در گراف $\text{Cay}(G, C)$ ارائه داد. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه بیشتر درباره انواع الگوریتم‌های از این دست و کارایی آنها، به [۲۰، ۲۱] مراجعه کند.

فرض کنیم الگوریتمی برای تجزیه عضوهای گروه G به حاصلضرب عضوهای مجموعه مولد C وجود دارد. در گام اول، نحوه مسیریابی از عضو همانی گروه به هر عضو دیگر آن را بیان می‌کنیم و یک ساختار خاص در زیرگراف $\text{Cay}(G, C)$ ارائه می‌دهیم و در گام دوم، از آن برای ساختن الگوریتم مسیریابی بین هر دو عضو دلخواه گروه استفاده می‌کنیم.

گام اول) در مرحله اول، با شروع از عضو همانی، به رأس‌های نظیر عضوهای C می‌رویم و این رأس‌ها را به همراه یال‌های بین آنها و عضو همانی در نظر می‌گیریم. در مرحله بعد، به آن عضوهایی در G می‌رویم که در C نیستند و آنها را می‌توان به صورت حاصلضرب دو عضو C نوشت. توجه کنید که چون این تجزیه یکتا نیست، ممکن است در این مرحله بتوان از دو عضو متفاوت C و با دو مسیر متفاوت به یک رأس h رفت. در این صورت، یکی از آنها را انتخاب می‌کنیم. این رأس‌ها را به همراه یال‌های بین آنها و رأس‌هایی که در مرحله قبل به دست آمده بودند، در نظر می‌گیریم. در مرحله سوم، به همه رأس‌هایی که در گام‌های قبل به دست نیامده‌اند و دارای تجزیه‌ای به صورت حاصلضرب سه عضو C هستند، می‌رویم. در صورت وجود چند مسیر مختلف بین دو رأس، یکی را انتخاب می‌کنیم و یال‌های بین آنها و رأس‌های قبلی را در نظر می‌گیریم. با ادامه همین روند، در پایان، مسیرهایی بین عضو همانی و رأس‌های دیگر گراف به دست می‌آید که در کنار یکدیگر، گرافی را می‌سازند که دور ندارد و مجموعه رأس‌های آن نیز برابر

با مجموعه رأس‌های گراف $\text{Cay}(G, C)$ است. چنین ساختاری را یک زیردرخت فراگیر $\text{Cay}(G, C)$ می‌نامیم. به کمک مسیرهای ساخته شده در بالا و با استفاده از این زیردرخت فراگیر که با شروع از عضو همانی ساخته شد، می‌توان یک الگوریتم مسیریابی از عضو همانی به هر عضو دیگر گراف $\text{Cay}(G, C)$ ارائه داد.

گام دوم) با استفاده از الگوریتم مسیریابی بین عضو همانی و هر عضو دیگر G ، یک الگوریتم مسیریابی بین هر دو عضو دلخواه گروه G ارائه می‌دهیم. فرض کنیم که g و g' دو عضو در G باشند. به کمک الگوریتم بالا، مسیری از عضو همانی به $g^{-1}g'$ مانند

$$1 - c_1 - \dots - c_1 \dots c_m = g^{-1}g'$$

به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از خودریختی حافظ رنگ λ_g ، مسیر زیر در گراف $\text{Cay}(G, C)$ به دست می‌آید

$$g = \lambda_g(1) - \lambda_g(1)c_1 - \dots - \lambda_g(1)c_1 \dots c_m = g'.$$

بنابراین با استفاده از λ_g ، می‌توانیم یک زیردرخت فراگیر با شروع از عضو g به دست آوریم که در واقع، یک الگوریتم مسیریابی از g به هر رأس دیگر g' در گروه ارائه می‌دهد. توجه کنید که چون تجزیه یک عضو گروه G به صورت حاصلضرب عضوهای C لزوماً یکتا نیست، زیردرخت فراگیر ساخته شده در الگوریتم بالا، یکتا نیست. این مطلب پایه بسیاری از الگوریتم‌های یافتن مسیر جایگزین در گراف‌های کیلی است، زیرا با انتخاب یک زیردرخت متفاوت با آنچه در الگوریتم مسیریابی اصلی به کار بردیم و با استفاده از همان روش بالا، به یک الگوریتم مسیریابی جدید می‌رسیم که می‌توان آن را برای یافتن مسیر جایگزین به کار برد.

در بحث گراف‌های کیلی، می‌توانیم خود را به خانواده گروه‌های جایگشتی محدود کنیم. با این رویکرد و با همان روش بالا برای ساختن الگوریتم مسیریابی، الگوریتم‌های متفاوتی برای تجزیه عضوهای یک گروه جایگشتی دلخواه به صورت حاصلضرب عضوهای یک مجموعه مولد، ارائه شده است که می‌توان به کمک آنها، الگوریتم‌هایی برای مسیریابی و یافتن مسیر جایگزین در گراف‌های کیلی گروه‌های جایگشتی به دست آورد. برای مثال، می‌توان به الگوریتم تجزیه سیمز^۱ یا الگوریتم کلمه-کوتاه^۲ اشاره کرد. برای مشاهده جزئیات بیشتر در این باره و الگوریتم‌های مسیریابی (به ویژه نتایج مربوط به کارایی آنها) [۶، ۱۵، ۲۲]، را بخوانید.

^۱Sims ^۲short-word-algorithm

۶.۴. گروه‌های ساده و شبکه‌های اتصال. گروه‌های ساده متناهی کاربردهای زیادی در ریاضی و علوم رایانه و به‌ویژه در طراحی شبکه‌ها دارند. در این زیربخش، قصد داریم دربارهٔ ارزش گراف‌های کیلی گروه‌های ساده ناآبلی سخن بگوییم که اساس آن، حدس معروف بابای^۱، کانتور^۲ و لوبوتزکی^۳ است. استفاده از گراف‌های کیلی گروه‌های ساده در طراحی شبکه‌ها، پس از آنکه بابای، کانتور و لوبوتزکی قضیهٔ زیر را ثابت کردند [۴]، مورد توجه جدی قرار گرفت.

قضیه ۱۲.۴. عددی ثابت مانند k وجود دارد به طوری که برای هر گروه ساده ناآبلی G ، مجموعه‌ای مولد مانند C وجود دارد که حداکثر دارای هفت عضو است و قطر گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ نیز حداکثر $k(\log_2(|G|))$ است.

آنها حدس زیر را نیز دربارهٔ قطر گراف‌های کیلی گروه‌های ساده ناآبلی ارائه دادند که در اینجا برای پرهیز از ورود به بحث پیچیدگی محاسبه، آن را طوری بیان کرده‌ایم که ساده‌تر شود.

حدس ۱۳.۴. اعداد k و m وجود دارند که برای هر گروه ساده ناآبلی G ، قطر هر گراف کیلی G ، از بالا به $m k(\log_2(|G|))$ کراندار است.

به یاد آورید که ابرمکعب Q_n دارای مرتبهٔ 2^n ، درجهٔ n و قطر $\log_2(2^n) = n$ است. ادعا می‌کنیم که قضیهٔ ۱۲.۴ نشان می‌دهد که به کمک گروه‌های ساده می‌توان گراف‌هایی ساخت که دارای برتری نسبت به ابرمکعب‌ها هستند. توجه کنید که بنابر این قضیه، برای هر گروه ساده ناآبلی G ، مجموعه‌ای مولد برای G وجود دارد که قطر گراف کیلی حاصل از آن، ضریبی ثابت از $\log_2(|G|)$ است و دارای درجهٔ کوچکتر یا مساوی ۷ است.^۴ پس شبکه‌ای که بر پایهٔ گراف‌های کیلی این گروه‌ها ساخته می‌شود، با تعداد بسیار کمی ارتباط مستقیم (سیم) ساخته می‌شود و در عین حال، قطر آن، لگاریتم مرتبهٔ گراف است. این مطلب به روشنی یکی از ارزش‌های گراف‌های کیلی گروه‌های ساده ناآبلی را نشان می‌دهد. از سوی دیگر، اگر پاسخ حدس بالا مثبت باشد، آنگاه گروه‌های ساده ناآبلی تبدیل به ابزارهای جبری قوی برای ساخت گراف‌هایی با مرتبهٔ بزرگ و در عین حال، قطر و درجهٔ کوچک می‌شوند. گراف‌های کیلی گروه‌های ساده ناآبلی، دارای مزیت‌های دیگری نیز هستند. در ادامه به بحثی اجمالی دربارهٔ قطر میانگین این گراف‌ها می‌پردازیم.

همان‌طور که پیشتر گفتیم، برای کاهش زمان تبادل اطلاعات در یک ابررایانه، قطر گراف نظیر شبکهٔ اتصال آن باید تا جای ممکن کوچک باشد ولی این ویژگی به‌تنهایی تضمین‌کنندهٔ کاهش زمان لازم برای تبادل اطلاعات در یک شبکه نیست و به همین دلیل، قطر میانگین گراف‌ها را بررسی

^۴ اکثر گروه‌های ساده ناآبلی دارای مجموعه‌های مولد کوچک هستند [۱۲].

می‌کنیم. ایده استفاده از گراف‌های با قطر میانگین کوچک در طراحی شبکه‌ها، اولین بار در [۲۲] مطرح شد و در مورد گراف‌های کیلی مورد مطالعه قرار گرفت.

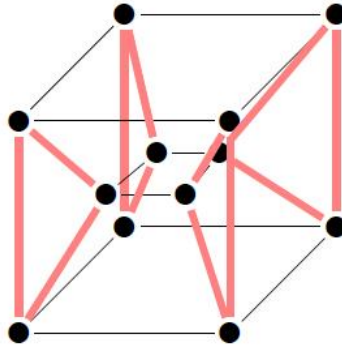
برای گراف Γ با n رأس، حاصل تقسیم مجموع فاصله‌های بین زوج‌های متفاوت از رأس‌های Γ بر $\binom{n}{2}$ را میانگین قطر Γ می‌نامیم که به روشنی کوچکتر یا مساوی قطر Γ است. این کمیت، فاصله میانگین بین دو رأس گراف را نشان می‌دهد و هرچه این عدد کوچکتر باشد، سرعت انتقال داده در شبکه بالاتر خواهد بود. پس طبیعی است که به دنبال گراف‌هایی باشیم که علاوه بر ویژگی‌های یک شبکه مطلوب که پیشتر ذکر کردیم، دارای قطر میانگین کوچک باشند.

در یک گراف کیلی $\text{Cay}(G, C)$ ، اگر با شروع از یک رأس g و طی یک مسیر دوباره به رأس g بازگردیم، عضوهای $c_1, \dots, c_m \in C$ به دست می‌آیند که $c_1 \cdots c_m = 1$. به هر چنین حاصلضربی از عضوهای C که برابر عضو همانی می‌شود، یک رابطه گفته می‌شود. توجه کنید که گراف‌های کیلی با قطر میانگین کوچک، بایستی تعداد کمی از روابط با طول کوتاه داشته باشند. به‌طور شهودی، این گراف‌ها همه‌جا به‌صورت موضعی به‌شکل درخت (گراف فاقد دور) هستند. توجه کنید که برای مثال، گراف‌های کیلی گروه‌های آبلی این ویژگی را ندارند، زیرا برای هر گروه آبلی G و عضوهای c_1 و c_2 در G داریم $c_1 c_2 = c_2^{-1} c_1^{-1}$. از سوی دیگر، گروه‌های ساده ناآبلی زیادی وجود دارند که دارای این ویژگی هستند و این یکی از دلایل ارزش گراف‌های کیلی این گروه‌ها است. همچنین مانند گراف‌های کیلی ستاره‌ای، چون مرتبه گروه‌های ساده ناآبلی، زیرمجموعه‌ای تنگ از مجموعه اعداد طبیعی است، استفاده از این گراف‌ها بدون مشکل نیست. برای کسب اطلاعات بیشتر و دیدن مثال‌هایی از گراف‌های کیلی گروه‌های ساده ناآبلی که قطر میانگین کوچکتری در مقایسه با آبرمکعب‌ها و گراف‌های کیلی ستاره‌ای دارند، [۲۲] را مطالعه کنید.

۷.۴. نمونه‌ای از شبکه‌های اتصال به‌کار رفته در آبرایانه‌های برتر امروزی. در پایان این مقاله، مثالی از یک شبکه اتصال به‌کار رفته در آبرایانه‌های سریع امروزی که بر پایه گراف‌های کیلی است، ارائه می‌دهیم. به این منظور، نخست تعریف ضرب دکارتی گراف‌ها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ و $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ دو گراف باشند. گراف $\Gamma = (V, E)$ را که در آن، V برابر ضرب دکارتی دو مجموعه V_1 و V_2 است و در آن، دو رأس (v_1, v_2) و (v'_1, v'_2) مجاورند اگر فقط یکی از حالات زیر رخ دهد:

$$(i) \quad (v_1, v'_1) \in E_1 \text{ و } v_2 = v'_2$$

$$(ii) \quad (v_2, v'_2) \in E_2 \text{ و } v_1 = v'_1$$

شکل ۴. $C_2 \square C_2 \square C_2$

حاصلضرب دکارتی دو گراف Γ_1 و Γ_2 می‌نامیم و آن را با نماد $\Gamma_1 \square \Gamma_2$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌شود که قطر گراف $\Gamma_1 \square \Gamma_2$ برابر با مجموع قطر گراف‌های Γ_1 و Γ_2 است. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد این ضرب، [۵] را مطالعه کنید.

به‌سادگی می‌توان دید که برای هر عدد طبیعی n ، گراف کیلی $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{1, -1\})$ دور به طول n یا C_n است. به‌گرافی که حاصلضرب دکارتی k دور (نه لزوماً با طول متفاوت) است، یک گراف چنبره‌ای k بُعدی گفته می‌شود. علت این نامگذاری، شکل خاص این گراف‌ها است که از نظر توپولوژیکی مانند یک چنبره k بُعدی هستند. در شکل ۴ می‌توانید شکل یک گراف چنبره‌ای سه‌بُعدی و شباهتش به چنبره را ببینید. به‌ازای هر $n, m \in \mathbb{N}$ ، حاصلضرب دکارتی گراف‌های C_m و C_n ، گراف کیلی

$$\text{Cay}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, \{\pm e_1, \pm e_2\})$$

است که در آن، $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که حاصلضرب دکارتی دوره‌های C_{n_1}, \dots, C_{n_k} ، گراف کیلی

$$\text{Cay}(\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}, \{\pm e_1, \dots, \pm e_k\})$$

است که در آن، برای هر $1 \leq i \leq k$ عضوی را که در درایه i م آن ۱ و در بقیه درایه‌هایش صفر است، با e_i نشان می‌دهیم. دقت کنید که قطر گراف $C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}$ برابر با مجموع قطرهای گراف‌های دوری C_{n_1} تا C_{n_k} است؛ یعنی

$$\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor.$$

از سوی دیگر، چون یک گراف چنبره‌ای k -بُعدی، K_4 آزاد است، بنابر قضیه ۷.۴ همبندی رأسی و همبندی یالی این گراف، بیشینه است. سرانجام، توجه کنید که مشابه ابرمکعب‌ها، چون رأس‌های گراف‌های چنبره‌ای به شکل k -تایی مرتب هستند، مسیریابی یا یافتن مسیر جایگزین در آنها ساده است.

این ویژگی‌های مناسب و مزیت‌های دیگری که در اینجا به آنها نپرداخته‌ایم مانند مصرف انرژی کم و سرعت بالای ارتباط و . . .، گراف‌های چنبره‌ای را به گزینه‌هایی مناسب برای طراحی شبکه‌های اتصال تبدیل کرده است و از آنها در تعداد زیادی از سریع‌ترین ابررایانه‌های جهان استفاده شده است. ابررایانه‌هایی مثل آی‌بی‌ام بلوژن/ال^۱، آی‌بی‌ام بلوژن/پ^۲، آی‌بی‌ام بلوژن/کیو^۳ و کری ایکس‌تی^۴، از شبکه‌های اتصالی گراف چنبره‌ای پنج‌بُعدی استفاده می‌کنند. در این میان، برای مثال، بر مبنای داده‌های وبسایت Top500 در سال ۲۰۱۲، ابررایانه آی‌بی‌ام بلوژن/کیو، عنوان سریع‌ترین ابررایانه جهان را کسب کرد و در سال ۲۰۱۸ نیز در جایگاه هشتم قرار گرفت. همین‌طور ابررایانه‌هایی مثل K رایانه فوجیتسو و یا نسخه بهبود یافته آن، پرایم اچ‌پی‌سی اف‌ایکس^۵ نیز از شبکه‌های اتصالی استفاده می‌کنند که گراف چنبره‌ای سه‌بُعدی هستند.

در سال ۲۰۱۶ شرکت فوجیتسو از طرح ابررایانه‌ای با شبکه‌ای موسوم به توفو^۲ رونمایی کرد که قطر مسیر داده‌اش ۱۰ گیگابایت بر ثانیه و درجه آن نیز ۱۰ است (پس پهنای بیشینه یک سوئیچ آن، حداقل ۱۰۰ گیگابایت بر ثانیه است). به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت که این شبکه، حاصل ضرب دکارتی یک چنبره سه‌بُعدی در گراف $C_3 \square C_2 \square C_2$ است (شکل ۴). علت استفاده از گراف $C_3 \square C_2 \square C_2$ ، قطعات سخت‌افزاری به‌کار برده شده در طراحی این ماشین است. روشن است که چون خود گراف $C_3 \square C_2 \square C_2$ نیز یک گراف چنبره‌ای سه‌بُعدی است، توفو^۲ یک چنبره شش‌بُعدی است. البته تفاوت‌های این دو نسل از شبکه‌های توفو، تنها به ساختار گرافی آنها ختم نمی‌شود و این دو از نظر سخت‌افزاری نیز تفاوت‌های بسیاری با یکدیگر دارند. خواننده علاقه‌مند می‌تواند جزئیات بیشتر را در [۱] و [۲] بیابد.

تشکر و قدردانی: نویسندگان وظیفه خود می‌دانند از داوران محترمی که نظرات ارزشمند آنها موجب بهبود نگارش این مقاله شد، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

- [1] Ajima, Y., Inoue, T. Hiramoto, S., Shimizu, T., Tofu: Interconnection for the K-computer. *Fujitsu Scientific & Technical Journal*, pp. 280–285, 2012.

- [2] Ajima, Y., Inoue, T., Hiramoto, S., Ando, S., Maeda, M., Yoshikawa, T., Hosoe, K., Shimizu, T., The Tofu Interconnect 2, *IEEE 22nd Annual Symposium on High-Performance Interconnects*, pp. 57–62, 2014.
- [3] Akers, S. B., Krishnamurth, A., A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38** (1989), no. 4, 555–566.
- [4] Babai, L., Kantor, W. M., Lubotzky, A., Small diameter Cayley graphs for finite simple groups. *European J. Combin*, **10** (1989), 507–522.
- [5] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Macmillan Press, London, 1976.
- [6] Camelo, M., Vila, W. P., Fabrega, L., Papadimitriou, D., Cayley-Graph-Based Data Centers and Space Requirements of a Routing Scheme Using Automata. *IEEE 34th International Conference on Distributed Computing Systems Workshops (ICDCSW)*, pp. 63–69, Madrid, 2014.
- [7] Cayley, A., Desiderata and Suggestions, No. 2: The Theory of Groups: Graphical Representation. *American Journal of Mathematics*, **1** (1878), no. 2, 174–176.
- [8] Ganesan, A., Cayley graphs and symmetric interconnection networks. In: *Proceedings of the Pre-Conference Workshop on Algebraic and Applied Combinatorics* (31st. Annual Conference of the Ramanujan Mathematical Society), Trichy, Tamilnadu, India, pp. 118–170, 2016.
- [9] Godsil, C., On the full automorphism group of a graph. *Combinatorica*, **1** (1981), no. 3, 243–256.
- [10] Hayes, J. P., Mudge, T., Hypercube supercomputers. *Proceedings of the IEEE*, **77** (1989), no. 12, 1829–1841.
- [11] Hujdurovic, A., Kutnar, K., Morris, D. W., Morris, J., On colour-preserving automorphisms of Cayley graphs. *Ars Math. Contemp.*, **11** (2016), no. 1, 189–213.
- [12] King, C. S. H., Generation of finite simple groups by an involution and an element of prime order. *Journal of Algebra*, **478** (2017), 153–173.
- [13] Knauer, U., *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices*, De Gruyter, Berlin and Boston, 2011.
- [14] Konstantinova, E., Some problems on Cayley graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **429** (2008), no. 11& 12, 2754–2769.
- [15] Lavault, C., Interconnection networks: Graph and Group-theoretic modeling. *Proc. CSCS12*, **2** (1999), 207–214.

- [16] Mader, W., Über den Zusammenhang symmetrischer Graphen. *Archiv der Mathematik*, **21** (1970), 331–336.
- [17] Mader, W., Minimale n -fach zusammenhängende Graphen. *Mathematische Annalen*, **191** (1971), 21–28.
- [18] Menger, K., Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, **10** (1927), 96–115.
- [19] Praeger, C. E., Finite Normal Edge-transitive Cayley graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **60** (1999), 207–220.
- [20] Rajasekaran, S., Wei, D. S. L., Selection, routing, and sorting on the star graph, *J. of Parallel and Distributed Computing*, **41** (1997), no. 2, 225–233.
- [21] Ramras, M., Routing permutations on a graph, *Networks*, **23** (1993), no. 4, 391–398.
- [22] Schibell, S. T., Stafford, R. M., Processor interconnection networks from Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **40** (1992), 333–357.
- [23] Seitz, C. L., The Cosmic Cube. *Communications ACM*, **28** (1985), 22–33.
- [24] Squire, J. S., Palais, S. M., Programming and design considerations for a highly parallel computer. *Proc. Spring joint Computer Conf.*, pp. 395–400, 1963.
- [25] Watkins, M. E., Connectivity of transitive graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **8** (1970), 23–29.
- [26] Whitney, H., Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, **54** (1932), 150–168.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۷/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۳/۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۲۹
 بهنام خسروی: دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی.
 تارنما: https://iasbs.ac.ir/_b.khosravi/index.html
 رایانامه: b.khosravi@iasbs.ac.ir

بهمن خسروی: دانشگاه صنعتی قم، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی.
 تارنما: https://www.qut.ac.ir/fa/wp/bahman_khosravi
 رایانامه: khosravi@qut.ac.ir