

آشنایی با چنبره ناچابه‌جایی

محمد شفیعی

چکیده

یکی از مهم‌ترین و ساده‌ترین مثال‌های فضاهای ناچابه‌جایی در هندسه ناچابه‌جایی، چنبره ناچابه‌جایی دو بُعدی است که بسیار عمیق و در سطحی گسترده مطالعه شده است. قصد ما در این مقاله آشنا کردن خواننده با بعضی ویژگی‌های مقدماتی این فضا است.

۱. مقدمه

هندسه ناچابه‌جایی هم در مکانیک کوانتومی ریشه دارد و هم در ریاضیات محض. وقتی در ریاضیات پیشرفته صحبت از هندسه می‌شود، بی‌درنگ نام خمینه به ذهن می‌آید. ریاضی‌دان‌ها خمینه m -بعدی M را شیئی تصور می‌کنند که می‌توان آن را برحسب یک دستگاه مختصات موضعی مثل x_1, \dots, x_m به‌گونه‌ای هموار توصیف کرد. کره و چنبره ساده‌ترین نمونه از خمینه‌ها هستند. مفاهیم گوناگونی بر خمینه یا وابسته‌های آن تعریف می‌شود که ابتدایی‌ترین آن‌ها تابع هموار^۱ است. مجموعه همه توابع هموار بر خمینه M را با $C^\infty(M)$ نمایش می‌دهند. این مجموعه با جمع و ضرب معمول توابع، یک جبر جابه‌جایی است. برای برخی از خمینه‌ها می‌توان $C^\infty(M)$ را به یک گروه لی، $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : \{ \cdot, \cdot \}$ ، موسوم به گروه پواسون، مجهز کرد؛ این‌گونه خمینه‌ها را خمینه پواسون می‌نامند.

عبارات و کلمات کلیدی. چنبره ناچابه‌جایی، التصاق لوی-چیویتا، قضیه گاوس-بونه، هندسه ناچابه‌جایی.

^۱smooth

در مکانیک کلاسیک، از خمینه‌های پواسون برای توصیف فضای فاز یک سامانه دینامیکی استفاده می‌کنند. با کمک این گروه می‌توان معادله‌های دینامیکی مشخص‌کننده تحول زمانی سامانه را به صورت زیر نوشت

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}, \quad f \in C^\infty(M).$$

در اینجا $H \in C^\infty(M)$ همیلتونی سامانه است. مثلاً برای یک ذره فیزیکی که در فضای سه‌بعدی اقلیدسی حرکت می‌کند، M فضای کتانژانت^۱ $T^*\mathbb{R}^3$ است و اگر q^1, q^2, q^3 و q^3 مختصات در \mathbb{R}^3 و p_1, p_2, p_3 مختصات تارکلاف کتانژانت^۲ را نشان دهند، گروه پواسون به صورت زیر است

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

اما در مکانیک کوانتومی، مجموعه همه شعاع‌های فضای هیلبرت مختلطی مثل \mathcal{H} جایگزین M و همچنین جبر عملگرهای (نه لزوماً کراندار) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ جایگزین $C^\infty(M)$ می‌شود. این جبر با عمل ترکیب، یک جبر ناچابه‌جایی است و آن را هم می‌توان به یک گروه مجهز کرد:

$$[A, B] = AB - BA.$$

تحول زمانی عملگر A از رابطه $\frac{dA}{dt} = [H_{qu}, A]$ به دست می‌آید که در آن $H_{qu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ همیلتونی کوانتومی است.

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان از توصیف کلاسیک یک سامانه به توصیف کوانتومی آن دست یافت. در حالت آرمانی، فیزیک‌دان‌ها تمایل دارند که یک تناظر Q وجود داشته باشد که به هر $f \in C^\infty(M)$ یک عملگر $Q(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ متناظر کند به گونه‌ای که

$$Q(\{f, g\}) = \frac{-1}{i\hbar} [Q(f), Q(g)].$$

متأسفانه ثابت شده است حتی برای ساده‌ترین حالت که یک ذره در امتداد خط حقیقی حرکت می‌کند، چنین تناظری وجود ندارد. در سال ۱۹۴۹ موپال^۳ پنداشت که علت بروز این مشکل در این است که یک تفاوت بنیادی بین دو جبر $C^\infty(M)$ و $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ وجود دارد: یکی جابه‌جایی است و دیگری ناچابه‌جایی. بنابراین، او سعی کرد که ضرب معمولی در $C^\infty(M)$ را با یک ضرب ناچابه‌جایی \star_{\hbar}

^۱cotangent space ^۲the fiber of the cotangent bundle ^۳J. E. Moyal

جایگزین کند به گونه‌ای که وقتی $\circ \rightarrow \star_{\hbar}, \hbar$ تبدیل به همان ضرب معمولی شود و افزون بر این،

$$\lim_{\hbar \rightarrow \circ} \frac{f \star_{\hbar} g - g \star_{\hbar} f}{\hbar} = \{f, g\}.$$

با اتخاذ این ضرب در $C^\infty(M)$ ، خود را در اقلیم هندسه ناچابه‌جایی می‌یابیم، چراکه یک فضای ناچابه‌جایی چیزی بیش از یک جبر ناچابه‌جایی با چند ساختار اضافی نیست! برای توضیح بیشتر این موضوع، به ابتدای این گفتار برمی‌گردیم، آنجا که اشاره شد مفاهیم گوناگونی را می‌توان روی خمینه M یا وابسته‌های آن تعریف کرد که ابتدایی‌ترین آن‌ها تابع هموار است. مفهوم مهم دیگر، میدان برداری است. میدان برداری X بر M تابعی است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار مماس در این نقطه روی خمینه متناظر می‌کند. در یک دستگاه مختصاتی موضعی مانند x^1, x^2, \dots, x^m ، میدان X نمایشی به صورت

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + X^m \frac{\partial}{\partial x^m}$$

دارد. میدان X را می‌توان به عنوان عملگری بر $C^\infty(M)$ نیز در نظر گرفت که به شکل

$$X(f) = X^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + X^m \frac{\partial f}{\partial x^m}$$

عمل می‌کند. این عملگر در اتحاد لایب‌نیتس صدق می‌کند

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \quad f, g \in C^\infty(M).$$

یعنی X یک اشتقاق^۱ روی $C^\infty(M)$ است. بنابراین مفهوم میدان برداری را می‌توان به شکلی کاملاً جبری و به کمک $C^\infty(M)$ تعریف کرد. افزون بر این، مفاهیم دیگری چون صورت‌های دیفرانسیل و میدان‌های تانسوری و ساختارهایی مانند متریک ریمانی، التصاق^۲، تانسور خمیدگی، مشتق همورد^۳، و نظریهٔ یانگ-میلز که بر M افزوده می‌شوند، می‌توان همگی را به کمک توابع هموار و میدان‌های برداری، به شیوه‌ای کاملاً جبری و بدون اشاره به M و نقاط آن، تعریف نمود. حتی مفهوم مهم کلاف برداری در هندسه نیز تعریفی کاملاً جبری دارد. قضیهٔ زیر اهمیت جبر $C^\infty(M)$ در شناخت M را بیشتر نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۱. دو خمینهٔ هموار و فشردهٔ M و N هموارریخت^۴ هستند اگر و تنها اگر دو جبر $C^\infty(M)$ و $C^\infty(N)$ یکریخت باشند.

^۱derivation ^۲connection ^۳covariant derivative ^۴diffeomorphic

بنابراین، $C^\infty(M)$ همه ویژگی‌های دیفرانسیلی خمینه M را در خود دارد. اکنون اگر $C^\infty(M)$ را به یک ضرب ناچابه‌جایی مجهز کنیم یا به‌طورکلی آن را با یک جبر ناچابه‌جایی A ، که بعضی ویژگی‌های مطلوب هم دارد، جایگزین کنیم، می‌توان مفاهیم اشاره‌شده در بالا را برای آن تعریف کرد. اما اگر M را یک خمینه‌جابه‌جایی بنامیم، آیا اصطلاحاً یک خمینه ناچابه‌جایی مانند M وجود دارد به‌گونه‌ای که جبر ناچابه‌جایی A از آن حاصل شده باشد؟ پاسخ منفی است. یعنی یک فضای ناچابه‌جایی چیزی جز یک جبر ناچابه‌جایی با چند ساختار اضافی نیست. به‌عبارت‌دیگر، خمینه ناچابه‌جایی شیئی است که جمعی به آن مشغول‌اند و آن خود غایب ز میانه!

امروزه هندسه ناچابه‌جایی باغی پهناور با میوه‌های گوناگون است و پژوهشگران زیادی هریک، از این باغ میوه‌ای درخور توانمندی‌های خود می‌چینند. نام بردن از پژوهش‌های گوناگونی که انجام شده است در این مقاله نمی‌گنجد، از این‌رو، خواننده را به مطالعه [۲]، نوشته‌کن، معمار اصلی هندسه ناچابه‌جایی، توصیه می‌کنیم که در آن مهم‌ترین پژوهش‌های انجام‌شده در بیست‌سال گذشته مرور شده است.

چنبره ناچابه‌جایی، به‌ویژه حالت دوبعدی آن، یکی از مهم‌ترین فضاهای ناچابه‌جایی است. در ادامه کوشش خواهیم کرد خواننده را با برخی از ویژگی‌های ابتدایی این فضا آشنا کنیم و سپس مفاهیم کلاف برداری، التصاق و خمیدگی یک التصاق، و قضیه‌های لوی-چیویتا و گاوس-بونه را ارائه دهیم.

۲. قضیه گلفاند-نائیمارک

قضیه گلفاند-نائیمارک^۱ را می‌توان نقطه آغاز مطالعه مفهوم مجرد C^* جبرها برشمرد؛ خواهیم دید فضاهای ناچابه‌جایی گونه‌ای از این جبرها هستند. بنابراین، ابتدا این جبرها را معرفی می‌کنیم. فرض کنید A یک فضای برداری مختلط و $A \times A \rightarrow A$ به صورت $(a, b) \mapsto a \cdot b$ یک تابع دوخطی موسوم به ضرب باشد که نسبت به جمع بردارها توزیع‌پذیر است؛ جفت (A, \cdot) یک جبر خوانده می‌شود. این جبر جابه‌جایی است هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ ، $a \cdot b = b \cdot a$. یک جبر باناخ عبارت است از یک جفت $(A, \|\cdot\|)$ که در آن A یک جبر و $\|\cdot\|$ یک نرم روی A است با این خاصیت که هر دنباله کوشی نسبت به این نرم همگراست و افزون‌براین، به‌ازای هر $x, y \in A$ ، $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$. تابع $A \rightarrow A : * : A \rightarrow A$ به صورت $x \mapsto x^*$ بر جبر A را یک برگشت^۲ گویند هرگاه برای هر $x, y \in A$ و برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ ،

$$\begin{aligned} (x + y)^* &= x^* + y^*, & (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^*, \\ (x \cdot y)^* &= y^* \cdot x^* x^*, & x^{**} &= x. \end{aligned}$$

^۱Gelfand-Naimark ^۲involution

جبر A همراه با برگشت $*$ را یک $*$ -جبر یا جبر برگشتی می‌گویند. سرانجام، یک $*$ -جبر باناخ $(A, \|\cdot\|)$ را یک C^* -جبر می‌گویند هرگاه به‌ازای هر $a \in A$ ، $\|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$ ، می‌توان نشان داد که عضو همانی ضربی در هر C^* -جبر، در صورت وجود، یکتا و دارای نرم یک است.

مثال ۱.۲. مجموعه همهٔ ماتریس‌های مربعی $n \times n$ مختلط، که آن‌را با $M_n(\mathbb{C})$ نمایش می‌دهند، با نرم عملگری و برگشت با تعریف $T : T^* \rightarrow T$: یک C^* -جبر یکه‌دار با بُعد متناهی است (T^* الحاقی T است). چون جمع مستقیم C^* -جبرها هم C^* -جبر است، پس $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ نیز یک C^* -جبر با بعد متناهی است. هر C^* -جبر متناهی بعد نیز به همین شکل است. [۱۲].

مثال ۲.۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر باشد. در این صورت مجموعهٔ $B(H)$ مرکب از همهٔ عملگرهای کراندار روی H با نرم عملگری و برگشت $T : T^* \rightarrow T$: یک C^* -جبر یکه‌دار است (T^* الحاقی T است). همچنین هر زیرجبر از $B(H)$ که نسبت به عمل الحاقی، بسته و به لحاظ توپولوژیکی نیز بسته باشد یک C^* -جبر است. گلفاند و نائیمارک ثابت کرده‌اند که هر C^* -جبر را می‌توان یک زیرجبر بسته از $B(H)$ در نظر گرفت که در آن H یک فضای هیلبرت مناسب است.

هر دو مثال بالا C^* -جبرهای ناجابه‌جایی هستند. یکی از مهم‌ترین C^* -جبرهای جابه‌جایی در مثال زیر آمده است.

مثال ۳.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته و مختلط‌مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. با اعمال جمع و ضرب معمول توابع، $C(X)$ یک جبر است. چون X فشرده است، نرم سوپرنرم، $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ ، روی $C(X)$ کامل است. افزون‌براین، $C(X) \rightarrow C(X) : f \mapsto \bar{f}$ با تعریف \bar{f} یک برگشت است ($\bar{\bar{f}} = f$ مزدوج مختلط f است). پس $C(X)$ یک C^* -جبر یکه‌دار است. اگر X را یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده بگیریم $C_0(X)$ ، مجموعهٔ همهٔ عضوهای $C(X)$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، نیز یک C^* -جبر است، اما یکه‌دار نیست.

تابع خطی ناصفر $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ را روی جبر A ضربی گویند اگر برای هر $a, b \in A$ ، $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. برای مثال، اگر $A = C(X)$ و $x \in X$ ، تابع $\chi_x : f \mapsto f(x)$ یک تابع خطی ضربی روی $C(X)$ است. مجموعهٔ همهٔ تابع‌های خطی ضربی روی A را با

$\Sigma(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن طیف A می‌گوییم. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد و برای $x \in A$ تابع خطی $\hat{x} : \Sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$ تعریف کنیم. به کمک این تابع‌های خطی می‌توان $\Sigma(A)$ را به یک توپولوژی مجهز کرد. درحقیقت، این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی‌ای است که همه \hat{x} ها نسبت به آن پیوسته‌اند.

قضیه ۴.۲ ([۱۲]). برای هر C^* -جبر جابه‌جایی A ، تبدیل گلفاند $C_0(\Sigma(A)) \rightarrow A$ با Γ با تعریف $\hat{x} \mapsto x$ یک یکرختی بین دو C^* -جبر است.

قضیه ۴.۲، موسوم به قضیه گلفاند-نائیمارک، بیان می‌کند که رسته فضاهای توپولوژیک هاسدورف و موضعاً فشرده با رسته C^* -جبرهای جابه‌جایی هم‌ارز است. به کمک این هم‌ارزی می‌توان به برخی مفهوم‌های توپولوژیکی، مفهومی جبری نظیر کرد. مثلاً، فشردگی، مترپذیری، و همسان‌ریختی در توپولوژی، به ترتیب، با یک‌ه‌دار بودن، تفکیک‌پذیر بودن، و خودریختی بودن در جبر متناظر می‌شود. توجه کنید که اگر X خمینه باشد، $C(X)$ مشاهده‌پذیرهای سامانه مکانیکی است که در آن فضای فاز است. در مکانیک کوانتومی، جبر توابع پیوسته حقیقی مقدار بر X با جبر عملگرهای خودالحاقی روی یک فضای هیلبرت H جایگزین می‌شود و این جبر یک جبر ناجابه‌جایی است: برای آشنایی بیشتر [۱] را مطالعه کنید. با در نظر گرفتن این موضوع و دوگانگی گلفاند، می‌توان C^* -جبرهای ناجابه‌جایی را دوگان رسته فضاهای غریبی انگاشت که «فضاهای ناجابه‌جایی» نامیده می‌شوند. مثال‌های فراوانی از فضاهای ناجابه‌جایی را می‌توان در [۱۴] یافت. یکی از مهم‌ترین و ساده‌ترین مثال‌ها که به‌طور گسترده‌ای مطالعه شده است، چنبره ناجابه‌جایی دوبعدی است. در پایان این بخش، چنبره دوبعدی T^2 را معرفی و C^* -جبر جابه‌جایی وابسته به آن را به دست می‌آوریم.

برای این کار، نخست روی صفحه \mathbb{R}^2 رابطه هم‌ارزی \sim را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \sim (x, y + 1).$$

مجموعه همه رده‌های هم‌ارزی این رابطه را با T^2 نمایش می‌دهیم و آن را به توپولوژی خارج‌قسمتی مجهز می‌کنیم. مجموعه T^2 با این توپولوژی، که فشرده و هاسدورف است، چنبره دوبعدی (جابه‌جایی) نامیده می‌شود. بنابه مثال ۳، $C(T^2)$ یک C^* -جبر جابه‌جایی یک‌ه‌دار است. برای $f \in C(T^2)$ سری فوریه f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} e^{2\pi i(mx+ny)}, \quad a_{m,n} = \int_{T^2} f(x, y) e^{-2\pi i(mx+ny)} \quad (1.2)$$

که در آن (x, y) مختصات روی چنبره است و انتگرال نسبت به اندازه لُبگ گرفته شده است. این سری را می‌توان به صورت

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} U^m V^n (e^{2\pi n y i})(x) \quad (2.2)$$

بازنویسی کرد که در آن $U, V : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ عملگرهای با شرط‌های زیرند

$$V = \text{id}, \quad U(f)(x) = e^{2\pi i x} f(x), \quad f \in L^2(S^1).$$

به این ترتیب، برای $f \in C(T^2)$ نمایش

$$\sum a_{m,n} U^m V^n$$

حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، $C(T^2)$ همان C^* -زیرجبر یک‌دار از $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ است که توسط U و V تولید می‌شود.

۳. چنبره ناچابه‌جایی دوبعدی

در بخش پیشین دیدیم که عملگرهای U و V یک C^* -جبر تولید می‌کنند که همان $C(T^2)$ است. اکنون، $\theta \in \mathbb{R}$ را به دلخواه انتخاب و دو عملگر $U, V : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ را با کمی تغییر نسبت به بخش قبل، به صورت

$$U(f)(x) = e^{2\pi i x} f(x), \quad V(f)(x) = f(x + \theta)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $U^* = U^{-1}$ و $V^* = V^{-1}$. بنابراین مجموعه همه

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} U^m V^n, \quad a_{m,n} \in \mathbb{C}$$

که در آن فقط تعداد متناهی از $a_{m,n}$ ها ناصفر است، نسبت به عمل الحاقی بسته است و بنابراین، بستار آن در $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ یک C^* -جبر با نماد A_θ تولید می‌کند. چون $VU = e^{2\pi i \theta} UV$ ، طبیعی است که A_θ «چنبره ناچابه‌جایی دوبعدی» نام‌گذاری شود. ساختار A_θ بستگی زیادی به θ دارد. روشن است که A_θ و $A_{\theta+n}$ ، برای هر عدد صحیح n ، یکریخت‌اند. همچنین، نگاشتی که U را به V و V را به U بنگارد یک یکریختی بین A_θ و $A_{1-\theta}$ القاء می‌کند. بنابراین می‌توان دامنه θ را به بازه $[\frac{1}{2}, 0]$ محدود کرد. ثابت شده است که برای θ های متمایز در این بازه، A_θ های نایکریخت حاصل می‌شود. افزون‌براین، ثابت شده است که برای $\theta = p/q$ ، که در آن $p > 0$ و q نسبت به

هم اول‌اند، یک کلاف برداری از رتبه q روی $T^{\mathbb{Z}}$ وجود دارد که A_{θ} با جبر مقطع‌های پیوسته این کلاف یکرخت است [۱۴]. به عبارت دیگر، در این حالت A_{θ} یک نمایش از بعد متناهی دارد. پس جذاب‌ترین حالت زمانی است که θ گنگ باشد.

فرض کنید $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}})$ مجموعه همه دنباله‌های شوارتس باشد، یعنی مجموعه دنباله‌های $(a_{m,n})_{m,n}$ که برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\sup\{(\lambda + m^{\mathbb{Z}} + n^{\mathbb{Z}})^k | a_{m,n} | : m, n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

اکنون A_{θ}^{∞} را مجموعه همه اعضای a در A_{θ} می‌گیریم که نمایشی به صورت

$$a = \sum a_{m,n} U^m V^n, \quad \{a_{m,n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}})$$

دارند. A_{θ}^{∞} یک \ast -جبر چگال در A_{θ} است. ثابت می‌شود که A_{θ}^{∞} با $C^{\infty}(T^{\mathbb{Z}})$ یکرخت است. از این رو، A_{θ}^{∞} را مجموعه توابع هموار روی چنبره ناجابه‌جایی دوبعدی می‌نامند. با الهام از حالت دوبعدی، اکنون می‌توان چنبره ناجابه‌جایی از بعد دلخواه n را تعریف کرد.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\Theta = (\Theta_{ij})$ ماتریس $n \times n$ پادمتقارن با درایه‌های حقیقی دلخواهی باشد. چنبره ناجابه‌جایی n -بعدی با پارامتر ناجابه‌جایی Θ عبارت است از C^{\ast} -جبر عام A_{Θ} که توسط مولدهای U_1, \dots, U_n و رابطه‌های $U_j U_k = e^{2\pi i \Theta_{jk}} U_k U_j$ تولید می‌شود. مجموعه همه عضوهای A_{Θ} به صورت

$$\sum a_{i_1, \dots, i_n} U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n}, \quad \{a_{i_1, \dots, i_n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$$

را با A_{Θ}^{∞} نمایش می‌دهیم و هریک از آن‌ها را تابعی هموار روی A_{Θ} می‌نامیم.

۱.۳. تعریف اثر بر A_{θ} . تابع خطی τ بر C^{\ast} -جبر A را اثر^۱ می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ و برای $a \neq 0$ و $\tau(ab) = \tau(ba)$ داشته باشیم.

مثال ۲.۳. فرض کنید M خمینه‌ای هموار، فشرده، و جهت‌دار با صورت حجم Ω باشد. انتگرال

$$\int : C(M) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_M f \Omega$$

یک اثر بر $C(M)$ است.

^۱trace

نگاشت $\tau : A_\theta^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت

$$a = \sum a_{m,n} U^m V^n \mapsto a_{0,0}$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $\tau(b) = \tau(a)\tau(b)$ و

$$\tau(a^*a) = \sum |a_{m,n}|^2 \geq 0.$$

همچنین ثابت می‌شود τ پیوسته است و چون A_θ^∞ در A_θ چگال است، می‌توان آن را بر A_θ گسترش داد. بنابراین τ یک اثر است. اگر τ' اثر دیگری بر A_θ باشد، چون $VU = e^{2\pi i\theta} UV$ و همچنین $\tau'(UV) = 0$ ، $\tau'(ab) = \tau'(ba)$.

$$\tau'(U) = \tau'(V^{-1}VU) = \tau'(VUV^{-1}) = e^{2\pi i\theta} \tau'(U),$$

پس $\tau'(U) = 0$ به طور مشابه، $\tau'(V) = 0$. از این روابط می‌توان نتیجه گرفت که τ' مضرب ثابتی از τ است. به عبارت دیگر، τ در حد یک ضریب ثابت یکتاست. وجود این اثر از آن جهت مهم است که بنابه مثال ۲.۳ می‌توان آن را به گونه‌ای یک انتگرال ناجابه‌جایی بر A_θ انگاشت. همچنین به کمک آن می‌توان یک حاصل ضرب اسکالر بر A_θ تعریف کرد:

$$\langle a, b \rangle = \tau(b^*a), \quad a, b \in A_\theta.$$

به کمک این ضرب می‌توان برای هر $a \in A_\theta$ ، که لزوماً در A_θ^∞ نیست، ضرایب فوریه

$$a_{m,n} = \langle a, U^m V^n \rangle$$

را تعریف کرد. بنابراین، به هر $a \in A_\theta$ می‌توان یک سریه فوریه $\sum a_{m,n} U^m V^n$ نسبت داد که البته ممکن است در A_θ به a همگرا نباشد.

۴. عملگرهای دیفرانسیل و شبه‌دیفرانسیل

مطالعه عملگرهای دیفرانسیل هم از نظر ماهیت فیزیکی و هم از نظر ماهیت ریاضی آن ارزشمند است. از جمله عملگرهای دیفرانسیل مهم در ریاضی و فیزیک عملگرهای دیراک و لاپلاس‌اند. در این قسمت، همتای ناجابه‌جایی این دو را بر A_θ معرفی می‌کنیم.

۱.۴. اشتقاق‌های پایه. یک تبدیل خطی d بر جبر A را یک اشتقاق گویند هرگاه

$$d(ab) = d(a)b + ad(b), \quad a, b \in A.$$

اشتقاق‌های پایه δ_1 و δ_2 بر A_θ^∞ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\delta_1\left(\sum a_{m,n}U^mV^n\right) = 2\pi i \sum ma_{m,n}U^mV^n,$$

$$\delta_2\left(\sum a_{m,n}U^mV^n\right) = 2\pi i \sum na_{m,n}U^mV^n.$$

برای حالتی که $\theta = 0$ ، اگر $f(x, y) = \sum a_{m,n}e^{2\pi i(mx+ny)}$ عضوی از $A_0^\infty = C^\infty(T^2)$ باشد، بنابه (۱.۲) و (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} \delta_1(f) &= \delta_1\left(\sum a_{m,n}U^mV^n\right) = 2\pi i \sum ma_{m,n}U^mV^n \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \sum a_{m,n}U^mV^n = \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

به طور مشابه $\delta_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

چند ویژگی مهم از اشتقاق‌های پایه در گزاره زیر آمده است.

گزاره ۱.۴. فرض کنید A یک جبر و δ_1 و δ_2 اشتقاق پایه باشند. در این صورت

(الف) برای هر $a \in A$ و $i = 1, 2$ ، $\delta_i(a^*) = \delta_i(a)^*$.

(ب) $[\delta_1, \delta_2] = 0$.

(پ) برای هر $a \in A$ و $i = 1, 2$ ، $\tau(\delta_i(a)) = 0$.

اشتقاقی را که در شرط (الف) صدق کند یک \ast -اشتقاق می‌گوییم. قسمت (پ) نشان می‌دهد که اثر τ تحت عمل چنبره T^2 بر A_θ^∞ ناوردا است. این عمل، که آن را با α نمایش می‌دهیم، به صورت

$$(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}). \sum a_{m,n}U^mV^n = \sum a_{m,n}e^{2\pi i(mx+ny)}U^mV^n$$

تعریف می‌شود و داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(1,1)} (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}). \sum a_{m,n}U^mV^n &= 2\pi i \sum ma_{m,n}U^mV^n = \delta_1\left(\sum a_{m,n}U^mV^n\right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(1,1)} (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}). \sum a_{m,n}U^mV^n &= 2\pi i \sum na_{m,n}U^mV^n = \delta_2\left(\sum a_{m,n}U^mV^n\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

بنابراین می‌توان گفت اشتقاق‌های پایه همان مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل T^2 بر A_θ^∞ اند. پس می‌توان عمل T^n بر A_θ^∞ را نیز به‌طور مشابه تعریف کرد و n اشتقاق پایه $\delta_1, \dots, \delta_n$ متناظر با مولدهای بی‌نهایت کوچک این عمل را برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی n -بُعدی به‌دست آورد.

۲.۴. عملگرهای شبه‌دیفرانسیل. برای عدد صحیح و نامنفی چون n ، عملگر به‌صورت

$$\sum_{j_1+j_2 \leq n} a_{j_1, j_2} \delta_1^{j_1} \delta_2^{j_2}$$

را یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ n بر A_θ^∞ می‌گوییم؛ این مفهوم را می‌توان به عملگر شبه‌دیفرانسیل^۱ تعمیم داد. در ادامه، برای سادگی کار، از ∂_1 و ∂_2 به‌ترتیب به جای $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$ و $\frac{\partial}{\partial \xi_2}$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۴. برای عدد صحیح n ، تابع $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow A_\theta^\infty$ را یک نماد^۲ از مرتبهٔ n گویند هرگاه (الف) عدد ثابت c وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|\delta_1^{i_1} \delta_2^{i_2} \partial_1^{j_1} \partial_2^{j_2} \rho(\xi)\| \leq c(1 + |\xi|)^{n-j_1-j_2}, \quad i_1, i_2, j_1, j_2;$$

(ب) تابع هموار $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow A_\theta^\infty$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} \rho(\lambda \xi_1, \lambda \xi_2) = k(\xi_1, \xi_2).$$

دو نماد ρ و ν را هم‌ارز گویند هرگاه $\rho - \nu$ نمادی از مرتبهٔ دلخواه n باشد. به کمک نماد می‌توان یک عملگر P_ρ بر A_θ^∞ به‌صورت زیر تعریف کرد

$$P_\rho = (2\pi)^{-2} \int \int e^{-s \cdot \xi} \rho(\xi) \alpha(s, a) ds d\xi.$$

عملگر P_ρ را عملگر شبه‌دیفرانسیل از مرتبهٔ n با نماد ρ می‌گویند. دو عملگر شبه‌دیفرانسیل Q و P را هم‌ارز گویند و می‌نویسند $Q \sim P$ هرگاه نمادهای آن‌ها هم‌ارز باشند.

عملگر کوشی-ریمان. می‌دانیم عملگر کوشی-ریمان به‌صورت $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ بر توابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌شود. به کمک اشتقاق‌های پایه، عملگر کوشی-ریمان ناجابه‌جایی به‌صورت $\partial^* = \delta_1 + i\delta_2$ بر A_θ^∞ تعریف می‌شود. به‌طورکلی، برای هر ω در \mathcal{C} با قسمت موهومی مثبت، دو عملگر $\partial_\omega^* = \delta_1 + \omega \delta_2$ و $\partial_{\bar{\omega}} = \delta_1 + \bar{\omega} \delta_2$ یک اشتقاق بر A_θ^∞ است.

گزاره ۳.۴(الف) هستهٔ ∂^* برابر $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ بوده و تحدید آن به هسته τ دوسویی است.

^۱pseudo-differential ^۲symbol

(ب) اعداد مختلط به صورت $2\pi(im - n)$ ، $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ، ویژه‌مقدارهای ∂^* و تابع‌ها به صورت $U^m V^n$ ویژه‌تابع‌های متناظر با آن‌ها هستند.

عملگر لاپلاس. عملگر لاپلاس نیز به کمک اشتقاق‌های پایه، به صورت $\Delta = \delta_1^2 + \delta_2^2$ بر A_θ^∞ تعریف می‌شود.
در گزارهٔ زیر ویژگی‌هایی از آن را می‌آوریم.

گزاره ۴.۴ (الف) اعداد حقیقی به صورت $(m^2 + n^2) - 4\pi^2$ ، $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ، ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاس و $U^m V^n$ ویژه‌تابع‌های متناظر با آن‌ها هستند.
(ب) برای هر $n \in \mathbb{Z}$ که $\lambda \neq -4\pi^2 n$ ، عملگر $\lambda - \Delta$ دوسویی است.
(پ) با فرض $\partial = \delta_1 - i\delta_2$ ، $\Delta = \partial^* \partial$.

با الهام از بند (پ) گزارهٔ بالا می‌توان به هر عدد مختلط ω با قسمت موهومی مثبت، عملگر لاپلاس $\Delta_\omega = \partial_\omega^* \partial_\omega$ وابسته به ω را تعریف کرد. از این عملگر در بخش‌های پیش‌رو استفاده خواهیم کرد.

عملگر دیراک. برای تعریف عملگر دیراک بر یک خمینه، در حالت جابه‌جایی، ضروری است که از جبرهای کلیفورد^۱ و اسپینورها^۲ استفاده شود. اما در حالت ناجابه‌جایی، از مفهومی به نام سه‌تایی طیفی استفاده می‌شود که اولین بار آن را کُن در [۳] به‌کار برده است.

تعریف ۵.۴. یک سه‌تایی طیفی یکه‌دار $(\mathbb{A}, \mathbb{H}, D)$ عبارت است از یک \ast -جبر \mathbb{A} ، یک فضای هیلبرت \mathbb{H} ، یک عملگر خودالحاقی $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ $D : \text{Dom}(D) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ، موسوم به عملگر دیراک، و یک نمایش صادق^۳ $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H})$ به طوری که

(۱) دامنهٔ عملگر دیراک در \mathbb{H} چگال است و برای هر $a \in \mathbb{A}$ ، $\pi(a)(\text{Dom}(D))$ زیرفضایی از $\text{Dom}(D)$ است. افزون‌براین، برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ که در طیف D قرار ندارد، عملگر $(D - \lambda)^{-1}$ فشرده است؛

(۲) عملگر $[D, \pi(a)] = D \circ \pi(a) - \pi(a) \circ D$ را می‌توان به عملگری کراندار بر تمام \mathbb{H} گسترش داد.

^۱Clifford algebra ^۲spinors ^۳faithful representation

یکی از مهم‌ترین مثال‌های سه‌تایی طیفی به صورت $(C^\infty(M), L^2(M, S), D)$ است که در آن (M, g) یک خمینهٔ ریمانی فشرده و بدون لبهٔ اسپین، S کلاف اسپین^۱ بر M ، و D عملگر دیراک بر مقطع‌های S است.

اکنون برای تعریف عملگر دیراک D در حالت ناجابجایی باید یک سه‌تایی طیفی معرفی کنیم. طبیعی است که برای این کار \mathbb{A} را همان A_θ^∞ انتخاب کنیم. به کمک اثر τ ، نرم $|a| = \tau(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ را بر A_θ^∞ تعریف می‌کنیم و \mathbb{H}_\circ را فضای کامل‌شدهٔ A_θ^∞ با این نرم در نظر می‌گیریم. فرض کنید $a \mapsto \hat{a}, \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{H}_\circ$ نگاشت شمول باشد. برای $a \in A_\theta^\infty$ عملگر $\pi_\circ(a) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_\circ)$ را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که برای هر $b \in A_\theta^\infty$

$$\pi_\circ(a)(\hat{b}) = \widehat{ab};$$

نگاشت $A_\theta^\infty \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}_\circ) : \pi_\circ$ با تعریف $a \mapsto \pi_\circ(a)$ یک نمایش صادق از A_θ^∞ است. می‌نویسیم $\mathbb{H} = \mathbb{H}_\circ \oplus \mathbb{H}_\circ$. نمایش

$$\pi : A_\theta^\infty \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}), \quad a \mapsto \pi_\circ(a) \oplus \pi_\circ(a),$$

یک نمایش صادق از A_θ^∞ است. اکنون عملگر D با ضابطهٔ $D = -i(\sigma_1 \delta_1 + \sigma_2 \delta_2)$ تعریف می‌شود که در آن δ_1 و δ_2 اشتقاق‌های پایه و

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های پائولی^۲ هستند؛ پس

$$D = -i \begin{pmatrix} \circ & \partial \\ \partial^* & \circ \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که این عملگر با الهام از عملگر دیراک بر چنبرهٔ جابه‌جایی T^2 و با ضابطهٔ $D = -i(\sigma_1 \partial_x + \sigma_2 \partial_y)$ تعریف شده است. همچنین توجه کنید که شبیه به عملگر لاپلاس، می‌توان برای هر ω یک عملگر دیراک وابسته به آن را تعریف و بنابراین می‌توان سه‌تایی طیفی وابسته به ω را هم تعریف کرد.

^۱spin bundle ^۲Wolfgang Pauli

۵. کلاف‌های برداری ناچابه‌جایی و مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده

بنابه قضیهٔ اسوان کلاف‌های برداری بر فضای فشرده و هاسدورف X را می‌توان با $-C(X)$ -مدول‌های راستِ تصویری متناهیاً تولیدشده در تناظر قرار داد [۱۶]. از این رو، اگر A یک جبر ناچابه‌جایی باشد، A -مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده (یا از نوع متناهی) همان کلاف‌های برداری ناچابه‌جایی بر A انگاشته می‌شوند. در این بخش یک رده از مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده بر $A\theta$ را معرفی می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که A -مدول راست P را تصویری گویند هرگاه A -مدول راست Q وجود داشته باشد به طوری که $P \oplus Q \simeq A^I$ یک A -مدول آزاد باشد. همچنین، اگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $P, P \oplus Q \simeq A^n$ را یک A -مدول راست تصویری متناهیاً تولیدشده (از نوع متناهی) می‌نامند. در [۱۴] نشان داده شده است که برای هر A -مدول تصویری متناهیاً تولیدشده P یک عضو خودتوان چون e در $M_n(A) = \text{End}_A(A^n)$ وجود دارد به طوری که $P = eA^n$.

کُن و ریفل نشان داده‌اند که هرگاه θ عددی گنگ باشد، هر A_θ^∞ -مدول تصویری متناهیاً تولیدشده که آزاد نباشد، با یک مدول هایزنبرگ یکرخت است [۶]. این گونه مدول‌ها، که با $\mathcal{E}_{p,q}$ نمایش داده می‌شوند، با دو عدد p و $q > 0$ مشخص می‌گردند. می‌نویسیم $|\mathcal{E}_{p,q} = (A_\theta^\infty)^p|$ وقتی که $q = 0$ یا $q \neq 0$ و p و q نسبت به هم اول‌اند؛ یا $p = 0$ و $q = 1$. داریم

$$\mathcal{E}_{p,q} \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q,$$

که در آن تساوی بین فضاهای برداری است و $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q)$ فضای همهٔ توابع شوارتس با یک متغیر پیوسته در \mathbb{R} و یک متغیر گسسته در \mathbb{Z}_q است. همچنین $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ مجموعهٔ همهٔ توابع شوارتس بر \mathbb{R} است، یعنی همهٔ توابع هموار چون $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ که برای هر عدد صحیح نامنفی n و برای هر عدد صحیح مثبت k ، ثابتی مثل c وجود دارد به طوری که

$$|f^{(n)}(x)|(1+x^2)^k < c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

فرمول‌های

$$fU(x, k) = f\left(x + \theta - \frac{p}{q}, k - p\right), \quad fV(x, k) = e^{\imath\pi i(x - \frac{k}{q})} f(x, k),$$

که در آن $f \in \mathcal{E}_{p,q}$ ، یک ساختار A_θ^∞ -مدولی بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کند. در [۴] نشان داده شده است که با این ساختار $\mathcal{E}_{p,q}$ تصویری و از نوع متناهی است.

تعریف ۱.۵ ([۴]). فرض کنید A یک $*$ -جبر و P یک A -مدول (راست) تصویری باشد. یک ساختار ارمیتی بر P عبارت است از یک نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \rightarrow A$ به گونه‌ای که

$$(الف) \text{ برای هر } \xi, \xi_1, \xi_2, \eta, \eta_1, \eta_2 \in P$$

$$\langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle + \langle \xi_2, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \eta_1 + \eta_2 \rangle = \langle \xi, \eta_1 \rangle + \langle \xi, \eta_2 \rangle;$$

$$(ب) \text{ برای هر } \xi, \eta \in P \text{ و } x, y \in A$$

$$\langle \xi, x \cdot \eta \cdot y \rangle = y^* \langle \xi, \eta \rangle x;$$

(پ) نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle$ مثبت باشد، یعنی اینکه برای هر $\xi \in P$ ، $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$ عضو مثبت از A باشد ($a \in A$ مثبت خوانده می‌شود هرگاه $a = a^*$ و طیف a مشمول در اعداد حقیقی نامنفی باشد).

هر A -مدول تصویری یک ساختار ارمیتی دارد. درحقیقت، اگر P یک A -مدول تصویری از نوع متناهی باشد، عدد طبیعی n و عضو خودتوانی مانند $e \in M_n(A)$ وجود دارد به طوری که P با $e(A^n)$ یکرخت است. فرض کنید $F : e(A^n) \rightarrow P$ یکرختی مورد نظر باشد. فرمول

$$\langle \xi, \eta \rangle = F^{-1}(\eta)^* \cdot F^{-1}(\xi), \quad \xi, \eta \in P$$

یک ساختار ارمیتی بر P تعریف می‌کند. در مثال مورد بحث ما، یعنی $\mathcal{E}_{p,q}$ ، فرمول

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m,n} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{f\left(x - \frac{mp}{q}, k - mp\right)} g(x, k) e^{-2\pi i n \left(x - \frac{k}{q}\right)} dx \right) U^m V^n$$

برای هر $f, g \in \mathcal{E}_{p,q}$ یک ساختار ارمیتی بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کند [۴].

۶. التصاق بر مدول‌های تصویری از نوع متناهی

فرض کنید A یک C^* -جبر یک‌دار، G یک گروه لی، و $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ به صورت $g \mapsto \alpha_g$ یک همسانی بین دو گروه باشد. سه‌تایی (A, G, α) را یک C^* -سامانه مکانیکی می‌گویند. در این سامانه، $x \in A$ را از رده هموار می‌نامند هرگاه نگاشت $g \mapsto \alpha_g$ از G به A هموار باشد. مجموعه همه عضوهای A را که از رده هموارند با A^∞ نمایش می‌دهند که زیرجبری چگال از A است.

فرض کنیم \mathfrak{g} جبر لی G ، $X \in \mathfrak{g}$ ، $G, X \in \mathfrak{g}$ ، $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ با ضابطه g_t t خم مشتق‌پذیری با شرط $g_0 = e$ (عضو همانی G است)، و $g'_0 = X$. نگاشت $\delta_X : A^\infty \rightarrow A^\infty$ را به صورت

$$\delta_X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_t(x)$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که δ_X اشتقاق است.

تعریف ۱.۶ ([۴]). فرض کنید \mathbf{E}^∞ یک A^∞ -مدول تصویری از نوع متناهی باشد. یک التصاق بر \mathbf{E}^∞ عبارت است از نگاشتی مانند $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathbf{E}^\infty \rightarrow \mathbf{E}^\infty$ با تعریف $\nabla_X \xi$ $(X, \xi) \mapsto \nabla_X \xi$ به گونه‌ای که برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ و $\xi, \eta \in \mathbf{E}^\infty$ ، $x \in A$ ، $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\nabla_X(\xi \cdot x) = (\nabla_X \xi) \cdot x + \xi \cdot \delta_X(x),$$

$$\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X \xi + \nabla_X \eta,$$

$$\nabla_{c_1 X + c_2 Y} \xi = c_1 \nabla_X \xi + c_2 \nabla_Y \xi.$$

اگر $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ساختار ارمیتی بر \mathbf{E}^∞ باشد، التصاق ∇ را با $\langle \cdot, \cdot \rangle$ سازگار گویند هرگاه

$$\langle \nabla_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle = \delta_X(\langle \xi, \eta \rangle).$$

مثال ۲.۶ ([۴]). فرض کنید $e \in M_n(A^\infty)$ یک عضو خودتوان باشد و $\mathbf{E}^\infty = e((A^\infty)^n)$ در این صورت فرمول

$$\nabla_X^\circ \xi = e(\delta_X(\xi)) = e\left(\begin{pmatrix} \delta_X(\xi_1) \\ \vdots \\ \delta_X(\xi_n) \end{pmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in e((A^\infty)^n)$$

یک التصاق بر \mathbf{E}^∞ موسوم به «التصاق گراسمان» تعریف می‌کند. این التصاق با ساختار ارمیتی $\langle \xi, \eta \rangle = \eta^* \xi$ ، برای $\xi, \eta \in e((A^\infty))$ سازگار است.

پس با توجه به مثال بالا می‌توان گفت که هر A^∞ -مدول تصویری از نوع متناهی یک التصاق دارد.

تعریف ۳.۶ ([۴]). اگر ∇ یک التصاق بر \mathbf{E}^∞ باشد، خمیدگی Θ آن را برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ و $\xi, \eta \in \mathbf{E}^\infty$ به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\Theta(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi.$$

در پایان این بخش، یک التصاق بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کنیم. نخست توجه کنید که اگر برای

$$\alpha_g : A_\theta^\infty \rightarrow A_\theta^\infty, g = (e^{\imath\pi ix}, e^{\imath\pi iy}) \in T^2$$

$$\alpha_g(\sum a_{m,n} U^m V^n) = \sum a_{m,n} e^{\imath\pi i(mx+ny)} U^m V^n$$

تعریف کنیم، آن وقت α_g یک تبدیل خطی پیوسته بر A_θ^∞ است و چون A_θ^∞ در A_θ چگال است، می‌توان آن را بر A_θ گسترش داد. بنابراین، عمل T^2 بر A_θ^∞ را روی A_θ گسترش و آن را با همان علامت α نمایش می‌دهیم. پس (A_θ, T^2, α) یک سامانه مکانیکی است که در آن $A^\infty = A_\theta^\infty$. بنابه (۱.۴) دو عضو $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ و $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ در جبر لی وابسته به T^2 دو اشتقاق به دست می‌دهند که به ترتیب همان δ_1, δ_2 اند. اکنون فرمول‌های

$$(\nabla_{\partial_1} f)(x, k) = \frac{\imath\pi iq}{p} x f(x, k), \quad (\nabla_{\partial_2} f)(x, k) = \frac{df}{dx}(x, k),$$

که در آن $f \in \mathcal{E}_{p,q}$ ، یک التصاق بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کنند. این التصاق با ساختار ارمیتی (۴.۳) سازگار و خمیدگی آن مقدار ثابت

$$\Theta(X, Y)f = \frac{\imath\pi iq}{p} f$$

است [۴].

۷. التصاق لوی-چیویتا

در هندسهٔ ریمانی می‌دانیم که وقتی یک متریک ریمانی بر خمینه‌ای در نظر گرفته می‌شود، می‌توان التصاقی یکتا موسوم به التصاق لوی-چیویتا^۱ بر مقطع‌های کلاف مماس تعریف کرد که با آن متریک ریمانی سازگار و فاقد تاب است؛ به کمک این التصاق می‌توان خمیدگی را تعریف کرد. اما در هندسهٔ ناجایجایی شرایط کاملاً متفاوت و پیچیده است. در سال ۲۰۱۳، مسعود خلخالی در سلسله سخنرانی‌هایی در بنیاد فیلدز در کانادا با موضوع هندسهٔ ناجابه‌جایی ضمن توصیف خمیدگی اسکالر و چگونگی محاسبهٔ آن برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی همراه با متریکی که از تغییرات هم‌دیس متریک تخت حاصل شده است، اشاره می‌کند که نبود ابزار مشابهی در هندسهٔ ناجابه‌جایی موجب شده است که از ابزارهای نظریهٔ طیفی استفاده کنیم (بخش بعد را ببینید). این نقص، روزنبرگ را، که یکی از شهودگان آن سخنرانی‌ها بود، بر آن داشت که برای یافتن التصاقی مشابه روی چنبرهٔ ناجابه‌جایی دست به کار شود [۱۵].

^۱Levi-Civita

همان‌گونه که گفته شد، التصاق لوی-چیویتا بر مقطع‌های کلاف ماس بر خمینه، که میدان برداری‌اند، تعریف می‌شود. بنابراین ابتدا باید مفهوم مناسبی نظیر میدان برداری بر چنبره ناچابه‌جایی تعریف شود. با توجه به اینکه چنبره T^2 توازی‌پذیر است، اگر ∂_1 و ∂_2 را میدان‌های برداری مختصاتی بر T^2 بگیریم، هر میدان برداری دیگری مانند X را می‌توان به صورت $X = f_1\partial_1 + f_2\partial_2$ نوشت که در آن f_1 و f_2 توابع همواری هستند که بر T^2 تعریف شده‌اند. به عبارت دیگر، مجموعه میدان‌های برداری ماس بر T^2 یک $C^\infty(T^2)$ -مدول چپ است که با دو مولد تولید می‌شود. این موضوع روزنبرگ را بر آن داشت که میدان برداری بر چنبره A_θ را به صورت زیر تعریف کند.

تعریف ۱.۷. ([۱۵]) برای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ ترکیب خطی $X = a_1\delta_1 + a_2\delta_2$ یک میدان برداری خوانده می‌شود و مجموعه همه میدان‌های برداری را با \mathfrak{X}_θ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر، \mathfrak{X}_θ یک $\mathcal{A}_\theta^\infty$ -مدول چپ است که با دو مولد δ_1 و δ_2 تولید می‌شود.

اگر $X = a_1\delta_1 + a_2\delta_2$ یک میدان برداری و $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ ، تعریف می‌کنیم

$$X \cdot a = a_1\delta_1(a) + a_2\delta_2(a).$$

باید توجه کرد که در اینجا، برخلاف حالت جابه‌جایی، یک میدان برداری لزوماً یک اشتقاق نیست. همچنین گروه دو میدان برداری هم ممکن است میدان برداری نباشد.

روزنبرگ فضای خطی D_θ را در نظر گرفت که شامل همه اشتقاق‌های $\mathcal{A}_\theta^\infty \rightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ است و تجزیه یکتایی به صورت

$$\delta = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \delta.$$

دارند که در آن $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ و δ یک اشتقاق درونی است (البته نابدیهی بودن این فضا به بستگی دارد). یادآوری می‌کنیم که هر $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ یک اشتقاق ad_a به دست می‌دهد که به صورت $\text{ad}_a(b) = [a, b] = ab - ba$ تعریف می‌شود. این‌گونه اشتقاق‌ها را اشتقاق درونی می‌گویند.

مفهوم ضروری دیگر، متریک ریمانی است که مانند ساختار اریتمی تعریف می‌شود، با این تفاوت که متریک ریمانی به جای تعریف بر یک مدول راست بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ -مدول چپ \mathfrak{X}_θ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۷. ([۱۵]) یک متریک ریمانی $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ عبارت است از یک نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A}_\theta^\infty \times \mathcal{A}_\theta^\infty \rightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ به گونه‌ای که برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_\theta$ و هر $a, b \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ داشته باشیم

$$\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle \quad (\text{الف})$$

$$\langle X, aY \rangle = \langle X, Y \rangle a^* \quad \text{و} \quad \langle X, Y \rangle^* = \langle Y, X \rangle \quad (\text{ب})$$

(پ) $\langle X, X \rangle$ عضو مثبتی باشد و $\langle X, X \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $X = 0$ ؛

(ت) برای $i, j = 1, 2$ ، $\langle \delta_i, \delta_j \rangle$ خودالحاقی باشد و بنابراین $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 0$.

پس هر متریک ریمانی g نمایش ماتریسی یکتای به صورت $(g_{ij}) = (\langle \delta_i, \delta_j \rangle) \in M_2(A_\theta^\infty)$ دارد.

مثال ۳.۷. اگر $h = h^*$ عضو A_θ^∞ باشد، آن وقت $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = e^h \delta_{ij}$ یک متریک ریمانی بر A_θ^∞ تعریف می‌کند.

تعریف ۴.۷. ([۱۵]) یک التصاق بر A_θ^∞ عبارت است از نگاشت $\nabla : D_\theta \times \mathfrak{X}_\theta \rightarrow \mathfrak{X}_\theta$ تعریف $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ به گونه‌ای که در شرط‌های زیر صدق کند.

(الف) نسبت به هر دو مولفه \mathbb{C} -خطی باشد؛

(ب) برای هر $Y \in D_\theta$ ، $X \in \mathfrak{X}_\theta$ و $a \in A_\theta^\infty$ ، $\nabla_X(aY) = a\nabla_X Y + (X.a)Y$ ؛

(پ) برای هر $a \in A_\theta^\infty$ با شرط $\tau(a) = 0$ داشته باشیم $\nabla_{ad_a} Y = aY$ ؛

(ت) برای هر $i, j, k = 1, 2$ ، $\langle \nabla_{\delta_i} \delta_j, \delta_k \rangle$ خودالحاقی باشد.

توجه کنید که این تعریف از التصاق با تعریف قبلی، تا اندازه‌ای متفاوت است. این تفاوت‌ها به این دلیل اعمال شده‌اند که بتوان قضیه لوی-چیویتا را اثبات کرد.

مشابه حالت جابه‌جایی، التصاق ∇ را فاقد تاب می‌گویند هرگاه $\nabla_{\delta_1} \delta_2 = \nabla_{\delta_2} \delta_1$. همچنین التصاق را با متریک ریمانی $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ سازگار گویند هرگاه

$$Z.\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}_\theta, Z \in D_\theta.$$

اکنون می‌توان قضیه لوی-چیویتا را ارائه کرد.

قضیه ۵.۷ ([۱۵]). فرض کنید g یک متریک ریمانی بر A_θ^∞ باشد. در این صورت یک التصاق یکتای $\nabla : D_\theta \times \mathfrak{X}_\theta \rightarrow \mathfrak{X}_\theta$ وجود دارد که با متریک ریمانی g سازگار و فاقد تاب است. این التصاق، که التصاق لوی-چیویتا نامیده می‌شود، با رابطه زیر مشخص می‌گردد

$$\langle \nabla_{\delta_i} \delta_j, \delta_k \rangle = \frac{1}{4} (\delta_i \langle \delta_j, \delta_k \rangle + \delta_j \langle \delta_i, \delta_k \rangle - \delta_k \langle \delta_i, \delta_j \rangle).$$

تعریف ۶.۷ ([۱۵]). فرض کنید $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ یک متریک ریمانی بر A_θ^∞ و ∇ التصاق لوی-چیویتا وابسته به آن باشد. عملگر خمیدگی ریمان $R : \mathfrak{X}_\theta \rightarrow \mathfrak{X}_\theta$ برای $X, Y \in D_\theta$ به صورت

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[X, Y]}$$

و خمیدگی ریمان نیز به صورت $R_{i,j,k,l} = \langle R(\delta_i, \delta_j)\delta_k, \delta_l \rangle$ تعریف می‌شود.

اکنون خاصیتی از خمیدگی ریمان را بیان می‌کنیم.

گزاره ۷.۷. خمیدگی ریمانی دارای ویژگی‌های زیر است

$$R_{j,k,l,m} + R_{k,l,j,m} + R_{l,j,k,m} = 0, \quad R_{j,k,l,m} = -R_{k,j,l,m}.$$

مثال ۸.۷. ([۱۵]) گیریم g متریک ریمانی در مثال ۳.۷ باشد. بنابه قضیه لوی-چیویتا داریم

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\delta_1} \delta_1, \delta_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_1(e^h), & \langle \nabla_{\delta_2} \delta_2, \delta_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_2(e^h), \\ \langle \nabla_{\delta_1} \delta_1, \delta_2 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \delta_2(e^h), & \langle \nabla_{\delta_2} \delta_2, \delta_1 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \delta_1(e^h). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\nabla_{\delta_1} \delta_1 = -\nabla_{\delta_2} \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(k_1 \delta_1 - k_2 \delta_2), \quad \nabla_{\delta_2} \delta_1 = \nabla_{\delta_1} \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(k_2 \delta_1 + k_1 \delta_2),$$

که در آن $k_j = \delta_j(e^h)e^{-h}$. اکنون می‌توان خمیدگی را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} R_{1,2,1,2} &= \langle R(\delta_1, \delta_2)\delta_1, \delta_2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \langle \delta_2(k_2)\delta_1 + k_1 \nabla_{\delta_2} \delta_1 - \delta_2(k_1)\delta_2 - k_2 \nabla_{\delta_1} \delta_2 \\ &\quad - \delta_1(k_2)\delta_1 - k_2 \nabla_{\delta_1} \delta_1 - \delta_1(k_1)\delta_2 - k_1 \nabla_{\delta_1} \delta_2, \delta_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\delta_2(k_2) + \delta_1(k_1)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} (\Delta(e^h) - \delta_1(e^h)e^{-h}\delta_1(e^h) - \delta_2(e^h)e^{-h}\delta_2(e^h)). \end{aligned}$$

۸. قضیه گاوس-بونه

قضیه گاوس-بونه^۱ قضیه بسیار مهمی در هندسه دیفرانسیل است؛ این قضیه ویژگی هندسی و توپولوژیک یک رویه را به هم پیوند می‌زند. بنابه این قضیه اگر Σ یک خمینه دو بعدی بسته (فشرده و بدون لبه) و جهت‌دار با صورت سطح dA ، g یک متریک ریمانی بر آن، R خمیدگی گاوسی، و $\chi(\Sigma)$ شاخص اویلر آن باشد آنگاه

$$\int_{\Sigma} R dA = 2\pi \chi(\Sigma).$$

^۱Gauss-Bonnet theorem

این قضیه را در نظریه طیفی به شکل دیگری نیز بیان می‌کنند. اگر $\Delta_g = d^*d$ لاپلاسی (Σ, g) باشد تابع زتای وابسته به Δ_g به صورت

$$\zeta(s) = \sum \lambda_j^{-s}, \quad \Re(s) > 1$$

تعریف می‌شود که در آن مجموع روی ویژه‌مقدارهای ناصفر λ_j از Δ_g در نظر گرفته می‌شود. تابع زتا دارای گسترشی برخه‌ریخت^۱ یکتا بر تمام صفحه مختلط است و این گسترش فقط یک قطب ساده در $s = 1$ دارد. بنابراین، ζ در صفر تعریف می‌شود و

$$\zeta(0) + \text{card}\{j : \lambda_j = 0\} = \frac{1}{12\pi} \int_{\Sigma} R dA = \frac{1}{6} \chi(\Sigma).$$

این همان همتای قضیه گاوس-بونه در نظریه طیفی است. بنابراین، $\zeta(0)$ یک ناوردای توپولوژیکی است و همچنین مستقل از تغییرات هم‌دیس $e^f g \mapsto g$ متریک است.

با الهام از فرمول اخیر، می‌توان قضیه گاوس-بونه را برای چنبره ناچاه‌جایی نیز بیان کرد. در این بخش، به اختصار به این موضوع می‌پردازیم و خواننده را برای شرح کامل موضوع به مطالعه [۷] و [۱۰] توصیه می‌کنیم.

گیریم \mathcal{H}_0 فضای هیلبرتی باشد که از کامل کردن A_{θ} تحت نرم $|a| = \tau(a^*a)^{1/2}$ به دست می‌آید. عملگر ∂_{ω} یک عملگر بی‌کران بر \mathcal{H}_0 است و ∂_{ω}^* الحاقی آن نسبت به حاصل ضرب داخلی

$$\langle a, b \rangle = \tau(b^*a), \quad a, b \in A_{\theta} \quad (1.8)$$

است. فرض کنید $\mathcal{H}^{(1,0)}$ فضای هیلبرتی باشد که از کامل کردن فضای متشکل از همه مجموع‌های متناهی $\sum a \partial_{\omega} b$ ، با شرط $a, b \in A_{\theta}^{\infty}$ ، نسبت به حاصل ضرب داخلی (۱.۸) به دست می‌آید. فرض کنیم عملگر ∂_{ω} از \mathcal{H}_0 به $\mathcal{H}^{(1,0)}$ بی‌کران باشد و لاپلاسی Δ_{ω} روی A_{θ}^{∞} به صورت $\Delta_{\omega} = \partial_{\omega}^* \partial_{\omega}$ تعریف شود. برای بیان قضیه گاوس-بونه، علاوه بر عملگر لاپلاس، لازم است تغییرات هم‌دیس نیز بر متریک اعمال شود. از این رو، $h = h^*$ را یک عضو خودالحاقی از A_{θ}^{∞} می‌گیریم و تابع خطی ϕ را بر A_{θ}^{∞} با ضابطه

$$\phi(a) = \tau(ae^{-h})$$

تعریف می‌کنیم. اگرچه ϕ یک اثر نیست، تابع خطی مثبت است و به کمک آن می‌توان حاصل ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\phi}$ را تعریف کرد:

$$\langle a, b \rangle_{\phi} = \phi(b^*a), \quad a, b \in A_{\theta}.$$

^۱meromorphic

فضای هیلبرت حاصل از کامل کردن A_θ با این حاصل ضرب داخلی را با \mathcal{H}_ϕ نمایش می‌دهیم و فرض کنیم ∂_ϕ همان عملگر ∂_ω باشد که از \mathcal{H}_ϕ به $\mathcal{H}^{(1,0)}$ بی‌کران بود. اکنون عملگر لاپلاس تغییر یافته Δ'_ω با ضابطه $\Delta'_\omega = \partial_\phi^* \partial_\phi$ تعریف می‌شود. این عملگر یک عملگر مثبت و بی‌کران بر \mathcal{H}_ϕ است.

لم ۱.۰۸. اگر $k = e^{h/2}$ را عملگری فرض کنیم که از چپ بر \mathcal{H}_\circ عمل می‌کند آنگاه عملگر $\Delta'_\omega : \mathcal{H}_\phi \rightarrow \mathcal{H}_\phi$ با عملگر $k : \mathcal{H}_\circ \rightarrow \mathcal{H}_\circ$ هم‌ارز پادیکانی است.

اکنون، تابع زتای لاپلاسی با ضابطه

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Trace}^+(e^{-t\Delta'_\omega}) t^{s-1} dt, \quad \Re(s) > 1$$

را می‌توان تعریف کرد که در آن

$$\text{Trace}^+(e^{-\Delta'_\omega}) = \text{Trace}(e^{-t\Delta'_\omega}) - \dim \ker(\Delta'_\omega).$$

این تابع یک گسترش برخه‌ریخت یکتا بر تمام صفحه مختلط دارد با یک قطب ساده در $s = 1$.

قضیه ۲.۰۸ (قضیه گاوس-بونه). اگر $\omega = \omega_1 + \omega_2$ عددی مختلط در نیم‌صفحه بالایی صفحه مختلط، θ یک عدد گنگ، و k یک عضو مثبت وارون‌پذیر در A_θ^∞ باشد، مقدار $\zeta(\circ)$ برای عملگر $k\Delta k \sim \Delta'$ مستقل از انتخاب k است. افزون‌براین

$$\begin{aligned} \zeta(\circ) + 1 &= \frac{2\pi}{\omega_2} \phi(f(\Delta)(\delta_1(k))\delta_1(k)) + \frac{2\pi|\omega|^2}{\omega_2} \phi(f(\Delta)(\delta_2(k))\delta_2(k)) \\ &+ \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} \phi(f(\Delta)(\delta_1(k))\delta_2(k)) + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} \phi(f(\Delta)(\delta_2(k))\delta_1(k)). \end{aligned}$$

در اینجا ϕ با ضابطه $\phi(x) = \tau(xk^{-2})$ و $\Delta(x) = k^{-1}xk$ مفروض‌اند و f نیز با ضابطه

$$f(u) = \frac{1}{6}u^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} + \mathcal{L}_1(u) - 2(1+u^{\frac{1}{3}})\mathcal{L}_2(u) + (1+u^{\frac{1}{3}})^2\mathcal{L}_3(u)$$

تعریف می‌شود که در آن \mathcal{L}_m لگاریتم تغییر یافته با تعریف زیر است

$$\mathcal{L}_m(u) = (-1)^m (u-1)^{-(m+1)} (\log u - \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{(u-1)^j}{j}).$$

این نتیجه مهم، ابتدا، برای $\omega = i$ ثابت شد [۷] و سپس فتحی‌زاده و خلخالی آن را برای ω دلخواه اثبات کردند [۱۰].

خمیدگی اسکالر را نیز می‌توان، مانند قضیه گاوس-بونه، به کمک تابع زتای لاپلاسی بیان کرد. دراصل، خمیدگی اسکالر برای سه‌تایی طیفی وابسته به (A_θ, ω, k) برابر عضو یکتای $R \in A_\theta^\infty$ تعریف می‌شود که برای هر A_θ^∞

$$\text{Trace}(a\Delta_\omega^{-s})|_{s=0} + \text{Trace}(aP) = \tau(aR).$$

در اینجا P تصویری بر هسته Δ_ω است. همچنین جمله اول در سمت چپ این برابری، مقدار تابع ζ_a با تعریف $\zeta_a(s) = \text{Trace}(a\Delta_\omega^{-s})$ ، $\Re(s) > 0$ ، را در مبدأ نشان می‌دهد. این تابع یک گسترش تحلیلی بر تمام صفحه مختلط به جز ۱ دارد و بنابراین در صفر تعریف می‌شود. محاسبه خمیدگی اسکالر پیچیده است و باید از ابزار و فنون نظریه طیفی و روش‌های محاسبات کامپیوتری استفاده شود. برای شرح بهتری از خمیدگی اسکالر و چگونگی محاسبه آن، [۹]، [۸]، و [۱۳] را ببینید. خمیدگی ریچی^۱ هم در [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

توجه کنید که قضیه گاوس-بونه و خمیدگی در هندسه ریمانی ناشی از وجود متریک ریمانی و، به دنبال آن، التصاق لوی-چیویتا است. اما این مفاهیم در هندسه ناجابه‌جایی هنوز برای همه فضاها ناجابه‌جایی، حتی برای همه چنبره‌های ناجابه‌جایی، تعریف نشده است و همان‌گونه که دیدیم برای چنبره ناجابه‌جایی دوبعدی هم مستقل از مفهوم متریک ریمانی و التصاق تعریف شده است. البته در بخش قبل دیدیم که روزنبرگ التصاق لوی-چیویتا و خمیدگی ریمانی را تعریف کرده است. اما در آنجا هم فقط برای رده خاصی از چنبره‌ها این کار انجام شده است. بنابراین می‌توان گفت، اگرچه کوشش‌های فراوانی در هندسه ناجابه‌جایی برای یافتن مفاهیمی مانند متریک ریمانی، التصاق، خمیدگی‌ها، و غیره انجام شده است، هنوز راه درازی در پیش است تا این مفاهیم تثبیت شوند و به جایگاهی برسند که در هندسه ریمانی دارند.

تشکر و قدردانی

برای یک دوره فرصت مطالعاتی در سال تحصیلی ۲۰۱۷-۲۰۱۸ در دانشگاه وسترن انتاریو کانادا بودم. در آنجا آشنایی با مسعود خلخالی، ریاضی‌دان برجسته هم‌میهن‌مان، و اصغر قربانپور، شاگرد مهربان ایشان، برای این‌جانب موهبتی بود. معمولاً هر روز هنگام ناهار فرصتی بود که با این دو بزرگوار، ساعتی گفتگو کنم. گفتگو با مسعود برای من بسیار ارزشمند بود؛ او نه تنها در زمینه

^۱Ricci

کاری خود مسلط و پرتجربه بود بلکه در زمینه تاریخ و به‌ویژه تاریخ ریاضیات هم اطلاعات گسترده‌ای داشت و آن‌ها را بسیار دلنشین بازگو می‌کرد. اصغر هم نه‌تنها در زمینه‌های علمی یک هم‌نشین و هم‌صحبت فرهیخته بود بلکه یک دادرس ارزنده در هنگامه بروز مشکلات زندگی در دیار غربت نیز بود. سپاسگزار هر دو بزرگوار هستم و برایشان بهترین‌ها را آرزو می‌کنم.

مراجع

- [۱] میثمی صدر، میثم، نظریه ریاضی احتمال و مبانی فیزیک کوانتوم، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۶۷ (۱۳۹۹)، ۱۸۱-۲۰۸.
- [2] Connes, A., Noncommutative geometry, the spectral standpoint, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1910.10407>.
- [3] Connes, A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.
- [4] Connes, A., C^* -algebres et geometrie differentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **290** (1980), 599–604.
- [5] Connes, A., Moscovici, H., Type III and spectral triples, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/math/0609703>.
- [6] Connes, A., Rieffel, M. A., Yang-Mills for noncommutative two-tori, *Contemp. Math.*, **62** (1994), 266-237.
- [7] Connes, A., Tretkoff, P., The Gauss-Bonnet theorem for the noncommutative two torus, 2009 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/0910.0188>.
- [8] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Curvature in noncommutative geometry, 2020 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1901.07438>.
- [9] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Scalar curvature for the noncommutative two torus, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 1145–1183.
- [10] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., The Gauss-Bonnet theorem for noncommutative two tori with a general conformal structure, *J. Noncommut. Geom.*, **6** (2012), 457–480.
- [11] Floricel, R., Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Ricci curvature in noncommutative geometry, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1612.06688>.
- [12] Gelfand, I. M., Naimark, M. A., On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space, *Mat. Sb.*, **12** (1943), 197–217.
- [13] Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Spectral geometry of functional metrics on noncommutative tori, 2018 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1811.04004>.
- [14] Khalkhali, M., *Basic Noncommutative Geometry*, 2nd ed., EMS Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society, Zorich, 2013.

- [15] Rosenberg, J., Levi-Civita's theorem for noncommutative tori, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, **9** (2013), Paper 071, 9 pp.; also available at <https://arxiv.org/abs/1307.3775>.
- [16] Swan, R. G., Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 264–277.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۹/۳/۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۴/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۳۱
محمد شفیعی: دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: mshafiee@vru.ac.ir

Noncommutative Tori: An Overview

M. Shafiee

Department of Mathematical Sciences, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran

Abstract. One of the most important and simplest examples of noncommutative spaces in noncommutative geometry is the two-dimensional noncommutative torus, which has been studied very deeply and widely. Our intention in this article is to familiarize the reader with some preliminary features of this space.

Keywords: noncommutative tori, Levi-Civita connection, Gauss–Bonnet theorem, noncommutative geometry

Article history: Recieved 23 May 2020; Accepted 21 July 2020

Article type: review

References

- [1] Connes, A., Noncommutative geometry, the spectral standpoint, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1910.10407>.
- [2] Connes, A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.
- [3] Connes, A., C^* -algebres et geometrie differentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **290** (1980), 599–604.
- [4] Connes, A., Moscovici, H., Type III and spectral triples, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/math/0609703>.
- [5] Connes, A., Rieffel, M. A., Yang-Mills for noncommutative two-tori, *Contemp. Math.*, **62** (1994), 266–237.
- [6] Connes, A., Tretkoff, P., The Gauss-Bonnet theorem for the noncommutative two torus, 2009 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/0910.0188>.
- [7] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Curvature in noncommutative geometry, 2020 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1901.07438>.

¹mshafiee@vru.ac.ir

- [8] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Scalar curvature for the noncommutative two torus, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 1145–1183.
- [9] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., The Gauss-Bonnet theorem for noncommutative two tori with a general conformal structure, *J. Noncommut. Geom.*, **6** (2012), 457–480.
- [10] Floricel, R., Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Ricci curvature in noncommutative geometry, 2019 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1612.06688>.
- [11] Gelfand, I. M., Naimark, M. A., On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space, *Mat. Sb.*, **12** (1943), 197–217.
- [12] Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Spectral geometry of functional metrics on noncommutative tori, 2018 (preprint), available at <https://arxiv.org/abs/1811.04004>.
- [13] Khalkhali, M., *Basic Noncommutative Geometry*, 2nd ed., EMS Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society, Zorich, 2013.
- [14] Meysami Sadr, M., Mathematical theory of probability and fundamentals of quantum physics, *Mathematical Culture and Thought*, **67** (2020), 181-208. [in Persian]
- [15] Rosenberg, J., Levi-Civita’s theorem for noncommutative tori, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, **9** (2013), Paper 071, 9 pp.; also available at <https://arxiv.org/abs/1307.3775>.
- [16] Swan, R. G., Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 264–277.