

صورتی یکپارچه از قضیه فیثاغورس در هندسه‌های اقلیدسی، کروی، و هذلولوی*

رابرت ال. فوت

ترجمه مهرا امینیان و مهرا نامجو

یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع x و y و وتر z را در نظر بگیرید. اگر این مثلث روی کره واحد S^2 یا در صفحه هذلولوی H^2 با خمیدگی ثابت -1 باشد، اضلاعش در رابطه‌های زیر، به ترتیب، صدق می‌کند

$$\cos z = \cos x \cos y \quad \text{یا} \quad \cosh z = \cosh x \cosh y. \quad (1)$$

(فرض می‌گیریم که مثلث مورد بحث روی کره، سره است، یعنی اضلاعش از نصف محیط دایره کمترند.) ظاهراً این رابطه‌ها برای قضیه فیثاغورس هیچ ربطی به رابطه آشنای $z^2 = x^2 + y^2$ ، در هندسه اقلیدسی ندارند: مربع‌ها (چهارضلعی‌های منتظم) و مساحت‌هایشان کجا هستند؟ چرا در سمت راست رابطه (۱) ضرب داریم و نه جمع؟ و کسینوس طول یعنی چی؟

بعضی‌ها (مثلاً، [۶]) تابع‌های موجود در رابطه (۱) را برحسب سری‌های توانی بسط داده‌اند و روابطی مشابه رابطه آشنای فیثاغورس به دست آورده‌اند. به این ترتیب که عبارات‌های ثابت، حذف و عبارات‌های مرتبه اول، صفر می‌شوند و عبارات‌های مرتبه دوم همان رابطه اقلیدسی را به دست می‌دهد. به نظر این روشی متقاعدکننده نیست و برای دانشجویانی که هنوز با سری‌های توانی آشنایی کافی ندارند، بیشتر شبیه یک حقه به نظر می‌آید. درست است که برای مثلث‌ها با اضلاع خیلی کوچک روی کره واحد S^2 و در صفحه هذلولوی H^2 ، روش سری‌های توانی نشان می‌دهد که فرمول اقلیدسی تقریباً درست است، اما برای

عبارات و کلمات کلیدی. قضیه فیثاغورس، هندسه اقلیدسی، هندسه کروی، هندسه هذلولوی، قانون کسینوس‌ها.
* نام و نشان مقاله اصلی از این قرار است:

Foote, Robert L., A unified Pythagorean theorem in Euclidean, spherical, and hyperbolic geometries, *Math. Mag.*, **90** (2017), 59-69.

مثلاً با اضلاع بزرگ تعبیر سری‌های توانی به هیچ وجه روشن نیست و هیچ‌گونه دید هندسی دیگری حاصل نمی‌شود و نمی‌توان جمله‌های حذف‌شده از مرتبه‌های بالاتر را تعبیر کرد.

هدف ما اثبات قضیه زیر است که فرمولی مشترک برای قضیه فیثاغورس در هر سه هندسه \mathbb{R}^2 ، S^2 ، و H^2 به دست می‌دهد. فضاهای \mathbb{R}^2 ، S^2 ، و H^2 را با M نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱ (صورت یکپارچه قضیه فیثاغورس). هر مثلث قائم‌الزاویه در M با اضلاع x و y و وتر z رابطه

$$A(z) = A(x) + A(y) - \frac{K}{2\pi} A(x)A(y) \quad (2)$$

صدق می‌کند که در آن $A(r)$ مساحت دایره به شعاع r و K عددی ثابت است.

قبل از شروع برهان، مطالبی را متذکر می‌شویم. این قضیه و برهانش در هندسه نتاری^۱ بیان می‌شود، هندسه‌ای که بین \mathbb{R}^2 ، S^2 ، و H^2 مشترک است. ما بیشتر به تفاوت‌های این هندسه‌ها توجه می‌کنیم ولی اشتراکات زیادی دارند. مثلاً دوران‌ها در همه آن‌ها طول‌پایی هستند و این مطلب برای اثبات ما لازم است.

معلوم می‌شود که ثابت K همان خمیدگی گاوسی M است. همچنین، گرچه بررسی این مطلب در اینجا مد نظر ما نیست، در اثبات قضیه، K و تأثیر علامت آن روی هندسه دایره‌ها در M را خواهیم دید. در S^2 داریم $K = 1/R^2$ که در آن R شعاع کره است و در \mathbb{R}^2 ، $K = 0$. در H^2 ، K می‌تواند هر مقدار منفی باشد و R که اغلب شبه‌شعاع نامیده می‌شود با رابطه $K = -1/R^2$ تعریف می‌شود. (برای شرحی غیرفنی از خمیدگی گاوسی، [۱۱] و برای جزئیات آن [۱۴، ۱۵] را مطالعه کنید.)

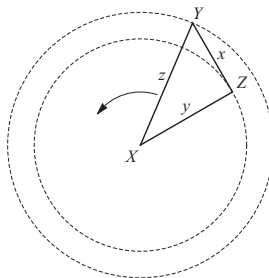
امیدوارم رابطه (۲) برای خواننده جلوه هندسی‌تری نسبت به (۱) داشته باشد. عبارت کمی عجیب $KA(x)A(y)/2\pi$ را هم بعد از اثبات قضیه ۱ به صورت مساحت چیزی تعبیر خواهیم کرد. توجه داشته باشید که وقتی $K = 0$ ، رابطه (۲) همان حالت اقلیدسی می‌شود، گرچه دایره‌ها به جای مربع‌های روی اضلاع مثلث می‌نشینند. وقتی $K \neq 0$ و x و y کوچک هستند، رابطه (۲) تقریباً به شکل اقلیدسی است زیرا حاصل ضرب $A(x)A(y)$ در مقایسه با جملات دیگر کوچک است. البته، در \mathbb{R}^2 مربع‌ها می‌توانند با هر شکل دیگری عوض شوند، چون مساحت شکل‌های متشابه متناسب با مجذور ابعاد خطی‌شان است. درحالی‌که، در S^2 و H^2 تشابه، هم‌نهشتی را نتیجه نمی‌دهد. به نظر می‌رسد که یافتن صورتی از قضیه فیثاغورس در S^2 و H^2 که شکل‌های روی اضلاع غیر از دایره باشند مسئله‌ای حل نشده است. (در [۸] و [۹، ص. ۲۰۸] نیم‌مستطیل‌ها را برای «یکپارچه‌سازی» قضیه مشابهی به کار برده‌اند.)

از زمان بویوتی^۱ هم کارهایی برای یافتن فرمول‌های یکپارچه برای هر سه هندسه انجام گرفته است و خود او فرمول یکپارچه‌ای برای قانون سینوس‌ها یافته است (برای جزئیات بیشتر [۲])، به‌ویژه صفحه ۱۰۲ و ۱۱۴ را ببینید). بعد از اثبات قضیه ۱، صورت یکپارچه‌ای از رابطه (۱) را نتیجه خواهیم گرفت. نتیجه‌های دیگر از قضیه مذکور عبارت‌اند از چند نتیجه مربوط به هندسه دیفرانسیل و فرمول‌هایی برای محیط، مساحت، و خمیدگی دایره‌ها. و در پایان نشان خواهیم داد چگونه رابطه (۲) به‌صورتی یکپارچه از قانون کسینوس‌ها تعمیم می‌یابد.

اولین فرمول رابطه (۱) را هر طالب مثلثات کروی در سال‌های اول سده ۱۸۰۰ می‌دانست [۳، ص. ۱۶۴]. لباچفسکی^۲ صورتی از فرمول دوم رابطه (۱) را در آثارش درباره هندسه هذلولوی در سال‌های ۱۸۳۰-۱۸۲۰ اثبات کرده است، گرچه آن را برحسب کسینوس هذلولوی بیان نکرده است [۳، ص. ۱۷۴]. اثبات ما، به معنایی که در [۹، ۱۴] گفته شده است، ذاتی است و مثلاً برای S^2 ، به نشانیدن آن در \mathbb{R}^3 اتکا نمی‌کنیم و برای H^2 از هیچ مدلی استفاده نمی‌کنیم. برای دیدن اثبات‌های غیرذاتی برای رابطه (۱) با استفاده از جبر برداری [۱۷، صفحه ۵۰ و ۸۶] و برای فرمول دوم آن رابطه با استفاده از مدل‌های H^2 و \mathbb{R}^2 [۶، ۱۳] را ببینید.

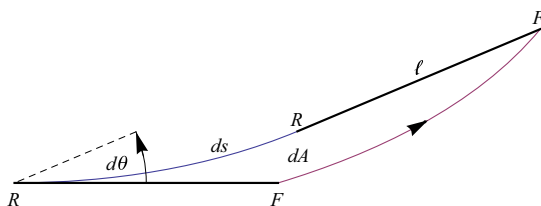
اثبات برای \mathbb{R}^2

کار ما از اثبات زیر برای قضیه فیثاغورس در \mathbb{R}^2 ، معروف به اثبات «دوچرخه» دورانی، شروع می‌شود [۱۲]. فرض کنید مثلث XYZ با زاویه قائمه در رأس Z داده شده است، اینک مثلث را حول یک دایره با مرکز X دوران دهید (شکل ۱). اضلاع \overline{XY} و \overline{XZ} به ترتیب سطحی به مساحت‌های πz^2 و πy^2 را می‌روید. ضلع سوم، \overline{YZ} ، طوق میان دایره‌ها را ایجاد می‌کند. این پاره خط را می‌توان مانند دوچرخه‌ای متحرک با طول x در نظر گرفت که چرخ جلوی آن در Y و چرخ عقب در Z قرار گرفته است.



شکل ۱. اثبات مبتنی بر دوران برای قضیه فیثاغورس

یک مدل ساده برای دوچرخه، پاره خطی متحرک با طول ثابت ℓ ، است، که ℓ فاصله بین دو محور چرخ (فاصله بین نقاط تماس چرخ‌ها با زمین) است. پاره خط (بدنه دوچرخه) به طریقی حرکت می‌کند که همواره مماس بر مسیر چرخ عقب R است (شکل‌های ۲ و ۳ را ببینید). حرکت بی‌نهایت کوچک ds در دوچرخه، فاصله دورانی چرخ عقب، و $d\theta$ ، مقدار تغییر جهت یا زاویه گردش، در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. (چرخ عقب ممکن است به عقب حرکت کند که در این حالت $ds < 0$ ، ولی ما به آن نیازی نداریم.)

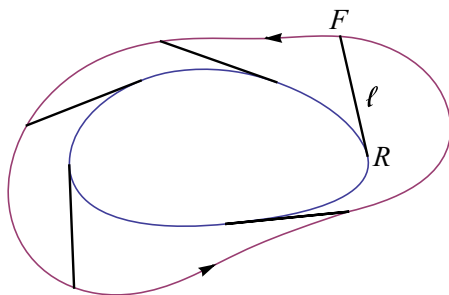


شکل ۲. حرکت بی‌نهایت کوچک دوچرخه

فرض کنید بدنه دوچرخه در شکل ۲ سطح به مساحت dA را بربود. این مساحت ترکیبی خطی از ds و $d\theta$ است، یعنی $dA = mds + nd\theta$ ، دراصل،

$$dA = \frac{\ell^2}{4} d\theta, \quad (3)$$

زیرا حرکت رو به جلوی دوچرخه (وقتی که $ds \neq 0$ و $d\theta = 0$) هیچ سطحی را نمی‌روبند (پس $m = 0$)، ولی حرکت دورانی آن ($ds = 0$ و $d\theta \neq 0$) سطح را با آهنگ $n = \pi\ell^2/2\pi = \ell^2/2$ در هر یک رادیان چرخش می‌روبد.



شکل ۳. مساحت این طوق در \mathbb{R}^2 برابر $\pi\ell^2$ است.

وقتی چرخ عقب دو چرخه یک طوقه محذب را طی کند (شکل ۳) به اندازه $\Delta\theta = 2\pi$ تغییر جهت می‌دهد، و بنا بر (۳)، سطح $\pi\ell^2 = (\ell^2/2)\Delta\theta$ را می‌روید. اگر همین کار را برای پاره خط \overline{YZ} از مثلث در حال دوران انجام دهیم مشاهده می‌کنیم که این ضلع، سطح به مقدار πx^2 را می‌روید. اضلاع \overline{XZ} و \overline{YZ} باهم سطحی به اندازه ضلع \overline{XY} می‌روند، یعنی، $\pi z^2 = \pi x^2 + \pi y^2$ ، که همان قضیه فیثاغورس در \mathbb{R}^2 است.

سابقه این ترسیمات و ملاحظات ساده درباره پاره خط متحرک با طول ثابت (چه مانند یک دو چرخه حرکت کند یا نه) و مساحت مربوط و نتایج آن به مقاله‌ای [۱۰] به سال ۱۸۹۴ می‌رسد که در آن تاریخچه و نظریه پهنه‌سنج‌ها را تا آن زمان بیان کرده است. (برای جزئیات و مراجع بیشتر [۴] را ببینید.) مفاهیم بسیار متأخر پهنه‌های مماسی^۱ و خوشه‌های مماسی^۲ [۱] گسترش و تعمیم همین ایده‌ها هستند. شکل ۴ (ا) مساحت طوق شکل ۱ را به صورت پهنه مماسی مثلث‌های بی‌نهایت کوچکی تصویر می‌کند که طرز قرار گرفتن دو چرخه ایجاد کرده است. و شکل ۴ (ب) خوشه مماسی متناظر است که در آن مثلث‌ها به صورت قرصی به شعاع x چیده شده‌اند و نشان می‌دهد که طوق و قرص دارای مساحت یکسانی هستند. دو قسمت دیگر شکل ۴ پهنه و خوشه مماسی روی یک کره را نشان می‌دهد. از این دو چنین برمی‌آید که در اینجا شاید چیز دیگری اتفاق بیفتد، زیرا خوشه مماسی، قرصی کامل نمی‌سازد. همچنین، چنین به نظر می‌رسد که خوشه مماسی ممکن است یک قرص کامل در \mathbb{R}^2 بسازد. این اختلاف را در دو بخش بعدی برطرف می‌کنیم.

چرخیدن روی دایره

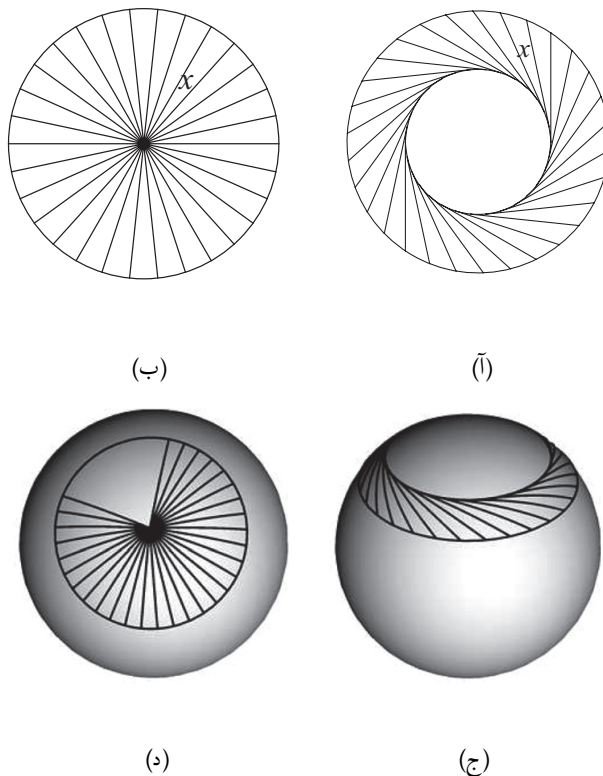
دایره‌ای به شعاع ρ در M در نظر بگیرید. گیریم $A(\rho)$ و $C(\rho)$ ، به ترتیب، نشان‌دهنده مساحت و محیط آن باشند. برای راحتی کار تعریف کنید $a(\rho) = A(\rho)/2\pi$ و $c(\rho) = C(\rho)/2\pi$ ، که به ترتیب آن‌ها را مساحت و محیط قطاع دایره‌ای به شعاع ρ و برحسب رادیان در نظر می‌گیریم (شکل ۵). فرمول‌های $A(\rho)$ و $C(\rho)$ در فرمول (۱۳) بخش آخر آورده شده‌اند. به آن‌ها برای اثبات کلی قضیه نیاز نداریم؛ دراصل، این فرمول‌ها نتایجی از اثبات قضیه ما هستند.

استدلال بخش قبل برای S^2 و H^2 نیز کارساز است، اما در استفاده از آن باید دقت کرد. مشابه رابطه (۳) برای مساحت dA در شکل ۲ به صورت

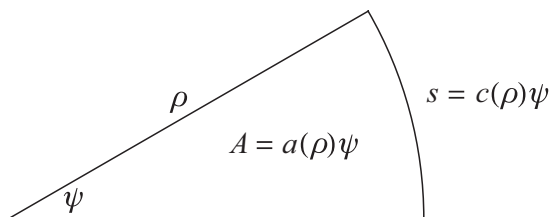
$$dA = a(\ell)d\theta \quad (4)$$

است، اما فرمول زاویه چرخش $d\theta$ پیچیده‌تر است.

^۱tangent sweep ^۲tangent cluster

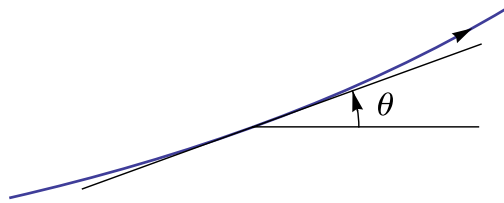


شکل ۴. پهنه و خوشه‌های مماسی در \mathbb{R}^2 و S^2



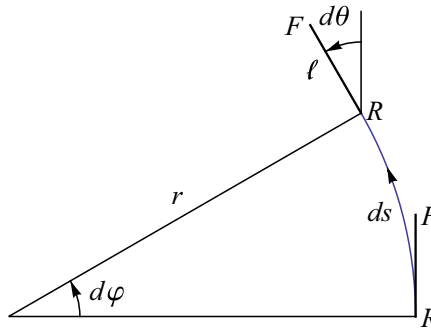
شکل ۵. تعریف $a(\rho)$ و $c(\rho)$

زاویه چرخش ارتباط نزدیکی با خمیدگی ژئودزیک دارد. یک روش متداول برای تعریف آن در \mathbb{R}^2 این است که آن را برابر زاویه θ ی خط مماس با یک جهت ثابت تعریف کنیم (شکل ۶) و خمیدگی ژئودزیک را بگیریم $\kappa = d\theta/ds$ ، که در آن s طول قوس خم است. متأسفانه، این تعریف برای S^2 یا H^2 کارساز



شکل ۶. خمیدگی ژئودزیک در \mathbb{R}^2 : $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$

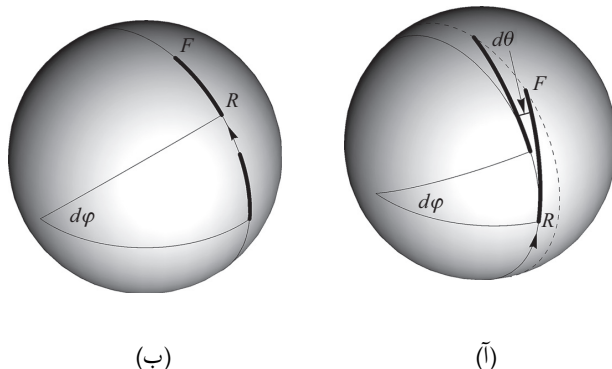
نیست. در S^2 مفهوم یک جهت ثابت وجود ندارد. همچنین در H^2 جهت ثابت وجود دارد (نقطه در بی‌نهایت آن را مشخص می‌کند)، اما در این صورت $d\theta/ds$ به جهت به کار رفته وابسته می‌شود. از این رو، تعریف دقیق آن‌ها را به بخش هندسه دایره‌ها مוקول می‌کنیم. برای اثبات قضیه ۱ دانستن بعضی از خواص شهودی آن‌ها کافی است.



شکل ۷. دو چرخه سواری روی دایره: $d\theta = d\varphi$ فقط در \mathbb{R}^2 برقرار است.

زاویه چرخش و خمیدگی ژئودزیک یک منحنی، وابسته به جهت منحنی است. قوس مستدیر در M را به صورت پادساعت‌گرد، نسبت به مرکزش، جهت‌دار می‌کنیم، یعنی $d\varphi > 0$ (شکل‌های ۷ و ۸). توجه کنید که یک دایره در S^2 دارای دو مرکز است و با مشخص کردن یکی از آن‌ها شعاع و جهت آن مشخص می‌شود.

وقتی روی یک دایره دو چرخه سواری می‌کنیم (شکل ۷) انتظار داریم که زاویه چرخش کل برابر با $\Delta\theta = \int d\theta = 2\pi$ باشد، اما لزومی ندارد این تساوی روی هر سطح خمیده برقرار باشد. تساوی‌ای که انتظار داریم بین زاویه چرخش $d\theta$ و زاویه مرکزی $d\varphi$ در شکل ۷ برقرار باشد، از ویژگی هندسه اقلیدسی است. برای روشن شدن این مطلب شکل ۸ را در نظر بگیرید. تصویر اول نشان می‌دهد که احتمالاً روی



شکل ۸. دو چرخه‌سواری روی دایره‌ها در S^2 : (ب) $d\theta \equiv 0$, (آ) $d\theta < d\varphi$

S^2 داریم $d\theta < d\varphi$. تصویر دوم یک دوچرخه را روی دایرهٔ عظیمه نشان می‌دهد (و بنابراین مستقیم حرکت می‌کند، نه چرخش به چپ دارد و نه به راست) و در این حالت $d\theta \equiv 0$. رابطهٔ درست بین $d\theta$ و $d\varphi$ در معادلهٔ (۵) و به‌طور کامل در معادلهٔ (۹) آورده شده است و نتایجی از اثبات کلی قضیهٔ ۱ هستند. هر دو قوس مستدیر روی M با طول یکسان s و شعاع یکسان r هم‌نهشت هستند چون با ترکیب دوران‌ها و انتقال‌ها می‌توان یکی را به دیگری نگاهت. در نتیجه، دارای ثابت خمیدگی یکسان $\kappa(r)$ و زاویهٔ چرخش یکسان $\Delta\theta = \kappa(r)s$ هستند. برای دایره با شعاع r داریم

$$d\theta = \kappa(r)ds = c(r)\kappa(r)d\varphi \quad \text{و} \quad \Delta\theta(r) = C(r)\kappa(r) = 2\pi c(r)\kappa(r), \quad (5)$$

که در آن $d\theta$ ، ds ، و $d\varphi$ در شکل ۷ نشان داده شده‌اند و $\Delta\theta(r)$ زاویهٔ چرخش کل، حول دایره، است. این فرمول‌ها تا حدی خوشهٔ مماسیِ کروی در شکل ۴ (د) را روشن می‌کنند. روی S^2 انتظار داریم $d\theta < d\varphi$ ، که در این حالت $\Delta\theta(r)/2\pi = c(r)\kappa(r)$ کسری از قرص را نشان می‌دهد که توسط خوشهٔ مماسی گرفته شده است.

اثبات حالت کلی و یک نتیجه

اکنون می‌توانیم قضیهٔ ۱ را در هر سه هندسه، به‌طور هم‌زمان، اثبات کنیم. وقتی مثلث شکل ۱ حول X دوران می‌کند اضلاع \overline{XY} و \overline{XZ} ، به‌ترتیب، سطوح $A(z)$ و $A(y)$ را می‌رویند. از معادله‌های (۴) و (۵) مساحت طوق رویده‌شده توسط \overline{YZ} برابر است با

$$\Delta A = a(x)\Delta\theta(y) = A(x)\frac{\Delta\theta(y)}{2\pi} = A(x)c(y)\kappa(y).$$

اضلاع \overline{XZ} و \overline{YZ} با هم سطحی برابر مساحت رویده شده توسط ضلع \overline{XY} می‌روبد، پس

$$A(z) = A(y) + A(x) \frac{\Delta\theta(y)}{2\pi} = A(y) + A(x)c(y)\kappa(y),$$

که یک نوع نامتقارن قضیه فیثاغورس است. اگر به جای X حول Y دوران بدهیم، دست می‌آوریم

$$A(z) = A(x) + A(y)c(x)\kappa(x).$$

با تقسیم کردن این‌ها بر 2π نتیجه می‌شود

$$a(z) = a(y) + a(x)c(y)\kappa(y) \quad \text{و} \quad a(z) = a(x) + a(y)c(x)\kappa(x). \quad (۶)$$

اینک با مساوی قرار دادن معادله‌های (۶) با یکدیگر و جدا کردن متغیرها، خواهیم داشت

$$\frac{1 - c(x)\kappa(x)}{a(x)} = \frac{1 - c(y)\kappa(y)}{a(y)}.$$

چون x و y مستقل هستند، بنابراین کمیت بالا ثابت است، یعنی ثابتی مانند K وجود دارد به طوری که

$$1 - c(r)\kappa(r) = Ka(r), \quad (۷)$$

برای هر $r > 0$ که شعاع دایره است.

اکنون، معادله (۷) را برای $r = x$ به کار می‌بریم و عبارت $c(x)\kappa(x)$ را در معادله دوم از (۶) حذف و نتیجه می‌گیریم

$$a(z) = a(x) + a(y) - Ka(x)a(y),$$

حالا 2π را در طرفین تساوی اخیر ضرب می‌کنیم و رابطه (۲) حاصل و برهان به انجام می‌رسد. همچنین با استفاده از معادله (۷)، در جهتی دیگر، یعنی حذف $a(x)$ ، $a(z)$ و $a(y)$ در معادله دوم (۶)، فرمول زیر نتیجه خواهد شد.

نتیجه ۱. یک مثلث قائم‌الزاویه در M با اضلاع x و y و وتر z در رابطه زیر صدق می‌کند

$$c(z)\kappa(z) = c(x)\kappa(x)c(y)\kappa(y). \quad (۸)$$

اگر فرمول‌های $c(r)$ و $\kappa(r)$ در (۱۳) را مفروض بگیریم، رابطه اخیر با انتخاب $K = 1$ فرمول اول در (۱) و با انتخاب $K = -1$ به فرمول دوم در (۱) تبدیل می‌شود. وقتی $K = 0$ (در \mathbb{R}^2)، رابطه (۸) برقرار است اما در این حالت به صورت رابطه بی حاصل $1 = 1 \cdot 1$ در می‌آید، چون در این

حالت $c(r) = r$ و $\kappa(r) = 1/r$. بنابراین، رابطه (۸) صورت یکپارچه قضیه فیثاغورس صرفاً برای هندسه‌های ناقلیدسی است (رجوع کنید [۲، ص. ۱۱۴]).

از اثبات بالا دو نتیجه به دست می‌آید: اول اینکه با استفاده از (۷) عبارتهای (۵) به صورت زیر درمی‌آیند

$$d\theta = (1 - Ka(r))d\varphi \quad \text{و} \quad \Delta\theta(r) = 2\pi(1 - Ka(r)). \quad (۹)$$

بنابراین، نسبت $d\theta$ و $d\varphi$ در شکل‌های ۷ و ۸ وابسته به علامت K است و مساحت دایره‌ای است که توسط چرخ عقب ایجاد می‌شود. این مطلب توضیح بیشتری درباره خوشه‌های مماسی شکل ۴ نسبت به رابطه (۵) به دست می‌دهد. در واقع، وقتی $K = 0$ ، خوشه کاملاً قرص را پر می‌کند (شکل ۴(ب))، وقتی $K > 0$ خوشه تمام قرص را پر نمی‌کند (شکل ۴(د)). همچنین وقتی $K < 0$ ، خوشه با خودش تداخل دارد و بیش از قرص می‌شود. دوم اینکه، از اثبات قضیه داریم

$$A(z) = A(y) + A(x) \frac{\Delta\theta(y)}{2\pi} = A(y) + A(x) - \frac{K}{2\pi} A(x)A(y).$$

تساوی اول رابطه بالا نشان می‌دهد که چگونه مساحت دایره با شعاع z در شکل ۱ از مساحت دایره با شعاع y و مساحت طوق حاصل می‌آید. عامل $\Delta\theta(y)/2\pi$ نشان می‌دهد که اگر $K > 0$ ، $K = 0$ یا $K < 0$ ، آنگاه مساحت طوق، به ترتیب، کمتر، برابر یا بیشتر از $A(x)$ است. تساوی دوم نشان می‌دهد که $KA(x)A(y)/2\pi$ برابر اختلاف میان مساحت دایره با شعاع x و طوق، و وقتی $K > 0$ برابر با مساحت شکاف میان خوشه مماسی و قرص کامل در شکل ۴(د) است. وقتی $K < 0$ ، مقدار $|K|A(x)A(y)/2\pi$ برابر مساحت ناحیه‌ای است که خوشه مماسی با خودش تداخل می‌کند.

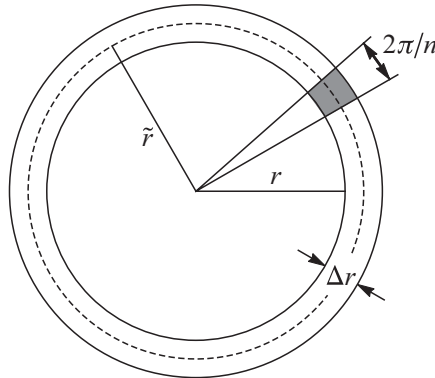
هندسه دایره‌ها

در این بخش دو رابطه اساسی درباره هندسه دایره‌ها در M را ثابت می‌کنیم. از این رابطه‌ها در بخش آخر برای به دست آوردن نتیجه‌های دیگر از قضیه ۱، از جمله فرمول‌هایی برای $A(r)$ ، $C(r)$ ، و $\kappa(r)$ ، استفاده می‌کنیم. در هر دوی این رابطه‌ها از اینکه ناحیه‌های کوچک در S^2 و H^2 تقریباً اقلیدسی هستند بهره می‌بریم. از لحاظ شهودی، این امر به این معنی است که یک موجود محصور به یک ناحیه کوچک نمی‌تواند به طور تجربی نوع سطحی را که روی آن قرار دارد تشخیص دهد.

گزاره ۱. اگر شعاع دایره‌ای در M باشد، آنگاه $A'(r) = C(r)$.

گزاره ۲. خمیدگی ژئودزیک و زاویه چرخش کل دایره‌ای به شعاع r در M به صورت زیر است

$$\kappa(r) = \frac{C'(r)}{C(r)} = \frac{c'(r)}{c(r)} \quad \text{و} \quad \Delta\theta(r) = C'(r)$$

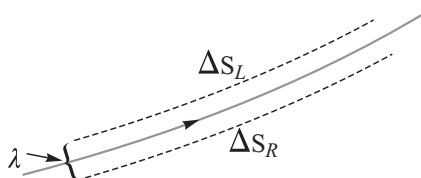


شکل ۹. برهان گزاره ۱: $\Delta A = C(\tilde{r})\Delta r$

برای اثبات گزاره ۱، ملاحظه کنید که ناحیه سایه‌دار در شکل ۹ (که در آن n عدد صحیح مثبت به اندازه کافی بزرگ است)، تقریباً مستطیلی شکل است و مساحتش برابر $\frac{C(\tilde{r})}{n}\Delta r$ است و در آن \tilde{r} بین r و $r + \Delta r$ است. بنابراین، مساحت طوق در آن شکل برابر $\Delta A = C(\tilde{r})\Delta r$ است و نتیجه حاصل می‌شود.

برای اثبات گزاره ۲، حداقل برای دایره‌ها، به تعریف خمیدگی ژئودزیک و زاویه چرخش نیاز داریم. (تعریف خمیدگی ژئودزیک که در اینجا ارائه می‌شود با تعریف آن برای خم‌ها در یک رویه $S \subset \mathbb{R}^n$ که در هندسه دیفرانسیل مقدماتی، مثلاً [۱۴، ۱۵]، وجود دارد، فرق دارد. زاویه چرخش به هندسه ذاتی مرتبط است، یعنی وابسته به روشی است که S در \mathbb{R}^n نشانده می‌شود، و اطلاعات بیشتری نیاز دارد.)

برای توجیه تعریفی که برای هر سه هندسه کارساز باشد نحوه ارتباط چرخ‌های یک صندلی چرخ‌دار با شکل مسیر صندلی را در نظر بیاورید. شخصی که روی صندلی چرخ‌دار نشسته است مقدار خمیدگی مسیر را با کنترل سرعت نسبی چرخ‌ها مشخص می‌کند. اگر چرخ‌ها با یک میزان بگردند، مسیر مستقیم و در غیر این صورت مسیر پیچ‌دار می‌شود. بنابراین، مقدار و میزان چرخش را می‌شود از روی گردیدن چرخ‌ها اندازه‌گیری کرد. این کار را می‌توان در یک ناحیه کوچک و بدون وجود جهت ثابت انجام داد. اما لازم است این مطلب را برحسب اعداد و ارقام بیان کنیم.



شکل ۱۰. خمیدگی ژئودزیک در M : $\kappa \approx \frac{\Delta s_R - \Delta s_L}{\lambda \Delta s}$

فرض کنید که صندلی چرخدار به طور مستقیم یا دایره‌وار حرکت کند. در این حالت، چرخ‌ها با نسبتی ثابت نسبت به هم می‌چرخند و مسیرهای «موازی» حاصل، شبیه خطوط مجاور هم در یک زمین دو و میدانی است. فرض بگیرید Δs_R و Δs_L فاصله‌هایی باشند که چرخ‌های راست و چپ در طی بخشی از خم پیموده‌اند (خم‌های نقطه‌چین در شکل ۱۰)، و همچنین λ طول محور میان آن‌ها باشد. به سادگی می‌توان در \mathbb{R}^2 نشان داد که فاصله طی شده توسط مرکز صندلی برابر $\Delta s = (\Delta s_R + \Delta s_L)/2$ ، و زاویه چرخش آن (مقدار تغییر جهت) برابر $\Delta \theta = (\Delta s_R - \Delta s_L)/\lambda$ است. (با اینکه مسیر، خط یا دایره نیست این فرمول‌ها معتبرند.) پس خمیدگی مسیر برابر مقدار زیر می‌شود

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\Delta s_R - \Delta s_L}{\lambda \Delta s}.$$

همچنین به آسانی دیده می‌شود که اگر $\kappa \neq 0$ ، مسیر دایره‌ای به شعاع $1/|\kappa|$ و وقتی $\kappa = 0$ ، خط است. اگر خواستید این مطالب را بررسی کنید اول اطمینان پیدا کنید که مثلث‌ها و قطاع‌های مستدیر شما، یا تعیین $d\varphi$ و $d\theta$ مشابه شکل ۷ باشد.



شکل ۱۱. نوارهای کاغذی با یک خمیدگی و طول

برای اینکه ببینید موضوع در S^2 و H^2 به چه شکل است، یک نوار کاغذی باریک را بریده و به شکل یک قوس مستدیر درآورید. لبه‌های نوار، مسیر چرخ‌ها را نشان می‌دهد. نوار بریده‌شده و از یک سطح صاف را می‌توان به آسانی به یک کره یا یک رویه زینی چسباند (شکل ۱۱). افرادی که این مسیرها را روی

رویه‌های مختلف ببینند قبول خواهند داشت که مسیرهایشان دارای زاویه چرخش و خمیدگی یکسان است زیرا چرخ‌هایشان با نسبت ثابتی می‌چرخد. این امر بدون نیاز به دانستن شعاع، مرکز خمیدگی، یا حتی اینکه مسیر بخشی از دایره است، قابل اثبات است.

رابطه‌های بالا برای Δs ، $\Delta\theta$ ، و κ وابسته به λ بوده و در S^2 و H^2 تقریبی هستند. برای دقیق کردن آن‌ها، با فرض $\lambda \rightarrow 0$ اندازه‌ی صندلی چرخ‌دار را بی‌نهایت کوچک در نظر می‌گیریم. به‌وضوح داریم $\Delta s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Delta s_R + \Delta s_L)/2$. مهم‌تر اینکه زاویه چرخش در طول یک قوس از خم و همچنین خمیدگی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta\theta = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta s_R - \Delta s_L}{\lambda} \quad \text{و} \quad \kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta s_R - \Delta s_L}{\lambda \Delta s} \quad (10)$$

با در اختیار داشتن این تعریف‌ها اثبات گزاره ۲ آسان است. با حرکت روی مسیر مستدیر داریم

$$\Delta s_L = C \left(r - \frac{\lambda}{2} \right), \quad \Delta s_R = C \left(r + \frac{\lambda}{2} \right), \quad \Delta s = C(r).$$

از فرمول‌های (۱۰) نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\theta(r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C(r + \lambda/2) - C(r - \lambda/2)}{\lambda} = C'(r),$$

و در نتیجه $\kappa(r) = \Delta\theta/\Delta s = C'(r)/C(r)$.

با اندکی اصلاحات، تعریف‌های (۱۰) برای منحنی‌های دیگر (در اصل، برای هر رویه هموار) در S^2 و H^2 معتبرند. این برداشت ساده و ذاتی از خمیدگی ژئودزیک در بین هندسه‌دان‌ها متداول است (برای شرحی زیبا، البته برای بُعدهای بالاتر، بخش‌های اول [۷] را مطالعه کنید)، اما به نظر می‌رسد در متون دوره کارشناسی به‌خوبی ارائه نمی‌شود.

نتیجه‌های دیگر قضیه

در این بخش نشان می‌دهیم که بعضی نتایجی که از لحاظ هندسه دیفرانسیل مهم هستند (در حالت خاص، برای دایره‌ها) و فرمول‌های $C(r)$ ، $A(r)$ ، و $\kappa(r)$ از اثبات قضیه فیثاغورس مستقیماً به دست می‌آیند. خوانندگان علاقه‌مند، نتیجه‌های کلی‌تری در مراجع خواهد یافت) همچنین نشان می‌دهیم که چگونه رابطه (۲) به قانون کسینوس‌ها تعمیم می‌یابد.

فرمول دوم از (۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Delta\theta(r) + KA(r) = 2\pi,$$

که همان قضیه گاوس-بونه برای یک قرص است. (قضیه کلی برای یک ناحیه D همسان ریخت با یک قرص بسته در یک رویه به صورت $\iint_D K dA + \Delta\theta = 2\pi$ است. در اینجا زاویه چرخش $\Delta\theta$ شامل جمله $\int_{\partial D} \kappa ds$ و زاویه‌های بیرونی‌ای است که ممکن است در هر رأس ∂D وجود داشته باشند؛ κ خمیدگی ژئودزیک ∂D را نشان می‌دهد. برای توضیحی جالب از این مطلب [۱۴] را ببینید.) دو چرخه سواری که خاطر جمع است $\Delta\theta$ همیشه برابر 2π است می‌تواند نتیجه بگیرد که $K = 0$. از طرف دیگر، دو چرخه سواری که می‌داند دایره‌ای موجود است که برای آن $\Delta\theta = 0$ و این دایره محوطه‌اش را به دو قسمت متناهی با مساحت‌های مساوی (شکل ۸(ب)) تقسیم می‌کند، می‌تواند نتیجه بگیرد که $K = 4\pi/A$ ، که در آن A مساحت کل محوطه است.

برای $r > 0$ ، از ترکیب معادله (۷) و گزاره ۲ به دست می‌آوریم

$$c'(r) = 1 - Ka(r). \quad (11)$$

با ضرب رابطه بالا در $4\pi C(r)$ و استفاده از گزاره ۱ نتیجه می‌شود

$$2C(r)C'(r) = 4\pi A'(r) - 2KA(r)A'(r).$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$C(r)^2 = 4\pi A(r) - KA(r)^2,$$

که حالت تساوی در نابرابری برابر محیطی است. (به طور کلی، اگر R ناحیه‌ای در M با مساحت A و محیط C باشد، آنگاه $C^2 \geq 4\pi A - KA^2$ ، همچنین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر R قرص مستدیری باشد [۱۶].)

با مشتق‌گیری از (۱۱) و استفاده از گزاره ۱ نتیجه می‌شود

$$c''(r) = -Kc(r). \quad (12)$$

این معادله، حالت خاصی از معادله ژاکوبی^۱ است، که قانون حاکم بر میزان پیشرفت ژئودزیک‌های مجاور هم است. توجه کنید در H^2 دو ژئودزیک که از یک نقطه آغاز می‌شوند سریع‌تر از \mathbb{R}^2 پیشرفت می‌کنند. همچنین در S^2 آن‌ها کندتر پیشرفت می‌کنند، سپس نزدیک‌تر می‌شوند و دوباره همدیگر را قطع می‌کنند. ([۱۵] را برای اطلاعات بیشتر درباره معادله ژاکوبی کلی روی یک رویه مطالعه کنید.) با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل (۱۲) با شرایط اولیه $c(0) = 0$ و $c'(0) = 1$ (مقدار حدی در (۱۱) وقتی $r \rightarrow 0^+$)

^۱Jacobi

فرمول‌های زیر برای $C(r)$ برحسب علامت K نتیجه می‌شود. فرمول‌های $A(r)$ و $\kappa(r)$ از گزاره‌های ۱ و ۲ به دست می‌آیند.

$$\begin{array}{ccc}
 S^\vee(K > \circ) & \mathbb{R}^\vee(K = \circ) & H^\vee(K < \circ) \\
 C(r) & 2\pi \frac{\sin(\sqrt{K}r)}{\sqrt{K}} & 2\pi r \\
 A(r) & 2\pi \frac{1 - \cos(\sqrt{K}r)}{K} & 2\pi \frac{\sinh(\sqrt{|K|r})}{\sqrt{|K|}} \\
 K(r) & \sqrt{K} \cot(\sqrt{K}r) & \frac{1}{r} \sqrt{|K|} \coth(\sqrt{|K|r})
 \end{array} \quad (13)$$

به فرمول‌های آشنا برای \mathbb{R}^\vee در حالتی که $K = \circ$ ، و برای کره با شعاع $R = 1/\sqrt{K}$ وقتی که $K > \circ$ توجه داشته باشید. خواننده آشنا به هندسه هذلولوی هم فرمول مربوط را برای صفحه هذلولوی با شبه‌شعاع $R = 1/\sqrt{|K|}$ در حالتی که $K < \circ$ در اینجا می‌بیند [۶، ۱۶].
در پایان، قانون کسینوس‌ها را با صورتی شبیه به (۲) بیان می‌کنیم.

قضیه ۲ (صورت یکپارچه قانون کسینوس‌ها). یک مثلث دلخواه در M (با فرض سره بودن در S^\vee) با طول اضلاع x, y ، و z در رابطه زیر صدق می‌کند

$$A(z) = A(x) + A(y) - \frac{K}{2\pi} A(x)A(y) - \frac{1}{2\pi} C(x)C(y) \cos \gamma,$$

که در آن γ زاویه روبه‌روی ضلع با طول z است.

اثبات مشابه این قضیه را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. اثبات کلی برای هر سه هندسه چالش‌برانگیز است؛ این اثبات در \mathbb{R}^\vee آسان‌تر است و دید جدیدی از قانون کسینوس‌ها به ما می‌دهد. برای اثباتی مبتنی بر فرمول‌های (۱۳) و همچنین کاربرد آن در اثبات فرمولی یکپارچه درباره نسبت ناهمساز در این هندسه‌ها [۵] را مطالعه کنید. فرمول‌های استاندارد قانون کسینوس‌ها در S^\vee و H^\vee را در [۱۷] ببینید.

مراجع

- [1] Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., Subtangents—An aid to visual calculus, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), 525–533.

- [2] Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry*, originally published in Italian by Open Court, 1912; English trans. H.S. Carslaw, Dover, New York, 1955.
- [3] Braver, S., *Lobachevski Illuminated*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 2011.
- [4] Foote, R. L., Levi, M., Tabachnikov, S., Tractrices, bicycle tire tracks, hatchet planimeters, and a 100-year-old conjecture, *Amer. Math. Monthly*, **120** (2013), 199–216.
- [5] Foote, R. L., Sun, X., An intrinsic formula for cross ratio in spherical and hyperbolic geometries, *College Math. J.*, **46** (2015), 182–188.
- [6] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, 4th ed., W. H. Freeman, New York, 2007.
- [7] Gromov, M., Sign and geometric meaning of curvature, *Milan J. Math.*, **61** (1991), 9–123.
- [8] Hartshorne, R., Non-Euclidean III. 36, *Amer. Math. Monthly*, **110** (2003), 495–502.
- [9] Henderson, D. W. Taimina, D., *Experiencing Geometry*, 3rd ed., Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.
- [10] Henrici, O., Report on Planimeters, Report of the 64th meeting, British Assoc. Adv. Sci., 1894, 496–523.
- [11] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination*, Springer, Berlin, 1932; English trans. P. Nemenyi, Chelsea, New York, 1952.
- [12] Levi, M., *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [13] Martin, G. M., *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [14] Morgan, F., *Riemannian Geometry, A Beginner's Guide*, Jones and Bartlett, London, 1993.
- [15] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, Orlando, FL., 1966.
- [16] Osserman, R., Bonnesen-style isoperimetric inequalities, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979), 1–29.
- [17] Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer-Verlag, New York, 1994.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۱۱/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۵/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۶/۷

مهران امینیان: دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: mehran.aminian@vru.ac.ir

مهران نامجو: دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: namjoo@vru.ac.ir