

«ریاضیات چیست؟» و چرا به آن نیازمندیم، کجا باید تجربه و آموخته شود، و چگونه تدریس شود*

گوئتر تسیگلر، آندرناس لوس

ترجمهٔ مجید حقوردی

چکیده. «ریاضیات چیست؟» عنوان کتابی معروف از کوآرنت و رابینز است که اولین بار در سال ۱۹۴۱ منتشر شد، و پاسخی برای این سؤال ندارد. اما این سؤال، سؤالی اساسی است زیرا تصویر عمومی از موضوع (علم و حرفه) ریاضیات نه تنها برای کسب حمایت و تأمین اعتبارات مالی آن مورد نیاز است، بلکه برای جذب و مدیریت استعدادها در آن نیز تعیین‌کننده می‌باشد، و از این رو در نهایت مشخص‌کنندهٔ دستاوردهای ریاضیات در جایگاه یک علم و به عنوان جزئی از فرهنگ بشری و همچنین یکی از مؤلفه‌های زیربنایی اقتصاد و تکنولوژی است. بنابراین در این سخنرانی به موضوعات زیر می‌پردازیم:

- بحث در مورد تصویر ریاضیات («تصویر» را به معنای واقعی آن هم می‌توان در نظر گرفت!)
- بیان مختصر یک جواب چندوجهی به سؤال «ریاضیات چیست؟»
- تأکید بر اهمیت یادگیری «ریاضیات چیست» با توجه به بحث «گسستگی دوگانه» کلاین در آموزش معلمان ریاضی،
- ارائهٔ پروژهٔ تصویر جامع» به منزلهٔ پاسخی به این چالش،
- تأکید بر اهمیت داستان‌گویی در کنار تدریس ریاضی، و در پایان،
- ارائهٔ این پیشنهاد که برنامهٔ درسی ریاضیات در مدارس و دانشگاه‌ها باید فضا و زمان لازم برای دست‌کم سه موضوع متفاوت تحت نام «ریاضیات» داشته باشند.

عبارات و کلمات کلیدی: ریاضیات چیست؟، آموزش ریاضیات در مدارس، معلمان ریاضی، تصویرهایی از ریاضیات
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۲۰
*Ziegler, G. M, Loos, A., "What is Mathematics?" and why we should ask, where one should experience and learn that, and how to teach it, in *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs*, G. Kaiser, ed., Springer, Berlin, 2017, 63–77.

ریاضیات چیست؟

تعریف ریاضیات

طبق (نسخه انگلیسی) ویکی‌پدیا، به تاریخ مارس ۲۰۱۴، جواب «ریاضیات چیست؟» این است که

ریاضیات مطالعه انتزاعی موضوعاتی مانند کمیت (اعداد)، ساختار، فضا، و تغییرات است. طیف وسیعی از نظریه‌ها از جانب ریاضی‌دانان و فیلسوفان درباره قلمرو و تعریف دقیق ریاضیات وجود دارد.

ریاضی‌دانان الگوها را جستجو و از آن‌ها برای تدوین حدس‌های جدید استفاده می‌کنند [۹، ۱۰]. ریاضی‌دانان درستی و نادرستی حدس‌ها را به وسیله برهان ریاضی مشخص می‌کنند. وقتی ساختارهای ریاضی مدل‌های مناسبی از پدیده‌های واقعی باشند، با استدلال‌های ریاضی می‌توان درباره پدیده‌های طبیعت بینش یا پیشگویی به دست آورد. با استفاده از تجرید و منطق، ریاضیات از طریق شمارش، محاسبه، اندازه‌گیری و مطالعه نظام‌مند اشکال و حرکات اشیاء فیزیکی توسعه یافته است. قدمت ریاضیات عملی به‌عنوان یک فعالیت انسانی، به عصر نوشتار و کتابت بشری بر می‌گردد. پژوهش برای حل مسائل ریاضیات ممکن است مستلزم سال‌ها و حتی قرن‌ها فعالیت پیوسته باشد.

هیچ‌یک از این اظهارات کلاً نادرست نیست، اما رضایت‌بخش هم نیست. در اینجا فقط این نکته را بگوییم که، اینکه به‌عنوان بخشی از تعریف ریاضیات، هیچ توافقی در مورد تعریف ریاضیات وجود ندارد ما را دچار دردسرهای منطقی‌ای می‌کند که شاید باعث لبخند گودل شوند. جوابی که در نسخه کنونی ویکی‌پدیا (به زبان آلمانی) برای این سؤال ارائه شده به این صورت است:

ریاضیات علمی است که از بررسی اشکال هندسی و محاسبه با اعداد به وجود آمده است. برای ریاضیات، هیچ تعریف پذیرفته‌شده‌ای وجود ندارد؛ امروزه معمولاً به‌عنوان علمی توصیف می‌شود که ساختارهای انتزاعی را که خود با تعاریف منطقی ایجاد کرده است بررسی می‌کند و از منطق برای ویژگی‌ها و الگوهای آن‌ها استفاده می‌کند.

این یکی خیلی بدتر است، زیرا ریاضیات را موضوعی ترسیم می‌کند که هیچ ارتباطی با، یا بهره‌ای از، دنیای واقعی ندارد.

مرزهای ریاضیات. آیا ریاضیات «خوداتکا» است؟ آیا می‌توان ریاضیات را بدون اشاره به رشته‌های «همسایه‌اش» مانند فیزیک (که در تعریف (نسخه انگلیسی) ویکی‌پدیا آمده است) تعریف کرد؟ یقیناً یک راه ممکن برای متمایز کردن ریاضیات این است که سرحدات یا مرزهای جداکننده آن را از همسایگان‌ش ترسیم کنیم. حتی روایت‌های بامزه این‌گونه «جملات تمایزبخش» مانند

- «ریاضیات آن بخشی از فیزیک است که در آن آزمایشات کم‌هزینه است.»
- «ریاضیات آن بخشی از فلسفه است که در آن (برخی) احکام - بدون بحث یا مجادله کردن - درست به شمار می‌آیند.»
- «ریاضیات علوم کامپیوتر بدون الکترونیسته است.» (پس «علوم کامپیوتر ریاضی با الکترونیسته است.»)

تا اندازه زیادی درست‌اند و احتمالاً «مشخصه‌های» بسیاری از ریاضیات را برای ما بازگو می‌کنند. اما هیچ‌یک از این موارد نه کاملاً درست است و نه به‌طورکلی نادرست، بلکه فرصتی هستند برای بحث‌وگفتگو.

در ریاضیات چه کاری انجام می‌دهیم؟ می‌توانیم ریاضیات را از طریق «کارکردهای خودمان در ریاضیات» نیز تعریف کنیم. این تعریف خیلی متنوع‌تر و جالب‌تر از تعریف ویکی‌پدیا است! آیا می‌شود یا باید ریاضیات را نه تنها به منزله یک حوزه پژوهشی و یک ماده آموزشی در مدارس، بلکه آن را به‌صورتی تعریف کنیم که تفرجگاهی باشد برای دانش‌آموزان، علاقه‌مندان، و متخصصان، یا موضوعی چالش‌آفرین (نه فقط برای دانش‌آموزان، بلکه برای متخصصان و علاقه‌مندان)، یا عرصه رقابت، یا خاستگاه مسائل بزرگ و کوچک از جمله دشوارترین مسائل مطرح در علوم در سطوح مختلف از مدارس ابتدایی گرفته تا سطوح پیشرفته [۴، ۲۱]؟

چیزی که در کلاس‌های درس ریاضی تدریس می‌شود. دیوان سالاران آموزشی ممکن است (و احتمالاً باید) بر این عقیده باشند که سؤال «ریاضیات چیست؟» در برنامه‌های درسی دبیرستان جواب داده می‌شود. اما آن پاسخ‌ها چیستند؟

این موضوع بر می‌گردد به مباحث قرن نوزدهم درخصوص ریاضیاتی که باید در مدرسه و دانشگاه تدریس می‌شد. در آلمان به این موضوع اهمیت ویژه‌ای می‌دادند. در یک طرف، هدف تعلیمات کلاسیک را در نظرات ویلهلم فون هومبولت^۱ می‌دیدند (او دست‌اندرکار بنا و بنیاد فکری دانشگاه

^۱Wilhelm von Humboldt

برلین، نام فعلی آن دانشگاه هومبولت، در سال ۱۸۰۶ بود و تا حدی مفهوم جدید دانشگاه را شکل داد، از این دیدگاه ریاضیات اهمیت زیادی داشت، اما این ریاضیات ریاضیات کلاسیک «یونانی» بود که از هندسه اصل موضوعی اقلیدسی و نظریه مقاطع مخروطی آغاز می‌شد تا حل معادلات چندجمله‌ای در جبر، و آن هم نه به‌عنوان میراث فرهنگی بلکه به‌عنوان عرصه‌ای برای تربیت تفکر منطقی و حل مسئله. در طرف دیگر این نزاع حامیان «آموزش واقعی»^۱ قرار داشتند: دبیرستان‌های نوین و دانشگاه‌های صنعتی که در آن زمان تازه شروع به کار کرده بودند در صدد آموزش ریاضیات مورد نیاز در تجارت و صنعت بودند؛ مثل حساب و حسابداری و همچنین ریاضیاتی که به کار مهندسی مکانیک و برق می‌آمد - رویکردی که از دید مدارس قدیم آلمان، آموزش درجه دوم به شمار می‌آمد.

این جدال در آن قرن به دلیل تفکیک غیرطبیعی ریاضیات به کلاسیک، همان ریاضیات محض، و نافع، همان ریاضیات کاربردی، بود. این همان تقسیم‌بندی بود که بایست مدت‌ها پیش (شاید از زمان ارشمیدس) کنار گذاشته می‌شد، زیرا رده‌بندی‌ای غیرطبیعی و همچنین مانعی بزرگ بر سر راه پیشرفت نظری و عملی است. با این حال ممکن است در بررسی محتوای برنامه درسی تقسیم‌بندی مطالب به کلاسیک و معاصر مفید باشد - این سؤال که مطالب با چه هدفی باید تدریس شود نیز شاید مفید باشد؛ بخش «ابعاد سه‌گانه ریاضیات در مدرسه» را ببینید.

پاسخ کورانت و رابینز. پُر واضح است که عنوان مقاله حاضر از کتاب مشهور و بسیار مؤثر ریچارد کورانت و هربرت رابینز اقتباس شده است. ولی عنوان آن کتاب یک سؤال است؛ پس جواب کورانت و رابینز به آن چیست؟ عملاً در این کتاب تعریفی صریح از آنچه «ریاضیات چیست؟» ارائه نمی‌شود، ولی قرار است خواننده آن از طریق عرضه مجموعه‌ای متنوع از بررسی‌های ریاضی فہمی از موضوع حاصل کند. ریاضیات بسیار وسیع‌تر و متنوع‌تر از تصویری است که کورانت-رابینز توصیف می‌کنند. هدف ما از این بخش نیز نشان دادن نیاز ما به یک تصویر چندوجهی از ریاضیات بود: برای این سؤال یک جواب کافی نیست، ما به جواب‌های زیادی نیاز داریم.

چرا باید دغدغه این سؤال را داشته باشیم؟

مادامی که قبول داشته باشیم که ریاضیات مهم است، شاید برای چرایی تدریس ریاضیات، نیازی به پاسخ‌گویی به سؤال «ریاضیات چیست؟» نباشد.

^۱ Realbildung

با این حال، پاسخ تک‌بُعدی به این سؤال به مفاهیم تک‌بُعدی در خصوص نوع ریاضیاتی که باید تدریس شود می‌انجامد. در عین حال ارائه تصویر یک‌بُعدی از «ریاضیات چیست» نمی‌تواند بچه‌ها را به انجام ریاضیات در مدرسه تشویق کند، نمی‌تواند انگیزه کافی برای مطالعه ریاضیات و یا حتی انتخاب شغلی مرتبط با ریاضیات را در دانش‌آموزان ایجاد نماید، و حتی نمی‌تواند مشوق ورود دانش‌آموزان مناسب به تحصیل رشته ریاضیات یا معلمی آن گردد. اگر پاسخ سؤال «ریاضیات چیست؟» یا جواب ضمنی‌ای که از لابلای تصویر عمومی یا رایج آن دیده می‌شود، جذاب نباشد، آن وقت توجیه اینکه چرا باید ریاضیات آموخت بسیار دشوار می‌شود؛ و این امر به پیشنهاد و انتخاب‌های نادرستی در خصوص چه نوع ریاضیاتی را باید آموخت می‌انجامد.

واقعاً آیا در نظر همه علمی که ساختارهای «انتزاعی» ساخته خودش را مطالعه می‌کند (تعریف نسخه آلمانی و یکی‌پدیا را به یاد آورید) جالب است؟ آیا به کاری می‌آید؟ اگر ریاضیات همین باشد، چرا کسی بخواهد (یا باید) آن را تحصیل کند، یا شغلش را مرتبط با آن انتخاب کند؟ آیا آموزش آن می‌تواند جالب و معنادار و رضایت‌بخش باشد؟

همچنین با توجه به تنوع انتظارات و استعدادهای دانش‌آموزان، معتقدیم که برای آن سؤال واقعاً یک جواب کافی نیست. انگیزه یادگیری ریاضیات در بعضی از دانش‌آموزان ممکن است این باشد که ریاضیات زیبا است، یا بسیار منطقی است، یا اینکه بعضی اوقات شگفت‌انگیز می‌شود، و یا اینکه جزئی از میراث فرهنگی ما است. انگیزه، و نه ترس، بعضی دیگر ممکن است دشواری ریاضیات باشد. انگیزه بعضی دیگر هم ممکن است این باشد که ریاضیات - در زندگی روزمره، تکنولوژی، تجارت، و غیره - مفید است و لازم. اما یقیناً این چنین نیست که ریاضیات «یکسانی» مورد نیاز زندگی روزمره، مطالعات دانشگاهی، یا تجارت و صنعت است. برای سایر دانش‌آموزان هم این دلیل که «ریاضی مفید است» یا «لازم است» کافی نخواهد بود. همه این انگیزه‌ها و دلایل درست و به‌جایند؛ اما این حرف هم کاملاً درست و پذیرفتنی است که این‌گونه دلایل و انگیزه‌های ممکن نمی‌تواند به‌تنهایی در همه این دانش‌آموزان اثر و ایجاد انگیزه کند.

چرا بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان در درس ریاضیات، خواه مدرسه خواه دانشگاه، ناموفق‌اند؟ قطعاً دلایل زیادی وجود دارد، اما معتقدیم که یکی از عوامل اصلی آن انگیزه است. ریاضیات دشوار است، انتزاعی است (یعنی بیشتر آن ارتباط مستقیمی به تجربیات زندگی روزمره ندارد)، و ارزشی برای آن قائل نمی‌شوند. اما منشأ بسیاری از انگیزه‌های ناقص این است که دانش‌آموزان و معلمانشان نمی‌دانند که «ریاضیات چیست».

بنابراین، عرضه یک تصویر چندوجهی از ریاضیات که آن را یک موضوع منسجم نشان بدهد که تمام ابعاد آن به خوبی به هم مرتبطاند، برای آموزش موفقیت‌آمیز ریاضیات به دانش‌آموزانی با انگیزه‌های (بالقوه) متنوع لازم است. این امر نیز دو جهت بسیار مهم پیدا می‌کند که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد: دانش‌آموزان واقعاً چه تصویری از ریاضیات دارند؟ و اینکه اگر از معلم بپرسند که «ریاضیات چیست؟» چه جوابی باید بدهد؟ و او از کجا، چگونه، و چه موقع می‌تواند جواب را پیدا کند؟

تصویرهای مختلف از ریاضیات

در خلاصه تحقیق گسترده‌ای در بین دانش‌آموزان بریتانیایی در سال ۲۰۰۸ آمده است [۱۶]:

تصور بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان کارشناسی درباره ریاضی‌دانان این است که آن‌ها آدم‌های سالخورده، سفیدپوست، و از طبقه متوسط‌اند که غرق در کار خود هستند، اصلاً اجتماعی نیستند، و کارزندگی‌ای به جز ریاضی ندارند.

ذهن دانش‌آموزان درباره خود ریاضیات پر است از تصاویر نادرست و بسته‌ای که اغلب به اعداد و محاسبات اولیه محدود می‌شود.

تصور دانش‌آموزان درباره ریاضی‌دانان بسیار تأثیرگذار است و بعداً به شکل یک مشکل حاد در می‌آید، زیرا این تصویرها مدل نقش (یا ضد نقش)‌های بالقوه را می‌سازند و در هرگونه تصمیمی درخصوص اینکه «من می‌خواهم ریاضی‌دان باشم» نقش سرنوشت‌سازی دارند. اگر تصور ما از یک ریاضی‌دان نوعی «یک پیرمرد سفیدپوستِ خرخون و از طبقه متوسط» باشد، خُب چرا یک دختر ۱۶ ساله مستعد باید به این فکر بیفتد که «وقتی بزرگ شدم، می‌خواهم مثل اون بشم»؟ این طوری علم و حرفه ریاضیات استعدادهای زیادی را از دست می‌دهد (یا نمی‌تواند جذب کند)؛ اما این مسئله موضوع این مقاله نیست.

موضوع دیگر اینکه، دو یافته اول و دوم گفته بالا به هم مربوطاند: ریاضی‌دانان بخشی از جواب «ریاضیات چیست» محسوب می‌شوند! و واقعاً، با توجه به یافته دوم، اگر تصاویری که از واژه اصلی «ریاضیات» به ذهن می‌رسد فراتر از فرمول ذاتاً بی‌معنای $a^2 + b^2 = c^2$ نباشند که با گچ روی تخته‌سیاه نوشته شده است، پس دوباره می‌پرسیم چرا ریاضیات باید موضوع، علم، یا حرفه جذابی باشد؟

به نظر ما باید به فکر ارائه تصویرهای چندوجهی و جذاب از ریاضیات باشیم و در این باره

کاری کنیم. ممکن است این تصویرها بسیار متفاوت و جدا از یکدیگر باشند، اما همان هم می‌تواند تصویرهایی باشد از «کل ریاضیات».

چهار تصویر از «ریاضیات چیست؟»

نمایش‌های تصویری خیره‌کننده‌ای از کل ریاضیات (و همین‌طور از سایر علوم!) و تغییرات آن‌ها در طول زمان را می‌توان روی جلد کتاب‌های آلمانی «Was ist was» به چشم دید. سابقه این کتاب‌ها به مجموعه کتاب‌های شگفت‌انگیز «چرا و چگونه» می‌رسد که انتشارات گروسِت و دانلپ^۱ در نیویورک، از سال ۱۹۶۱، انتشار آن‌ها را شروع کرده بود و قرار بود موضوعات جالبی را (اول از دایناسورها، آب‌وهوا، و الکتریسته) برای کودکان و نوجوانان عرضه کند. این مجموعه در سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ در ایالات متحده و بریتانیای کبیر منتشر می‌شد، ولی در آلمان بسیار بیشتر مورد استقبال قرار گرفت و هنوز هم هست؛ این مجموعه را در آلمان رانگنار تسلوف (در ابتدا به صورت ترجمه به آلمانی و بعداً به صورت تألیف به آلمانی) از سال ۱۹۶۱ منتشر می‌کرد. جلد هیجدهم



در نسخه ایالات متحده و بریتانیایی و جلد دوازدهم در نسخه آلمانی که نخستین بار در سال ۱۹۶۳ منتشر شده‌اند [۱۰]، به «ریاضیات» می‌پردازد، این جلد بعداً با همان عنوان ولی با نویسنده و محتوای جدید در سال ۲۰۰۱ تجدید چاپ شد [۱]. اگرچه مطالب و طرز ارائه ریاضیات در این مجموعه ارزش بررسی را دارد، توجه ما معطوف به تصاویر روی جلد آن‌ها است (شکل ۱ را ببینید) که در نسخه آلمانی به چهار صورت کاملاً متفاوت است و اولین صورت آن اقتباسی از روی جلد اولیه نسخه ایالات متحده است [۹].

شکل ۱. چهارتا از عکس‌های روی جلد از کتاب «Was ist was» جلد دوازدهم

هر چهارتا عکس روی جلد تصویری از «ریاضیات چیست» را به سبک گولاژ عرضه

^۱Grosset and Dunlop

می‌کنند. تصویر روی اولین جلد، ریاضیات را به صورت یک رشته تاریخی (با پیشگامی مصریان باستان) ترسیم می‌کند، اما بقیه همه در کنار نمادهای تاریخی (از قبیل اهرام، گاوس، و غیره) نشانه‌هایی از ریاضیات (مانند اعداد اول یا π ، تاس برای نشان دادن احتمال، و شکل‌های هندسی) را نیز در خود دارند. یکی از اشیای درخور توجه در بین آن‌ها نوار موبیوسی روی جلد سال ۱۹۸۳ است که به طرز جالبی با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده است، و بعداً در چاپ جدید کلاً سبز رنگ شده است.

این تصاویر روی جلد‌ها را می‌توان از نظر محتوا و سبک طراحی، و به‌ویژه از نظر جذابیت برای خریداران یا خوانندگان آن‌ها مورد بحث قرار داد. از جمله اینکه روی چه چیزی بیش از حد تأکید شده است؟ و چه چیزی از قلم افتاده است؟ به نظر می‌رسد موارد حائز اهمیت برای ما این است که

- به فکر تصویرها و نمودهای خودمان برای «ریاضیات چیست» باشیم،
 - به فکر راهی برای ارائه تصویری چندوجهی از «ریاضیات چیست» در حین تدریس باشیم.
- یقیناً عناوین روی جلد مجموعه «Was ist was» موضوعات جالب (؟) و مطالب مورد بحث در آن‌ها را نشان می‌دهد. اما این تصاویر چه نتیجه‌ای دارند؟ این نتیجه را باید با تصویری که برنامه‌های درسی مدرسه یا برنامه‌های درسی دانشگاه برای دانشجویان معلمی از ریاضیات می‌سازند مقایسه کنیم.

اجازه دهید، در زمینه عرضه تصویری از ریاضیات، به دو مورد ابتکاری مهم اشاره کنیم که هدف از آن‌ها جمع‌آوری و ارائه تصویری در خصوص تحقیقات جاری ریاضی و در دسترس قرار دادن آن‌ها در بسترهای اینترنتی، و در نتیجه ارائه تصویری جذاب و چندوجهی از کل رشته ریاضیات، است:

- وبگاه images.math.cnrs.fr که به زبان فرانسه است،
 - وبگاه imaginary.org که به زبان‌های آلمانی، انگلیسی، و اسپانیایی است.
- وبگاه دوم از یک نمایشگاه سیار بسیار موفق از تصاویر ریاضی، تحت نام «IMAGINARY»، با چشمان ریاضیات»، شکل گرفته است، که در اصل به مناسبت و به قصد سال ملی علم آلمان در سال ۲۰۰۸ برپا شده بود (در این زمینه وبگاه www.jahr-der-mathematik.de را ببینید). برگزاری سال ملی در انتقال تصویری زنده و جذاب از ریاضیات به عموم مردم آلمان بسیار موفق بود و ابتکارهایی مانند همین نمایشگاه Imaginary سهم زیادی در موفقیت آن داشتند.

تدریس «ریاضیات چیست؟» به معلمان

بیش از ۱۰۰ سال پیش، در سال ۱۹۰۸، فلیکس کلاین آموزش معلمان را مورد تحلیل قرار داد. او در مقدمه جلد اول کتاب «ریاضیات مقدماتی از دیدگاهی بالاتر» نوشت:

دانشجوی جوان، در آغاز تحصیلات دانشگاهی‌اش، با مسائلی مواجه می‌شود که یادآور هیچ‌یک از چیزهایی که قبلاً با آن‌ها سروکار داشته نیست، و البته همه این مطالب جدید را هم خیلی زود و به‌طور کامل از یاد خواهد بُرد. وقتی پس از فارغ‌التحصیلی معلم می‌شود، باید دقیقاً همین ریاضیات سنتی مقدماتی را تدریس کند و از آنجا که نمی‌تواند ارتباطی بین این ریاضیات با مطالب ریاضیات دانشگاهی خودش برقرار کند، خیلی زود به سنت تدریس سابق رو می‌کند و تحصیلات دانشگاهی‌اش خاطره‌ای می‌شود کم‌وبیش خوشایند بدون تأثیر روی تدریسش [۱۲].

این پدیده، که کلاین آن را گسستگی دوگانه می‌نامد، هنوز هم وجود دارد. عملاً، دانشجویان معلمی از طریق دانشگاه «نقب می‌زنند»: آن‌ها در دانشگاه به این قصد درس می‌خوانند که مدرکی بگیرند، اما با این حال بعداً ریاضیاتی را که در مدرسه آموخته‌اند تدریس می‌کنند و آن هم با شیوه‌هایی که از دوران تحصیل خود در مدرسه به یاد دارند. این مشکلی که کلاین توصیف می‌کند در شرایطی که با کمبود معلمان ریاضیات مواجه هستیم (که در حال حاضر در آلمان با آن مواجه‌ایم) وخیم‌تر نیز می‌شود. در چنین شرایطی از دانشجویان معلمی، مدت‌ها مانده به فارغ‌التحصیلی، خواسته می‌شود که در دبیرستان‌ها تدریس کنند، و به این ترتیب در بدو تدریس در مدرسه، از تحصیلات دانشگاهی قسمت بسیار کمتری را طی کرده‌اند. این کار همچنین ممکن است این باور را در آن‌ها تقویت کند که برای تدریس در مدرسه نیازی به ریاضیات دانشگاهی نیست.

مسلماً طریقه اجتناب از گسستگی دوگانه چالشی اساسی در طراحی برنامه‌های درسی دانشگاه برای تربیت معلمان ریاضی است. با این حال، یکی از جنبه‌های مهم این مسئله به سؤال «ریاضیات چیست؟» گره خورده است: تصویر یا مفهومی بسیار رایج از ریاضیات در دوره دبیرستان، که از برنامه‌های درسی آن نیز پیداست، این است که ریاضیات همین موضوعاتی است که در برنامه درسی دبیرستان است، یعنی هندسه (مقدماتی)، جبر (در قالب حساب، و شاید چندجمله‌ای‌ها)، و شاید احتمال مقدماتی و حسابان (انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری) یک متغیره؛ این‌ها همان ریاضیاتی است که دانش‌آموزان دبیرستانی شانس دیدن آن را دارند، بنابراین ممکن است تصور کنند که همه ریاضیات

همین است! آیا معلمانشان می‌توانند تصویری بزرگ‌تر برایشان ترسیم کنند؟ معلمان پس از دوران دبیرستان خود در دانشگاه تحصیل کرده‌اند و در آنجا احتمالاً دروس حسابان و آنالیز، جبر خطی، جبر کلاسیک، به‌علاوه کمی ریاضیات گسسته، احتمال و فرایندهای تصادفی، و یا آنالیز عددی و معادلات دیفرانسیل، و شاید برنامه‌نویسی یا نرم‌افزارهای ریاضی را گذرانده باشند. در مجموع، آن‌ها بخشی از ریاضیات دانشگاهی را دیده‌اند که در آن خبری از تحقیقات جاری ریاضیات نیست، و بیشترین مطالب آن، خیلی که خوش‌بین باشیم، مربوط به قرن نوزدهم است. البته، شرایط آرمانی این است که هر دانشجوی معلمی دست‌کم یک‌بار در دانشگاه طعم «انجام پژوهش انفرادی» را بچشد، اما در شرایط واقعی این‌کار به‌ندرت اتفاق می‌افتد. در اصل، دانشجویان معلمی باید مطالعه و کار و تلاش بسیار کنند و خودشان جذابیت ریاضیات را در ریاضیات ببینند؛ اما در عمل آن‌ها اغلب حتی این کار را جدی نمی‌گیرند و مطمئناً بیشتر آن‌ها هیچ‌وقت «بهشت ریاضی» را نمی‌بینند. پس حتی اگر دانشجویی به‌طور جدی غرق در همه ریاضیات برنامه درسی دانشگاه هم بشود، به هیچ تصویری گسترده‌تر از «ریاضیات چیست؟» نخواهد رسید. بنابراین، حتی اگر او، فارغ از پدیده گسستگی دوگانه، در تحصیلات دانشگاهی نقب هم نزند، او با تصویری خیلی گسترده‌تر از دوران دبیرستانش، به مدرسه باز نخواهد گشت.

طبق تجربیات ما بسیاری از فارغ‌التحصیل (از دانشجویان معلمی و همچنین دانشجویان معمول رشته ریاضی) نمی‌توانند یک مسئله حل‌نشده ریاضی را حتی نام ببرند. آن‌ها نمی‌دانند (کار ریاضی کردن) یعنی چه؛ مثلاً، نمی‌دانند بخشی از آن به معنای یافتن و پرداختن مفاهیم یا تعاریف «درست» و طرح یا بسط سؤالات و مسائل «درست» است.

و علاوه بر این‌ها، آموخته‌ها و تجربیات دوران دانشگاه نیز روزی قدیمی و منسوخ می‌شود: یک معلم ممکن است چند دهه در یک مدرسه درس بدهد، حال آنکه ریاضیات عوض شده است! البته چیزهایی که در ریاضیات ثابت می‌شوند، درستی آن‌ها تغییر نمی‌کند، و، یقیناً، معیارهای دقت خیلی بیش از آنچه در، مثلاً، قرن نوزدهم بوده است تغییر نمی‌کند. اما، شیوه‌های اثبات تغییر می‌کنند (مثلاً اثبات به کمک کامپیوتر، اثبات قابل بررسی توسط کامپیوتر، و غیره). همچنین، چه خوب است که معلم بتواند «مباحث جاری در تحقیقات» را اسم ببرد؛ که هر دهه بیست سال تغییر می‌کنند. علاوه بر این، مناسبات ریاضیات با «زندگی واقعی» در طول سی سال گذشته نیز بسیار تغییر کرده است.

پروژه چشم‌انداز

چند سال است که ما مشغول تعریف درسی به نام Panorama der Mathematik [«چشم‌انداز ریاضیات»] (و کتابی با همین نام [۱۵]) هستیم. مخاطب این درس عمدتاً دانشجویان معلمی ریاضی‌اند، و در آن تلاش می‌شود دیدگاهی جامع از ریاضیات عرضه شود. تلاش ما بر این است که نمایی کلی از موضوع، نحوه پرداختن به ریاضیات، و افراد مشغول و مؤثر در آن را بیاموزانیم؛ از جمله شرح مختصر از تحولات عمده ریاضیات در طی چند قرن اخیر تا دوران حاضر که در مجموع انتظار داریم به ارائه یک چارچوب جامع (ولی نه مفصل) از «ریاضیات چیست» منتهی شود. البته فهمیدیم که این کار آسانی نیست، چون مثل خواندن یا تدریس شعراست بدون آگاهی کافی از زبان. اما، رویکرد پروژه چشم‌انداز، تکمیل آموزش ریاضیات در جهتی عمود بر دروس معمول دانشگاه است، زیرا ما در آن ریاضیات را تدریس نمی‌کنیم بلکه آن را در معرض دید قرار می‌دهیم (و به جستجو در آن تشویق می‌کنیم)؛ با توجه به نظرات دریافت‌شده از دانشجویان، به نظر می‌رسد که این درس را مفید می‌دانند.

این دوره درسی ما دارای مؤلفه‌ها و جنبه‌های مختلفی است، که در اینجا به سؤالات مربوط به ریاضیات آن نگاهی می‌کنیم. همه این سؤالات (حتی آن‌هایی که «خنده‌دار به نظر می‌رسند») را می‌توان و باید جدی گرفت و تا حد امکان به آن‌ها پاسخ داد. اجازه دهید برای هر یک از این سؤالات یک جواب کلیدی در حداکثر یک خط بنویسیم:

- از چه زمانی ریاضیات آغاز شد؟
 - اعداد و اشکال هندسی از عصر حجر پیدا شدند؛ اما علم ریاضیات با اقلیدس شروع شد؟
 - ریاضیات به چه بزرگی است؟ چه نفر ریاضی‌دان داریم؟
 - «پروژه تبارشناسی ریاضیات» تا تاریخ ۱۲ آوریل سال ۲۰۱۴، دارای ۱۷۸۸۵۴ رکورد بود.
 - کار ریاضی‌کردن چگونه است و تحقیق‌کردن در ریاضیات چه شکلی است؟
 - آثار مربوط به زندگی‌نامه‌ها (ی خودنوشت) را جمع کنید! از جمله نمونه‌های جدید: [۷] و [۲۰].
 - در حال حاضر در ریاضیات در مورد چه چیزی تحقیق می‌شود؟ چالش‌های مهم کدام‌اند؟ می‌شود مسائل هزاره به روایت کلی را نقطه شروعی در نظر گرفت.
 - ریاضیات چندتا و چه موضوع و زیرشاخه‌هایی دارد؟
- برای یک مرور کلی به «رده‌بندی موضوعی ریاضیات» مراجعه کنید!

- چرا هیچ «صنایع ریاضی» مثل «صنایع شیمیایی» وجود ندارد؟ وجود دارد! برای مثال، مخابرات، صنعت مالی، و غیره.
- «مفاهیم اصلی» در ریاضیات کدام‌اند؟ آیا هنوز هم موضوع پژوهش‌اند؟ اعداد، شکل‌ها، ابعاد، بی‌نهایت، تغییرات، مجردسازی، و غیره؛ بله.
- ریاضیات به چه کار می‌آید؟ ریاضیات یکی از پایه‌های شناخت جهان و همچنین پیشرفت‌های فناورانه است.
- در زندگی روزمره کجا از ریاضیات استفاده می‌کنیم؟ نه تنها برای محاسبه، بلکه در خواندن نقشه‌ها، برنامه‌ریزی سفرها، و غیره از ریاضیات استفاده می‌کنیم.
- در زندگی روزمره ریاضیات را کجا بیشتر می‌بینیم؟ در گوشی‌های هوشمند ریاضیات را بیشتر می‌بینیم تا در مدرسه.
- بزرگ‌ترین دستاوردهای ریاضیات در طول تاریخ چیستند؟ شما نام ببرید!

یک سؤال دیگر این است که چگونه ریاضیات دانشگاهی را برای دانشجویان نقب‌زنِ معلمی «دلچسب‌تر» کنیم؟ چگونه آن‌ها را تشویق یا مجبور کنیم که با ریاضیات واقعاً در حکم یک علم ارتباط برقرار کنند. بی‌شک هیچ جواب واحد و ساده‌ای برای این سؤال وجود ندارد!

نقل کردن داستان درباره ریاضیات

چگونه می‌توان ریاضیات را ملموس‌تر کرد؟ چگونه می‌توان به دانش‌آموزان کمک کرد تا با این رشته پیوندی برقرار کنند؟ چگونه می‌توان بین ریاضیات و دنیای واقعی ارتباط برقرار کرد؟ نشان دادن کاربردهای ریاضیات به دانش‌آموزان روشی مناسب (و مسیری کاملاً بدیع) است. آموزش کاربردهای واقعی ریاضیات ممکن است بسیار دشوار باشد، زیرا در موارد پیشرفته‌تر و واقعی‌تر لازم است شاخه‌ها، نظریه‌ها، و انواع مختلفی از تخصص‌های ریاضی در کنار هم قرار گیرند. با این حال، کاربردها فرصتی برای نشان دادن سودمندی و اهمیت ریاضیات فراهم می‌کنند. در اینجا می‌خواهیم بر تفاوت بین آموزش یک موضوع و صحبت درباره آن تأکید کنیم. مثلاً چند مبحث ملموس را نام می‌بریم. ریاضیاتی که برای گزارش‌های هواشناسی و مدل‌سازی اقلیم به کار می‌رود بسیار دشوار، پیچیده، و پیشرفته است، اما «ایده‌های اصلی» و مدل‌های ساده‌شده آن‌ها را می‌توان

در دبیرستان طوری بیان کرد که برای دانش‌آموزان مفید و از نظر ریاضی در سطح قابل قبولی برای دبیرستان باشد. همچنین شرح داستان‌های موفقیت در حل بعضی مسائل مانند فرمول انحصاری گوگل برای رتبه‌بندی صفحه [۱۴، ۱۷]، مسابقه برای حل نمونه‌های بسیار بزرگ‌تر مسئله فروشنده دوره‌گرد [۲]، یا ریاضیات لازم برای طراحی تراشه‌ها مناسب «نقل داستان» و «نشان دادن جزئی از ریاضیات» در سطح دبیرستان‌اند. این‌ها از جمله موضوعاتی هستند که در کتاب جدید‌گونتر تسیگلر [۲۴] عرضه شده‌اند؛ در آن کتاب نقل داستان با ۲۴ تصویر شروع می‌شود و به این ترتیب تصویر چندوجهی گسترده‌تری از ریاضیات ایجاد می‌شود.

راه دیگر برای آشنا ساختن افراد عادی با ریاضیات توجه به جنبه‌های انسانی ریاضیات است. نقل داستان درباره اینکه ریاضیات چگونه و توسط چه کسانی انجام می‌گیرد راهی دشوار است، و این را می‌توان از پاسخ‌های گاهی تند در www.mathoverflow.net در جواب پست‌هایی فهمید که سعی می‌کنند حقیقت نهفته در حکایت و افسانه‌ها را فاش کنند. بیشتر ریاضی‌دانان ریاضیات را کاملاً مستقل از افرادی می‌دانند که به آن پرداخته‌اند. همان‌گونه که جان کارلو روتا اشاره می‌کند [۱۸]، تاریخ ریاضیات تمایل به شایعه‌سازی دارد. ظاهراً تصور بر این است که چون ریاضیات فقط به خودش پایبند است، باید به همین روش نیز آموزش داده شود.

شاید این نظر در مورد ریاضیات عالی درست باشد، ولی، برای دانش‌آموزان (و از این رو، برای معلمان)، دادن چهره انسانی به ریاضی‌دانان می‌تواند علم را ملموس‌تر کند، می‌تواند فرایند (یا شغل؟) تحقیق در ریاضیات را جالب‌تر کند، و می‌تواند نقطه شروع یا ورودی به ریاضیات واقعی باشد. بنابراین، داستان‌ها می‌توانند ریاضیات را دلچسب‌تر کنند. داستان‌ها نمی‌توانند جایگزین روش‌های جافته‌تدریس ریاضیات بشوند، اما می‌توانند آن را بهبود بخشند.

هزاران سال است که دانش از طریق داستان بین انسان‌ها مبادله می‌شود. (حتی فعالیت ریاضی را می‌توان از دیدگاه ساختارگرایانه، شکلی بسیار انتزاعی از داستان‌سرایی در نظر گرفت.) پس چرا سعی نکنیم داستان‌های نه افسانه‌ها یا داستان‌های خیالی، بلکه دانستی‌های – بیشتری درباره ریاضیات، چه در دانشگاه و چه در مدرسه، نقل کنیم تا از طریق آن مفاهیم خود ریاضیات را انتقال دهیم؟ برای تلاشی در این زمینه کتاب گونتر تسیگلر [۲۳] را ببینید.

منظور ما از داستان فقط نوشتارهایی مانند زندگی‌نامه‌ها نیست، بلکه شرح روش ابداع یا کشف ریاضیات نیز هست: روایت جک ادمنز^۱ از نحوه یافتن الگوریتم فشردن شکوفه^۲، داستانی عالی

^۱Jack Edmonds ^۲blossom shrink algorithm

از چگونگی انجام عملی ریاضیات است [۶]. مسئلهٔ توماس هریئت^۱ در مورد انباشت گلوله‌های توپ در فضای یک مخزن و کاری که کپلر با آن کرد - تبدیل آن به منشاء یک مسئلهٔ ریاضی - را به یاد بیاورید. گاهی اوقات هم خود دانشمندان کارشان را در لفافهٔ داستان می‌پیچند، برای مثال [۱۳] را ببینید.

صحبت از تحقیق کردن بحث دیگری را پیش می‌آورد. در مدرسه، مرسوم است که ریاضیات را به صورت علمی بسته آموزش بدهند. حتی اشاره به سؤالات حل نشده تحقیقاتی، بنابر دلایلی موجه و عمدتاً آموزشی، محلی از اعراب ندارد. اما این امر تصویری از یک علم کامل را در ذهن می‌پروراند که در آن همهٔ نتایج یافته و همهٔ مسائل حل شده‌اند؛ البته که این تصویر کاملاً غلط است (و به علاوه سرچشمهٔ تصویری غلط از ریاضیات در بین دانشجویان کارشناسی نیز است).

یقیناً در مدرسه زورورزی با سؤالات حل نشده کار سختی است. هیچ‌یک از سؤالات حل نشدهٔ معروف را نمی‌توان با ابزارهای ریاضیات مقدماتی حل کرد؛ صورت سؤال بسیاری از آن‌ها را حتی نمی‌توان فهمید. بنابراین نگرانی زیادی که از دل‌سرد شدن دانش‌آموزان داریم کاملاً قابل توجیه است. اما چرا با بیان طرز ظاهر شدن سؤالات، گشت‌وگذاری در ریاضیات نکنیم؟ طرح سؤالات در و یا دربارهٔ ریاضیات می‌تواند به جواب‌های جالبی، به‌ویژه برای سؤال «واقعاً ریاضیات چیست؟»، بینجامد.

سه دوره ریاضیات در مدرسه

خُب، بالاخره ریاضیات چیست؟ درخصوص آموزش ریاضیات در مدارس، یکی از ما (گونتتر تسیگلر) در [۲۲] بحث کرده است که تلاش ما در این جهت می‌باشد که سه جنبه به‌طور هم‌زمان لحاظ شود، سه جنبه‌ای که باید جداگانه در نظر گرفته و تا حدی نیز به‌طور مجزا آموزش داده شود:

ریاضیات ۱: مجموعه‌ای از ابزارهای پایه و تعدادی از ملزومات کیف لوازم حیاتی برای زندگی امروزی؛ که چیزی بیشتر از همهٔ مواردی که آدام ریس در «کتاب کوچک محاسبه» تقریباً ۵۰ سال پیش در سال ۱۵۲۲ میلادی منتشر کرد نیست؛

ریاضیات ۲: حوزه‌ای از دانش با سابقهٔ طولانی، که برای خود هنری است و بخشی از فرهنگ ما، همچنین یکی از زیربناهای بسیار مولد (دراصل یکی از عوامل تولید) برای همهٔ فن‌آوری‌های مهم نوین است. و این خود موضوعی برای «نقل داستان» است؛

¹ Thomas Harriot

ریاضیات ۳: آشنایی با ریاضیات در جایگاه یک علم؛ همچون یک حوزه پژوهشی مهم، بسیار توسعه یافته، پویا، و گسترده.

بررسی آموزش‌های فعلی در دبیرستان نشان می‌دهد که هنوز هم تأکید زیادی بر ریاضیات وجود دارد، و در کنار آن آموزش نسبتاً ماشین‌واری درخصوص حساب، «نحوه انجام صحیح محاسبه»، و حل مسائل پایه‌ای، به‌علاوه یک تدریس نسبتاً رسمی از ریاضیات ۳ به منظور آمادگی برای تحصیلات آتی دانشگاهی در ریاضیات، علوم، یا مهندسی. ریاضیات ۲، که باید مولفه اصلی آموزش «ریاضیات چیست» را تأمین کند، عمدتاً غایب است. گرچه این بخش نیز می‌توانست و می‌بایست انگیزه‌ای برای مطالعه ریاضیات ۱ و ۳ ایجاد کند!

واقعاً ریاضیات چیست؟

برای این سؤال کورانت-رابینز که «ریاضیات چیست؟» پاسخ‌های متنوع و معتبر بسیاری وجود دارد.

روبین هرش در کتاب «واقعاً ریاضیات چیست؟» [۱۱] یک جواب بیشتر فلسفی به این سؤال داده است، و جواب‌هایی که بیشتر جنبه روان‌شناختی دارند نیز درخصوص فعالیت ریاضی وجود دارند؛ آثار کلاسیک در این زمینه یکی «روان‌شناسی ابداع در ریاضی» اثر ژاک آدامار و دیگری جُستارهای روش‌شناسی آنری پوانکاره است. کتاب دولین «مقدمه‌ای بر تفکر ریاضی» [۵]، یا کتاب ویلانی [۲۰] رویکردهای جدیدتر در این باره‌اند.^۱

همچنین در طی چند قرن اخیر تلاش‌های بسیاری برای تشریح ریاضیات در قالب دانشنامه صورت گرفته است. شاید جدیدترین این تلاش‌ها کتاب عظیم «دانشنامه ریاضیات پرینستون»^۲ باشد که توسط گاورز و همکارانش تدوین شده است و دراصل «دانشنامه ریاضیات محض پرینستون» است [۸].

با همه این اوصاف، در زمانی که پایگاه zbMATH در سال بیش از ۱۰۰۰۰۰ مقاله و کتاب و در سال ۲۰۱۶ بیش از ۲۹۹۵۳ ارسال مقاله به بخش‌های math و math-ph در وبگاه arXiv.org را نشان می‌دهد، حتی اگر همین «شاخه‌های پژوهشی جاری» را در نظر بگیریم، ارائه توصیفی موجز و ساده از اینکه واقعاً ریاضیات چیست، بی‌نتیجه است. بحث‌های مربوط به رده‌بندی موضوعی ریاضیات نشان می‌دهد که دسته‌بندی علم به بخش‌های کوچک‌تر تا چه حد دشوار

^۱ این دو کتاب به فارسی ترجمه شده‌اند. ویراستار^۲ ترجمه بخش‌هایی از این کتاب در همین مجله و معرفی آن در نشر ریاضی آمده است. ویراستار

است، و تازه اینکه آیا روش مفیدی برای تفکیک تحقیقات کاربردی از ریاضیات محض وجود دارد خود جای بحث دارد.

شاید حساب‌شده‌ترین راه حل این مسئله این باشد که بپذیریم «انواع زیادی از ریاضیات» وجود دارد. چند سال پیش، ترنس تائو^۱ [۱۹] فهرستی ناتمام از ریاضیاتی ارائه کرد که برای اهداف مختلفی از «ریاضیات برای حل مسائل» و «ریاضیات سودمند» گرفته تا «ریاضیات تعیین‌کننده» مناسب است و در ادامه نوشت:

همان‌طورکه فهرست بالا نشان می‌دهد، مفهوم کیفیت ریاضی مفهومی از ابعاد بالا است و از نظم متعارف مشخصی تبعیت نمی‌کند. به اعتقاد من علت این امر آن است که ریاضیات به‌خودی‌خود مقوله‌ای پیچیده و با ابعاد زیاد است و به روش‌های غیرمنتظره و تطبیقی تکامل می‌یابد. هریک از ویژگی‌های بالا بیانگر راه متفاوتی است که ما، اعضای جامعه، از طریق آن درک و استفاده خود از موضوع را بهبود می‌بخشیم.

از این نظر، وجود جواب‌های زیاد برای سؤال «ریاضیات چیست؟» شاید همان اندازه که نشانگر افراد پاسخ‌دهنده است نشانگر این نیز هست که آن‌ها از عهده توصیف موضوع ریاضیات برآمده‌اند.

مراجع

- [1] Blum, W., *Was ist Was. Band 12: Mathematik*, Tessloff Verlag, Nürnberg, 2010.
- [2] Cook, W., *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*, Princeton University Press, Princeton NJ, 2011.
- [3] Courant, R., Robbins, H., *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1941.
- [4] Csicsery, G., *Hard Problems: The Road to the World's Toughest Math Contest*, Documentary film, 82 minutes (feature)/45 minutes (classroom version), Mathematical Association of America, Washington DC, 2008.
- [5] Devlin, K. J., *Introduction to Mathematical Thinking*, published by Keith Devlin, Palo Alto CA, 2012.
- [6] Edmonds, J., A glimpse of heaven, in *History of Mathematical Programming—A Collection of Personal Reminiscences*, J. K. Lenstra, A. Schrijver, A. Rinnooy Kan, eds., CWI and North-Holland, Amsterdam, 1991, 32–54.
- [7] Frenkel, E., *Love & Math, The Heart of Hidden Reality*, Basic Books/Perseus Books, Philadelphia PA, 2013.
- [8] Gowers, T., Leader, I., Barrow-Green, J., eds., *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton NJ, 2008.

- [9] Highland, E. H., Highland, H. J., *The How and Why Wonder Book of Mathematics*, Grosset Dunlop, New York, 1961.
- [10] Highland, E. H., Highland, H. J., *Was ist Was. Band 12: Mathematik*, Neuer Tesseloff Verlag, Hamburg, 1963; revised edition 1969, new cover 1983.
- [11] Hersh, R., *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [12] Klein, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*, B. G. Teubner, Leipzig, 1908; vierte Auflage, Springer, Heidelberg, 1933.
- [13] Lamport, L., Shostak, R., Pease, M., The byzantine general's problem, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, **4** (1982), 382–401.
- [14] Langville, A. N., Meyer, C. D., *Google's Pagerank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006.
- [15] Loos, A., Sinn R., Ziegler, G. M., *Panorama der Mathematik*, Springer, Heidelberg, 2022.
- [16] Mendick, H., Epstein, D., Moreau, M.-P., Mathematical images and identities: education, entertainment, social justice, *Research in Mathematics Education*, **8** (2008), 101–102.
- [17] Page, L., Method for node ranking in a linked database, United States Patent No. US 6,285, 999 B1, (January 9, 1998), available at <http://www.google.com/patents/US6285999> 2001.
- [18] Rota, G.-C., *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [19] Tao, T., What is good mathematics? *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (2007), 623–634.
- [20] Villani, C., *Théorème vivant*, Bernard Grasset, Paris, 2012.
- [21] Ziegler, G. M., Three competitions, in *Invitation to Mathematics: From Competition to Research*, D. Schleicher, M. Lackmann, eds., Springer, Berlin, 2011, 195–205.
- [22] Ziegler, G. M., Mathematics school education provides answers–To which questions?, *EMS Newsletter*, **84** (2012), 8–11.
- [23] Ziegler, G. M., *Do I Count?: Stories from Mathematics*, CRC Press/Taylor Francis, Boca Raton FL, English translation of *Darf ich Zahlen? Geschichten aus der Mathematik*, Piper, München, 2010.
- [24] Ziegler, G. M., *Mathematik–Das ist doch keine Kunst!*, Knaus, München, 2013.

“What is Mathematics?” and Why We Should Ask, Where One Should Experience and Learn That, and How to Teach It

G. M. Ziegler, A. Loos

Translated by M. Haghverdi¹

¹Department of Mathematics, Islamic Azad University, Arak Branch, Iran

Abstract. “What is Mathematics?” [with a question mark!] is the title of a famous book by Courant and Robbins, first published in 1941, which does not answer the question. The question is, however, essential: The public image of the subject (of the science, and of the profession) is not only relevant for the support and funding it can get, but it is also crucial for the talent it manages to attract—and thus ultimately determines what mathematics can achieve, as a science, as a part of human culture, but also as a substantial component of economy and technology.

Keywords: what is mathematics?, teaching mathematics in school, images of mathematics, teacher student

Article history: Received 11 March 2019; Accepted 11 December 2019

¹m-haghverdi@iau-arak.ac.ir