فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۱۷۱ تا ۱۷۶

مسیرهای جدید در محاسبات عددی*

توبین دریسکول، اِندره شولی، اَلِکس تاونزند
ترجمهٔ خدیجه ندایی اصل

در ماه اوت سال ۲۰۱۵ چند نفر از متخصصان برجستهٔ آنالیز عددی در گردهمایی بزرگداشت شصتمین سالگرد تولد نیک ترِفتِن در آکسفورد شرکت و دربارهٔ مسیر آیندهٔ آنالیز عددی بحث کردند. چند نفر از سخنرانان اصلی آن مراسم نظرات شخصی خود را طی یادداشت‌های کوتاهی برای ما فرستادند.

ترفتن در سال ۱۹۹۲ در جُستاری با نام «تعریف آنالیز عددی»[۱] دربارهٔ این شاخه از ریاضیات می‌نویسد: «رسالت اصلی ما محاسبهٔ کمیت‌هایی، آن هم با سرعت نور، است که نوعاً از دیدگاه نظری قابل محاسبه نیستند.» یادداشت‌های زیر برخی از جنبه‌های آن رسالت را روشن

عبارات و کلمات کلیدی: آنالیز عددی، جبر خطی عددی، الگوریتم
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۲۶

*Driscoll, T. A, Süli, E., Townsend, A., New directions in numerical computation, *Notices Amer. Math. Soc.*, **63** (April 2016), 398–400.

[۱] این مقاله با ترجمهٔ نظام‌الدین مهدوی امیری در سال ۱۳۷۲ در مجلهٔ نشر ریاضی چاپ شده است–م.

© ۱۴۰۱(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2022.340

می‌کنند.

لوید نیکلاس ترِفتِن[1] مشهور به نیک ترفتن در سال ۱۹۵۵ در آمریکا به دنیا آمد. او در حال حاضر سرگروه آنالیز عددی در مؤسسه ریاضیات دانشگاه آکسفورد است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقهٔ ترفتن آنالیز عددی، جبر خطی عددی، و روش‌های طیفی است. او جوایز زیادی از جمله اولین جایزه لسلی فاکس[2] در آنالیز عددی و جایزهٔ جان فون‌نویمان را در سال ۲۰۲۰ از سایام دریافت کرده است. همچنین او یکی از سخنرانان کنگره جهانی ریاضی‌دانان در برلین بود و در سال ۲۰۰۵ به‌عنوان همکار انجمن ریاضی آمریکا انتخاب شد.

سؤال معماگونه دربارهٔ آنالیز عددی

ژان پُل بروت[3]

چرا این همه ریاضی‌دان به تقریب‌های تکه‌ای‌هموار برای جواب‌های معادلات تابعی، که از قبل می‌دانیم جوابشان هموار است، اکتفا می‌کنند؟ چبفان[4] تقریب‌های یک‌بُعدیِ هموار را به‌طرز مؤثر و زیبایی شرح می‌دهد. چنین تقریب‌هایی ممکن است نسبت به اسپلاین‌های هم‌دقت نوسان بیشتری داشته باشند، اما همگرایی‌شان سریع‌تر و به‌طورخودکار منطبق بر همواری تابع تحت تقریب است. برعکس، استفاده از توابع هموار در دوبُعد یا بالاتر، حتی تا همین اواخر، محدود به دامنه‌های نسبتاً ساده بود. تحقیق بنیادی و اساسی روی درون‌یاب‌های دوبُعدی بی‌نهایت‌بارهموار ممکن است منجر به رویکردهای جدید و جالبی شود، هرچند هنوز تعداد دانشمندانی که دربارهٔ این مسائل تحقیق می‌کنند، خیلی کمتر از آن چیزی است که تصور می‌شود.

آری به روش و نه به ماشین

بِنگْت فونبری[5]

می‌گویند که بهبود توانایی‌های محاسبات علمی درگرو پیشرفت‌های الگوریتم‌ها و همین‌طور سخت‌افزار است. در طول یک یا دو دههٔ اخیر، روی ایجاد تسهیلات ابررایانشی تمرکز کرده‌اند، شاید تا حدودی به‌این‌دلیل که شاخص‌های انجام این کار قابل اندازه‌گیری‌اند و به‌راحتی می‌توان آن‌ها را همه‌جا ذکر کرد و به‌علاوه در سطح ملی و جهانی دائماً در حال پایین آمدن هستند. ولی، بزرگ‌ترین سامانه‌های کامپیوتری نیازمند مقادیر زیادی برق و زیرساخت‌های خاصی هستند و خیلی زود هم قدیمی می‌شوند. درحالی‌که امکانات الگوریتمی را همیشه می‌توان توسعه داد.

---

[1] Lloyd Nicholas Trefethen [2] Leslie Fox [3] Jean-Paul Berrut [4] Chebfun [5] Bengt Fornberg

صنایع خصوصی، علی‌رغم فشار محرک‌های اقتصادی، به‌طرز عجیبی به استفاده از الگوریتم‌های قدیمی ادامه می‌دهد. مثالی از این نوع را می‌توان در اکتشافات زمین‌شناسی برای نفت و گاز دید. در سال‌های ۱۹۸۰، تفاضلات متناهی روی تورهای منظم برای مدل‌بندی انتشار موج از مرتبهٔ ۲ به مرتبهٔ ۴ بهبود یافتند. در حال حاضر، تفاضلات متناهی مرتبهٔ بیستم به‌طور گسترده برای کارهای استخراج و اکتشاف استفاده می‌شود، اما هنوز عمدهٔ واسطه‌های کامپیوتری با روش‌های مرتبهٔ اول کار می‌کنند. درنتیجه، به‌منظور حفظ خطا در سطحی قابل تحمل، محاسبات حداکثر درجهٔ تظریف را به کار می‌برند. گرچه این روش روی سامانه‌های کامپیوتری عظیمی به خوبی پیاده شده، غافل از اینکه فرصت کلانی برای بهبود الگوریتم‌ها در اختیار است. چنین چیزی در زمینهٔ شبیه‌سازی‌های علمی در سامانه‌های مربوط به زمین، نظیر اقلیم و آب‌وهوا، نیز درست است.

آنچه در بلندمدت اهمیت دارد روش است و نه ماشین.

بازگشت به عصر بطلمیوس

اَن گرینباوم[1]

در سال‌های پیشِ رو، دربارهٔ چیزهایی که، بدون ارائهٔ یک مدل واقع‌بینانه، می‌توان از طریق تحلیل داده‌ها پیش‌بینی کرد چیزهای بیشتری خواهیم آموخت. بطلمیوس هم به همین طریق توانست حرکات دقیق سیارات را پیش‌بینی کند. امروزه توجه زیادی به پیش‌بینی بازارهای مالی، آب‌وهوا، سلیقه‌های خرید، و غیره از طریق تحلیل داده‌ها وجود دارد. این خبر خوبی برای جامعهٔ جبر خطی عددی است، زیرا این محاسبات به الگوریتم‌هایی مانند تجزیهٔ مقدار تکین نیاز دارند و مبتنی‌بر تحلیل نظری مرتبط با، مثلاً مسائل تکمیل ماتریسی، است.

اینکه در مورد خود ما هم چه چیزهای جدیدی خواهیم فهمید خیلی شگفتی‌آور است. آیا روزی خواهد آمد که من به توصیه‌های وبگاه آمازون دربارهٔ کتابی بیشتر از شمّ طبیعی خودم اطمینان داشته باشم؟ زمانی‌که ابزارک‌های ناآشنا برای ما کاری دور از انتظار انجام دهند چه خواهد شد؟

البته این بدان معنی نیست که تحلیل داده‌ها تنها راه و وسیلهٔ فهمیدن است. به‌محض‌اینکه قابلیت پیش‌بینی مسئله‌ای تأیید شد، دانشمندان شروع به تبیین و توضیح براساس مدل‌ها و معادلات خواهند کرد. این رویه‌ای در تحقیق به ذهن القا می‌کند که برعکس رویهٔ معمول در ریاضیات است. در ریاضیات، حدس‌ها اغلب برمبنای مثال‌های محاسباتی بنا می‌شوند و قبل از اینکه وقت زیادی صرف اثبات آن‌ها شود، با مثال‌های عددی امتحان می‌شوند.

[1] Anne Greenbaum

محاسبات با دقت ترکیبی

نیکلاس هایم[۱]

در سی سال گذشته، بیشتر محاسبات با ممیز شناور در محاسبات علمی با استاندارد محاسبات با دقت مضاعفِ IEEE انجام شده است و عملیات مقدماتی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم را با درستی نسبی حدوداً $۱۰^{-۱۶}$ به دست می‌دهد. اکنون شاهد رشد روزافزون استفاده از دقت ترکیبی هستیم که در آن دقت‌های مختلف با ممیز شناور برای یافتن نتیجه با درستی لازم و با کمترین هزینه با یکدیگر ترکیب می‌شوند. محاسبات با دقت عادی، هزینهٔ ذخیره و انتقال داده‌ها را نصف می‌کند و اگر با سخت‌افزارهای مناسب انجام شود زمان آن نصفِ زمان لازم برای دقت مضاعف است. بعضی کامپایلرها از محاسبات با دقت چهاربرابر پشتیبانی می‌کنند و محاسبات با دقت دلخواه نیز در فورترن و C، و همین‌طور پایتون، جولیا[۲]، و متلب در دسترس است.

از دقت چندگانه برای تظریف‌های بارستی در جبر خطی، جبران ناپایداری الگوریتمی، و آزمایش نتایج استفاده می‌شود. انتظار داریم که، هم‌زمان با آسان‌تر شدن دسترسی به دقت ترکیبی، این رویه‌ها و تجربیات گسترش پیدا کند و روندهای جدیدتری پیدا شود.

به‌اشتراک‌گذاری برنامه‌ها

رندی لِوک[۳]

یکی از پیشرفت‌های مؤثر در آنالیز عددی و محاسبات علمی، توجه روبه‌رشد در بایگانی و به اشتراک‌گذاری برنامه‌های کامپیوتری است که بخشی مهم و جدایی‌ناپذیر از انتشار نتایج تحقیق است. در ریاضیات، انتشار قضیه‌ای بدون بیان دقیق اثبات آن غیرقابل تصور است. اما متأسفانه همین انتظار را از برنامه‌ای کامپیوتری که برای آزمون الگوریتمی نوشته شده است نداشته‌ایم.

جنبش «پژوهش تکرارپذیر» تلاشی برای این منظور است. مجلات و مؤسسات تأمین‌کنندهٔ مالی پروژه‌ها، الزام به شرط تکرارپذیربودن تحقیق را آغاز کرده‌اند که با توجه به پیشرفت‌های صورت‌گرفته در فنّاوری، ازجمله آرشیوهای آزاد مانند گیت‌هاب[۴]، مجازی‌سازی[۵]، پایگاه‌های رایانش ابری[۶] و نوت‌بوک‌های وب‌بنیاد[۷] ، نسبت به گذشته انجام آن راحت‌تر و جالب‌تر شده است.

برخی افراد چندین دهه است که بر مبنای تفکر تکرارپذیری کار می‌کنند و نیک ترفتن نمونهٔ خوبی از آن‌ها است. او همیشه از شسته‌رفته کردن برنامهٔ کامپیوتری خود لذت برده است چه برای

[1]Nicholas J. Higham [2]Julia [3]Randy LeVeque [4]GitHub [5]virtualization [6]cloud computing [7]browser-based

در اختیار گذاشتن و اگاهی‌بخشی در مقالات پژوهشی وتوصیفی وچه در بسته‌های نرم‌افزاری خود، از SCPACK گرفته تا تا چبفان. محض یک نمونه از آثار او، کتاب روش‌های طیفی در متلب[1] را بدون متلب تصور کنید. البته دراین‌صورت هم کتاب ارزشمندی است، اما این کتاب بدون وجود این برنامه‌ها برای یادگیری و تجربه، ارزش و تأثیر بسیار کمتری می‌داشت. همهٔ ما باید چنین افتخار و شادی‌ای از به اشتراک‌گذاری برنامه‌های کامپیوتری خود داشته باشیم.

توجه به ابعاد بالا: مسیری جدید برای آنالیز عددی

ایان اسْلون[2]

در آینده، مسائل از ابعاد بالا به صورت بخش مهمی از آنالیز عددی در خواهد آمد، البته نه به صورت مسیری نو، چون کار در این زمینه را نوربرت وینر[3] در سال ۱۹۳۸ آغاز کرده بود. آنالیز عددی در ابعاد بالا در سال‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ با آثار سوبول[4]، هلآوکا[5]، و کروبُف[6]، که متخصص در نظریهٔ اعداد بودند، پیشرفت بیشتری کرد. آن‌ها انتگرال‌گیری شبه‌مونت‌کارلوی چندبُعدی را (بدون استفاده از متخصصان آنالیز عددی) آغاز کردند. اما مسائل از نوع ابعاد بالا تاکنون بخش کوچکی از آنالیز عددی بوده است. به نظرم در آینده این رویه تغییر خواهد کرد.

محرک اصلی این تغییر در حال حاضر، کمّی‌سازی عدم‌قطعیت[7] است. در حال حاضر مجلات بسیاری مختص این موضوع‌اند. بخش زیادی از مقالات این مجله‌ها، در حال حاضر، دربارهٔ مسائل از ابعاد متوسط تا بالا است و نمونهٔ اصلی آن‌ها مسئلهٔ جریان دارسی[8] در محیط متخلخل است. همچنین میدانی تصادفی، که مدلی مثلاً برای نفوذپذیری میدان‌های نفتی است، به‌طور طبیعی توسط تعداد نامتناهی از متغیرهای تصادفی عدی توصیف می‌شود که منجر به یک مسئله از بُعد نامتناهی می‌گردد. ممکن است برای به‌دست آوردن تقریبی خوب، تعداد بسیار بزرگ، ولی متناهی، از متغیرهای تصادفی لازم باشد. چندتا اصطلاح مُد روز از این دسته روش‌های عددیِ حال حاضر عبارت‌اند از آشوب چندجمله‌ای (تعمیم‌یافته)، گالرکین تصادفی، پهلوی‌هم‌گذاری تصادفی، شبکه‌بندی تُنک، مونت کارلوی چندسطحی، شبه‌مونت کارلو، و غیره.

اما چرا این‌ها حالا مهم شده‌اند؟ زیرا توانایی محاسباتی لازم برای مواجهه با مسئله‌های واقعی اکنون در دسترس است. چرا توجه به آنها در آینده نیز افزایش خواهد یافت؟ زیرا چنین مسائلی ذاتاً مشکل‌اند و به مشکل معروف «مصیبت چندبُعدی» گرفتارند. در حال حاضر، حالت‌های ساده‌ای از

[1] Spectral Methods in Matlab [2] Ian H. Sloan [3] Norbert Wiener [4] Sobol [5] Hlawka [6] Korobov
[7] uncertainty quantification [8] Darcy

چنین مسائلی مورد بررسی قرار می‌گیرد: برای مثال، فقط میدان‌های تصادفی با «نوفهٔ متناهی‌بُعد»، واریانس کوچک، و طول‌های همبستگی بلند در نظر گرفته می‌شود. با افزایش توان کامپیوترها ممکن است برخی از زمینه‌های آنالیز عددی عملاً رام شوند، اما این اتفاق هرگز بدین‌صورت برای مسائل ابعاد بالا رخ نخواهد داد. مسائل ابعاد بالا آمده‌اند تا بمانند.

خدیجه ندایی اصل: دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، دانشکدهٔ ریاضی
رایانامه: nedaiasl@iasbs.ac.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 171–176
doi: 10.30504/mct.2022.340

New Directions in Numerical Computation

T. A. Driscoll, E. Süli, A. Townsend
Translated by K. Nedaiasl[1]

[1]Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Iran

Abstract. In August 2015 a distinguished collection of numerical analysts gathered at Oxford to celebrate the sixtieth birthday of Nick Trefethen FRS and consider the future of numerical analysis. Some of the plenary speakers provided short essays for *Notices*.

Keywords: numerical analysts, algorithm, numerical linear algebra
Article history: Recieved 4 January 2020; Accepted 17 August July 2021

[1]nedaiasl@iasbs.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society