

در تقابل با اصل کاوالی‌یری؟ مثالی پارادوکس‌گونه در دینامیک

حسام‌الدین رجب‌زاده[✉]، آرش رستگار، میثم نصیری

چکیده. خانواده‌ای پیوسته از خم‌های هموار و مجزا در مربع یکه وجود دارد که آن را افراز می‌کند و می‌توان با انتخاب حداکثر یک نقطه از هر خم، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر ساخت که مساحت آن برابر یک باشد. اما این حکم با شهود ما در تناقض است! شهودی که از اصل کاوالی‌یری و قضیه فوبینی برگرفته‌ایم. پس مشکل از کجاست؟ در این یادداشت به اثبات حکم بالا و پاسخ به این پرسش می‌پردازیم.

۱ مقدمه

حساب بی‌نهایت کوچک‌های لایب‌نیتس^۱ که به ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن^۲ منتهی شد تکیه بر کتاب هندسه پیوستارهای تقسیم‌ناپذیر^۳ اثر کاوالی‌یری^۴، ریاضی‌دان ایتالیایی قرن هفدهم، زده است. در نگاه کاوالی‌یری خط از طریق حرکت یک نقطه پدید می‌آید و حرکت یک خط نیز پدیدآورنده صفحه است. او سپس طول پاره‌خطها را با هم «جمع می‌زند» تا مساحت را به دست آورد و نواحی صفحه را برهم می‌افزاید تا حجم را به دست آورد. اما شاگرد او توریچلی^۵ به وی نشان داد با این شیوه می‌توان این حکم نادرست را به دست آورد که مثلث با رسم یک ارتفاع به دو بخش با مساحت‌های برابر تقسیم می‌شود! به همین دلیل کاوالی‌یری به اصلاح روش خود پرداخت و به

عبارات و کلمات کلیدی: اصل کاوالی‌یری، قضیه فوبینی، برگ‌بندی، پیوستگی مطلق
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۱۸

¹G. W. Leibniz (1646-1716) ²I. Newton (1643-1727) ³Geometria Indivisibilibus Continuorum nova Quadam Ratione Promota ⁴B. Cavalieri (1598-1647) ⁵E. Torricelli (1608-1647)

جای «خطوط»، قطعاتی از «نخ»، یعنی «خطوط با عرض کم»، را قرار داد و بدین ترتیب یک نظریه «امتی» یافت که نهایتاً به «اصل کاوالی‌یری»^۱ رهنمون شد [۱].

انتشار کتاب کاوالی‌یری ریاضی‌دانان مختلفی را برانگیخت تا به مطالعه مسائل مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها بپردازند و به این ترتیب بررسی این نوع مسائل اساسی از دیدگاهی مجرد آغاز شد و از این رهگذر کلیت بیشتری حاصل آمد. در این جستجوها دو گرایش مشخص، یکی جبری و دیگری هندسی، وجود داشت. پیروان کاوالی‌یری، به‌ویژه توریچلی، ایزاک بارو^۲ (معلم نیوتن)، و هویگنس^۳ روش استدلال هندسی منسوب به یونانیان را می‌پسندیدند؛ اما دقت این روش کمتر از روش دیگر بود. ریاضی‌دانان دیگری مانند فرما^۴، دکارت^۵، و والیس^۶ نیز بودند که جبر جدید را وارد این موضوع کردند. از دیگر آثار مهم در این دوره، کتاب حساب بی‌نهایت‌ها^۷ اثر والیس به سال ۱۶۵۵ است. حتی بعد از فرمول‌بندی حسابان توسط لایب‌نیتس و نیوتن، بیش از ۲۰۰ سال طول کشید تا مفهوم دقیق حد توسط کوشی^۸ (در اوایل قرن نوزدهم) و روش اِپسِلِن-دلَتایِی توسط وایرشراس^۹ (در اواسط قرن نوزدهم) فرمول‌بندی حسابان را ممکن سازد [۱].

در سال ۱۹۰۷ فوبینی^{۱۰} اصل کاوالی‌یری را به صورت امروزی آن فرمول‌بندی کرد و نشان داد که می‌توان یک انتگرال دوگانه را با تکرار انتگرال یک‌متغیره محاسبه کرد و در نتیجه ترتیب انتگرال‌گیری را می‌توان در محاسبه انتگرال دوگانه تغییر داد. دو سال بعد، تونلی^{۱۱} قضیه مشابهی را برای توابع اندازه‌پذیر نامنفی فرمول‌بندی کرد. البته حالت خاص قضیه فوبینی برای توابع پیوسته روی حاصل ضرب زیرمجموعه‌های بسته و کراندار فضاهای برداری در قرن هجدهم برای اوایل^{۱۲} شناخته شده بود و بُگ^{۱۳} در سال ۱۹۰۴ آن را به توابع کراندار اندازه‌پذیر روی حاصل ضرب بازه‌ها گسترش داده بود. سپس لوی^{۱۴} حدس زد که برای توابع انتگرال‌پذیری که لزوماً کراندار نیستند این حکم برقرار است و این همان چیزی بود که فوبینی در سال ۱۹۰۷ ثابت کرد. قضیه فوبینی قابل تعمیم به بعضی از برگ‌بندی‌ها^{۱۵} نیز هست. یک برگ‌بندی افزایشی از فضا است که با افزایش توابع زیرفضاهای خطی هم‌بعد و موازی به‌طور موضعی همسان‌ریخت است. مثلاً یک استوانه را می‌توان با دوایر موازی افزایش داد.

¹Cavalieri's principle ²I. Barrow (1630-1677) ³C. Huygens (1629-1695) ⁴P. de Fermat (1607-1665)
⁵R. Descartes (1596-1650) ⁶J. Wallis (1616-1703) ⁷The Arithmetic of Infinitesimals ⁸A-L. Cauchy
(1789-1857) ⁹K. Weierstrass (1815-1897) ¹⁰G. Fubini (1879-1943) ¹¹L. Tonelli (1885-1946) ¹²L.
Euler (1707-1783) ¹³H. Lebesgue (1875-1941) ¹⁴B. Levi (1875-1961) ¹⁵foliations

در سال ۱۹۹۷ میلتر^۱، در مقاله‌ای کوتاه [۱۴] یک مثال بسیار عجیب و منتشرنشده از کاتوک^۲ را تشریح کرد و نشان داد قضیه فوبینی قابل تعمیم به برگ‌بندی‌های دلخواه نیست (برای ترجمه مقاله میلتر رجوع کنید به [۳]).

مقاله حاضر با نگاهی تاریخی به اصل کاوالی‌یری و مثال‌هایی از آن آغاز می‌شود. در ادامه به قضیه فوبینی و بررسی درستی آن برای برگ‌بندی‌ها می‌پردازیم. سپس مثال پارادوکس‌گونه کاتوک را می‌آوریم. در بخش انتهایی نیز به برگ‌بندی‌های مهم در دستگاه‌های دینامیکی و ظهور برگ‌بندی‌های پارادوکس‌گونه در این‌گونه دستگاه‌ها پرداخته می‌شود.

۲ اصل کاوالی‌یری

کاوالی‌یری واضح‌ر روش تقسیم‌ناپذیرها بود و آن را در کتاب خود با نام هندسه پیوستارهای تقسیم‌ناپذیر تبیین کرد. بر اساس اصل کاوالی‌یری، مساحت یک ناحیه در صفحه تابعی از طول پاره‌های قاطع موازی با یکدیگر است. اصل کاوالی‌یری در فضای دوبعدی این‌گونه بیان می‌شود:

اصل کاوالی‌یری در صفحه. اگر دو ناحیه در صفحه بین دو خط موازی قرار گرفته باشند به طوری که هر خط موازی با این دو خط، ناحیه‌ها را در پاره‌خط‌هایی با طول مساوی قطع کند، آنگاه این دو ناحیه مساحت برابر دارند.

به طور مشابه این اصل در فضای سه‌بعدی چنین است:

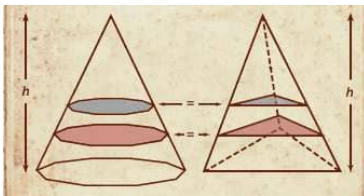
اصل کاوالی‌یری در فضای سه‌بعدی. اگر دو جسم صلب بین دو صفحه موازی قرار گرفته باشند، به طوری که هر صفحه موازی با این دو صفحه، دو جسم صلب را در مقاطعی با مساحت مساوی قطع کند، آنگاه این دو جسم حجم برابر دارند.

اگرچه امروزه این احکام به اصل‌های کاوالی‌یری معروف‌اند، قرن‌ها پیش از آن نیز شناخته شده و در محاسباتی مهم به کار رفته بودند. در واقع، اصل کاوالی‌یری صورت دقیق‌شده روش ارشمیدس^۳ است که در قرن سوم پیش از میلاد، حجم کره را با کمک حجم مخروط و حجم استوانه در کتاب

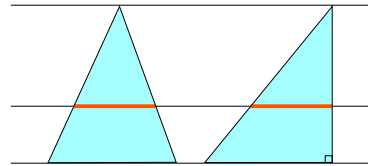
^۱J. Milnor (1931-) برنده مدال فیلدز در سال ۱۹۶۲ و جایزه آبل در سال ۲۰۱۱.

^۲A. B. Katok (1944-2018) ^۳Archimedes (287 BC - 212 BC)

روش قضیای مکانیکی^۱ محاسبه کرد. این کتاب به کتاب گمشده مشهور است و نسخه‌ای از آن، پس از قرن‌ها در سال ۱۹۰۶ در استانبول پیدا شد. همچنین در قرن سوم پس از میلاد این اصل (و حتی صورت‌های تعمیم‌یافته‌ای از آن) توسط ریاضی‌دان چینی لیو هوئی^۲ به‌طور مستقل کشف شد و از آن برای محاسبات حجم‌ها و مساحت اشکال هندسی مختلف استفاده شده است [۲۰، ۱۷]. حرکت از روش تقسیم‌ناپذیرهای کاوالی پیری تا بی‌نهایت کوچک‌های توریچلی، والیس، و لایب‌نیتس از پیشرفت‌های مهم در تاریخ حسابان است؛ در این باره اطلاعات مفیدی در [۲] آمده است.



شکل ۲. حجم دو هرم با قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع برابر، یکسان است. (شکل از دایرة‌المعارف بریتانیکا)



شکل ۱. مساحت دو مثلث با قاعده و ارتفاع برابر، یکسان است.

در روش تقسیم‌ناپذیرها، یک شکل سه‌بعدی از بی‌نهایت ناحیهٔ دوبعدی موازی تشکیل شده است همان‌طور که یک ناحیهٔ دوبعدی را می‌توان به‌صورت بی‌نهایت پاره‌خط موازی تصور کرد. والیس با کمک فرمول تصاعد حسابی و در نظر گرفتن مثلث به‌صورت اجتماعی از بی‌نهایت متوازی‌الاضلاع تقسیم‌ناپذیر با ارتفاع یک بر بی‌نهایت توانست مساحت آن را محاسبه کند. بنابر اصل کاوالی پیری این حکم که دو مثلث با ارتفاع و قاعدهٔ مساوی دارای مساحت برابرند روشن است (شکل ۱)؛ زیرا که بنابر قضیهٔ تالس^۳ هر خط موازی با خط مشترک قاعده‌های مثلث‌ها آن‌ها را در دو پاره‌خط با طول مساوی قطع می‌کند. از طرفی، مساحت مثلث قائم‌الزاویه نصف مساحت مستطیل است. بنابراین فرمول مساحت مثلث، یعنی نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع، به دست می‌آید.

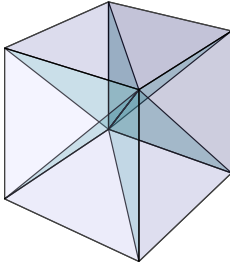
۱.۲ محاسبهٔ حجم مخروط توسط اقلیدس

با همین روش و با توجه به اینکه در یک مکعب هر هرم قائم‌الزاویه که در یک کنج قرار دارد یک‌ششم حجم مکعب را اشغال کرده است (شکل ۳)، اقلیدس^۴ در کتاب اصول^۵ خود ثابت می‌کند حجم هر مخروط از فرمول $Sh/۳$ و حجم استوانه از فرمول Sh به دست می‌آید که در آن h ارتفاع و S

^۱The Method of Mechanical Theorems ^۲Liu Hui (225-295) ^۳Thales (626 BC-548 BC) ^۴Euclid (325 BC- 270 BC) ^۵The Elements

مساحت قاعده (هرم یا مخروط یا استوانه) است.

اینکه با چند برابر شدن ارتفاع هرم حجم هرم به همان نسبت بزرگ می‌شود را می‌توان از روش تقسیم‌ناپذیرها یا با کمک هرم گنجی در یک مکعب مستطیل مربع‌القاعده به دست آورد.



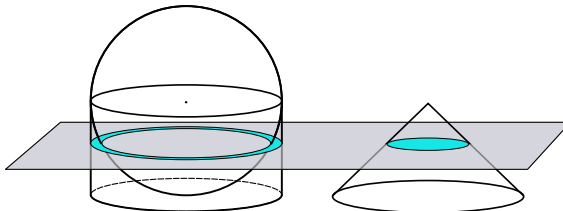
شکل ۳. محاسبه حجم هرم

۲.۲ محاسبه حجم کره

همان‌طور که اشاره کردیم ارشمیدس با کمک فرمول‌های حجم استوانه و مخروط توانست حجم کره را محاسبه کند. او با فرضی که مشابه اصل کاوالی‌یری بود ثابت کرد متمم

حجم یک نیم‌کره در یک استوانه محیط بر آن برابر است با حجم مخروطی محاط در همان استوانه (شکل ۴). اگر مخروط را مانند شکل به صورت وارونه در استوانه محاط کنیم، هر مقطع موازی با قاعده استوانه مخروط را در یک دایره و مکمل کره را در یک حلقه قطع می‌کند که مساحتی برابر هم دارند. به این روش می‌توان حجم کره به شعاع r را محاسبه کرد. البته پیش از ارشمیدس، اقلیدس ثابت کرده بود که حجم کره با مکعب شعاع کره متناسب است.

همچنین چند قرن بعد از لیو هوئی، ریاضی‌دان چینی دیگری به نام تسو گنگ^۱ با استفاده از اصل کاوالی‌یری و نتایج دیگری، که هوئی برای محاسبه نسبت حجم اشکال یافته بود، توانست حجم کره را برحسب شعاع آن محاسبه کند. روش آن‌ها مبتنی بر پیدا کردن نسبت حجم کره به اشتراک دو استوانه با شعاع برابر است که محور آن‌ها بر هم عمود باشد [۱۳، ۱۵].

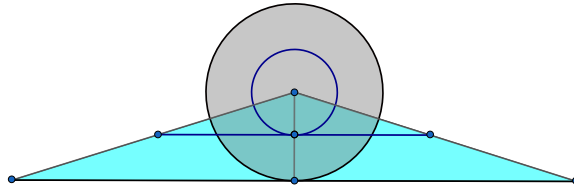


شکل ۴. محاسبه حجم کره به کمک حجم مخروط

۳.۲ محاسبه سطح جانبی کره

برای اینکه روشن کنیم چطور در اصل کاوالی‌یری از خطوط موازی و صفحات موازی به افزاها

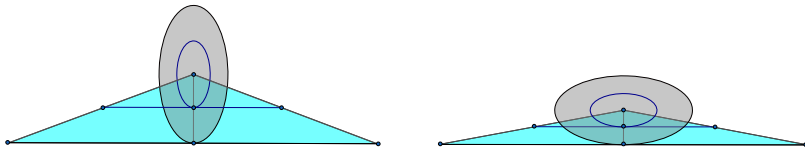
^۱Zu Geng (420-520)



شکل ۵. محاسبه مساحت دایره به کمک مساحت مثلث

توسط منحنی‌ها و رویه‌ها می‌رسیم بهتر است روشی در محاسبه مساحت دایره را تشریح کنیم. محیط دایره به شعاع r بنا بر تعریف عدد π برابر است با $2\pi r$. محیط دایره را به صورت خطی گسترده مانند شکل ۵ باز می‌کنیم. این کار را برای تمام دایره به همان مرکز که داخل دایره به شعاع r قرار می‌گیرند نیز انجام دهید. به سادگی می‌توان دید که پاره‌خط‌های گسترده شده تشکیل مثلی به ارتفاع h و طول قاعده $2\pi r$ می‌دهند. فرض یکی بودن مساحت دایره و مثلث ساخته شده، که مبتنی بر تقسیم‌ناپذیری‌های کاوالی‌پری است، فرمول مساحت دایره را به دست می‌دهد. در اصل، می‌توان نشان داد که تابعی اندازه‌پذیر و حافظ اندازه از مثلث به دایره وجود دارد که پاره‌خط‌های موازی با قاعده مثلث را به دایره هم‌مرکز تصویر می‌کند و تحدید آن به هر پاره‌خط نیز نگاشتی حافظ طول است (پیدا کردن ضابطه تابع اندازه‌نگهدار شکل ۵ که مثلث را به دایره تصویر کند و تحدید آن به هر خط افقی حافظ طول باشد دشوار نیست).

وجود چنین نگاشتی بسیار مهم است زیرا مثال‌های پارادوکس‌گونه‌ای مانند شکل ۶ را بی‌اعتبار می‌کند (در غیر این صورت می‌شد چند فرمول نادرست برای محیط بیضی به دست آورد!). در واقع،

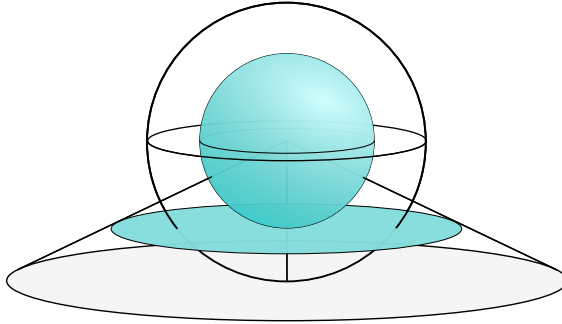


شکل ۶. فرمول‌های نادرست برای محیط بیضی. با تکرار روش مشابه برای محیط دایره در این شکل‌ها نسبت محیط بیضی به π برابر یکی از دو قطر بیضی خواهد شد!

آنچه مثال شکل ۶ را از شکل ۵ متمایز می‌کند این است که در مثال بیضی، برخلاف دایره، نمی‌توان تابعی حافظ اندازه از بیضی به مثلث پیدا کرد به طوری که بیضی‌های هم‌مرکز را به پاره‌خط‌های موازی تصویر کند و روی هر یک حافظ طول باشد.

با همین روش اگر سطح جانبی کره‌ای به شعاع r را به صورت دایره‌ای به شعاع s گسترده

کنیم، با به کارگیری فرمول حجم کره، که در بخش قبل به دست آوردیم، می‌توانیم سطح جانبی کره را محاسبه کنیم. در اینجا نیز تابعی اندازه‌پذیر از مخروط به نیم‌گوی سه‌بعدی وجود دارد که دایره‌های موازی قاعدهٔ مخروط را به نیمکره‌های هم‌مرکز تصویر می‌کند و تحدید آن به هر دایره حافظ مساحت است (شکل ۷).



شکل ۷. محاسبهٔ سطح جانبی کره

۳ قضیهٔ فوبینی و برگ‌بندی‌ها

۱.۳ قضیهٔ فوبینی در فضای اقلیدسی

قضیهٔ فوبینی برای صفحه حاکی از این است که می‌توان مساحت هر شکل اندازه‌پذیر کران‌دار در صفحه را با انتگرال‌گیری از اندازهٔ یک‌بعدی تقاطع‌های آن شکل با خطوط موازی در یک راستای خاص به دست آورد. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید A زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر و کران‌دار از \mathbb{R}^2 باشد و تعریف کنید $A_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$. با توجه به این تعریف، اگر اندازهٔ لُیگ یک‌بعدی و دوبعدی را به ترتیب با نماد m_1 و m_2 نمایش دهیم خواهیم داشت:

قضیهٔ فوبینی. اگر A زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر و کران‌دار از \mathbb{R}^2 باشد، آنگاه برای تقریباً هر $y \in \mathbb{R}$ داریم

- (۱) مجموعهٔ A_y زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از خط حقیقی است؛
- (۲) تابع $y \mapsto m_1(A_y)$ تابعی انتگرال‌پذیر است؛
- (۳) علاوه بر این‌ها داریم $m_2(A) = \int_{\mathbb{R}} m_1(A_y) dy$.

طریقهٔ اثبات این قضیه، مشابه بسیاری از استدلال‌ها در نظریهٔ اندازه، استدلالی گام‌به‌گام است:

در ابتدا حکم را برای مجموعه‌های ساده اثبات می‌کنیم و سپس با تقریب مجموعه‌اندازه‌پذیر دلخواه با اجتماع این مجموعه‌های ساده (و نشان دادن اینکه حکم برای اجتماع این مجموعه‌ها نیز برقرار است) حکم را در کلی‌ترین حالت نتیجه می‌گیریم. حکم قضیه فوبینی در مورد مجموعه‌های حاصل‌ضربی (مجموعه‌هایی به صورت $A_1 \times A_2$) بدیهی است و چون سیگما جبر همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر در صفحه توسط مجموعه‌های حاصل‌ضربی تولید می‌شود، حکم برای هر مجموعه‌اندازه‌پذیر دلخواه اثبات می‌شود.

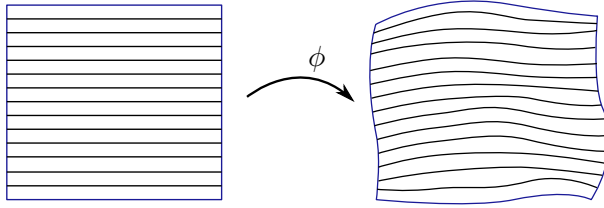
شایان ذکر است که قضیه فوبینی صورتی مشابه در مورد توابع انتگرال‌پذیر نیز دارد که طبق آن می‌توان انتگرال یک تابع انتگرال‌پذیر در صفحه را در دو مرحله، ابتدا با انتگرال‌گیری روی خط‌های افقی و سپس با انتگرال‌گیری از اعداد حاصل در راستای عمودی، به دست آورد. توجه کنید که در قضیه فوبینی شرط اندازه‌پذیری مجموعه اولیه شرطی اساسی است و می‌توان مثالی از زیرمجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر از مربع یک‌پیدا کرد که هر پاره‌خط عمودی در مربع یک‌ه را در تعداد متناهی نقطه ولی هر پاره‌خط افقی را در مکمل تعداد متناهی نقطه قطع می‌کند؛ توضیحات بیشتر در [۱۹].

برای تعمیم قضیه فوبینی سؤال طبیعی این است که حکم این قضیه تا چه اندازه به افزایش صفحه به خطوط موازی وابسته است و آیا روش مشابهی برای محاسبه اندازه یک مجموعه دوبعدی از طریق افزایش دیگر صفحه به منحنی‌های یک‌بعدی، به‌عنوان جایگزینی برای افزایش به خط‌های موازی، نیز برقرار است؟ می‌توان بعضی احکام بخش قبل را برحسب برگ‌بندی به دایره یا کره‌ها به دست آورد.

۲.۳ برگ‌بندی‌ها

برای یافتن افزایشی از صفحه به‌صورت خم‌هایی که موضعاً شبیه به خط‌های موازی به نظر برسند می‌توان تصویر افزایش بر حسب خط‌ها را تحت یک تابع (پیوسته) در نظر گرفت. فرض کنید ϕ : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک همسان‌ریختی از صفحه باشد. در این صورت خانواده $\{\phi(\mathbb{R} \times \{x\})\}_{x \in \mathbb{R}}$ افزایشی از صفحه بر حسب خم‌ها را به دست می‌دهد (شکل ۸). به چنین افزایشی که موضعاً شبیه خط‌های موازی اند «برگ‌بندی» گفته می‌شود. برگ‌بندی‌های را در هر بعدی می‌توان روی خمینه‌های هموار تعریف و بررسی کرد؛ برای تعریف دقیق مفهوم برگ‌بندی به [۸] مراجعه کنید. در یک برگ‌بندی به هریک از اعضای افزایش اصطلاحاً یک «برگ»^۱ از برگ‌بندی گفته می‌شود. در ادامه،

^۱leaf



شکل ۸. تصویر برگ‌بندی به خط‌های موازی تحت یک تابع پیوسته

برگ‌گذرنده از نقطه x در برگ‌بندی \mathcal{F} را با نماد \mathcal{F}_x نمایش می‌دهیم. همچنین اگر برگ \mathcal{F}_x هموار باشد از نماد $m_{\mathcal{F}_x}$ برای نمایش اندازه طبیعی روی آن استفاده می‌کنیم. قبل از پرداختن به احکام مشابه با قضیه فوبینی برای برگ‌بندی‌ها چند مثال از برگ‌بندی‌ها را می‌آوریم.

مثال ۱.۳. ساده‌ترین مثال برای برگ‌بندی، برگ‌بندی به خط‌های موازی در راستای یک بردار معین مثل \vec{v} در صفحه است.

مثال ۲.۳. اگر برگ‌بندی مثال قبل را با تابع خارج‌قسمتی طبیعی $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ روی چنبره تصویر کنیم یک برگ‌بندی برای چنبره دوبعدی به دست می‌آید.

مثال ۳.۳. کره‌های به مرکز مبدأ و شعاع‌های مختلف یک برگ‌بندی برای $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ است.

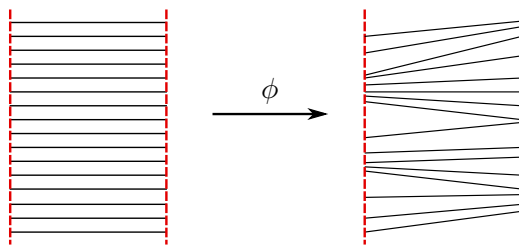
مثال ۴.۳. فرض کنید $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همسان‌ریختی صعودی از اعداد حقیقی باشد. با استفاده از این تابع، برگ‌بندی \mathcal{F} روی $\mathbb{R} \times [0, 1]$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که تصویر برگ‌بندی نوار $\mathbb{R} \times [0, 1]$ به پاره‌خط‌های موازی افقی تحت تابع پیوسته $\Psi: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ با ضابطه

$$\Psi(t, x) := (t, t\psi(x) + (1-t)x)$$

تعیین شود. برگ‌های این برگ‌بندی پاره‌خط‌هایی هستند که نقطه $(x, 0)$ را به نقطه $(1, \psi(x))$ وصل می‌کنند (شکل ۹).

۳.۳ پیوستگی مطلق برگ‌بندی‌ها

دسته‌ای از برگ‌بندی‌ها را که مشابه قضیه فوبینی برای آن‌ها برقرار است «برگ‌بندی مطلقاً پیوسته» می‌گویند. یکی از نتایج قضیه فوبینی در صفحه این است که هر مجموعه اندازه‌پذیر با اندازه صفر



شکل ۹. برگ بندی وابسته به یک همسان ریختی صعودی از اعداد حقیقی

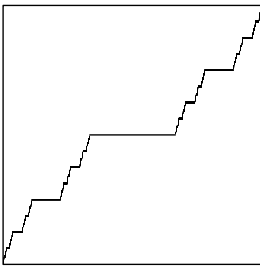
تقریباً هر خط عمودی را در مجموعه‌ای با اندازه صفر قطع می‌کند. به بیان دیگر، اگر برگ بندی صفحه به خط‌های عمودی را در نظر بگیریم می‌توان گفت که اشتراک هر مجموعه اندازه صفر با «تقریباً هر برگ» از برگ بندی مجموعه‌ای با اندازه صفر است. مشکلی که در تعمیم این مطلب به برگ بندی‌ها وجود دارد مفهوم «تقریباً هر برگ» است و اینکه نسبت به چه اندازه‌ای روی فضای برگ‌ها سنجیده شود. یک راه طبیعی برای تعریف این مفهوم آن است که خم همواری را در نظر بگیریم که برگ‌های برگ بندی را به طور متقاطع^۱ قطع می‌کند و از آن به عنوان ابزاری برای معنی دادن به اصطلاح «تقریباً هر برگ» استفاده کنیم. یعنی اینکه هر مجموعه از برگ‌ها را که نقاط اشتراکشان با این خم متقاطع با اندازه صفر باشد (نسبت به اندازه طول روی این خم) به عنوان مجموعه ناچیز و با اندازه صفر از برگ‌ها تلقی کنیم. مسئله طبیعی که در این تعریف پیش می‌آید آن است که مجموعه‌ای از برگ‌ها که دارای اندازه صفر است چقدر خوش تعریف است؟ به بیان دیگر، آیا در نظر گرفتن خم‌های متقاطع متفاوت برای برگ بندی، مجموعه‌های یکسانی با اندازه صفر از برگ‌ها معین می‌کنند؟ آیا می‌توان وضعیتی را تصور کرد که برای دو خم متقاطع مانند L و L_1 اشتراک مجموعه‌ای از برگ‌ها با L دارای اندازه صفر و با L_1 دارای اندازه مثبت باشد؟

این موضوع با مفهومی در آنالیز ریاضی با نام «مطلقاً پیوستگی» ارتباط تنگاتنگی پیدا می‌کند. برای تعریف دقیق توابع مطلقاً پیوسته می‌توانید به [۱۹] یا هر کتاب دیگری درباره آنالیز ریاضی مراجعه کنید. توابع هموار یا لیپ‌شیتس مثال‌هایی از توابع مطلقاً پیوسته‌اند. از ویژگی‌های تابع مطلقاً پیوسته یکی این است که پیوسته (و پیوسته یکنواخت) است، همچنین چنین تابعی مجموعه‌های با اندازه صفر را به مجموعه‌های با اندازه صفر تصویر می‌کند.

مثال مشهوری از تابعی پیوسته که مطلقاً پیوسته نیست تابع «پلکان شیطان»^۲ است؛ برای

^۱transversal ^۲Devil's staircase

جزئیات بیشتر می‌توانید مثلاً به [۱۹] مراجعه کنید. این تابع روی هر مولفه همبندی از مکمل مجموعه کانتور ثابت است، ولی بازه $[0, 1]$ را به‌طور پیوسته به خودش تصویر می‌کند. می‌دانیم هر نقطه از مجموعه کانتور را می‌توان به صورت $x = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} x_i$ نوشت که در آن x_i برابر ۰ یا ۲ است. تابع پلکان شیطان این نقطه را به نقطه $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} x_i$ تصویر می‌کند (شکل ۱۰). به‌سادگی دیده می‌شود که با این تعریف، تصویر دو نقطه انتهایی هر بازه در مکمل مجموعه کانتور تحت ضابطه بالا با هم برابر است و تابع روی این بازه برابر همان مقدار ثابت تعریف می‌شود. به‌سادگی می‌توان دید که این تابع روی بازه $[0, 1]$ پوشاست و تصویر مجموعه کانتور برابر کل بازه $[0, 1]$ است. به‌این‌ترتیب مجموعه‌ای با اندازه صفر به مجموعه‌ای با اندازه مثبت تصویر می‌شود و بنابراین این تابع مطلقاً پیوسته نیست.



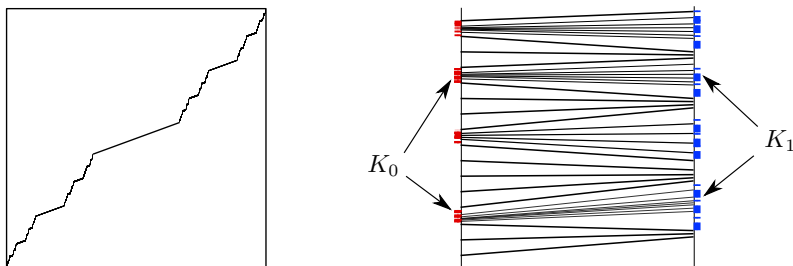
شکل ۱۰. تابع پلکان شیطان

به‌طورمشابه، می‌توان همسان‌ریختی صعودی ψ از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ را ساخت با این خاصیت که مجموعه کانتور با اندازه صفر، K ، را به مجموعه‌ای از نوع کانتور با اندازه نزدیک به ۱ مانند K_1 تصویر کند (به‌وضوح تابع ψ با این ویژگی مطلقاً پیوسته نیست).

اینک به کمک این تابع و روش گفته‌شده در مثال ۴.۳ می‌توان مثالی از برگ‌بندی‌هایی ارائه کرد که مفهوم «با اندازه صفر بودن» که در بالا تعریف کردیم برای آن‌ها خوش‌تعریف نیست.

در این برگ‌بندی اگر دو خم متقاطع $L = \{0\} \times [0, 1]$ و $L_1 = \{1\} \times [0, 1]$ را در نظر بگیرید، اشتراک برگ‌هایی که متناظر با دو مجموعه کانتورند با یکی از آن‌ها مجموعه‌ای با اندازه صفر و با دیگری مجموعه‌ای با اندازه مثبت به دست می‌دهد. برای برگ‌بندی‌هایی شبیه به این، با اندازه صفر بودن مجموعه‌ای از برگ‌ها به انتخاب خم متقاطع بستگی دارد و به این روش نمی‌توان مفهومی خوش‌تعریف برای اندازه‌صفر بودن برگ‌ها ارائه کرد. توجه کنید که برگ‌بندی‌هایی شبیه به برگ‌بندی بر حسب خط‌های افقی در صفحه یا تصویر آن تحت توابع هموار این مشکل را ندارند و مفهوم از اندازه صفر بودن برحسب اشتراک با خم‌های هموار متقاطع مختلفی تغییری نمی‌کند؛ به این نوع برگ‌بندی اصطلاحاً برگ‌بندی‌های «مطلقاً پیوسته در راستای متقاطع»^۱ می‌گویند. می‌توان دید که این شرط برای برقراری نظیر قضیه فوبینی در این حالت شرطی قوی است و می‌توان تعریف

^۱transversely absolutely continuous



شکل ۱۱. راست، هسمان‌ریختی صعودی که یک مجموعه کانتور با اندازه صفر را به مجموعه‌ای با اندازه مثبت تصویر می‌کند؛ چپ، نمودار تابع وابسته به شکل سمت راست

(ضعیف‌تر) زیر را به‌عنوان تعمیم قضیه فویننی برای برگ‌بندی‌ها ارائه کرد.

تعریف. برگ‌بندی \mathcal{F} از صفحه را مطلقاً پیوسته می‌گوییم اگر برای هر خم همواری مانند L که به‌طور متقاطع برگ‌بندی را قطع می‌کند و هر $x \in L$ تابع اندازه‌پذیر $\delta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر مجموعه اندازه‌پذیر A داشته باشیم

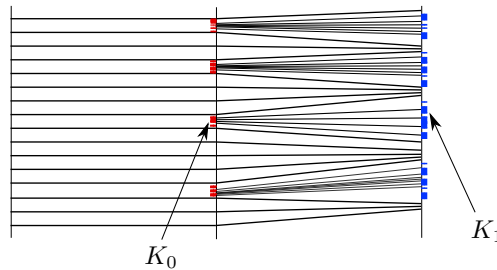
$$m_{\mathcal{F}}(A) = \int_L \int_{\mathcal{F}_x} \mathbf{1}_A(x, y) \delta_x(y) dm_{\mathcal{F}_x}(y) dm_L(x)$$

که در آن $\mathbf{1}_A$ تابع مشخصه مجموعه A است.

برای اثبات اینکه هر برگ‌بندی مطلقاً پیوسته در راستای متقاطع به معنایی که گفتیم هم مطلقاً پیوسته است فصل ۷ از [۷] را مطالعه کنید. برگ‌بندی‌های مطلقاً پیوسته، خصوصاً، دارای این خاصیت‌اند که هر مجموعه با اندازه صفر تقریباً هر برگ را در مجموعه‌ای با اندازه صفر قطع می‌کند. برگ‌بندی‌های مثال‌های ۱۰.۳، ۲۰.۳، و ۳۰.۳ در راستای متقاطع مطلقاً پیوسته‌اند. برگ‌بندی حاصل در مثال ۴۰.۳ برای هر تابع پیوسته ψ مطلقاً پیوسته است ولی لزوماً مطلقاً پیوسته در راستای متقاطع نیست. می‌توان نشان داد که این برگ‌بندی در راستای متقاطع مطلقاً پیوسته است اگر و تنها اگر تابع ψ مطلقاً پیوسته باشد (خواننده برای تمرین می‌تواند ثابت کند که برای $\epsilon > 0$ تحدید این برگ‌بندی به نوار $(\epsilon, 1)$ یک برگ‌بندی مطلقاً پیوسته در راستای متقاطع است).

مثال ۵.۳. اکنون با ترکیب برگ‌بندی استاندارد بر حسب خط‌های موازی و برگ‌بندی با استفاده از یک تابع مطلقاً ناپیوسته مثالی از برگ‌بندی می‌آوریم که حتی با تعریف اخیر هم مطلقاً پیوسته نیست.

فرض کنید K_0 و K_1 به ترتیب دو مجموعه از نوع کانتور در بازه $[0, 1]$ باشند و اندازه K_0 برابر صفر و اندازه K_1 عددی مثبت باشد. همسان‌ریختی $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ وجود دارد به طوری که $\psi(K_0) = K_1$. با استفاده از این تابع، برگ‌بندی زیر را روی مستطیل $[0, 1] \times [-1, 1]$ تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که روی مربع $[0, 1] \times [-1, 0]$ همان برگ‌بندی بر حسب خط‌های موازی افقی و در مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ برگ‌بندی گفته‌شده در مثال ۴.۳ به‌ازای تابع ψ است.

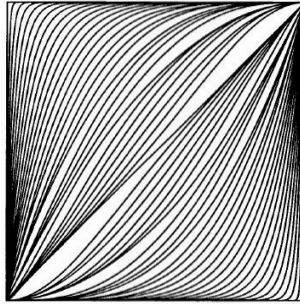


شکل ۱۲. مثالی از یک برگ‌بندی‌ای که مطلقاً پیوسته نیست.

۴ مثال کاتوک

همان‌طور که در بخش مقدمه گفته شد اولین مثال مکتوب از برگ‌بندی‌های پارادوکس‌گونه به کاتوک بر می‌گردد که میلنر آن را در سال ۱۹۹۷ در [۱۴] به زیبایی شرح داده است. در این روش با تکیه بر رفتار حدی دنباله‌هایی از پرتاب سکه‌های آریب با احتمال‌های متفاوت، یک برگ‌بندی برای مربع یکه به دست می‌آید که در حکم قضیه فوبینی صدق نمی‌کند. خوشبختانه ترجمه‌ای دقیق از این مقاله قبلاً در [۳] منتشر شده است. از آنجایی که ممکن است این ترجمه در دسترس نباشد در این بخش قسمت‌هایی از آن را، که برای فهم ادامه مطالب لازم است، ذکر خواهیم کرد. هدف ما در این بخش اثبات حکم زیر است.

مجموعه اندازه‌پذیر E با مساحت واحد در مربع یکه به همراه خانواده‌ای از خم‌های هموار و مجزا از هم Γ_β که این مربع را پر می‌کنند وجود دارند به طوری که هر خم Γ_β مجموعه E را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.



شکل ۱۳. برگ‌بندی مثال کاتوک [۱۴]

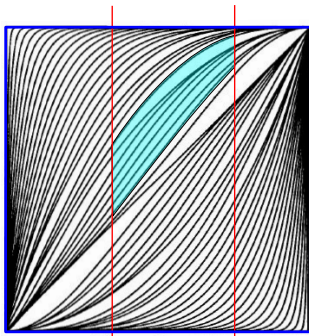
آناتولی کاتوک (۲۰۱۸-۱۹۴۴) ریاضی‌دان سرشناس روسی-آمریکایی بود. وی دکترای خود را در سال ۱۹۶۸ در دانشگاه مسکو زیر نظر یاکوب سینای^۱ (ریاضی‌دان برجسته روس و برندهٔ جایزه آبل سال ۲۰۱۴) گرفت. دستاوردهای کاتوک در زمینه‌های مختلف سیستم‌های دینامیکی و نظریهٔ ارگودیک تأثیرات مهمی در پیشرفت‌های این شاخه داشته است. برای ذکر نمونه‌هایی می‌توان به اثبات وجود نعل اسب برای نگاشت‌های دارای آنتروپی مثبت در دینامیک‌های دوبعدی، مطالعاتی در رفتار ارگودیک عمل هموار گروه‌های مختلف روی خمینه‌ها، ابداع روشی موسوم به آناسوف-کاتوک برای ساختن نگاشت‌های هموار با ویژگی‌های دینامیکی دور از انتظار، و احکامی در زمینهٔ حدس لیتلود و تقریب‌های دیوفانتوسی اعداد اشاره کرد. مثال برگ‌بندی‌های تناقض‌گونه که در این بخش از مقاله به آن می‌پردازیم متعلق به اوست. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد زندگی و آثار او به [۱۱] مراجعه کنید.

به عبارت دیگر، می‌توان با انتخاب حداکثر یک نقطه از هر خم Γ_β می‌توان مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ دوبعدی برابر ۱ ساخت. روش ساخت کاملاً صریح و طبیعی است. خم‌های مورد نظر به‌طور پیوسته به پارامتر $t \in [0, 1]$ وابسته‌اند. توجه کنید که این حکم با شهود ما در تناقض است! زیرا شهود ما با قضیهٔ فوبینی یا همان اصل کاوالی‌پری سازگارتر است. اما مشکل از کجاست؟ نخست، اگر خم‌ها نسبت به t به‌طور هموار یا مطلقاً پیوسته تغییر کنند آنگاه از قضیهٔ فوبینی نتیجه می‌شود که مجموعهٔ E با اندازهٔ کامل (برابر ۱) باید تقریباً هریک از خم‌ها را در مجموعه‌ای با اندازهٔ کامل قطع کند. بنابراین مشکل در نوع وابستگی خم‌ها به پارامتر t است.

درواقع، مثال کاتوک نشان می‌دهد که اگر بخواهیم حکمی شبیه به قضیهٔ فوبینی برقرار باشد نمی‌توان شرط پیوستگی مطلق را به پیوستگی تقلیل داد.

برای تعمیم قضیهٔ فوبینی شرط پیوستگی کافی نیست، بلکه برگ‌بندی باید مطلقاً پیوسته باشد.

^۱Y. Sinai



شکل ۱۴. تابع بین دو پاره‌خط عمودی به کمک اشتراک با منحنی‌ها

اجازه دهید دوباره به مثال کاتوک نگاهی بیندازیم. برای هر دو مقدار p و q نگاشت $f_{p,q}$ از پاره‌خط $p \times [0, 1]$ به $q \times [0, 1]$ تعریف می‌شود به این صورت که نقاطی که روی یک خم‌اند به هم تصویر می‌شوند (شکل ۱۴). از طرفی بنا بر قضیه فوبینی (برای برگ‌بندی خط‌های عمودی) برای تقریباً هر p و q اشتراک مجموعه E با $p \times [0, 1]$ و $q \times [0, 1]$ دارای اندازه لبگ یک‌بعدی کامل است. چون هر خم مجموعه E را در یک نقطه قطع می‌کند، نگاشت $f_{p,q}$ نمی‌تواند مطلقاً پیوسته باشد.

در ساختن مثال کاتوک از قانون قوی اعداد بزرگ^۱ در نظریه احتمالات استفاده می‌شود، پس ابتدا آن را یاد آوری می‌کنیم.

قانون قوی اعداد بزرگ فرض کنید سکه‌ای داریم که در یک سمت آن عدد ۰ و در سمت دیگر عدد ۱ نوشته شده است و سکه طوری است که در پرتاب آن با احتمال $p(0) = p$ عدد صفر ظاهر می‌شود (و بنابراین با احتمال $p(1) = 1 - p$ عدد یک ظاهر می‌شود). با پرتاب متوالی (مستقل) این سکه دنباله‌ای از ارقام صفر و یک به دست می‌آید و احتمال اینکه در n گام دنباله مفروض b_1, b_2, \dots, b_n از صفر و یک‌ها به‌عنوان نتیجه ظاهر شود به دلیل استقلال پرتاب‌ها از یکدیگر برابر $p(b_1)p(b_2) \dots p(b_n)$ است.

یاکوب برنولی^۲ ۳۰۰ سال پیش نشان داد که «معمولاً» نسبت تعداد یک‌ها بعد از این n گام پرتاب سکه، یعنی نسبت مقدار $(b_1 + \dots + b_n)/n$ با بزرگ‌شدن n به $p(1)$ نزدیک می‌شود. امیل بورل^۳ این نتیجه را به این صورت دقیق‌تر کرد. فرمول بالا برای احتمال رخ دادن دنباله‌ای متناهی از صفر و یک‌ها اندازه‌ای روی فضای همه دنباله‌های نامتناهی مرکب از صفر و یک $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ تعریف می‌کند که به آن اندازه برنولی (وابسته به $p(0)$ و $p(1)$) گفته می‌شود. بورل نشان داد که برای زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ با اندازه ۱ حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

وجود دارد و برابر $p(1)$ است. به این حد در صورت وجود چگالی تعداد یک‌ها در دنباله (b_1, b_2, \dots)

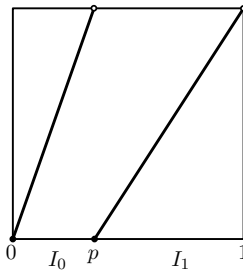
^۱strong law of large numbers ^۲J. Bernoulli (1654-1705) ^۳É. Borel (1871-1956)

می‌گوییم.

می‌توان با استفاده از روشی متداول در دستگاه‌های دینامیکی، که در ادامه خواهد آمد، این نتیجه را فقط به کمک متغیرهای حقیقی بیان کرد. برای $p \in (0, 1)$ نگاشت $f_p(x)$ را با ضابطه زیر روی بازه $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم (شکل ۱۵)

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{x}{p} & x \in I_0 = [0, p) \\ \frac{x-p}{1-p} & x \in I_1 = [p, 1) \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که f_p تابعی حافظ اندازه روی $[0, 1]$ تعریف می‌کند به این معنی که برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر $J \subseteq [0, 1]$ اندازه $f_p^{-1}(J)$ برابر اندازه J است.



شکل ۱۵. نمودار $f_p(x)$

برای مقدار مفروض p ، با استفاده از تابع $f_p(x)$ می‌توان دنباله‌ای نامتناهی از ارقام صفر و یک را به هر $x \in [0, 1)$ به صورت زیر نسبت داد. فرض کنید $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \dots$ دنباله تصویرهای x تحت اثر تابع f_p باشد (یعنی $x_n = f_p^n(x)$)؛ اگر x_n در بازه I_0 قرار داشت رقم n ام دنباله را برابر صفر و اگر در بازه I_1 قرار داشت رقم n ام دنباله را برابر یک تعریف می‌کنیم. حالا می‌توان نشان داد که اگر (b_1, b_2, \dots) دنباله وابسته به x باشد، (b_2, b_3, \dots) دنباله وابسته به $f_p(x)$ است.

اکنون می‌توان قانون قوی اعداد بزرگ را به صورت زیر بیان کرد.

برای هر مقدار مفروض p ، تقریباً برای هر $x \in [0, 1)$ (نسبت به اندازه لبگ روی بازه) چگالی تعداد یک‌ها در دنباله‌ای که به صورت بالا به نقطه x نسبت داده می‌شود برابر $1-p$ است.

ساختن مثال کاتوک حال می‌توانیم مجموعه مورد نظر را تعریف کنیم. زیرمجموعه E از $[0, 1) \times (0, 1)$ را متشکل از همه نقاط به شکل (p, x) در نظر بگیرید که چگالی تعداد یک‌ها در دنباله نظیرشده به x با استفاده از تابع f_p برابر $1-p$ باشد.

می‌توان دید که E یک زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. از بخش ۴ نتیجه می‌شود که اندازه یک‌بعدی تقاطع مجموعه E با پاره‌خط عمودی $\{p\} \times [0, 1)$ برابر یک است و لذا طبق قضیه فوبینی مساحت مجموعه E برابر یک است. یعنی E تقریباً همه نقاط مربع یک‌ه را در بر دارد. در

ادامه می‌خواهیم مربع یکه را با خانواده‌ای از خم‌های هموار افراز کنیم.

برای پارامتر β در $(0, 1)$ فرض کنید بسط β در پایه دو به صورت زیر باشد

$$\beta = (0.b_1 b_2 \dots)_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

مجموعه همه (p, x) ها در $(0, 1) \times (0, 1)$ را با این شرط که دنباله نظیرشده به x با استفاده از f_p برابر (b_1, b_2, \dots) باشد Γ_β بنامید. به‌وضوح Γ_β ها مجموعه $(0, 1) \times (0, 1)$ را افراز می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که برای هر β, Γ_β خمی هموار است. برای این منظور دقت کنید که اگر $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots$ دنباله تصاویر نقطه x تحت تابع f_p باشد، آنگاه

$$x_n = b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n).$$

با استقرا روی n خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x &= x_1 = x(p, \beta) \\ &= p(0)b_1 + p(b_1)x_2 \\ &= p(0)b_1 + p(b_1)(b_2 p(0) + x_3 p(b_2)) \\ &= p(0)(b_1 + b_2 p(b_1) + b_3 p(b_1)p(b_2) + b_4 p(b_1)p(b_2)p(b_3) + \dots) \end{aligned}$$

حالا t را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $p(0) = p = (1+t)/2$ و $p(1) = 1-p = (1-t)/2$. اگر $1 < c < |t| \leq c < 1$ آن وقت، $[(1+c)/2]^n$ کران بالا برای n امین جمله در عبارت بالاست. بنابراین سری مذکور مطلقاً همگراست (حتی با جانشانی مقادیر مختلط $c \leq |t|$ هم این گزاره درست است). بنابراین با استفاده از قضیه همگرایی یکنواخت و ایرشتراس، برای هر مقدار دلخواه β عبارت بالا تابعی تحلیلی از t روی $|t| < 1$ تعریف می‌کند (همچنین یک تابع تحلیلی از p روی بازه $(0, 1)$ نیز تعریف می‌کند). پس Γ_β که نمودار تابع تحلیلی $x(p, \beta) \mapsto p$ است یک خم تحلیلی در مربع یکه است. توجه داشته باشید که هر دنباله (b_1, b_2, \dots) از ارقام صفر و یک می‌تواند حداکثر یک مقدار حدی به صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + \dots + b_n)/n = 1 - p$ داشته باشد. پس هر Γ_β مجموعه E را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند، که همان نقطه $(p, x(p, \beta))$ است.

۵ فراوانی پدیده پارادوکس‌گونه کاتوک در دستگاه‌های دینامیکی

دستگاه‌های دینامیکی شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن رفتار درازمدت نقاط تحت اثر یک تابع

از یک مجموعه به خودش مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش بزرگی از این شاخه به مطالعه دستگاه‌های حاصل از نگاشت‌های هموار روی خمینه‌ها اختصاص دارد. در چنین حالتی وجود یک برگ‌بندی از فضا که تحت دینامیک ناوردا^۱ باشد نقش کلیدی در فهم آن دستگاه دینامیکی دارد. منظور از ناوردا بودن یک برگ‌بندی تحت اثر یک تابع این است که تصویر هر برگ تحت آن تابع، برگ دیگری از همان برگ‌بندی باشد.

قضیه‌های بسیاری برای تضمین وجود برگ‌بندی‌های ناوردا برای دستگاه‌هایی که ویژگی‌های خاصی را برآورده می‌کنند وجود دارد. دسته‌ای از دستگاه‌های دینامیکی که نقش مهمی در این شاخه دارند و از برگ‌بندی‌های ناوردا در مطالعه آن بسیار استفاده می‌شود به دستگاه‌های هذلولوی^۲ مشهورند. مثال ساده‌ای از چنین دستگاه‌هایی را می‌آوریم. ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای دو ویژه‌مقدار حقیقی مثبت، یکی بزرگ‌تر و دیگری کوچک‌تر از یک، است. به راستای ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار بزرگ‌تر و کوچک‌تر از یک، به ترتیب، راستای دافع و جاذب گفته می‌شود. اگر عمل طبیعی این ماتریس روی صفحه را در نظر بگیریم خط‌های موازی راستای جاذب، یک برگ‌بندی ناوردا برای عمل این تابع به دست می‌دهد. اگر دو نقطه روی یک خط موازی راستای جاذب را در نظر بگیریم تصویر آن‌ها باز هم روی یک خط موازی همین راستا قرار می‌گیرد که تصویرشان به هم نزدیک‌تر شده است (درواقع، فاصله‌ها در راستای جاذب در طی هر عمل تابع در ویژه‌مقدار با قدرمطلق کمتر از واحد ضرب می‌شود).

ویژگی جالب‌توجه دیگر این ماتریس، درایه‌های صحیح آن است که موجب می‌شود نقاط با مختصات صحیح تحت اثر آن به نقاط با مختصات صحیح نگاشته شوند. بنابراین به‌سادگی دیده می‌شود که این ماتریس یک نگاشت طبیعی خوش‌تعریف روی خارج‌قسمت $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ تعریف می‌کند که به‌طور طبیعی با چنبره دوبعدی یک‌ریخت است. عمل این ماتریس را، که یک نگاشت هموار روی چنبره است، با f_A نمایش می‌دهیم:

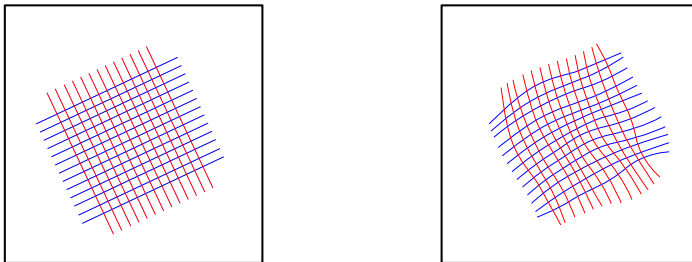
$$f_A(x, y) = (2x + y, x + y) \quad (\text{به پیمانه } 1).$$

تصویر برگ‌بندی‌های گفته‌شده در بالا تحت اثر تابع خارج‌قسمتی $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ دو برگ‌بندی

¹invariant ²hyperbolic systems

ناوردا تحت تابع f_A روی چنبره به دست می‌دهد که خواص جذب و دفع مشابهی برای نقاط روی برگ‌های این برگ‌بندی‌ها برقرار است (مثال ۲.۳ را ببینید). البته به راحتی می‌توان دید که برای هر ماتریس 2×2 مانند B با درایه‌های صحیح و دترمینان ۱ که اثر آن از ۲ بیشتر باشد، B تابع خوش‌تعریفی روی $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ تعریف می‌کند و برگ‌بندی‌های معرفی‌شده در بالا برای B نیز قابل تعریف است و همیشه برگ‌بندی‌هایی که به این شکل ساخته می‌شوند، برگ‌بندی‌های موازی یک راستای با شیب گنگ در چنبره‌اند.

توجه کنید که اگر در بین همهٔ هموارریختی‌های^۱ چنبره اختلال کوچکی از f_A را در نظر بگیریم و آن را g بنامیم به طوری که در هر نقطه، تصویر تحت g و مشتق تحت تابع g به مقدار کافی به تصویر تابع و مشتق آن تحت تابع f_A نزدیک باشد (که اصطلاحاً گفته می‌شود دو تابع f_A و g در توپولوژی C^1 به هم نزدیک‌اند)، نگاشت g مشابه f_A در هر نقطه دارای دو راستای دافع و جاذب است و می‌توان نشان داد که برای g نیز برگ‌بندی‌های ناوردایی یافت می‌شود که در هر نقطه بر راستای‌های دافع و جاذب مماس باشند. برگ‌بندی مربوط به نگاشت g برخلاف برگ‌بندی اولیه برای f_A برگ‌بندی حاصل از خط‌های موازی نیست (شکل ۱۶) بلکه توسط خم‌های همواری ساخته می‌شود. نکتهٔ جالب توجهی که در اثبات بسیاری از احکام برای اختلال‌های کوچک تابع f_A نقش



شکل ۱۶. چپ، بخشی از برگ‌بندی متناظر با راستای جاذب و دافع در یک نگاشت خطی هذلولوی چنبره؛ راست، بخشی از برگ‌بندی متناظر در یک اختلال کوچک همان نگاشت

اساسی دارد این است که اگر g تابعی از ردهٔ C^1 باشد این دو برگ‌بندی مطلقاً پیوسته‌اند [۵]. ویژگی دینامیکی (جذب و دفع) برای این دو برگ‌بندی نقش مهمی در پیوستگی مطلق این دو برگ‌بندی دارد. به این ترتیب، دستهٔ بزرگی از برگ‌بندی‌های دینامیکی دارای ویژگی پیوستگی مطلق‌اند. مسئلهٔ هموار بودن برگ‌بندی‌های دینامیکی اهمیت زیادی در مطالعات رفتار نگاشت‌ها در دستگاه‌های دینامیکی و نظریهٔ ارگودیک دارد. مثلاً، پیوستگی مطلق برگ‌بندی حاصل از خمینه‌های پایدار [۵]

^۱diffeomorphism

نقشی کلیدی در اثبات ارگودیک بودن نگاشت g و همچنین اثبات آناسوف^۱ از ارگودیک بودن شار ژئوزدیک خمینه‌های هموار با انحنای منفی (یا به‌طور کلی شارهای هذلولوی حافظ حجم) ایفا کرده است [۴].

درمقابل، تحولات چشمگیر و مهم اخیر در نظریه ارگودیک روشن ساخته است که دسته‌های بزرگی از دستگاه‌های دینامیکی برگ‌بندی‌های ناوردای پارادوکس‌گونه دارند. مثلاً، هموارریختی F روی چنبره سه‌بعدی $(\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1)$ را در نظر بگیرید که مؤلفه اول و دوم آن نگاشت f_A قرار دارد و در مؤلفه سوم به صورت همانی اثر کند:

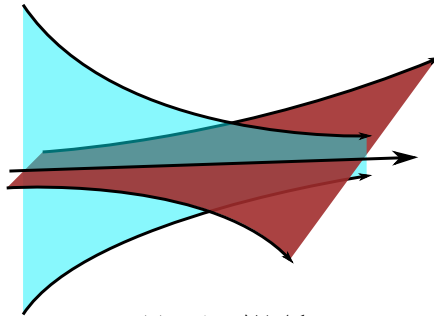
$$F(x, y, z) = (2x + y, x + y, z) \quad (\text{به پیمانۀ } 1).$$

این نگاشت به شکلی طراحی شده است که مشتق آن علاوه بر ویژه‌مقدارهای کمتر و بزرگ‌تر از یک، یک ویژه‌مقدار برابر ۱ داشته باشد (که ویژه‌بردار آن در جهت $(0, 0, 1)$ است). اگر برگ‌بندی چنبره به دایره‌های $\mathbb{S}^1 \times \{(x_0, y_0)\}$ را در نظر بگیریم، تصویر هر برگ از این برگ‌بندی تحت F دقیقاً برابر برگ دیگری است و تابع F روی هریک از برگ‌ها به‌صورت طولپایی عمل می‌کند (برخلاف برگ‌بندی‌های متناظر با راستاهای دافع و جاذب). با استفاده از [۱۲] می‌توان نشان داد که اگر G اختلال به اندازه کافی کوچک از F (در بین هموارریختی‌های حافظ اندازه \mathbb{T}^3 و در توپولوژی C^1) باشد، برگ‌بندی مشابه این برگ‌بندی به دایره‌ها برای G نیز وجود دارد. به بیان دقیق‌تر، یک برگ‌بندی دیگر وجود دارد که برگ‌های آن همگی هموارریخت با دایره‌اند و تحت اثر G به هم تصویر می‌شوند، به علاوه، مشتق تابع G در تحدید به این برگ‌ها مقداری بین مشتق در راستای جاذب و دافع دارد.

در [۱۸] نشان داده شده است که می‌توان اختلال‌های به‌دلخواه کوچک G از F یافت که برگ‌بندی حاصل از G به شکل بالا وضعیت تناقض‌گونه مثال کاتوک را داشته باشد؛ به این صورت که مجموعه‌ای از اندازه کامل یافت شود که هر برگ را در دقیقاً یک نقطه قطع کند! این مثال ساده‌ترین نمونه از خانواده‌ای از مثال‌هاست که در توابع جزئاً هذلولوی^۲ یافت می‌شوند. ایده اولیه چنین مثال‌هایی در نامه‌ای از منیه^۳ به شوب^۴ در سال ۱۹۹۳ مطرح شده است که دیگران آن را سال‌ها بعد از درگذشت منیه دقیق‌تر ساختند.

دسته مهم دیگری از برگ‌بندی‌ها که به‌طور طبیعی در دستگاه‌های دینامیکی ظاهر می‌شوند شارها

¹D. Anosov (1936-1014) ²partially hyperbolic ³R. Mañé (1948-1995) ⁴M. Shub (1943-)



شکل ۱۷. شار هذلولوی

هستند. اگر یک میدان برداری روی یک خمینه هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد، مدارهای شار حاصل از آن، یک برگ بندی یک بعدی از فضا می سازند. به علاوه، تحت شرایطی (مثل هذلولوی بودن شار) برگ بندی مشابهی برای هر نگاشت نزدیک به نگاشت زمان واحد آن شار وجود دارد [۱۲]. منظور از یک شار هذلولوی^۱ روی یک خمینه این است که در هر نقطه بتوان فضای مماس خمینه را به سه زیرفضای متقاطع E^c ، E^u ، E^s تجزیه کرد که شرایط زیر را داشته باشند (شکل ۱۷).

(۱) زیرفضای E^c یک زیرفضای یک بعدی و مماس بر راستای شار است؛

(۲) طول هر بردار در E^s با اعمال مشتق شار به طور نمایی کوچک می شود؛

(۳) طول هر بردار در E^u با اعمال مشتق شار به طور نمایی بزرگ می شود.

شناخته شده ترین مثال از شارهای هذلولوی شار ژئودزیکی روی رویه ها با انحنای ثابت منفی است (توجه کنید که شار ژئودزیکی روی کلاف واحد مماس^۲ که یک خمینه سه بعدی است یک شار تعریف می کند). در این مثال هر یک از سه زیرفضای E^u ، E^s و E^c یک بعدی اند.

همان طور که اشاره شد، برای هر نگاشت نزدیک به نگاشت زمان واحد، این شار یک برگ بندی ناوردا وجود دارد. طبیعی است بپرسیم آیا این برگ بندی مشابه مثال کاتوک است؟ یا برعکس، حکم قضیه فوبینی برای آن برقرار است؟ به این سؤال در مورد نگاشت های حافظ حجم و نزدیک زمان واحد شار ژئودزیکی رویه ها با انحنای منفی پاسخ دقیقی در [۶] داده شده است:

این برگ بندی همیشه از نوع کاتوک است! بجز در موارد «بسیار نادری» که نگاشت، برابر زمان واحد یک شار هموار باشد که در آن صورت برگ بندی هموار و حکم قضیه فوبینی برقرار است.

^۱hyperbolic flow ^۲unit tangent bundle

مشابه این پدیده را در زمینه‌های مختلفی در [۹، ۱۰، ۱۶، ۲۱] ثابت کرده‌اند.

مراجع

- [۱] استرویک، د. ج.، تاریخ فشرده ریاضیات، ترجمه غلامرضا برادران خسروشاهی و حسن کامرانی، نشر نو، تهران، ۱۳۶۶.
- [۲] کلاینز، ایسرانل، تاریخچه بی‌نهایت کوچکیها و بی‌نهایت بزرگیها در حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۶۵ (۱۳۹۸)، ۷۷-۱۲۱.
- [۳] میلنر، جان، قضیه فوبینی نقش بر آب می‌شود (!): مثال پارادوکس‌گونه کاتوک در نظریه اندازه، ترجمه روح‌الله جهانی‌پور، نشر ریاضی، شماره ۱۸ (۱۳۷۷)، ۲۴-۲۶.
- [4] Anosov, D. V., Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, *Soviet. Math. Dokl.*, **4**, 1153–1156; English translation from *Dokl. Akad. Nauk*, **151** (1963), 1250-1252.
- [5] Anosov, D. V., Sinaĭ, Ya. G., Some smooth ergodic systems, With an appendix by G. A. Margulis (in Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **22**, 107–172; translation from *Uspekhi Mat. Nauk*, **22** (1967), 107-172.
- [6] Avila, A., Viana, M., Wilkinson, A., Absolute continuity, Lyapunov exponents and rigidity, I” Geodesic flows, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015) No. 6, 1435-1462.
- [7] Brin, M., Stuck, G., *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [8] Camacho, C., Lins Neto, A., *Geometric Theory of Foliations* (transl. from the Portuguese by Sue E. Goodman), Birkhäuser, Boston-Base-Stuttgart, 1985.
- [9] Gogolev, A., How typical are pathological foliations in partially hyperbolic dynamics: an example, *Israel J. Math.*, **187** (2012), 493-507.
- [10] Hirayama, M., Pesin, Y., Non-absolutely continuous foliations, *Israel J. Math.*, **160** (2007), 173-187.
- [11] Hasselblatt, A., Anatole Katok—A half-century of dynamics, *Notices Amer. Math. Soc.*, **66** (2019), 708-719.
- [12] Hirsch, M. W., Pugh, C. C., Shub, M., *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [13] Lam, L.-Y., Shen, K., The Chinese concept of Cavalieri’s principle and its applications, *Historia Math.*, **12** (1985), 219-228.
- [14] Milnor, J., Fubini foiled: Katok’s paradoxical example in measure theory, *Math. Intelligencer*, **19** (1997), 30-32.
- [15] O’Connor, J. J., Robertson, E. F., MacTutor History of Mathematics Archives, “Overview of Chinese mathematics” (February 2000), available at https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Chinese_overview.
- [16] Ruelle, D., Wilkinson, A., Absolutely singular dynamical foliations, *Commun. Math. Phys.*, **219** (2001), 481-487.
- [17] Shen, K., Crossley, J. N., Lun, A. W.-C., *The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion and Commentary*, Oxford University Press, Beijing, 1999.
- [18] Shub, M., Wilkinson, A., Pathological foliations and removable zero exponents, *Invent. Math.*, **139** (2000), 495-508.

- [19] Stein, E. M., Shakarchi, R., *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, NJ, 2005.
- [20] Stillwell, J. C., Archimedes' Lost Method (14 December 2007), in *Encyclopedia Britannica*, available at <https://www.britannica.com/topic/Archimedes-Lost-Method-1084593>.
- [21] Viana, M., Yang, J., Physical measures and absolute continuity for one-dimensional center direction, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, **30** (2013), 845-877.

حسام‌الدین رجب‌زاده: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: rajabzadeh@ipm.ir

آرش رستگار: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: rastegar1352@gmail.com

میثم نصیری: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: nassiri@ipm.ir

Against Cavalieri's Principle? A Paradoxical Example in Dynamics

H. Rajabzadeh¹, A. Rastegar², M. Nassiri³

^{1,3}School of Mathematics, IPM, Iran

²Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. There exists a continuous family of disjoint smooth curves, partitioning the unit square, such that one can choose only one point from each curve to construct a measurable set whose area is equal to 1. This contradicts our intuition which resembles Cavalieri's principle and Fubini's theorem! So, what is the problem? In this note, we discuss the theorem (due to A. Katok) and answer this question.

Keywords: Cavalieri's principle, Fubini's Theorem, foliation, absolute continuity

Article history: Received 22 June 2021; Accepted 8 May 2022

¹rajabzadeh@ipm.ir

²rastegar1352@gmail.com

³nassiri@ipm.ir