فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۱۷۵ تا ۱۸۳

مشخص‌سازی چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم*

فینبار هالند

ترجمهٔ امیرمحمد مؤمنی کوهستانی✉، علیرضا خلیلی اسبوئی

چکیده. مقالهٔ حاضر در پاسخ به تصور اشتباه دانشجویی شکل گرفت که می‌پنداشت سرعت متوسط یک ذره در حرکت مستقیم در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین حسابی سرعت‌های آن در ابتدا و انتهای آن بازه است. با اثبات جبری نشان می‌دهیم این تصور فقط درصورتی‌که ذره شتاب ثابتی داشته باشد برقرار است. همچنین یک مشخص‌سازی از توابع مشتق‌پذیر روی بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ ارائه می‌دهیم که تحدید آن‌ها روی $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم‌اند. به‌علاوه، بدون استفاده از حساب دیفرانسیل نشان می‌دهیم که یک وجه خاص از قضیهٔ مقدار میانگین فقط برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم برقرار است.

۱ مقدمه

در شب سال نوی ۲۰۱۴، با دیدن یک نسخه از شمارهٔ ششم سال سی و سوم نشریهٔ MAA Focus در صندوق نامه‌ام شگفت‌زده شدم. از میان مقاله‌های برجستهٔ آن مقاله‌ای با عنوان «اما معلم فیزیک من گفت . . .» [۵] را پیدا کردم که واقعاً مقالهٔ جذابی بود. به نظر می‌رسید که آن مقاله نتیجه‌ای بوده است از بحث بین یکی از نویسندگان مقاله، که مدرس ریاضی عمومی بوده، و یکی از دانشجویانش، که هم‌زمان درس فیزیک را نیز داشته است. ظاهراً آن دانشجو ادعا می‌کرده است با استفاده از روشی که در درس فیزیک آموخته، به یک سؤال امتحانی در مورد میانگین سرعت یک ذره در یک بازهٔ زمانی به‌درستی پاسخ داده است. به گفتهٔ او سرعت متوسط برابر با میانگین حسابی سرعت‌های

عبارات و کلمات کلیدی: چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم، سرعت متوسط، مشتق‌پذیری، سرعت لحظه‌ای

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۳۰

* Holland, F., Characterizations of quadratic polynomials, *Math. Mag.*, **89**(5) (2016), 352-357.

doi: 10.30504/mct.2022.1304.1911

لحظه‌ای در دو سر بازه است. اما همان‌طورکه نویسندگان مقالهٔ [۵] اشاره کرده‌اند این موضوع درصورتی درست است که ذره با شتاب ثابتی حرکت کند که اتفاقاً این مسئله در صورت سؤال نیز توضیح داده شده است. هدف اصلی مقالهٔ حاضر این است که نشان دهیم بخش اول ادعای دانشجو فقط برای ذرات با شتاب ثابت درست است. ازنظر هندسی ثابت شده است اگر شیبِ خطی که دو نقطهٔ متمایز روی نمودار یک تابع پیوسته را به هم وصل می‌کند برابر با میانگین حسابی شیب‌های نقاط ابتدایی و انتهایی باشد، آنگاه نمودار تابع یا خط است و یا یک سهمی. درواقع، این روشی که دانشجو به‌طور ضمنی در پاسخ خود استفاده کرده است ویژگی ذاتی از چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم است. در بخش دیگری از مقاله، شرط دیگری اضافه می‌کنیم که می‌تواند مشخص‌سازی ذاتی برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم باشد. در بخش آخر مقاله به یک جنبه از قضیهٔ مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌پردازیم که مختص چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم است.

۲ تصور نادرست دانشجو

منظور از سرعت متوسط جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند نسبت مسافت طی‌شده در واحد زمان است. به‌عبارت‌دیگر، اگر جسم در زمان t در مکان $f(t)$ باشد، سرعت متوسط آن در زمان‌های متوالی $t=x$ و $t=y$ با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

گویا دانشجوی موردِنظر فرض می‌گیرد که همیشه رابطهٔ بالا (یعنی همان سرعت متوسط) برابر میانگین حسابی سرعت‌های لحظه‌ای جسم در $t=x$ و $t=y$ است، یعنی

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{f'(y)+f'(x)}{۲} \qquad (x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y),$$

و در امتحان درس فیزیک به سؤال مطرح‌شده پاسخ درست می‌دهد، زیرا خوشبختانه در آن سؤال جسم دارای شتاب ثابت بوده است. درواقع، محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم حقیقی یا مختلط باشدحکم بالا درست است و پیشتر معلوم شده بود که این رابطه فقط برای چنین توابعی برقرار است. برای نمونه، کارگو در سال ۱۹۹۷ با استفاده از روش‌های سادهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال این نتیجه را به دست آورده بود [۲]؛ درواقع، کارگو نشان داده است

که اگر f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و دو عبارت از سه عبارت

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad \frac{f'(y)+f'(x)}{۲}, \quad f'(\frac{x+y}{۲})$$

برای همهٔ زوج‌های مرتب حقیقی متمایز (x,y) برابر باشند، آنگاه f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است. بعداً هاروکی [۶] و آتسل [۱] شکل کلی‌تری از این حکم را حدس زدند. آن‌ها با جانشانی تابعی دلخواه (اندازه‌پذیر) مانند g به‌جای f' و بدون استفاده از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال به همان نتیجه رسیدند. در این مقاله با پیروی از استدلال‌های آن‌ها یک اثبات جبری از این حکم، که علت اصلی توجه ما بود، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f'(y)+f'(x)}{۲} \qquad (x,y\in\mathbb{R}, x\neq y) \qquad (۱.۲)$$

اگر و تنها اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد.

اثبات. فرض کنید f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد؛ در این صورت f ترکیبی خطی از تک‌جمله‌ای‌های ۱، x، و $x^۲$ است که هرکدام از آن‌ها به‌روشنی در معادلهٔ (۱.۲) صدق می‌کنند. پس با توجه به خاصیت خطی‌بودن، f نیز در آن رابطه صدق می‌کند.

برعکس، فرض کنید f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و در معادلهٔ (۱.۲) صدق کند. با درنظرگرفتن $y=۰$ در معادلهٔ (۱.۲) می‌بینیم که

$$f(x)=f(۰)+x\left(\frac{f'(x)+f'(۰)}{۲}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}) \qquad (۲.۲)$$

و از آن نتیجه می‌شود که

$$y(f'(y)+f'(۰))-x(f'(x)+f'(۰))=(y-x)(f'(y)+f'(x)) \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

با بسط این رابطه و مرتب‌سازی دوبارهٔ آن، خواهیم داشت

$$y(f'(x)-f'(۰))=x(f'(y)-f'(۰)) \qquad (x,y\in\mathbb{R}). \qquad (۳.۲)$$

با انتخاب yیی ناصفر، بنویسید

$$a=\frac{f'(y)-f'(۰)}{۲y}.$$

پس، بنابر معادلهٔ (۳.۲) برای هر $x \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌شود $f'(x) = f'(\circ) + ۲ax$، و با جانشانی این رابطه در معادلهٔ (۲.۲) داریم

$$f(x) = f(\circ) + x(f'(\circ) + ax) = f(\circ) + f'(\circ)x + ax^{۲}.$$

بنابراین، f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۲ است. $\square$

ملاحظه ۲.۲. اگر حرکت ذره‌ای را در فضای سه‌بعدی درنظربگیریم که مکان آن به صورت $\mathbf{r}(t) = (x_۱(t), x_۲(t), x_۳(t))$ باشد، حکم بالا به حل معادلهٔ

$$\frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)}{s - t} = \frac{\mathbf{r}'(s) + \mathbf{r}'(t)}{۲} \qquad (s, t \in \mathbb{R}, s \neq t)$$

منتهی می‌شود. درواقع، این چیز جدیدی نیست، زیرا این معادله هم‌ارز با سه معادلهٔ اسکالر زیر است

$$\frac{x_i(s) - x_i(t)}{s - t} = \frac{x_i'(s) + x_i'(t)}{۲} \qquad (i = ۱, ۲, ۳,\ \ s, t \in \mathbb{R}, s \neq t).$$

ملاحظه ۳.۲. ازسوی‌دیگر، اگر در مفروضات فرض دانشجو تندی را جایگزین سرعت کنیم ماهیت مسئله به این صورت تغییر می‌کند: برای کدام‌یک از توابع مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ با شرط $x \neq y$ رابطهٔ

$$\frac{۱}{y - x} \int_x^y |f'(t)| dt = \frac{|f'(y)| + |f'(x)|}{۲}$$

برقرار است؟ در وهلهٔ اوّل برای اینکه عبارت فوق معنی‌دار باشد، باید فرض کنیم که $|f'|$ به‌نوعی موضعی‌انتگرال‌پذیر است. اگر انتگرال لُبِگ را به کار ببریم، می‌توان بررسی کرد و دید که تنها توابع نامنفی موضعی‌انتگرال‌پذیر لبگِ g که در معادلهٔ

$$\frac{۱}{y - x} \int_x^y g(t) dt = \frac{g(x) + g(y)}{۲} \qquad (x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)$$

صدق می‌کنند توابع ثابت هستند.

۳ یک مسئله مهم

برای تکمیل بحث، توضیحی دربارهٔ مجموعهٔ جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱.۲)، که به‌طور طبیعی در بحث قبل مطرح شد، می‌آوریم. بی‌شک، هر چندجمله‌ای درجهٔ دوم در این معادله صدق می‌کند اما عکس آن نادرست است. تابع مشتق‌ناپذیر $x \to x|x|$ یک مثال نقض ساده است.

قضیه ۱.۳. فرض کنید f روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد و در معادلهٔ (۱.۲) صدق کند. در این صورت f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم p و q با مشتق‌های برابر در $\circ$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که f روی $(-\infty, \circ]$ با p و روی $[\circ, +\infty)$ با q برابر باشد.

اثبات. فرض کنید f مشتق‌پذیر است و در معادلهٔ (۱.۲) صدق کند. بنابر تعریف مشتق در $\circ$ داریم

$$f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x}.$$

پس از معادلهٔ (۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{f'(\circ) + \lim_{x\to\circ} f'(x)}{۲} = f'(\circ).$$

ازاین‌رو،

$$f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} f'(x).$$

بنابراین f' در $\circ$ پیوسته است، اما در هر حالت $(f(x) - f(\circ))/x$ روی $\mathbb{R} - \{\circ\}$ مشتق‌پذیر است. ازاین‌رو، معادلهٔ (۱.۲) نشان می‌دهد که f' روی $\mathbb{R} - \{\circ\}$ مشتق‌پذیر است، و چون

$$\frac{f'(x) + f'(\circ)}{۲} = \frac{f(x) - f(\circ)}{x} \qquad (x \neq \circ),$$

با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب برای مشتق داریم

$$\frac{۱}{۲} f''(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x) - f(\circ)}{x^{۲}} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(x) + f'(\circ)}{۲x} \qquad (x \neq \circ).$$

به‌این‌ترتیب

$$\frac{f'(x) - f'(\circ)}{x} = f''(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\, x \neq \circ).$$

با تکرار استدلال قبل می‌توان نشان داد که f'' نیز روی $\mathbb{R} - \{\circ\}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'''(x) = \frac{xf''(x) - (f'(x) - f'(\circ))}{x^{۲}} = \frac{xf''(x) - xf''(x)}{x^{۲}} = \circ \qquad (x \neq \circ)$$

آن وقت f'' در هریک از بازه‌های $(-\infty, \circ)$ و $(\circ, +\infty)$ صفر است. بنابراین دو چندجمله‌ای درجهٔ دوم مانند p و q وجود دارد که برای هر $x \leq \circ$، $f(x) = p(x)$ و برای هر $x \geq \circ$، $f(x) = q(x)$. درنتیجه برای هر $x < \circ$، $f'(x) = p'(x)$ و برای هر $x > \circ$، $f'(x) = q'(x)$. بنابراین

$$f'(\circ^-) = \lim_{x\to\circ^-} f'(x) = p'(\circ) \quad \text{و} \quad f'(\circ^+) = \lim_{x\to\circ^+} f'(\circ^+) = q'(\circ).$$

چون f' در $\circ$ پیوسته است، $p'(\circ) = q'(\circ)$. بنابراین شرط لازم برقرار است.

برعکس، اگر p و q چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم باشند به‌طوری‌که $p'(\circ) = q'(\circ)$، برای هر $x \leq \circ$، $f(x) = p(x)$ و برای هر $x \geq \circ$، $f(x) = q(x)$، آنگاه در وهلهٔ اول، f روی $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$ مشتق‌پذیر است. همچنین

$$\lim_{x\to\circ^-} \frac{f(x) - f(\circ)}{x} = \lim_{x\to\circ^-} \frac{p(x) - p(\circ)}{x} = p'(\circ)$$

و

$$\lim_{x\to\circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{q(x) - q(\circ)}{x} = q'(\circ).$$

چون $p'(\circ) = q'(\circ)$، پس f در $\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(\circ) = p'(\circ) = q'(\circ)$. اما p و q در معادلهٔ (۲.۲) صدق می‌کنند. بنابراین، اگر $x \leq \circ$ باشد،

$$f(x) - f(\circ) - x\left(\frac{f'(x) + f'(\circ)}{۲}\right) = p(x) - p(\circ) - x\left(\frac{p'(x) - p'(\circ)}{۲}\right) = \circ.$$

ازاین‌رو f در معادلهٔ (۲.۲) روی بازهٔ $(-\infty, \circ]$ صدق می‌کند. به‌طورمشابه، f روی بازهٔ $[\circ, +\infty)$ در معادلهٔ (۲.۲) صدق می‌کند. بنابراین شرط کافی نیز برقرار است. $\square$

واضح است که از این نتیجه می‌توان برای اثبات قضیهٔ ۱.۲ استفاده کرد. درواقع، معادلهٔ (۱.۲) معادلهٔ (۲.۲) را نتیجه می‌دهد، و بنابراین چهار عدد a_-، a_+، b، و c وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(x) = \begin{cases} a_- x^{۲} + bx + c & x \leq \circ \\ a_+ x^{۲} + bx + c & x \geq \circ \end{cases}$$

در این حالت، با استفاده از معادلهٔ (۱.۲)، اگر $x > ۰$،

$$\begin{aligned}(a_+ - a_-)x + ۲b &= \frac{f(x) - f(-x)}{x} \\ &= f'(x) + f'(-x) = ۲(a_+ - a_-)x + ۲b.\end{aligned}$$

بنابراین، $a_+ = a_-$ و f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است.

۴ وجهی از قضیهٔ مقدار میانگین

با توجه به قضیهٔ مقدار میانگین، اگر f یک تابع حقیقی‌مقدار و مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد و x و y دو عدد حقیقی متمایز باشند، عدد حقیقی z بین آن‌ها وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z).$$

z را می‌توان به‌صورت $z = (۱ - \alpha)y + \alpha x$ نیز نوشت که در آن $\alpha \in (۰, ۱)$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد آنگاه $۲\alpha = ۱$. به‌نظرمی‌رسد که عکس این گزاره برای اولین‌بار در [۸] با فرض سه‌بار مشتق‌پذیری f اثبات شده است؛ در [۶] نشان داده شده است که شرط یادشده اضافی است. از اینجا نتیجهٔ بعد به دست می‌آید که برای اولین‌بار در [۳] تحت فرض مشتق‌پذیری f از هر مرتبه بررسی شده است. مااین مسئله را بدون فرض دوم بررسی می‌کنیم و در اثبات آن نیز از حسابان استفاده نمی‌کنیم. چندین سال پس‌از انتشار [۳] شکل کلی‌تری از این معادلهٔ تابعی را والتر رودین تحت عنوان مسئلهٔ شمارهٔ E3338 در سال ۱۹۸۹ در مانتلی[۱] مطرح کرد، که جوابی از آن با استفاده از ابزار حسابان در شمارهٔ ماه مارس سال ۱۹۹۱ آن مجله منتشر شد. یک راه‌حل جبری برای مسئلهٔ رودین در [۹] آورده شده است که در ضمن مرجعی عالی برای دانشجویان علاقه‌مند به معادلات تابعی است.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $\alpha \in (۰, ۱)$ و f تابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\alpha x + (۱ - \alpha)y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}, x \neq y). \tag{۱.۴}$$

در این صورت، یا

1. American Mathematical Monthly

(الف) $۲\alpha \neq ۱$ که در این حالت f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۱ است، و یا

(ب) $۲\alpha = ۱$ که در این حالت f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۲ است.

اثبات. فرض کنید $g = f'$. در این صورت بنابر معادلهٔ (۱.۴) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) - f(۰) = xg(\alpha x)$. با جانشانی این عبارت در معادلهٔ (۱.۴) و مرتب‌کردن عبارت حاصل داریم

$$yg(\alpha y) - xg(\alpha x) = (y-x)g(\alpha x + (۱-\alpha)y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{۲.۴}$$

اینک با فرض $\zeta = (۱-\alpha)/\alpha$، و تعویض متغیرها خواهیم داشت

$$yg(y) - xg(x) = (y-x)g(x+\zeta y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{۳.۴}$$

حل این معادلهٔ تابعی را بدون اِعمال شرایط تحلیلی اضافی بر g ادامه می‌دهیم. به‌روشنی می‌توان فرض کرد $g(۰) = ۰$ وگرنه g را با $g - g(۰)$ جایگزین می‌کنیم. با این فرضِ بجا، با قرار دادن $x = -\zeta y$ در معادلهٔ (۳.۴)، خواهیم داشت

$$yg(y) - (-\zeta y)g(-\zeta y) = ۰ \qquad (y \in \mathbb{R});$$

یعنی، $yg(y) = -\zeta y g(-\zeta y)$. با گذاشتن $-\zeta y$ به‌جای y در معادلهٔ (۳.۴) داریم

$$\begin{aligned}(y-x)g(x+\zeta y) &= yg(y) - xg(x) = -\zeta y g(-\zeta y) - xg(x) \\ &= -(x+\zeta y)g(x - \zeta^۲ y).\end{aligned}$$

به‌عبارت‌دیگر،

$$(y-x)g(x+\zeta y) = -(x+\zeta y)g(x-\zeta^۲ y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{۴.۴}$$

بنابراین، با درنظرگرفتن $x = \zeta^۲ y$، داریم

$$(۱-\zeta^۲)yg(\zeta(۱+\zeta)y) = ۰ \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

درنتیجه، به‌جز در حالت $\zeta^۲ = ۱$، تابع g برابر صفر است. به‌عبارت‌دیگر، اگر $۲\alpha \neq ۱$، اعداد ثابت تنها جواب‌های معادلهٔ (۲.۴) هستند. با رجوع به معادلهٔ (۱.۴) نتیجه می‌گیریم که اگر $۲\alpha \neq ۱$ باشد f یک تابع خطی است. بنابراین قسمت (الف) اثبات شد.

اینک تنها حالت $2\alpha \neq 1$ باقی می‌ماند. اما از این شرط نتیجه می‌شود که $\zeta = 1$. درنتیجه معادلهٔ (۴.۴) به

$$(y-x)g(x+y) = -(x+y)g(x-y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

تبدیل می‌شود، به‌طور معادل، پس‌از تعویض متغیر، برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم $yg(x) = xg(y)$. ازاین‌رو g حداکثر یک تابع خطی است و قسمت (ب) نیز اثبات می‌شود. بنابراین، مقدار α هرچه باشد، f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۲ است. □

مراجع

[1] Aczel, J., A mean value property of the derivative of quadratic polynomials—without mean values and derivatives, *Math. Mag.*, **58** (1985), 42-45.

[2] Cargo, G. T., Velocity averages, *Math. Mag.*, **50** (1977), 257-258.

[3] Chorlton, F., A fixed feature of the mean value theorem, *Math. Gaz.*, **67** (1983), 49-50.

[4] Richmond, B., Richmond, T., How to recognize a parabola, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), 910-922.

[5] Forrester, J., Schaefer, J., Tesman, B., "But my physics teacher said . . ." A mathematical approach to a physical problem, *MAA Focus*, **33** (2014), 18-19.

[6] Haruki, S., A property of quadratic polynomials, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1975), 577-579.

[7] Richmond, B., Richmond, T., How to recognize a parabola, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), 910-922.

[8] Saaty,T. L., *Modern Nonlinear Equations*, McGraw-Hill, New York, 1967.

[9] Sahoo, P. K., Reidel, T., *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, Singapore, 1998.

امیرمحمد مؤمنی کوهستانی: دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض، دانشگاه مازندران

رایانامه: a.momeni04@umail.umz.ac.ir

علیرضا خلیلی اسبوئی: دانشگاه فرهنگیان، گروه آموزش ریاضی

رایانامه: a.khalili@cfu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 175–183
doi: 10.30504/mct.2022.1304.1911

Characterizations of Quadratic Polynomials *

F. Holland
Translated by A. M. Kohestani[1], A. K. Asboei[2]

[1] Graduated in pure mathematics from University of Mazandaran, Iran
[2] Department of Mathematics Education, Farhangian University, Iran

Abstract. This note was motivated by a student's misconception that the average velocity over a time interval of a particle in rectilinear motion is the arithmetic mean of its velocities at the ends of the interval. We present an algebraic proof that this property holds only if the particle has constant acceleration, thereby recovering a well-known result. A characterization is also provided of differentiable functions on $(-\infty,\infty)$ whose restrictions to the intervals $(-\infty, 0]$ and $[0, \infty)$ are quadratic polynomials. In addition, a calculus-free proof is presented to show that a certain feature of the mean value theorem holds only for quadratic polynomials.

Keywords: quadratic polynomials, average speed, differentiability, instantaneous speed
Article history: Recieved 18 July 2022; Accepted 21 August 2022
Article type: translation

* Holland, F., Characterizations of quadratic polynomials, *Math. Mag.*, **89**(5) (2016), 352-357.

1. a.momeni04@umail.umz.ac.ir
2. a.khalili@cfu.ac.ir