فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۴۷ تا ۶۰

چرا ریاضیات این‌همه کاربرد دارد؟

مرتضی منیری

چکیده. در سال‌های اخیر، تلاش‌های زیادی صورت گرفته است تا از ریاضیات برای حل مسائلی خارج از حوزهٔ ریاضیات استفاده شود. این بخش‌ها بسیار فراتر از موضوعاتی هستند که به‌طور سنتی در گروه‌های ریاضیات کاربردی مطالعه می‌شوند. حتی بخش‌هایی از ریاضیات که تا همین اواخر از آن‌ها انتظار کاربردهای ملموسی نداشتند، اکنون به‌نحو موفقیت‌آمیزی در حوزه‌های مختلف به کار می‌روند. چرایی کاربردپذیری ریاضیات موضوع اصلی این مقاله است. این پرسشی است قدیمی دربارهٔ ریاضیات و علی‌رغم آنکه تاکنون بسیار به آن پرداخته شده است، به نظر نمی‌رسد که جواب قانع‌کننده‌ای داشته باشد. در اینجا ویژگی‌هایی از ریاضیات را بررسی می‌کنیم که ظاهراً در همهٔ کاربردهای آن نقش مهمی ایفا می‌کنند. همچنین تأثیر قبول برخی دیدگاه‌های فلسفی را بر این موضوع مطالعه خواهیم کرد.

۱ مقدمه

در این مقاله دلایل پُرکاربردبودن ریاضیات را بررسی می‌کنیم. کاربردهای ریاضیات در حدی بوده است که یوجین ویگنر[۱]، برندهٔ جایزهٔ نوبل فیزیک، آن را به معجزه تشبیه می‌کند [۱۵، ص ۹]:

> معجزهٔ مناسب‌بودن زبانِ ریاضی برای تدوین قوانین فیزیک موهبتی شگفت‌انگیز است که ما نه آن را درک می‌کنیم و نه سزاوار آن هستیم.

در همین مورد، هرتس[۲]، فیزیک‌دان آلمانی، می‌گوید [۴، ص ۹۹]:

عبارات و کلمات کلیدی: کاربردپذیری ریاضیات، فلسفهٔ علم، کاربردهای ریاضیات
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۳۱

1. Eugene Wigner 2. Hertz

doi: 10.30504/mct.2022.1309.1913

> نمی‌توان از این احساس فرار کرد که این فرمول‌های ریاضی موجودیت و هوش مستقلی دارند، حتی از کاشفانشان عاقل‌ترند، و ما بیش از آنچه در ابتدا در آن‌ها تعبیه کرده‌ایم از آن‌ها عایدمان می‌شود.

برای فهم بهتر چرایی کاربردپذیری ریاضیات به نظر می‌رسد که تفکیک دو سطح از این کاربردپذیری سودمند باشد. برخی از بخش‌های ریاضیات از ابتدا به‌منظور حل مسائلی خارج از ریاضیات به وجود آمده‌اند و یا به‌عبارت‌دیگر ساخته شده‌اند (نوع اول). برای مثال، حسابان، معادلات دیفرانسیل و حساب تغییرات، یا آمار و احتمال چنین وضعیتی دارند. ازسوی‌دیگر، بخش‌هایی از ریاضیات کاملاً جدا از کاربردها پرورش یافته و در گذر زمان کاربردهایی پیدا کرده‌اند، برای مثال، جبر مجرد (نوع دوم). در وهلهٔ اول، به نظر می‌رسد که آنچه ممکن است معجزه‌گونه یا حداقل غیرعادی تلقی شود، مربوط به بخش‌های اخیر است. اما، دراصل، حتی کاربردپذیری نوع اول ریاضیات نیز چندان بدیهی نیست. درست است که مثلاً نیوتن از ابتدا تعریف‌های موردنظر خود از سرعت، شتاب، و موارد دیگر را به زبان ریاضی بیان کرد، و بنابراین تبیین قانون‌های فیزیک با فرمول‌های ریاضی طبیعی به نظر می‌رسد، اما خود این موضوع که ظاهراً جهان بر حسب قوانین ریاضی کار می‌کند اعجاب‌آور است. اینکه خلقت جهان براساس قوانینی خاص و به زبان ریاضی صورت گرفته باشد، عجیب و نیازمند توضیح است.

در مورد کاربردهای نوع دوم، باید توجه کرد که حتی بخش‌های بسیار مجرد ریاضیات، ریشه‌هایی ملموس در تجربهٔ انسانی دارند و، به‌همین‌دلیل، برخی افراد ویژگی کاربردپذیری ریاضیات را موضوعی عادی و بی‌نیاز از توضیح می‌دانند. این افراد معتقدند که هرچند ریاضی‌دانان در مطالعهٔ ساختارهای مجرد ریاضی به کاربردهای ملموس نمی‌اندیشند، اما به‌هرحال دستاوردهای آنان به‌طور طبیعی به ریشه‌های ملموس آن ساختارها وابسته‌اند. برای مثال، همهٔ کاربردهای اخیر نظریهٔ اعداد در رمزنگاری، به اعداد طبیعی، که در اصل وسیله‌ای برای شمارش بوده‌اند، مرتبط است. درست است که نظریهٔ اعداد عمدتاً به دلیل زیبایی‌های آن و کنجکاوی‌های ریاضی‌دانان گسترش پیدا کرده است، اما همین مطالعات و بررسی‌ها کاربردهای فراوانی یافته‌اند. همچنین، نظریهٔ گروه‌ها که بعدها کاربردهایی در فیزیک یافت، از تعمیم مفاهیم ملموسی چون گروه‌های جایگشتی به وجود آمده است. آیا این مطلب پاسخی ساده به چرایی کاربردپذیری ریاضیات به‌ظاهر مجرد فراهم نمی‌کند؟ در این مقاله به بررسی این موضوع می‌پردازیم. به‌علاوه، دیدگاه‌های برخی مکتب‌های فلسفی را در این مورد بررسی خواهیم کرد.

۲ مطالعهٔ موردی: جبر مجرد و منطق نمادی

جبر مجرد در تلاش‌هایی ریشه دارد که ریاضی‌دانان اسلامی و، بعداز آن‌ها، ریاضی‌دانان اروپایی برای حل معادلات چندجمله‌ای انجام دادند. این تلاش‌ها درنهایت منتهی به یافتن جواب‌های صریح معادلات تا درجهٔ ۴ بر حسب رادیکال‌ها شد، اما برای حل معادلات با درجات بالاتر به نتیجه نرسید، تا اینکه در قرن نوزدهم، گالوا[۱] و آبل[۲] ثابت کردند که معادلات از درجهٔ ۵ به بالا لزوماً چنین جواب‌هایی ندارند. گالوا برای اثبات این حکم از جایگشت‌های جواب‌های معادلات و ترکیب‌های آن‌ها استفاده کرد. به‌این‌ترتیب مفهوم گروه جایگشتی مطرح شد. البته، کارِگالوا هم متکی‌بر تحقیقات قبلی لاگرانژ[۳] در حوالی سال ۱۷۷۰ بود. البته ظهور مفهوم گروه، ریشه‌های دیگری هم دارد که در اینجا از ذکر آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. دهه‌ها طول کشید که تحقیقات گالوا در این زمینه کاملاً درک شود و پس‌از آن نیز زمان زیادی طول کشید تا از دل این مباحث، مفهوم گروه سر برآورد [۱۰].

درواقع، مفهوم گروه را کیلی[۴] در حوالی سال ۱۸۵۴ مطرح کرد. کارگالوا، به‌بیان امروزی، اثباتِ این حکم بود که گروه متناظر با یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ به بالا لزوماً حل‌پذیر نیست. حل‌پذیری گروه مفهومی است که امروزه برای هر گروهی تعریف می‌شود و قابل بررسی است [۹]. پس‌از این مرحله بود که با تلاش‌های ریاضی‌دانانی چون نوتر[۵] دیگر ساختارهای جبری به‌تدریج تعریف شدند، از حلقه تا میدان و فضای برداری [۱۰]. حتی امروزه نیز معرفی ساختارهای جبری جدید و مطالعهٔ آن‌ها، به همراه بررسی خواص پیشرفتهٔ ساختارهای شناخته‌شدهٔ قبلی، جزئی از جبر مجرد محسوب می‌شود. نظریهٔ گروه‌ها در حال حاضر کاربردهای زیادی در فیزیک و شیمی یافته است، گروه‌ها، به‌ویژه، ابزارهای مناسبی برای مطالعهٔ تقارن‌ها در طبیعت هستند. به‌علاوه، از میدان‌های متناهی در رمزنگاری استفاده می‌شود و با جست‌وجویی ساده، می‌توان کاربردهای فراوانی جبر مجرد را در علوم دیگر پیدا کرد.

منطق نمادی[۶] امروزی را فرگه[۷] در اواخر قرن بیستم میلادی ابداع کرد و بعدها افرادی مثل راسل[۸]، هیلبرت[۹]، گودل[۱۰]، تارسکی[۱۱]، و دیگران آن را توسعه دادند [۶]. هدف فرگه از معرفی دستگاه نمادی منطق فراهم آوردن ابزاری برای فروکاستن ریاضیات، به‌ویژه حساب اعداد طبیعی، به مفاهیم و روش‌های منطقی بود. هیلبرت از دستگاه‌های نمادی منطقی برای بازسازی ریاضیات در قالب دستگاه‌های اصل‌موضوعی استفاده کرد. یکی از مهم‌ترین این دستگاه‌ها را می‌توان حساب

1. Galois 2. Abel 3. Lagrange 4. Cayley 5. Emmy Noether 6. formal 7. Frege 8. Russell 9. Hilbert 10. Gödel 11. Tarski

مرتبهٔ اول پئانو[۱] دانست [۲]. هیلبرت این مسئله را مطرح کرد که آیا حساب پئانو تصمیم‌پذیر[۲] است؟ به‌عبارت‌دیگر، آیا الگوریتمی برای تشخیص قضیه‌بودن یا قضیه‌نبودن فرمول‌های مرتبهٔ اول حساب وجود دارد؟ پاسخ منفی به این سؤال نتیجهٔ یکی از قضیه‌های مشهور ناتمامیت گودل است. در همین زمینه، چرچ[۳] ثابت کرد که منطق مرتبهٔ اول نیز تصمیم‌پذیر نیست و تورینگ [۴] نشان داد که مسئلهٔ توقف[۵] ماشین تورینگ نیز چنین است، یعنی الگوریتمی برای تشخیص اینکه آیا ماشین تورینگِ مفروضی با یک ورودی مشخص سرانجام متوقف می‌شود یا نه، وجود ندارد. از دل این مباحث بود که نظریهٔ محاسبه‌پذیری[۶] به‌عنوان یک محصول فرعی سربرآورد [۵]. البته به‌تدریج این نظریه بسیار فراتر رفت و مثلاً مطالعهٔ درجات حل‌ناپذیری[۷] به یکی از بخش‌های اصلی آن تبدیل شد، موضوعی که ظاهراً فقط ماحصل کنجکاوی‌های صرفاً ریاضی بود. اما سلسله‌مراتب چندجمله‌ای، که بعدها در نظریهٔ پیچیدگی[۸] به بخشی از نظریهٔ علوم رایانه تبدیل شد، از سلسله‌مراتب حل‌ناپذیری ناشی شد. به‌طور خاص، مسئلهٔ $P \stackrel{?}{=} NP$ شکلی محاسبه‌پذیر از مسئلهٔ ارتباط بین مجموعه‌های تصمیم‌پذیر و نیم‌تصمیم‌پذیر است. البته علی‌رغم اینکه مسئلهٔ $P \stackrel{?}{=} NP$ هنوز حل نشده است، پرسش از وجود مجموعه‌های نیم‌تصمیم‌پذیر ولی تصمیم‌ناپذیر بلافاصله پاسخی مثبت یافت. برای حل این مسئلهٔ لاینحل، نظریهٔ پیچیدگی اثبات‌ها در منطق گزاره‌ها به‌عنوان حوزه‌ای بین‌رشته‌ای، پا به عرصهٔ علوم رایانه گذاشت. هدف اصلی در این حوزه، ساخت دستگاهی اثباتی است که در آن، هر راستگو[۹] اثباتی کوتاه (یک چندجمله‌ای از طول آن گزاره) داشته باشد [۲].

منطق زمانی و منطق شناختی هم از ارتباط منطق و علوم رایانه و با انگیزه‌های کاملاً فلسفی ناشی شده‌اند، اما امروزه جایگاه استواری در وارسی مدل‌ها[۱۰] و هوش مصنوعی یافته‌اند. این پیشرفت‌ها چنان‌اند که عده‌ای حجم کاربردهای منطق در علوم رایانه را معجزه‌آسا می‌دانند [۸].

۳ وجوه مختلف کاربردپذیری

در این بخش، شیوه‌های مختلف کاربردپذیری ریاضیات را بررسی می‌کنیم. وقتی صحبت از کاربردهای ریاضیات می‌شود باید توجه کرد که این کاربردها معمولاً در ارتباط با علوم تجربی به دست می‌آیند. ریاضیات در شناسایی طبیعت یا پیش‌بینی تجربی مستقیماً نقش ندارد، بلکه برای این منظور می‌باید ریاضیات را تعبیر کرد. شاید بشود کاربردپذیری ریاضیات را متکی‌بر تعابیر

1. Peano 2. decidable 3. Church 4. Turing 5. halting problem 6. computability theory 7. degrees of unsolvability 8. complexity theory 9. tautology 10. model checking

مختلفی دانست که فرمول‌های ریاضی و به‌طور کلی زبان نمادی ریاضی دارا هستند. مدل‌سازی ریاضی به معنای نمایش جنبه‌های مورد نظر پدیده‌ای طبیعی بر حسب مفاهیم ریاضی است. مدل ریاضی معمولاً با لحاظ کردن برخی ساده‌سازی‌ها به دست می‌آید. در مدل‌سازی برخی جنبه‌های پدیدهٔ طبیعی موردِ مطالعه در نظر گرفته نمی‌شوند. ازسوی‌دیگر، خودِ مدل ریاضی نیز ممکن است جنبه‌هایی داشته باشد که حداقل در وهلهٔ اول در پدیدهٔ موردِ مطالعه مشاهده نمی‌شوند اما بعداً همین جنبه‌ها به توضیح بیشتر پدیده کمک می‌کنند. برای مثال، در مدل‌هایی که با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند، مانند معادلهٔ حرارت، جریان یا تغییرات مربوط پیوسته فرض می‌شود درحالی‌که به نظر نمی‌رسد که پدیدهٔ موردِ مطالعه چنین ویژگی داشته باشد. با توجه به سهولت کار با این‌گونه معادلات، استفاده از ریاضیات در فیزیک بسیار سریع و وسیع پیشرفت کرده است.

درهرحال، زمانی که وضعیت محسوس و آشنایی را با استفاده از ساختارهای ریاضی مدل‌سازی می‌کنیم و یا از طریق مطالعهٔ خواص ریاضی آن ساختارها به خواص پدیدهٔ فیزیکی مدل‌بندی‌شده پی می‌بریم، اگر مدل‌سازی در ابتدا درست انجام شده باشد و شباهت کافی بین دو ساختار ریاضی و طبیعی وجود داشته باشد، عجیب نیست که بتوانیم خواص طبیعی جدیدی را کشف کنیم. در اینجا نکتهٔ اصلی اعتبار روش‌های ریاضی است که با توجه به ماهیت تحلیلی و منطقی آن‌ها کمتر مورد پرسش قرار گرفته است. البته باید توجه کرد که گاهی اوقات، مرز بین اشیاء و ساختارهای ریاضی در مقابل اشیاء و ساختارهای فیزیکی که قرار است مدل‌بندی شوند چندان شفاف نیست. برای مثال، در مورد میدان، اینکه باید آن را مفهومی صرفاً ریاضی دانست یا اینکه واقعیت فیزیکی هم دارد محل پرسش است. به‌عبارت‌دیگر، توسل به مفهوم مدل‌سازی پاسخگوی همهٔ پرسش‌های موجود در زمینهٔ کاربردپذیری ریاضیات نیست.

ازسوی‌دیگر، به‌جز مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی آشنا، گاهی ساختارهای ریاضی‌ای که پیشتر کاملاً محض و غیرطبیعی به نظر می‌رسیدند در علم کاربرد پیدا می‌کنند. برای نمونه، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین از این دسته است. اینشتین بدون هیچ‌گونه شاهد تجربی و بیشتر براساس ملاحظاتی ناشی‌از برخی آزمایش‌های ذهنی، نظریهٔ نسبیت عام را مطرح کرد. در آن زمان، حتی پوانکاره[۱]، که به قراردادگرایی[۲] در فیزیک معتقد بود، به سبب پیچیدگی هندسهٔ نااقلیدسی گمان نمی‌کرد که جانشینی این هندسه به جای هندسهٔ اقلیدسی از سوی فیزیک‌دانان پذیرفته شود. آن‌طور که مشهور است، نخستین شاهد محاسباتی و تجربی کار اینشتین، از طریق اندازه‌گیری‌های نجومی ادینگتون[۳]

1. Poincaré 2. conventionalism 3. Sir Arthur Eddington

به دست آمد. البته این آزمایش را می‌شد به روش‌های دیگری توضیح داد، مثلاً وجود یک جرم آسمانی که تاکنون مشاهده نشده است. زیبایی ریاضی نظریهٔ نسبیت عامل مهمی در پذیرش آن، حداقل توسط خودِ اینشتین، بوده است. اما آنچه اهمیت کار اینشتین را بالا برد، کشف پدیده‌های فیزیکی جدیدی بود که نظریهٔ او پیش‌بینی می‌کرد. سیاه‌چاله[۱] مثالی از این موارد است. در این سطح از کاربردپذیری، ریاضیات فراتر و جلوتر از فیزیک عمل می‌کند. مثال دیگر اینکه، در حال حاضر، حتی بخش‌های بسیار عمیق و مجرد ریاضیات، از قبیل برنامهٔ لنگلندز[۲] در فیزیک به کار می‌رود [۷]. در این موارد، هیچ تعبیر ملموس و آشکاری برای شیء ریاضی مورد اشاره وجود ندارد. هدف اصلیْ صورت‌بندی ریاضی جدیدی است که بتواند نظریه‌های موجود را در قالبی واحد بیان کند. باوجوداین، در حال حاضر فیزیک‌دانان در مورد اشیای مطرح شده در نظریهٔ مورد بحث هیچ شاهد تجربی ندارند. می‌توان گفت که این حد اعلای کاربردپذیری ریاضیات است.

یکی از شاخص‌ترین ویژگی‌های ریاضیات نمادگذاری ریاضی است. هرکسی که تجربهٔ حتی اندکی از ریاضی‌ورزی داشته باشد، متوجه این مزیت ریاضیات می‌شود. به‌عنوان یک مثال مقدماتی، ولی بسیار مهم، کافی است به عددنویسی هندی–عربی، یعنی نحوهٔ نوشتن کنونی اعداد طبیعی، نگاه کنیم. عمل‌های معمولی جمع و ضرب، که کودکان در دبستان می‌آموزند، مؤثربودن این نحوهٔ نمادگذاری را نشان می‌دهد. همچنین، استفاده از یک نماد چون x برای نشان دادن یک متغیر و نوشتن معادلات به‌شکل کنونی از عوامل موثر در پیشرفت جبر بوده است. در آنالیز، روش خاص لایب‌نیتس برای نمایش مشتق پیشرفت آنالیز ریاضی چندمتغیری را بسیار تسهیل کرد. در ریاضیات امروزی هم هر ریاضی‌دانی می‌داند که نمادگذاری خوب نقش عمده‌ای در پیشرفت کارش خواهد داشت.

اهمیت نمادگذاری ریاضیاتی از دید کاربردپذیری چیست؟ یک جنبهٔ مهم آن است که نمادگذاری قدرت تعبیرپذیری فرمول‌های ریاضی را افزایش می‌دهد. برای مثال، می‌توان به تعبیر بول از نمادهای جبری در منطق تاشاره کرد. با معرفی متغیرها به‌عنوان متغیرهای ارزشی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند، جبر بول به وجود آمد و این جبر راه را برای ظهور جبر مجرد و تعبیرهای نامحدود آن فراهم کرد. مثال‌های دیگری از تأثیر نمادگذاری را می‌توان در [۳] دید. یک جنبه از اهمیت نمادگذاری ریاضیاتی که کمتر مورد توجه واقع شده است، همگانی‌کردن و تسهیل مشارکت جهانی در پیشبرد ریاضیات بوده است. در حال حاضر، ریاضیات زبانی جهانی است که همهٔ افراد در تمام مقاطع تحصیلی موظف به آموختن آن هستند. علاوه‌بر این‌ها، مقالهٔ یک ریاضی‌دان در گوشه‌ای

1. blackhole 2. Langlands' program

از جهان را ریاضی‌دانی دیگر در گوشهٔ دیگری از جهان می‌تواند بخواند و متوجه محتوای آن شود.

۴ واقع‌گرایی یا نام‌گرایی

در مورد ریاضیات دو دیدگاه متفاوت، با ریشه‌هایی بسیار قدیمی، وجود دارد. یکی برای ریاضیات واقعیتی متصور است مستقل از انسان که احکام ریاضی را درست یا نادرست می‌داند (دیدگاه موسوم به واقع‌گرایی[۱]) و دیگری ریاضیات را محصول کار ریاضی‌دانان می‌داند و فرمول‌های ریاضی را مشتی نماد می‌داند که مطابق دستورالعمل‌ها و قراردادهای تعیین‌شده از سوی انسان عمل می‌کنند و در آن درستی و نادرستی احکام ریاضی اهمیتی ندارد، مگر به‌عنوان قراردادهای مفید (دیدگاه موسوم به نام‌گرایی[۲]). هریک از این دو دیدگاه تقسیمات زیادی دارند که در اینجا موضوع صحبت ما نیست. ما می‌خواهیم بدانیم که به‌طور کلی اتخاذ هریک از این دو دیدگاه، که بین فلاسفه و ریاضی‌دانان طرف‌دارانی دارند، چه تأثیری بر پرسش چرایی و چگونگی کاربردپذیری ریاضیات دارد. در درجهٔ اول به نظر می‌رسد که معمای کاربردپذیری برای دیدگاه نام‌گرایانه بیش‌از دیدگاه واقع‌گرایانه مسئله‌ساز باشد. اگر ساختارهای ریاضی وجودی مستقل و واقعی دارند، طبیعی است که این واقعیت ناشی از تشابه با ساختارهای طبیعی باشد، همان‌طور که ساختارهای گسسته در جهان محسوس توسط ساختار ریاضی اعداد طبیعی و ساختارهای پیوسته توسط اعداد حقیقی به‌خوبی مدل‌سازی می‌شوند. البته اگر واقع‌گرا باشیم، ساختارهای ریاضی بسیاری وجود دارند که هیچ کاربردی ندارند، پس اینکه چگونه ساختارهای مفید را کشف می‌کنیم خود نیاز به توضیح دارد.

دیدگاه نام‌گرایانه باید توضیح دهد که چگونه ساختارهای ریاضی ساخته‌شده به دست ریاضی‌دانان براساس ملاک‌های ریاضی این‌قدر در تشریح پدیده‌های فیزیکی مؤثر عمل می‌کنند. فارغ از این، کالیوَن[۳] استدلال کرده است که مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات، اگر اصولاً وجود چنین مسئله‌ای را بپذیریم، ناشی از تفاوت بنیادی روش پژوهش در ریاضیات و علوم تجربی است [۴، ص ۱۰۰]. ریاضی‌دانان معمولاً فارغ از جهان خارج به کار مطالعهٔ ساختارهای ریاضی و ساخت یا کشف ساختارهای ریاضی جدید مشغول‌اند. بنابراین، چه واقع‌گرا باشیم یا نام‌گرا، با مسئلهٔ کاربردپذیری مواجه‌ایم. کالیون در ابتدا چند توجیه می‌آورد که نشان دهد شاید کاربردپذیری ریاضیات آن‌قدرها هم اعجاب‌آور نباشد. اولین نکته، توجه به این امر است که مدل‌سازی ریاضی، که یکی از روش‌های اصلی به کاربردن ریاضیات در علوم طبیعی است، به هیچ وجه سرراست نیست و با تجدیدنظرها

1. realism 2. nominalism 3. Colyvan

و اصلاحاتی همراه است. حتی برخی مدل‌های ریاضی برای توصیف برخی موقعیت‌های طبیعی، نامناسب و حتی خنده‌دار به نظر می‌رسند [۳، ص ۵۶]. اگر به تعداد مدل‌سازی‌های شکست‌خورده توجه کنیم، آنگاه توفیق برخی مدل‌ها اعجاب‌آور نخواهد بود. هرچند امکانات نامتناهی که ریاضیات برای مدل‌سازی‌های گوناگون فراهم می‌کند توجیه شکست در مدل‌سازی را بسیار آسان‌تر از موفقیت می‌کند، اما به‌هرحال، مدل‌سازی بخشی از توجیه کاربردپذیری است. همان‌طور که دیدیم، بخش هیجان‌انگیزتر آن، تقدم ریاضیات بر اشیاء و ساختارهایی است که قرار است مدلی برای آن‌ها ارائه شود. در اینجا هم با همان مشکلی در توجیه کاربردپذیری مواجه‌ایم که نام‌گراها و کسانی که ریاضیات را ساختهٔ انسان می‌دانند مواجه‌اند. شاید نقش ریاضیات تنها مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی نیست، بلکه شکل‌دادن به جهان پدیده‌ها هم هست.

۵ طبیعت‌گرایی و کاربردپذیری

در این بخش به طبیعت‌گرایی[۱] و ارتباط آن با کاربردپذیری ریاضیات می‌پردازیم. در ابتدا، به دیدگاه کواین[۲] در این مورد اشاره خواهیم کرد و در ادامه، دیدگاه خاص مَدی[۳] را، که گاهی طبیعت‌گرایی ریاضی نامیده می‌شود، بررسی می‌کنیم.

در ابتدای قرن بیستم، تحصّل‌گرایان منطقی[۴] معتقد بودند که تنها دو گونهٔ گزارهٔ درست و معتبر وجود دارد: تحلیلی[۵] و ترکیبی[۶]. گزارهٔ تحلیلی به سبب ساختار و معنای کلمات به کار رفته در آن گزاره درست است. گزاره‌های ریاضیات نیز به سبب متکی‌بودن بر منطق از نوع تحلیلی‌اند. ازسوی‌دیگر، گزاره‌های علوم تجربی ترکیبی‌اند و صدقشان ناشی از مشاهده و به‌طورکلی تجربه است. کواین در مقالهٔ مشهور خود [۱۴] این تمایز را به چالش کشید. از دید او، گزاره‌های تحلیلی گزاره‌هایی هستند که بر حسب معنای کلمات به کار رفته در آن‌ها درست هستند، بنابرین مفهوم مترادف‌بودن یا هم‌معنایی در اینجا نقشی اساسی دارد. گزاره‌های تحلیلی گزاره‌هایی هستند که با تعویض کلمات هم‌معنا تبدیل به گزاره‌های منطقاً معتبر می‌شوند. اما کواین استدلال کرد که هیچ روش غیرتجربی‌ای برای تشخیص هم‌معنایی دو کلمه وجود ندارد. بنابراین گزاره‌های تحلیلی، حداکثر می‌توانند همان گزاره‌های منطقی باشند [۱۴].

اما کواین به این هم راضی نبود. به اعتقاد او منطق و ریاضیات بخشی از علوم به‌عنوان یک کل به هم پیوسته‌اند و اعتبارشان مانند اعتبار بقیهٔ اعضای این مجموعه از تأیید تجربی این کل ناشی

1. naturalism 2. Quine 3. Maddy 4. logical positivists 5. analytic 6. synthetic

می‌شود، عقیده‌ای که به کل‌گرایی[1] موسوم است. بنابر کل‌گرایی، منطق و ریاضیات ازنظر نحوهٔ تأیید با بقیهٔ بخش‌های علوم طبیعی تفاوتی بنیادی ندارند. همچنین، اشیاء مورد مطالعه در ریاضیات، مانند اعداد حقیقی، همان اعتبار وجودی را دارند که دیگر اشیای نظری علوم از قبیل الکترون دارند. از دید کواین، با توجه به اینکه ریاضیات به نظریهٔ مجموعه تحویل‌پذیر است، می‌توان تنها وجود مجموعه‌ها را پذیرفت، حتی مجموعه‌هایی خاص مطرح‌شده در بخشی محدود از نظریهٔ مجموعه‌ها که برای همهٔ کاربردهای احتمالی ریاضیات کفایت می‌کنند.

خود کواین کاملاً متوجه بود که ازنظر دانشمندان اعتبار یکسان برای حقایق منطقی و فیزیکی قائل شدن چندان قابل‌قبول نیست. اما ازنظر او تنها تفاوت آن‌ها در همین است که در مواجه یک نظریهٔ علمی با آزمون تجربی و مشاهدهٔ خطا دانشمندان معمولاً ترجیح می‌دهند که در بخش‌هایی به‌جز منطق و ریاضیات دست ببرند. ازسوی‌دیگر، کواین معتقد بود که تنها به آن بخش‌هایی از ریاضیات که در علوم طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌توان اطلاق دانش کرد و قسمت‌هایی از ریاضیات را که مجردند و کاربردی برای آن‌ها متصور نیست نمی‌توان دانش محسوب کرد.

آیا کل‌گرایی به درک بهتر چرایی کاربردپذیری ریاضیات کمکی می‌کند؟ کواین با نفی تفاوت بنیادی بین ریاضیات و علوم تجربی، پرسش از چرایی کاربردپذیری ریاضیات را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد و کم‌رنگ می‌کند. اما باید توجه کرد که در دیدگاه کل‌گرایانه توجه خاصی به بخش‌های مختلف علم نمی‌شود و بنابراین این انتظار که این دیدگاه بتواند موقعیت ویژهٔ ریاضیات را توضیح دهد چندان واقع‌بینانه نیست. می‌توان گفت که کل‌گرایی، این پرسش را به سطح فراتری می‌برد و به‌جای ریاضیاتِ صرف به همهٔ مجموعهٔ دانش مرتبط می‌کند. چرا روش علمی این‌قدر خوب عمل می‌کند؟ چرا نظریه‌های فیزیکی که تفاوت بنیادی با نظریه‌های ریاضی ندارند، این‌قدر در توصیف طبیعت و در کاربردهای مهندسی موفق عمل می‌کنند؟

مدی فلسفهٔ خاص خود را فلسفهٔ ثانوی[2] می‌نامد، تا موضع خود را روشن سازد: فلسفه قرار نیست که بر علم پیشی بگیرد. اگر کواین فلسفه را همان فلسفهٔ علم می‌دانست، مدی بیش از آن می‌خواهد: نه فقط خود علم بلکه می‌باید تفسیری را که خود دانشمند از علم دارد هم در نظر گرفت [۱۲، بخش دوم]. براین‌اساس، هر آنچه یک نظریهٔ علمی نتیجه می‌دهد لزوماً پذیرفتنی نیست و ملاک فلسفه‌پردازی قرار نمی‌گیرد. خود دانشمندان چنین چیزی را نمی‌پذیرند، گاهی لازم است اصلاحات کوچکی در آن صورت گیرد و یا برای پذیرش وجود برخی پدیده‌های پیش‌بینی‌شده باید

1. holism 2. second philosophy

منتظر تأییدهای تجربی بیشتر ماند. مدی معتقد است که جایگاه خاص منطق و ریاضیات نیازمند تبیین است و مثلاً باید دید که چرا دانشمندان به اصلاح روش‌های ریاضی خود تمایل کمتری دارند تا تغییر در اصول فیزیکی پذیرفته‌شده. همچنین، مدی طرف‌دار این دیدگاه است که ریاضیات هویت واحدی دارد و نمی‌توان برای بخش‌های کاربردی و محض آن شأن متفاوتی قائل شد. درواقع، او ریاضیات کاربردی را نیز ریاضیات محض به حساب می‌آورد [۱۱]. خلاصهٔ استدلال او در این مورد را می‌توان به این شکل بیان کرد که مطابقت مدل‌های ریاضی با جهان خارج تنها به‌صورت تقریبی است و دانشمندان همواره مدل‌های بهتری ارائه می‌کنند تا بتوان پیش‌بینی‌های دقیق‌تری به عمل آورد. بنابراین، بخش‌هایی از ریاضیات را که قبلاً توصیف طبیعت محسوب می‌شدند و سپس با نظریه‌های جدیدتر جایگزین شده‌اند باید جزو ریاضیات محض محسوب کرد. این روندی است که پایانی برای آن متصور نیست.

ازسوی‌دیگر، به اعتقاد او، ریاضیات علمی خودمختار است، و ریاضی‌دانان براساس ملاک‌های درون‌ریاضیاتی کار می‌کنند. تاریخ ریاضیات و علم نشان می‌دهد که اگر به استانداردهای درونی ریاضیات اعتماد شود حتی برای خود علم نتیجهٔ بهتری حاصل خواهد شد. طبیعت‌گرایی مدی را در دو سطح می‌توان تحلیل کرد. ابتدا باید توجه کرد که انسان امروزی محصول تکامل چندهزارساله در هماهنگی با طبیعت است. ازسوی‌دیگر، او هم مانند کواین در مقابل فلسفه به علم ارزش ذاتی و بنیادی می‌دهد. او مانند کانت[1] معتقد است که بین ذهن انسان و طبیعت هماهنگی وجود دارد و این هماهنگی به‌طور تدریجی شکل گرفته است. در مورد کانت در بخش صحبت می‌کنیم. تحلیل مدی از کاربردپذیری ریاضیات متکی‌بر بررسی‌های تاریخی و توجه به سرگذشت ریاضیات در ارتباط با علوم دیگر است. به این موارد در بخش آخر مقاله خواهیم پرداخت.

۶ کانت و ریاضیات

به نظر می‌رسد که دیدگاه کانت بتواند توجیه خوبی برای کاربردپذیری ریاضیات، حداقل ریاضیات مقدماتی، فراهم کند [۱]. کانت حساب و هندسه را نه تحلیلی بلکه ترکیبی می‌دانست. درعین‌حال معتقد بود که این دو دانش، پیشینی و مستقل از تجربه هستند نه پسینی و متکی‌بر تجربه. به حساب آوردن ریاضیات در زمرهٔ دانش به این سبب بود که کانت ریاضیات را توصیف دقیقی از جهان و پدیده‌های طبیعی می‌دانست. چگونه چنین دانش پیشینی‌ای ممکن است؟ پاسخ این پرسش

1. Kant

مهم‌ترین بخش فلسفهٔ کانت است. نکته آن است که ما شناخت مستقلی از جهان پیرامون خود نداریم. کل شناخت ما از جهان با محسوسات آغاز می‌شود، این درست است، اما این شناخت به‌وسیلهٔ قوهٔ فاهمهٔ انسان پردازش می‌شود و در قالب‌های زمانی و مکانی می‌نشیند. جهانی که ما می‌شناسیم این‌گونه است و ساختارهای ریاضی نیز بر همین منوال ساخته می‌شوند. کاربردپذیری ریاضیات، حداقل در سطوح مقدماتی ریاضیات، براساس این توافق است. اینکه جهان در ذات خود به چه شکلی است در این مورد اصلاً مطرح نیست.

کانت معتقد بود که ساختار جهان مبتنی‌بر هندسهٔ اقلیدسی است. ظهور هندسه‌های نااقلیدسی و کاربردهای آن‌ها در فیزیک به‌ویژه نظریهٔ نسبیت عام اینشتین، خطای کانت را نشان داده است. اما در اینجا چند نکته وجود دارد. درست است که هندسهٔ جهان براساس نظریهٔ نسبیت عامْ نااقلیدسی است اما باید توجه کنیم که این هندسه‌ها در فضای اقلیدسی تعبیرپذیرند. درواقع آن چیزی که به این هندسه‌ها اهمیت بخشیده و حتی باعث شده که سازگاریشان پذیرفته شود، همین تعبیرها و مدل‌هایی است که برای آن‌ها در فضاهای اقلیدسی وجود دارد. شهود تجربی ما براساس هندسهٔ اقلیدسی است و فهم ما از هندسه‌های نااقلیدسی در بستری اقلیدسی شکل می‌گیرد. شاید برای فهم این وضعیت مقایسهٔ آن با در نظر گرفتن منطق سه‌ارزشی[1] خاصی چون منطق وکاشِویچ[2] سودمند باشد. گزاره‌ها در این منطق می‌توانند به‌جز ارزش درست و نادرست ارزش سومی نیز داشته باشند. حتی وقتی از منطق وکاشِویچ استفاده می‌کنیم، در سطح بالاتر کماکان به منطق کلاسیک وفاداریم. برای مثال، در این سطح، ارزش یک گزاره ۰٫۵ است یا ۰٫۵ نیست. به نظر می‌رسد که حداقلی از منطق کلاسیک یا استاندارد لازمهٔ تفکر ما است. وجود منطق‌های غیرکلاسیک مختلف و کاربردهای فراوان آن‌ها در فلسفه یا علوم رایانه نافی نقش بنیادی منطق کلاسیک نیست.

به‌همین‌ترتیب، هنوز هم هندسهٔ اقلیدسی همان هندسهٔ مورد توافق بشر در ابعاد معمولی و دست‌یافتنی است و کاربردهای هندسه‌های نااقلیدسی در یک نظریهٔ علمی لزوماً به معنای نفی نقش بنیادی هندسهٔ اقلیدسی نیست. اما درهرحال اینکه به نظر می‌رسد در ابعاد نجومی هندسهٔ جهان ممکن است اقلیدسی نباشد و ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان به‌مرور این را پذیرفته‌اند، این نظر را تقویت می‌کند که حداقل مقولات زمان و مکان در ذهن انسان‌ها اموری ثابت و بی‌تغییر نیستند. شاید آن‌گونه که نظریهٔ تکامل می‌گوید این مفاهیم در طول زمان و براساس فرایندی طبیعی و در راستای نیازهای بشر شکل گرفته‌اند. به‌عبارت‌دیگر، ممکن است چون کانت نیازمند فرض وجود

1. three-valued logic 2. Jan Łukasiewicz

توانایی‌ها و خصوصیاتی مرموز در ذهن بشر نباشیم. حداقل در مورد منطق، مدی از این شکل تجدیدنظرشدهٔ نظر کانت حمایت می‌کند [۱۳]. این به آن معنی است که روانشناسی استعلایی[۱] کانت را که در آن با روش‌های تحلیلی–فلسفی انسان را مطالعه می‌کند با روانشناسی به‌عنوان یک علم تجربی تعویض کنیم و به شکل‌گیری تدریجی ذهن انسان در طول تاریخ معتقد باشیم.

۷ آیا کاربردپذیری ریاضیات واقعاً معجزه‌آسا است؟

تا اینجا پرسش چرایی کاربردپذیری ریاضیات را تشریح کردیم و پاسخ‌های احتمالی دیدگاه‌های مختلف فلسفی را بررسی کردیم. البته باید توجه داشت که برخی از مواردی که معمولاً به‌عنوان کاربرد معجزه‌وار ذکر می‌شوند، توجیهات منطقی و ملموسی دارند که تا حدودی آن‌ها را طبیعی جلوه می‌دهد. یک نمونهٔ مهم کاربرد هندسه‌های نااقلیدسی در نظریهٔ نسبیت عام است. در ظاهر، این هندسه‌ها فقط به سبب کنجکاوی‌های ریاضی و در ادامهٔ تلاش‌های ناکامی که با انگیزهٔ صرفاً ریاضی در جهت اثبات اصل پنجم اقلیدس به کمک چهار اصل دیگر انجام شد پذیرفته و مطالعه شده‌اند. به دنبال آن، پس‌از یک قرن، به‌ناگهان، معلوم شد که آن‌ها ابزار مناسبی برای توصیف فضا–زمان[۲] در نظریهٔ نسبیت عام هستند. اما، درواقع، آن هندسه‌ای که به کار اینشتین آمد نه آن هندسه‌های نااقلیدسی ابتدایی که هندسهٔ ریمانی[۳] بود و ظاهراً خود ریمان[۴] به هنگام مطالعهٔ آن به دنبال کشف هندسهٔ جهان فیزیکی بوده است. به قول کلاین[۵] [۱۲، ص ۳۳۷]:

> ازآنجاکه این هندسه‌ها با یکدیگر متفاوت‌اند واقعاً چه چیزی در مورد فضای فیزیکی صادق است؟ این سؤال نقطهٔ عزیمت ریمان بود. او در پاسخ به آن، هندسه‌های کلی‌تری را تعریف کرد که اکنون به هندسه‌های ریمانی معروف‌اند، که به دلیل ماهیت آن‌ها و با توجه به دانش فیزیکی محدود ما می‌توانند به اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی در نمایش فضای فیزیکی مؤثر باشند. آیا باید شگفت‌زده شد که اینشتین هندسهٔ ریمانی را سودمند دانسته است؟

در مورد کار ماکسول[۶] در تدوین معادله‌های مشهورش نیز چنین وضعیتی وجود دارد. ظاهراً ماکسول برای آنکه سازگاری معادله‌های مربوط به قوانین مورد نظرش را تضمین کند، ضریبی به یکی از آن‌ها اضافه می‌کند و همین اصلاح ظاهری در نهایت منجر به کشف جریانی جدید می‌شود

1. transcendental 2. space-time 3. Riemannian geometry 4. Riemann 5. Kline 6. Maxwell

[۱۲، ص ۳۳۸]. اما، درواقع، ملاحظات فیزیکی هم تأثیر زیادی در کار ماکسول داشته است. به قول زیگل[۱] [۱۲، ص ۳۳۸]:

> درمجموع، ماکسول اساساً همان کاری را انجام داد که گزارش استاندارد می‌گوید: او قانون آمپر[۲] را اصلاح کرد . . . به روشی مطابق با معادلهٔ پیوستگی و قانون کولن[۳]. بااین‌حال، هدف او ارائهٔ یک مجموعهٔ کامل و سازگار از معادلات الکترومغناطیسی به خاطر خودش نبود، بلکه ارائهٔ یک مدل مکانیکی کامل و سازگار از میدان الکترومغناطیسی بود.

این توضیحات می‌تواند بخشی از کاربردهای به‌ظاهر غیرمنتظرهٔ ریاضیات را توجیه‌پذیرتر کند، و شاید بتوان آن‌ها را چندان معجزه‌آسا ندانست. بررسی‌های تاریخی بیشتر ممکن است موارد مهم دیگری را روشن کنند. البته ممکن است مواردی وجود داشته باشند که چنین توجیه‌هایی نداشته باشند.

ریاضیات ساختارهای ریاضی متعددی را در اختیار دانشمندان قرار می‌دهد، بسیاری از این ساختارها ممکن است که هیچ کاربردی نداشته باشند. در برخی موارد یافتن ساختارهای مناسب با کاربردی خاص قرن‌ها به طول انجامیده و دانشمندان هنوز به دنبال ساختارهای مناسب‌ترند. هنوز بسیاری از پدیده‌های انسانی و طبیعی مدل‌های ریاضی مناسبی نیافته‌اند. ازسوی‌دیگر، ریاضیات تنها می‌تواند جنبه‌های ریاضی پدیده‌های طبیعی را آشکار کند. ممکن است که توجه به موارد فوق بتواند رازآلودبودن کاربردپذیری ریاضیات را کمتر کند. علاوه‌براین، مسئلهٔ کاربردپذیری ریاضیات را می‌توان جزئی از مسئلهٔ کلی‌تر توجیه موفق‌بودن علم دانست. نظریه‌های علمی براساس شواهد محدود پیش‌بینی‌هایی در مورد دوردست‌ترین نقاط عالم یا ریزترین ذرات عالم می‌کنند و معمولاً موفق نیز هستند. این نظریه‌ها عموماً براساس فرمول‌بندی ریاضی بیان می‌شوند. به نظر می‌آید برای درک بیشتر این موضوعات نیاز به گذر بیشتر زمان باشد.

مراجع

[۱] کانت، ای.، تمهیدات: مقدمه‌ای بر هر مابعدالطبیعهٔ آینده که به عنوان یک علم عرضه شود، ترجمهٔ غلامعلی حداد عادل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۷.

1. Siegel 2. Ampére’s law 3. Coulomb’s law

[۲] منیری، مرتضی، حساب مرتبه اول پئانو و زیرنظریه‌های آن همراه با چند مسألهٔ مرتبط در نظریهٔ پیچیدگی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۳۵** (۱۳۸۴)، ۳۳-۵۴.

[3] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 2008.

[4] Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[5] Cooper, S. B., *Computability Theory*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[6] Davis, M., *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*, W. W. Norton & Company, New York, 2000.

[7] Frenkel, E., Lectures on the Langlands program and conformal field theory, in *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry, II*, P. Cartier, P. Moussa, B. Julia, P. Vanhove eds., Springer, Berlin 2007.

[8] Halpern, J., Harper, R., Immerman, N., Kolaitis, P., Vardi, M., Vianu, V., On the unusual effectiveness of logic in computer science, *Bull. Symbolic Logic*, **7** (2) (2001), 213-236.

[9] Hungerford, Th. W., *Algebra*, Springer, New York, NY, 1974.

[10] Kleiner, I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[11] Maddy, P., How applied mathematics became p ure, *Rev. Symbolic Logic*, **1** (2008), 16-41.

[12] Maddy, P., *Second Philosophy: A Naturalistic Method*, Oxford University Press, 2007.

[13] Maddy, P., Philosophy of logic, *Bull. Symbolic Logic*, **18** (2012), 481-504.

[14] Quine, W. V. O., Two dogmas of empiricism, *Philosophical Review*,**60** (1951), 20-43.

[15] Wigner, E. P., The unreasonable effectiveness of mathematics in the naturalsciences, *Commun. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 1-14.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: `m-moniri@sbu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 47–60
doi: 10.30504/mct.2022.1309.1913

Why Is Mathematics So Applicable?

M. Moniri[1]

Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Iran

Abstract. In recent years, many efforts have been made to use mathematics to solve problems outside the field of mathematics. These fields go far beyond the topics traditionally studied in applied mathematics departments. Even parts of mathematics that until recently were too far-fetched to have concrete applications are now successfully used in various fields. The main question of this article is why mathematics is so useful. This is an old question about mathematics, and although it has been discussed a lot, it does not seem to have a concluding answer. Here we examine some features of mathematics that seem to play an important role in all its applications. We will also examine the effect of accepting some philosophical views on this issue. Among these philosophical views, realism and nominalism, Quine's naturalism, and Penelope Maddy's mathematical naturalism can be mentioned. The history of two important areas of mathematics, namely abstract algebra and formal logic, have been examined in detail as examples.

Keywords: applicability of mathematics, philosophy of science, applications of mathematics
Article history: Recieved 23 July 2022; Accepted 22 September 2022
Article type: Survey

1. m-moniri@sbu.ac.ir