

مقدمه‌ای بر حسابان کسری و کاربردهای نوظهور آن در مهندسی*

حسین تیموری فعال و رضا تیموری فعال

چکیده. در این مقاله علاوه بر مرور مطالعاتی مقالات مربوط به کاربردهای حسابان کسری، تاریخچه حسابان کسری به همراه رشته‌ها و بخش‌های درگیر معرفی می‌شوند. در ادامه فرمول‌های اساسی حسابان کسری بدست می‌آیند. با ارائه شواهد فیزیکی وجود دو نوع زمان مطلق و کیهانی اثبات و به کمک آنها تفسیر هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری ارائه می‌شوند. به عنوان کاربرد جدیدی از مفاهیم حسابان کسری، مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک که این مواد به طور وسیعی در مهندسی مکانیک، برق، مواد، شیمی و عمران بکار می‌روند، عرضه می‌گردد. مدل‌های مکانیکی کلاسیک مواد ویسکوالاستیک شامل مدل‌های مرتبه صحیح و مرتبه کسری مواد معرفی می‌شوند. در نهایت نیز اشاره‌هایی به کاربردهای حسابان کسری در کنترل، سیستم‌های دینامیکی و حسابان تغییراتی کسری می‌شود.

۱. سرآغاز

در ریاضیات کاربردی و آنالیز ریاضی، مشتق کسری مشتقی است که در آن مرتبه مشتق می‌تواند یک عدد حقیقی (مثلا عددی گویا) یا مختلط دلخواه باشد. در واقع حسابان کسری شاخه‌ای از ریاضی است که با مشتقات و انتگرال‌های کسری سروکار دارد. در علوم و مهندسی، کاربردهای متعددی از حسابان کسری وجود دارد و در بسیاری از مسائل فیزیکی، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری حاکم هستند. برخی از کاربردهای دنیای واقعی حسابان کسری در علوم و مهندسی از جمله نفوذ (انتشار) نامتعارف،^۱ کنترل، پردازش سیگنال و تصویر، مکانیک و سیستم‌های دینامیکی،

2010 Mathematics Subject Classification. 26A33; 35A22.

عبارت و کلمات کلیدی. حسابان کسری، تابع گاما، زمان کیهانی، مواد ویسکو الاستیک، تبدیلات انتگرالی.

¹Anomalous diffusion

زیست‌شناسی، علوم محیط زیست، مواد و اقتصاد را می‌توان در [۳۴] یافت. تا سال‌های اخیر، حسابان کسری به عنوان یک نظریه ریاضی خیلی انتزاعی و بدون کاربرد در نظر گرفته می‌شد، اما در چند دهه اخیر، انفجاری از فعالیت‌های تحقیقاتی در مورد کاربرد حسابان کسری در زمینه‌های علمی بسیار متنوع نمایان شده است. در واقع، در حال حاضر، برنامه‌ها و یا فعالیت‌های مرتبط با حسابان کسری حداقل در زمینه‌های زیر ظاهر شده‌اند: سیستم‌های مهندسی، تعمیر حسابان تغییرات و کنترل بهینه به سیستم‌های دینامیکی کسری، طراحی فیلتر نقطه تنظیم^۱ برای یک سیستم کنترل کسری با دو درجه آزادی [۷]، ابزارها و تکنیک‌های تحلیلی و عددی، تطبیق سری تیلور با معادلات دیفرانسیل کسری [۳۷]، اکتشافات اساسی در زمینه روابط ساختاری مکانیکی، الکتریکی، حرارتی و سایر خواص مهندسی مختلف مانند پلیمرهای ویسکوالاستیک، فوم‌ها، ژل‌ها، بافت‌های حیوانی و کاربردهای مهندسی زیستی و زیست پزشکی (بیوالکترودها، بیومواد، شبکه‌های عصبی و غیره) [۲۱]، درک بینادی پدیده‌های موج و انتشار، اندازه‌گیری‌ها و تایید آن‌ها، کاربردها در فیزیک پلاسما (مانند انتشار در توکامک^۲)، مدلسازی حرارتی سیستم‌های مهندسی مانند ترمز و ماشین ابزار، پردازش تصویر و سیگنال.

در واقع، حسابان کسری ابزار بهتری برای بررسی «دینامیک سیستم‌های پیچیده» است. همچنین برخی از کاربردهای خاص حسابان کسری در مهندسی از جمله تنظیم کنترل‌گرها، ربات‌های پادار، انتشار گرما و سنتز مدار دیجیتال در [۳۶] بررسی شده‌اند.

کاربرد اصلی این حسابان را می‌توان در نظریه «ویسکوالاستیک» یافت. اخیراً مشاهدات مفید بسیاری از تعمیم مشتق مرتبه صحیح به مرتبه کسری در این زمینه در [۳۴، ۱۳، ۶] استخراج شده‌اند. برای نمونه، پیش‌بینی مواد پولیمری برای شکل فعال شده حرارتی پلیمرهای حافظه‌دار^۳ (SMPs) [۱۲، ۲۵]، الیاف شیشه پوشش‌داده شده با PTFE (پلی تترافلورواتیلن) [۴۰]، رزین اپوکسی،^۴ یک ترموپلاستیک و یک پلیمر زیست تخریب‌پذیر نیمه کریستالی^۵ [۱۵]، مذاب پلیمری [۱۹]، الاستومرهای مغناطیسی فعال^۶ (MAEs) [۲۴]، معادلات کسری ساختاری سه‌بعدی کلی برای مواد همگن و همسانگرد [۳]، از جمله کاربردهایی هستند که از مشتقات کسری در مدل‌سازی مواد بهره برده‌اند. همچنین با استفاده از این مشتقات، رفتار یک ماده مرکب که در ساختار آنها پولیمر بکار

¹Set-point filter²Tokamak³Thermally activated shape memory polymers⁴Epoxy resin⁵Semi-crystalline biodegradable polymer⁶Magnetoactive elastomers

رفته است، تحت تاثیر نواقص و عيوب موجود در آن (شامل ترک يا حفره های موجود) که تحت بارگذاری دورهای می باشد توسط کراسنوبریژا و همکاران [۱۶]، مطالعه شده است. ماده مرکب در واقع ماده تشکیل شده از چندین ماده خالص می باشد و منظور از بارگذاری دورهای، اعمال نیروی تکرار شونده یا دورهای به ماده می باشد. مدل سازی سیستم های مکانیکی ویسکوالاستیک با استفاده از مشتق کسری «لابینیتس» موضوع دیگری است که اخیرا توسط لازوپلوس و همکارانش [۱۷]، مورد مطالعه قرار گرفته است.

روابط ساختاری برای یک ماده دلخواه نشان دهنده روابط بین توزیع نیروها در یک ماده و تغییر شکل های ناشی از نیروهای اعمالی به ماده می باشد که نقش کلیدی در مهندسی ایفا می کند و در انتهای این مقاله معرفی خواهند شد. این روابط می توانند شامل مشتقات مرتبه صحیح یا کسری باشند. روابط ساختاری مواد مرکب بافته شده^۱ (موادی که از یک پارچه بافته شده از الیاف شیشه یا کربن آغشته به پلیمر و یک چسب یا رزین تشکیل شده اند) با استفاده از مشتقات کسری توسط فعال و همکارانش [۱۰، ۱۱]، به روش آزمایشگاهی و با استفاده از حسابان کسری بدست آمده اند. در ضمن نشان داده شده که نتایج تحلیل های معادلات ساختاری کسری این مواد به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیکتر از نتایج تحلیل های معادلات ساختاری با مشتقات معمولی هستند. به عنوان کاربرد دیگری از مواد ویسکوالاستیک می توان به جاذبه های ارتعاش اشاره نمود.

تیرها و ورق های بکاررفته در سازه های مهندسی همواره تحت تاثیر نیروها و تحریک های خارجی دچار لرزش یا ارتعاش می شوند و فرونشانی یا کاهش یا به عبارت دیگر میرا کردن دامنه نوسان آنها بسیار مهم می باشد. برای این منظور از تجهیزات الصاق شونده به تیرها و ورق ها بنام جاذبه های ارتعاش استفاده می شود که با نوسان خود از نوسان تیرها و ورق ها جلوگیری کرده و ارتعاش آنها را جذب می کنند. تحلیل فرونشانی ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک یا میراشده کسری با استفاده از چندین جاذب بهینه دینامیکی توسط سپهری امین و همکارانش [۳۱]، صورت گرفته است. تحلیل مشابهی برای صفحات ویسکوالاستیک یا میراشده توسط آری و همکارانش ارائه شده است [۲]. کاربردهای حسابان کسری در علوم نیز مدنظر تعدادی از محققین بوده است. برای مثال خاتمی و علیزاده [۴۳]، با استفاده از تابع گاما، به نحوه محاسبه انتگرال و مشتق کسری یک تابع پرداخته اند و به تعدادی از کاربردهای حسابان کسری در چند شاخه مختلف از جمله هندسه فرکتالی اشاره نموده اند. به طور مشابه اکرم [۴۱]، ضمن معرفی حسابان کسری و ارائه روابط مربوط به مشتق و انتگرال

¹ Woven composites

کسری به تعابیر مشتق و انتگرال کسری اشاره نموده است. در ضمن تعدادی از کاربردهای حسابان کسری به‌ویژه در علوم توسط ایشان مرور شده است. معادلات دیفرانسیل استورم-لیوویل کسری نیز توسط موسی زاده موسوی [۴۸]، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در واقع، تعداد مقالات اختصاص یافته به حسابان کسری و کاربردهای آن بسیار زیاد است، اما خوانندگان با ناهمگونی بالایی روبرو هستند. هندبوک ۸ جلدی «حسابان کسری با کاربردها» [۹] این شکاف را تا حدودی پر می‌کند و به خوانندگان یک روش جامع و سیستماتیک از جنبه‌های اصلی و کاربردهای حسابان کسری ارائه می‌دهد.

۲. تاریخچه حسابان کسری

حسابان کسری توسط لایبنیتس^۱ و هوییتال^۲ در نتیجه مکاتباتی که چند ماه در سال ۱۶۹۵ به طول انجامید آغاز شد. در آن سال، لایبنیتس نامه‌ای به هوییتال نوشت و این سؤال را مطرح کرد: "آیا می‌توان معنای مشتقات با مرتبه اعداد صحیح را به مشتقات با مرتبه‌های غیر صحیح تعمیم داد؟" هوییتال تا حدودی در مورد سؤال فوق کنجکاو بود و با مطرح کردن یک سؤال ساده دیگر به لایبنیتس پاسخ داد: "اگر مرتبه $\frac{1}{5}$ باشد چطور؟" لایبنیتس در نامه‌ای به تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ پاسخ داد: "این منجر به یک پارادوکسی می‌شود که روزی نتایج مفیدی از آن گرفته خواهد شد." به نظر می‌رسد که حدس لایبنیتس تا حدودی درست بوده و امروزه نتایج مفیدی از این تعمیم استخراج شده است. همچنین، در سال ۱۹۶۷ لایبنیتس با اشاره به فرمول والیس برای $\frac{\pi}{4}$ به صورت یک حاصل‌ضرب نامتناهی، نماد $d\frac{1}{x}$ را به کار برد و بیان کرد که ممکن است بتوان از طریق حساب دیفرانسیل به نتیجه یکسانی رسید.

در سال ۱۸۱۹ اولین اشاره به مشتق از هر مرتبه‌ای توسط ریاضیدان فرانسوی به نام لاکروئا صورت گرفت. وی یک متن ۷۰۰ صفحه‌ای در مورد حسابان مشتق و انتگرال منتشر کرد که تنها ۲ صفحه از آن را به حسابان کسری اختصاص داد. او در واقع اولین کسی بود که به پرسش مطرح شده توسط هوییتال پاسخ کامل داد. نکته جالب این است ۲۷۹ سال طول کشید تا بعد از پرسش مهم هوییتال، اولین کتاب که کاملاً به حسابان کسری می‌پردازد منتشر شد [۳۳].

اوایلر و فوریه نیز ریاضیدانان معروفی بودند به مشتق از مرتبه دلخواه اشاره نمودند ولی به مثال

¹Gottfried Wilhelm Leibniz

²Guillaume de l'Hôpital

۵. ح. تیموری و ر. تیموری

یا کاربردی از آن اشاره نکردند. به نظر می‌رسد که افتخار مطرح کردن اولین کاربرد به نیلز هنریک آبل در سال ۱۸۲۳ برمی‌گردد. او از حسابان کسری برای حل معادله انتگرالی که مربوط به مساله «منحنی هم‌زمانی» بود، استفاده کرد. مسئله منحنی هم‌زمانی درباره این است که چه طور می‌توان منحنی‌ای پیدا کرد که اگر از روی آن منحنی توپی را رها کنیم، زمان رسیدن توپ به پایین منحنی مقدار ثابتی باشد و فرقی نکند که توپ را از چه ارتفاعی از منحنی به پایین رها کرده‌ایم. حل آبل چنان هوشمندانه بود که نظر لیوویل را به خود جلب کرد تا حدی که وی اولین تصمیم جدی را برای مطرح کردن یک تعریف منطقی برای مشتق کسری گرفت. در این راستا، لیوویل ۳ رساله طولانی در سال ۱۸۳۲ و چندین رساله بیشتر در سال ۱۸۵۵ چاپ نمود. او همچنین توانست تعاریف خود را به طور موفقیت‌آمیزی در حل یک مساله در نظریه پتانسیل به کار برد. ریمان در سال ۱۸۴۷ زمانی که هنوز یک دانشجو بود یک مقاله نوشت و در آن یک تعریف از عملگر کسری ارائه داد. اولیور هویساید^۱ نیز استفاده عملی از عملگرهای دیفرانسیل کسری را در تحلیل خطوط انتقال الکتریکی در حدود سال ۱۸۹۰ معرفی کرد. در شکل ۱، دانشمندان مشهوری که در توسعه حسابان کسری نقش ایفاء کرده‌اند، به همراه عکسهایشان نمایش داده شده است.

ویرایش نشده

۳. تعریف های اساسی در حسابان کسری

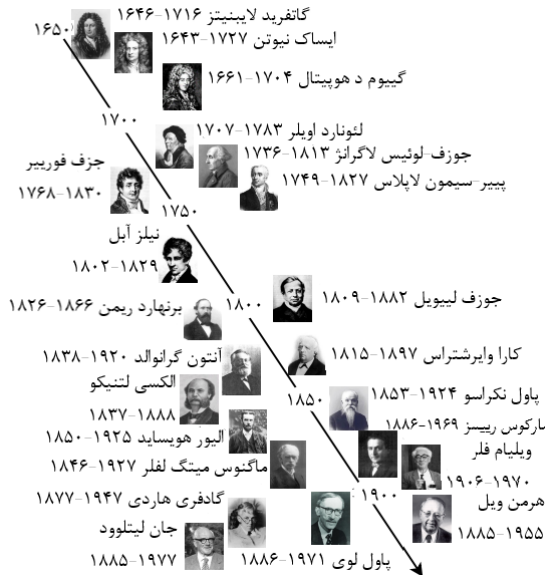
در سال ۱۸۱۹، لاکروئا^۲ [۱۴]، برای اولین بار به مسئله‌ای که توسط لایب‌نیتس و هویساید مطرح شد، پاسخ صحیح داد و ادعا کرد که $\frac{d^{\frac{1}{\alpha}}x}{dx^{\frac{1}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{x}{\pi}}$. ایده پاسخ به این سوال از مشتق مرتبه $n - m$ تابع توانی $y = x^m$, ($m \in \mathbb{N}$) نشات می‌گیرد. مشتق مرتبه $n - m$ این تابع از رابطه $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ بدست می‌آید. با توجه به تعریف تابع گاما توسط دانیل برنولی بصورت $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$, ($z \in \mathbb{R}$) و استفاده از خاصیت $\Gamma(n+1) = n!$ برای اعداد $n = 0, 1, 2, \dots$ می‌توان نوشت

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}. \quad (1.3)$$

از آنجایی که تابع گاما برای اعداد غیرطبیعی نیز تعریف می‌شود برای $n = \frac{1}{\alpha}$, $m = 1$ ، رابطه (۱.۳) منجر به رابطه $\frac{d^{\frac{1}{\alpha}}y}{dx^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}x^{\frac{1}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ می‌شود. مطابق رابطه (۱.۳) یک مقدار غیر

¹Oliver Heaviside

²Lacroix



شکل ۱: تاریخچه تصویری حسابان کسری [۲۲]

ویرایش نشده

صفر برای مشتق کسری یک تابع ثابت مانند $x^\circ = 1$ ، به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{d^\alpha x^\circ}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.3)$$

سازگاری تعمیم تعریف ارائه شده برای مشتق مرتبه n -ام تابع توانی یعنی رابطه (۱.۳) به مشتق کسری یا به عبارتی انتخاب عددی کسری برای n را می‌توان با توجه به خاصیت خطی بودن مشتقات معمولی و کسری (یعنی رابطه $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{d^\beta}{dx^\beta} y = \frac{d^{\alpha+\beta}}{dx^{\alpha+\beta}} y$) نشان داد. در واقع با اعمال دو بار مشتق $\frac{1}{\sqrt{x}}$ از تابع $y = x^m$ ($m \in \mathbb{N}$) مطابق رابطه (۱.۳)، رابطه‌ی $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^m = m x^{m-1}$ نتیجه می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود سمت راست رابطه‌ی اخیر، همان مشتق اول تابع $y = x^m$ می‌باشد و تعریف ارائه شده برای مشتق کسری این تابع سازگار می‌باشد (مرجع [۱۴] را ببینید). لازم به ذکر است که رابطه $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{d^\beta}{dx^\beta} y = \frac{d^{\alpha+\beta}}{dx^{\alpha+\beta}} y$ تنها برای تابع $y = x^m$ ($m \in \mathbb{N}$) که شرایط هموار بودن و صفری بودن در مبداء را همان‌طور که در مرجع [۸] اشاره شده ارضاء می‌کند، برقرار است. برای تعمیم فرمول مشتق کسری به تابع دلخواه $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ به صورت زیر عمل می‌شود. اولین مشتق تابع $f(x)$ به صورت $D^1 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ تعریف می‌شود.

در نتیجه دومین مشتق تابع $f(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \frac{dD^1 f(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^1 f(x+h) - D^1 f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} f(x + (2-m)h), \quad (3.3) \end{aligned}$$

که در آن $\binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ضریب دوجمله‌ای نیوتن می‌باشد. به طور مشابه، مشتق مرتبه‌ی n -ام تابع $f(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h). \quad (4.3)$$

تعمیم فرمول ترکیب با استفاده از تابع گاما به صورت $\binom{n}{m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}$ امکان تعمیم فرمول (۴.۳) به منظور تعریف مشتق کسری تابع $f(x)$ را فراهم می‌کند. برای این منظور عملگر انتقال d_h بصورت $d_h f(x) = f(x+h)$ و تکرار آن بصورت $d_h^\alpha f(x) = f(x+\alpha h)$ تعریف می‌گردد. در نتیجه رابطه (۴.۳) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} d_h^{n-m} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{d_h - 1}{h} \right)^n f(x) \quad (5.3)$$

با توجه به شباهت فرمول $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h)$ به فرمول دوجمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m,$$

می‌توان از رابطه تعمیم‌یافته فرمول ترکیب استفاده نموده و فرمول دو جمله‌ای را بصورت

$$(a+b)^\alpha = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} a^{\alpha-m} b^m,$$

نوشت. بازنویسی برای مشتق مرتبه α -ام فرمول (۵.۳) با استفاده از این فرمول به رابطه زیر منجر می‌شود (مرجع [۱۴] را ببینید):

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} d_h^{\alpha-m} f(x). \quad (6.3)$$

برای مشتق کسری تابع نمایی e^{ax} ، با توجه به رابطه بالا می‌توان نوشت

$$D^\alpha e^{ax} = e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} e^{a\alpha h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + 1)}{m! \Gamma(\alpha - m + 1)} e^{-mah}. \quad (۷.۳)$$

با استفاده از فرمول تعمیم‌یافته دوجمله‌ای رابطه $(1 - e^{-ah})^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + 1)}{m! \Gamma(\alpha - m + 1)} e^{-mah}$ بدست می‌آید. در نتیجه رابطه (۷.۳) با استفاده از این رابطه بصورت زیر ساده می‌گردد

$$D^\alpha e^{ax} = e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ah} - 1}{h} \right)^\alpha = a^\alpha e^{ax}. \quad (۸.۳)$$

رابطه بدست آمده دقیقاً مشابه رابطه از قبل دانسته $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ برای مشتق مرتبه طبیعی تابع نمایی می‌باشد. با انتخاب $a = ib$ و جدانمودن قسمتهای حقیقی و موهومی رابطه (۸.۳)، روابط زیر برای مشتق توابع هارمونیک بدست می‌آید که منسوب به گریر^۱ می‌باشند

$$\begin{aligned} D^\alpha (\cos bx) &= b^\alpha \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\alpha\right), \\ D^\alpha (\sin bx) &= b^\alpha \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\alpha\right). \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

مشتق گرونوالد-لتنیکوف^۲ یا با نام متفاوت مشتق-انتگرال گرونوالد-لتنیکوف، تعمیم مشتقی مشابه تعمیم ما با فرمول دوجمله‌ای است. با جایگذاری $\frac{x-a}{h}$ ، $h \rightarrow 0$ برای $x > a$ به جای ∞ در حد بالای سیگمای رابطه‌ی (۷.۳) فرمول مشتق گرونوالد-لتنیکوف نتیجه می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که در صورتی که $h \rightarrow 0$ بجای عبارت $d_h^{\alpha-m} f(x) = f(x + (\alpha - m)h)$ نمی‌توان از عبارت $-mh$ علی‌رغم کوچک بودن h صرفنظر کرد چرا که شمارنده m می‌تواند به بینهایت میل کند. دلیل اینکه در معادلات بالا به جای ∞ در حد بالای سیگما، یک عدد مثبت یعنی $\frac{x-a}{h}$ ، $h \rightarrow 0$ در نظر گرفته می‌شود را می‌توان با در نظر گرفتن حالت $\alpha = -1$ مشاهده کرد که باید همان نتیجه‌ای را که انتگرال‌گیری تابع می‌دهد به دست آورد. این نکته در ادامه اثبات خواهد شد. با تبدیل α به منهای α در فرمول مشتق گرونوالد-لتنیکوف می‌توان انتگرال گرونوالد-لتنیکوف را بصورت زیر نوشت

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(-\alpha + 1)}{m! \Gamma(-\alpha - m + 1)} f(x - mh), \quad x > a. \quad (۱۰.۳)$$

^۱Greer

^۲Grunwald-Letnikov Derivative

۹ ح. تیموری و ر. تیموری

در ضمن با توجه به روابط $\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z\sin(\pi z)}$ و $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ ، تساوی $\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha-m+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(-1)^m\Gamma(\alpha)}$ به سادگی اثبات می‌شود.

با جایگذاری رابطه‌ی اخیر در فرمول مشتق گرونوالد-لتنیکوف و نیز رابطه (۱۰.۳) روابط نهایی مشتق و انتگرال گرونوالد-لتنیکوف بدست می‌آیند

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(-\alpha-m+1)} f(x-mh), \quad x > a,$$

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x-mh), \quad x > a. \quad (11.3)$$

با توجه به دومین رابطه (۱۱.۳)، انتگرال‌گیری تابع $f(x)$ به صورت

$$D^{-1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} h f(x-mh)$$

بیان می‌شود و با تعریف $h = \frac{x-a}{n}$ می‌توان نوشت

$$D^{-1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nh} f(x-t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-nh}^x f(u) du = \int_a^x f(u) du \quad (12.3)$$

در مشتقات کسری، حدود باید در نظر گرفته شود، همانطور که باید در انتگرال باشد. حدود فقط با مشتقات مرتبه صحیح ناپدید می‌شوند. این نکته همچنین به این معنی است که مشتقات کسری غیرموضعی هستند. در این مقاله بعداً در مورد حدود انتگرال‌گیری یا بهتر بگوییم مشتق‌گیری صحبت خواهد شد. مطابق فرمول کوشی، n -امین انتگرال مکرر تابع پیوسته $f(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$D^{-n} f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_1 dx,$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13.3)$$

در حالت $n=2$ ، اثبات رابطه به سادگی صورت می‌گیرد. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که نامساوی‌های $a \leq x_2 \leq x$ و $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x$ نامساوی‌های $a \leq x_2 \leq x$ و $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x$

را نتیجه می‌دهند لذا

$$D^{-\nu} f(x) = \int_a^x f(x_1) \int_a^{x_1} dx_2 dx_1 = \int_a^x (x - x_1) f(x_1) dx_1 \quad (14.3)$$

این روش را می‌توان به طور مکرر اعمال کرد که منجر به رابطه (۱۳.۳) برای محاسبه انتگرال‌های تکراری، می‌شود. با جایگذاری $-n$ با α در رابطه (۱۳.۳)، فرمول مشتق ریمان-لیوویل بصورت $D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ بدست می‌آید. در ادامه، با تعریف $m = [\Re(\alpha)] + 1$ که در آن $\Re(\alpha)$ در مفهوم مقدار حقیقی مرتبه مشتق می‌باشد. اگر $\alpha > 0$ باشد، مشاهده می‌شود که $\alpha - m < 0$. اگر قسمت حقیقی α ، مثبت یا صفر باشد، انتگرال $\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$ و اگر $\alpha < 0$ باشد، انتگرال $\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$ استفاده می‌توان از آن برای محاسبه انتگرال‌های تعمیم‌یافته (که در آنها قسمت حقیقی α منفی است) استفاده کرد. با این حال، این مشکل را می‌توان به راحتی با مشتق‌گیری معمولی اولیه بیش از مقدار لازم، و بنابراین با منفی کردن مشتق‌گیری لازم باقی مانده و سپس اعمال مشتق تعمیم‌یافته برای تکمیل بقیه موارد که در آن مشتق‌گیری منفی خواهد بود، حل کرد یعنی $D_x^\alpha f(x) = D^m_a D_x^{\alpha-m} f(x)$ که در آن $m = [\Re(\alpha)] + 1$ می‌باشد. در این حالت $\alpha - m$ منفی بوده و انتگرال مربوطه و اگر نخواهد شد.

در جدول ۱، روابط مربوط به انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری ریمان-لیوویل، کاپتو و گرونوالد-لنتیکوف نشان داده شده است. همانطور که در سطر اول جدول ۱، مشاهده می‌شود برای تعریف مشتق کسری سمت چپ ریمان-لیوویل رابطه $D_x^\alpha f(x) = D^m_a D_x^{\alpha-m} f(x)$ بکاررفته و نخست m بار مشتق مرتبه صحیح و سپس مشتق کسری مرتبه $\alpha - m$ مطابق توضیحات بالا بکار رفته است که در مجموع مشتق کسری با مرتبه α که در آن قسمت حقیقی α مثبت یا صفر باشد اعمال شده است. در اصطلاح امروزی، عبارت $D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt$ با حد پایین $a = -\infty$ به عنوان انتگرال کسری لیوویل نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن حد پایین $a = 0$ ، عبارت به اصطلاح به انتگرال کسری ریمان کاهش می‌یابد، در حالی که عبارت فوق با حد پایین دلخواه a ، انتگرال کسری ریمان-لیوویل نامیده می‌شود. نماد انتگرال‌گیری و مشتق کسری فقط در علامت پارامتر α ، متفاوت است. انتگرال در سمت راست معادله بالا یعنی $\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt$ برای مرتبه‌های انتگرال منفی و اگر است با این حال، با توسعه تحلیلی^۱ می‌توان نشان داد که

$$D_x^\alpha f(x) = D^m_a D_x^{\alpha-m} f(x)$$

¹Analytic continuation

جدول ۱: نمایش روابط مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری

مشتق کسری سمت چپ ریمان-لیوویل ${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] \quad (m-1 < \alpha < m)$	مشتق کسری سمت چپ کاپتو ${}^C_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m} d\tau \quad (m-1 < \alpha < m)$
تبدیل لاپلاس مشتق کسری سمت چپ ریمان-لیوویل $L\{{}^{RL}_a D_t^\alpha f(t)\} = L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \left[\frac{d^{\alpha-k-1} f(t)}{dt^{\alpha-k-1}}\right]_{t=0}$ $(m-1 < \alpha < m), m \in \mathbb{N}$	تبدیل لاپلاس مشتق کسری سمت چپ کاپتو $L\{{}^C_a D_t^\alpha f(t)\} = L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$ $(m-1 < \alpha < m), m \in \mathbb{N}$
انتگرال کسری سمت چپ ریمان-لیوویل ${}^{RL}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, (\alpha \in \mathbb{R}^+)$	مشتق کسری گرونوالد - لنتیکوف ${}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{r=0}^{t-a} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh)}{h^\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

در میان چندین فرمول‌بندی از مشتق تعمیم‌یافته، تعاریف ریمان-لیوویل و کاپتو در کاربردهای

مهندسی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۴].

قضایای زیر شروط لازم برای تعاریف آمده در جدول ۱ را نشان می‌دهند.

(۱) ویرایش نشده

قضیه ۱.۳. فرض کنید $f \in L_1[a, b]$ و $\alpha > 0$. انتگرال ${}^{RL}_a I_t^\alpha f(t)$ تقریباً

برای هر $t \in [a, b]$ وجود دارد. علاوه بر این، تابع ${}^{RL}_a I_t^\alpha f(t)$ خود نیز عنصری از

$L_1[a, b]$ است.

(۲)

قضیه ۲.۳. فرض کنید $f \in A^1[a, b]$ و $0 < \alpha < 1$. پس، ${}^{RL}_a I_t^\alpha f(t)$ تقریباً

همه جا در $[a, b]$ وجود دارد. علاوه بر این، برای هر عدد حقیقی p ($1 < p < \frac{1}{\alpha}$)،

داریم ${}^{RL}_a I_t^\alpha f(t) \in L_p[a, b]$

(۳)

قضیه ۳.۳. فرض کنید $\alpha > 0$ ، $m = [\alpha]$ و $f \in C^m[a, b]$. پس برای

داریم ${}^{GL}_a I_t^\alpha f(t) = {}^{RL}_a I_t^\alpha f(t)$ ، $t \in (a, b)$

یادآوری می‌کنیم که فضاهای تابعی ذکر شده در بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_p[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid \int_a^b |f|^p dx < \infty, \text{ اندازه پذیر است} \right\}$$

$$C^k[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ دارای } k - \text{امین مشتق پیوسته است} \right\}$$

$$A^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ دارای } (n - 1) - \text{امین مشتق پیوسته مطلق است} \right\}$$

برای اطلاعات کامل‌تر در این موضوع مرجع [۸] را ببینید.

با توجه به رابطه ۱.۳ و فرمول $D^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}$ ، می‌توان انتگرال $(\alpha = -1)$ توابع توانی و نمایی را بدست آورد و با انتگرال کسری ریمان-لیوویل مقایسه نمود

$$\begin{aligned} \frac{e^{bx}}{b} &= D^{-1} e^{bx} = \int_a^x e^{bt} dt = \frac{e^{bx} - e^{ba}}{b} \rightarrow a = -\infty \\ \frac{x^{b+1}}{b+1} &= D^{-1} x^b = \int_a^x t^b dt = \frac{x^{b+1} - a^{b+1}}{b+1} \rightarrow a = 0 \end{aligned} \quad (15.3)$$

در واقع باید حدود مشتقات متفاوت باشند. لذا تفاوت در نتایج مشتقات با حدود مشتق متفاوت مهم است. در نهایت، می‌توان ثابت کرد که مشتق گرونوالد-لتنیکوف با هر حد انتگرال‌گیری معین برابر با مشتق ریمان-لیوویل با همان حدود برای هر عدد مختلط با قسمت حقیقی منفی است. مشتق ریمان-لیوویل با حد پایین بی‌نهایت منفی به مشتق ویل^۱ معروف است.

تبدیل لاپلاس تابع $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ ، به صورت $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ ، تعریف می‌شود، در حالی که تبدیل معکوس آن بصورت $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \mathcal{L}\{f(t)\} ds$ است جایی که a طوری انتخاب می‌شود که بزرگتر از قسمت حقیقی هر یک از تکینگی‌های تابع $f(t)$ باشد. با توجه به رابطه

$$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = t^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{m=0}^{n-1} t^m (D^{n-m-1} f)(0)$$

در صورتی که عبارات در داخل سیگما صفر باشند، رابطه به طور ویژه ساده می‌شود، و برای آن نوع توابع مشتق می‌تواند تعمیم داده می‌شود تا این ویژگی برای مقادیر غیر صحیح α صادق باشد چون برای $l = 0, 1, 2, \dots, m-1$ و $m = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ نتیجه می‌شود $(D^l \circ D^{\alpha-m} f)(0) = 0$

^۱Weyl

۱۳ ————— ح. تیموری و ر. تیموری

، لذا $\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = t^n \mathcal{L}\{f(t)\}$. لازم به ذکر است که بدلیل اینکه $m - \alpha > 0$ ، در نتیجه مطابق رابطه

$$(D^l D^{\alpha-m} f)(\circ) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^l \int_{\circ}^{\circ} \frac{f(t)}{(\circ-t)^{-(m-\alpha)+1}} dt,$$

نتیجه بالا براحتی اثبات می‌شود. رابطه مشابه رابطه $\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = t^n \mathcal{L}\{f(t)\}$ ، برای مشتق کسری صادق است. برای بدست آوردن رابطه $\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = t^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای مشتق کسری، به صورت زیر عمل می‌شود

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} D^\alpha\{e^s\} \mathcal{L}\{f(t)\} ds \quad (۱۶.۳)$$

در ادامه، با توجه به رابطه معروف $D^\alpha\{e^{st}\} = s^\alpha e^{st}$ ، فرمول (۱۶.۳) به صورت $D^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}\}$ ساده می‌گردد.

تبدیل فوری تابع $f(t)$ به صورت $\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ تعریف می‌شود که در آن مشابه تبدیل لاپلاس، رابطه $D^\alpha f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{(i\omega)^\alpha \mathcal{F}\{f(t)\}\}$ برقرار است.

در این دو تعمیم باید حدود ضمنی مشتق‌گیری تعیین شوند. در مورد تبدیل لاپلاس، مشتق تعمیم‌یافته یک مشتق ریمان-لیوویل با حد پایین صفر است، در حالی که در مورد تبدیل فوری مشتق ویل است. در ضمن تعمیم‌های مشتق را می‌توان بر حسب پیچش^۱ فرمول‌بندی کرد. برای مثال

$$D^{-\alpha} f(t) = \int_{\circ}^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x) dx = \int_{\circ}^t \phi_\alpha(t-x) f(x) dx = \phi_\alpha(t) * f(t), \quad (۱۷.۳)$$

که در آن $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ می‌باشد.

۴. عملگرهای کسری مرتبه متغیر و توزیع‌شده

برای بیش از یک قرن، مطالعه حسابان کسری بر عملگرهایی که دارای مرتبه‌ای ثابت (اما تک‌مقداری) بودند تمرکز یافته‌بود. این عملگرهای کسری را عملگرهای با مرتبه ثابت می‌نامند که در تمایز با عملگرهای با مرتبه توزیع‌شده (اما هنوز ثابت) قرار دارند. با وجود این که، عملگرهای با

^۱Convolution

مرتبه ثابت نسبت به همتای مرتبه صحیح خود از عمومیت بیشتری برخوردار هستند، ماهیت ثابت و تک‌مقداری بودن مرتبه‌ی آن‌ها سبب می‌شود تا توانایی‌شان را برای ضبط دقیق برخی از پدیده‌های پیچیده که دینامیک‌شان می‌تواند در طول زمان تکامل یابد و یا اساساً در نتیجه تعامل مرتبه‌های متعدد شکل می‌گیرند، محدود گردد. در سالهای اخیر، این مشاهدات منجر به تدوین دو شکل قابل توجه و منحصر به فرد از عملگرهای با مرتبه توزیع‌شده و با مرتبه متغیر شده‌است. تعریف اخیر مربوط به عملگرهایی است که مرتبه آنها می‌تواند یک تابع از متغیرهای وابسته (مثلاً متغیرهای حالت سیستم) یا متغیرهای مستقل (مثلاً فضا یا زمان) باشد و مقدار مرتبه به دنبال تکامل سیستم می‌تواند تغییر کند. این مقاله بر روی این رده از عملگرها تمرکز نمی‌کند، ولی خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای مرور دقیق جنبه‌های ریاضی و کاربردهای عملگرهای مرتبه متغیر به مراجع [۲۶، ۳۵] مراجعه کنند.

عملگرهای با مرتبه متغیر قطعاً می‌توانند ذاتاً تکی یا توزیع‌شده باشند. در عملگرهای مرتبه متغیر توزیع‌شده، تعریف مرتبه توزیع‌شده عملگر اجازه می‌دهد تا برهم کنش‌های مراتب مختلف و یا پدیده‌های فیزیکی مانند اثرات حافظه در مواد مرکب [۵] یا اثرات چند مقیاسی [۴] قابل توجه و تفسیر باشند. یک مثال ساده که قابلیت‌های این دسته از عملگرها را نشان می‌دهد، رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک است که خواص متغیر با مکان دارند [۱۸]. حسابان کسری با مرتبه توزیع‌شده یک تعمیم طبیعی از حسابان کسری با مرتبه ثابت (عملگرهای مرتبه ثابت) با انتگرال‌گیری از هسته^۱ کسری عملگرهای از مراتب ثابت در محدوده وسیعی از مرتبه‌ها را ارائه می‌دهد. با توجه به اینکه هسته اصلی یک عملگر با مرتبه ثابت در عملگر با مرتبه توزیعی حفظ می‌شود، عملگرهای با مرتبه توزیعی این ویژگی‌های اساسی عملگرهای با مرتبه ثابت مانند توانایی مدل‌سازی غیرموضعی و اثرات حافظه را به ارث می‌برند و بیشتر آنها را به چندین مرتبه همزیست گسترش می‌دهند. این بحث اخیر می‌تواند به عنوان برهم‌نهی‌های رفتاری حاصل از عملگرهای مراتب ثابت منفرد با استفاده از مرتبه‌های مختلف در یک محدوده مشخص تفسیر شود. یک نمای کلی از کاربردهای حسابان کسری مرتبه توزیعی در زمینه‌هایی مانند ویسکوالاستیسیته، فرآیندهای انتقال و نظریه کنترل که تا به امروز بیشتر فعالیت‌های تحقیقاتی در این حوزه‌های پژوهشی بوده، در مقاله مروری وینگ و همکارانش یافت می‌شود [۹].

در این مقاله ضمن معرفی روابط اساسی حسابان کسری، تعابیر هندسی مشتق و انتگرال کسری

^۱Kernal

موجود بررسی و در مقایسه با شواهد فیزیکی مورد نقد و بررسی قرار گرفته است. در ضمن مرور مطالعاتی نیز بیشتر بر کاربردهای مهندسی حسابان کسری متمرکز شده که در کارهای دیگران کمتر به آنها پرداخته شده‌اند.

۵. تعبیر هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری

تفسیر هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری، که هم در مباحث نظری و هم در کاربردهای مسائل دنیای واقعی، حوزه‌ای به سرعت در حال رشد را نشان می‌دهد، ساده نیست و مشکلی ۳۰ ساله است. فقدان این تفاسیر در اولین کنفرانس بین‌المللی حسابان کسری در نیوهیون (ایالات متحده آمریکا) در سال ۱۹۷۴ با گنجاندن آن در فهرست مسائل باز تأیید شده است. این سوال در کنفرانس‌های بعدی در دانشگاه استراتکلاید^۲ (بریتانیا) در سال ۱۹۸۴ و در دانشگاه نیهون^۳ (توکیو، ژاپن) در سال ۱۹۸۹ بی‌پاسخ بود. بحث میزگرد در کنفرانس روش‌های تبدیل و عملکردهای ویژه در وارنا (۱۹۹۶) نشان داد که مشکل هنوز حل نشده است. احتمالاً بیشتر به دلایل زبانی، تلاش زیادی برای ارتباط انتگرال‌ها و مشتقات کسری از یک طرف و هندسه فراکتال از سوی دیگر انجام شده است، اما به وضوح نشان داده شده است که این رویکرد ناسازگار است. یکی از تفاسیر نسبتاً مناسب هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری توسط ایگور پادلوبنی [۲۹] ارائه شده که به آن می‌پردازیم. برای این کار لازم است چند مفهوم را یادآوری کنیم.

۱.۵. انتگرال ریمان-اشتیلتیس. در ریاضیات، انتگرال ریمان-اشتیلتیس^۴ تعمیم انتگرال

ریمان است که به نام برنهارد ریمان و توماس جوانس اشتیلتیس نام‌گذاری شده است. تعریف این انتگرال اولین بار در سال ۱۸۹۴ توسط اشتیلتیس منتشر شد. انتگرال ریمان-اشتیلتیس یک تابع $f(x)$ از یک متغیر حقیقی نسبت به یک تابع حقیقی $g(x)$ به صورت $\int_a^b f(x)dg(x)$ نشان داده می‌شود و به عنوان حدی از مجموع تقریبی $S(P, f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$ تعریف می‌شود، بطوریکه نرم افزاز (یعنی طول طولانی‌ترین زیر بازه)

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

¹New Haven

²Strathclyde

³Nihon

⁴Riemann-Stieltjes

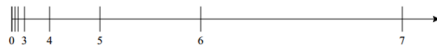
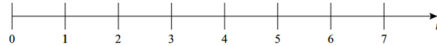
از بازه $[a, b]$ به صفر نزدیک می‌شود، جایی که c_i در زیر بازه i -ام $[x_i, x_{i+1}]$ قرار دارد. دو تابع f و g را به ترتیب "عبارت زیر انتگرال" ^۱ و "انتگرال گر" ^۲ می‌نامند. به طور معمول g یکنواخت (با حداقل تغییرات کراندار ^۳) و نیم‌پیوسته راست ^۴ در نظر گرفته می‌شود (هر چند مورد آخری اساساً قراردادی است). ما به طور خاص نیازی به پیوسته بودن g نداریم، که به انتگرال‌ها اجازه می‌دهد که دارای عبارت جرم نقطه‌ای باشند. برای مطالعه عمیق‌تر و بیشتر در این زمینه به کتاب آنالیز ریاضی رودین [۴۴] مراجعه کنید.

۲۰۵. دو نوع زمان. آگاهی از تفسیر فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری، نیاز به آگاهی از امکان معرفی دو نوع زمان یعنی زمان همگن (زمان مطلق) و زمان ناهمگن (زمان کیهانی ^۵) دارد. شواهدی در علم فیزیک وجود دارد که وجود مقیاس‌های زمانی مختلف را اثبات می‌کند. در ادامه مقاله به این شواهد اشاره خواهد شد. کاشانی [۴۶]، شرحی توصیفی، تاریخی و فلسفی بر اولین سخنرانی عمومی سالانه اینشتین در دانشگاه نبراسکا لینکلن که توسط مایکل عطیه ارائه شده نوشته است که مطالبی مرتبط با موضوع مطرح شده در این بخش در دل خود دارد.

نیوتن فرض می‌کند: "زمان مطلق، واقعی و ریاضی به خودی خود، از سرشت خود، به طور مساوی بدون ارتباط با هیچ چیز خارجی جریان دارد". چنین فرضی برای توسعه حساب دیفرانسیل نیوتن و اعمال آن در مسائل مکانیک کاملاً ضروری بود. زمان اغلب با استفاده از محور زمان به تصویر کشیده می‌شود و فواصل هندسی مساوی محور زمانی مربوط به بازه‌های زمانی برابر در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲ بالایی را ببینید). اما این فرض را نمی‌توان با آزمایش نه اثبات کرد و نه رد کرد.

دو طول از بازه‌های هندسی را می‌توان اندازه‌گیری و مقایسه کرد، زیرا آنها به طور همزمان برای اندازه‌گیری در دسترس هستند. دو بازه زمانی را هرگز نمی‌توان با هم مقایسه کرد، زیرا آنها برای اندازه‌گیری (یا برای مشاهده) فقط به صورت متوالی در دسترس ما هستند. کلمنس ^۶ نوشته است: "اندازه‌گیری زمان اساساً یک فرآیند شمارش است. هر پدیده‌ای که تکرار می‌شود، هر اتفاقی که می‌

¹Integrand²Integrator³Bounded variation⁴Right-semicontinuous⁵Cosmic time⁶G. Clemence



شکل ۲: محورهای زمان همگن و غیرهمگن

تواند رخ دهد، در واقع معیاری از زمان است.”

شکل ۲ تیک‌های ساعتی را نشان می‌دهند که می‌توانیم آن‌ها را فقط به صورت نمادین ثبت کنیم. می‌توان آنها را به عنوان زمان مطلق و کیهانی تفسیر کرد که با برخی ”تیک‌های ساعت” نشان داده می‌شود. تصویر ما از زمان همگن فردی به شکلی است که در شکل ۲ بالا نشان داده شده است. زمان کیهانی ممکن است لزوماً به طور یکسان جریان نداشته باشد، مانند آنچه در شکل ۲ پایین نشان داده شده است.

استفان هاوکینگ نوشته است که: ” . . . به نظر می‌رسد زمان در نزدیکی جسم عظیمی مانند زمین کندتر می‌گذرد. ” همچنین او نوشته است ” . . . هیچ زمان مطلق منحصر به فردی وجود ندارد، اما در عوض هر فردی معیار زمان خود را دارد که بستگی به این دارد که کجاست و چگونه حرکت می‌کند.” دیگنالت^۱ و سینگالی^۲ نوشته اند که: طبق ”کیهان‌شناسی زمان‌سنجی^۳”، مدل اینشتین برای درک کل جهان (یعنی فضا-زمان جهانی) صحیح است، با این تفاوت که دو نوع زمان وجود دارد: زمان کیهانی یا اینشتین، و زمان محلی یا مینکوفسکی. زمان، که (شاید!) زمانی است که با تکنیک‌های موجود اندازه‌گیری می‌شود. به زبان ساده، زمان کیهانی اینشتین زمان «واقعی» است، در حالی که زمان مینکوفسکی تنها تقریبی از t است. بنابراین، مدل ایده‌آل زمان همگن با جریان یکسان را می‌توان به عنوان تقریبی از زمان کیهانی در نظر گرفت. این ایده که زمان از

¹Daigneault

²A. Sangalli

³Chronometric cosmology

دید دستگاه‌های مختصات متحرک سرعت بالا (سرعت‌های نزدیک سرعت نور) متفاوت از دستگاه مختصات ثابت سنجیده می‌شود توسط تعدادی شواهد فیزیکی قابل اثبات است برای مثال بررسی فروپاشی یک ذره کیهانی ناپایدار و نیز تغییر ناپذیری سرعت موج در معادله ماکسول به شرط فرض وجود دو نوع زمان دو شاهد فیزیکی بر این مدعا هستند که تاییدکننده این تفاوت هستند.

۳.۵. ذرات کیهانی. میون، (که از حرف یونانی μ برای نمایش آن استفاده می‌شود) یک ذره بنیادی شبیه به الکترون است که بار الکتریکی آن $-1e$ و اسپین آن $\frac{1}{2}$ است، اما جرم بسیار بیشتری از الکترون دارد. طبق نظریه نسبیت خاص اینشتین، ساعتی که با کسری از سرعت نور (به طوری که مقدارش قابل توجه باشد) نسبت به ناظر حرکت می‌کند، کندتر از ساعت خود ناظر کار می‌کند. این بدان معناست که زمان باید در یک چارچوب متحرک مرجع، که به آن اتساع زمان می‌گویند، کندتر جریان داشته باشد. اگر فرآیندی (مانند فروپاشی یک ذره ناپایدار) با طول عمر متوسط $\tau_0 = 1.56 \times 10^{-6} (sec)$ در چهارچوب ساکن اتفاق بیفتد، طول عمر ذره با سرعت v برابر با $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ خواهد بود که در آن سرعت نور برابر با $c = 2.9979 \times 10^8 (\frac{m}{sec})$ است، فروپاشی میون‌ها تأیید فرمول اینشتین را با دقت بالایی فراهم کرده است.

اندازه‌گیری شارمیون‌ها در سطح زمین یک معضل اولیه ایجاد کرد، زیرا بر اساس نیمه‌عمر کوتاه ۱.۵۶ میکروثانیه‌ای، تعداد بسیار بیشتری از آنچه انتظار می‌رفت شناسایی شدند. این مثال خوبی از کاربرد اتساع زمانی نسبیتی برای توضیح افزایش محدوده ذرات برای ذرات با سرعت بالا است. برای مثال از یک میلیون میون (فلاکس اندازه‌گیری شده) که در ارتفاع ۱۰ کیلومتری زمین و با سرعت حدود $v = 0.98c$ حرکت می‌کنند می‌باید با چنین سرعتی مسافت ۱۰۰۰۰ متر را در زمان $\tau = 34 \times 10^{-6} (sec)$ طی کنند که چنین زمانی ۲۱۸ برابر طول عمر ذره τ_0 خواهد بود. در حقیقت نرخ حیات می‌باید برابر با $0.3 \times 10^{-6} \approx 2^{-218}$ باشد. یعنی فلاکس میون در سطح زمین ۰.۳ از یک میلیون خواهد بود. در صورتیکه در عمل مقدار بسیار بیشتری از این مقدار اندازه‌گیری می‌شود. اگر ساعت ذره میون تاخیر زمانی دارد یعنی به عنوان مثال با ضریب تاخیر برابر با $5 \approx 1 / \sqrt{1 - (\frac{0.98c}{c})^2}$ کار می‌کند در این صورت طول عمر ذره $\tau = 5 \times 1.56 \times 10^{-6} (sec)$ اندازه‌گیری می‌شود که زمان لازم برای طی مسافت ۱۰۰۰۰ متر یعنی $\tau = 34 \times 10^{-6} (sec)$ مقدار ۴۳۶ برابر طول عمر ذره خواهد بود. در اینصورت نرخ حیات می‌باید برابر $0.49 \approx 2^{-436}$ باشد. یعنی فلاکس میون در سطح زمین ۴۹۰۰۰ از یک

میلیون خواهد بود. چنین عددی با اندازه‌گیریهای واقعی تطبیق داشته و تاخیر زمانی ساعت متصل به ذره میون که با سرعتی نزدیک سرعت نور حرکت می‌کند را اثبات می‌کند.

۴.۵. معادله موج ماکسول. معادله موج ماکسول به صورت

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

می‌باشد. با اعمال تبدیل گالیله به صورت $x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$ ، روی معادله موج مشاهده می‌گردد که معادله موج تغییر کرده و سرعت موج c ثابت نخواهد بود. این تغییر برای توضیح اثبات تجربی مایکلسون و مورلی مبنی بر ثابت بودن سرعت نور مفید نبود. لازم به ذکر است که تبدیل گالیله، حرکت محور x' دستگاه $x'y'z'$ را به موازات محور x از دستگاه xyz با سرعت v را نشان می‌دهد که در آن t و t' زمانهای اندازه‌گیری شده از دو دستگاه هستند. با اعمال تبدیلات لورنتز به صورت

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ می‌باشد، پایا بودن معادله موج الکترومغناطیسی تحت تبدیل‌های لورنتس نتیجه می‌شود. می‌توانیم منطق بالا را معکوس کنیم تا نشان دهیم که اگر قرار است معادله موج ثابت بماند (به دلیل نتیجه مایکلسون-مورلی)، تبدیل‌های لورنتس باید تبدیل‌های صحیحی باشند تا در تغییر بین فریم‌های مرجع اولیه استفاده شوند. اینشتین از این نتیجه گرفت که تبدیل‌های لورنتس نشان می‌دهند که زمان و مکان چگونه باید در یک چارچوب مرجع با سرعت بالا تغییر کند. لورنتز نتیجه گرفت که این تبدیل‌ها نشان می‌دهد که زمان و مکان ظاهری چگونه باید تغییر کند. در واقع تفاوت زمانهای t و t' ، تغییرناپذیری سرعت موج در معادله ماکسول را که به کمک آزمایش تجربی مایکلسون و مورلی اثبات شده توجیه می‌نماید.

حال با آشنایی با انتگرال ریمان-اشتیلتیس و علم به وجود دو نوع زمان در فیزیک به تفسیر هندسی انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل سمت چپ و راست پرداخته می‌شود. انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل سمت چپ و راست یعنی $I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ و

را می‌توان به شکل انتگرال اشتیلتیس [۲۹] نوشت

$$\begin{aligned} I_t^\alpha f(t) &= \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \\ {}_t I_b^\alpha f(t) &= \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau) \end{aligned} \quad (۱.۵)$$

که در آن $g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ و $h_t(\tau) = \frac{t^\alpha + (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ می‌باشند. حال ماشینی را تصور کنید که مجهز به دو وسیله برای اندازه‌گیری است: سرعت سنج که سرعت $v(\tau)$ را ثبت می‌کند و ساعتی که باید زمان را نشان دهد. اما ساعت، زمان را به اشتباه نشان می‌دهد. فرض کنید رابطه بین زمان اشتباه τ که توسط ساعت نشان داده می‌شود (راننده آن را زمان صحیح در نظر می‌گیرد)، از یک سو و زمان واقعی T از سوی دیگر، با تابع $T = g(\tau)$ شرح داده شود. راننده A که از عملکرد اشتباه ساعت اطلاعی ندارد، مسافت طی شده را به عنوان انتگرال کلاسیک محاسبه می‌کند یعنی $S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ با این حال، ناظر O با دانستن ساعت اشتباه و داشتن تابع $g(\tau)$ ، که مقادیر صحیح زمان را از زمان اشتباه راننده بازیابی می‌کند، مسافت واقعی طی شده را به صورت $I_t^\alpha v(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) = S_O(t)$ محاسبه می‌کند. انتگرال کسری تابع $v(\tau)$ یعنی $S_O(t)$ را می‌توان به عنوان مسافت واقعی گذرانده شده توسط یک جسم متحرک تفسیر کرد که برای آن مقادیر محلی سرعت آن $v(\tau)$ (سرعت فردی) و مقادیر محلی زمان (زمان فردی)؛ آن را ثبت کرده‌ایم. رابطه بین زمان ثبت شده به صورت محلی (که به صورت زمان بطور یکسان جریان پیدا کننده در نظر گرفته می‌شود) و زمان کیهانی (که به صورت غیر یکسان جریان دارد) توسط یک تابع شناخته شده $g_t(\tau)$ داده می‌شود. تابع $g_t(\tau)$ مقیاس زمانی ناهمگن را توصیف می‌کند، که نه تنها به τ ، بلکه به پارامتر t نیز بستگی دارد که آخرین مقدار اندازه‌گیری شده زمان فردی جسم متحرک را نشان می‌دهد. وقتی t تغییر می‌کند، کل بازه زمانی کیهانی قبلی نیز تغییر می‌کند. این موضوع با دیدگاه‌های فعلی در فیزیک مطابقت دارد.

مطابق روابط جدول ۱، مشتق کسری سمت چپ ریمان-لیویول مسافت واقعی طی شده

$S_O(t)$ برای $0 < \alpha < 1$ عبارت است از

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha S_O(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} S_O(t) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} S_O(t) d\tau = {}_t I_t^{-\alpha} S_O(t) \quad (۲.۵) \end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه ${}_0 I_t^\alpha v(t) = S_O(t)$ ، در رابطه بالا نتیجه می‌شود

$${}^{RL}D_t^\alpha S_O(t) = {}_0 I_t^{-\alpha} \cdot {}_0 I_t^\alpha v(t) = v(t). \quad (۳.۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق کسری ریمان-لیوویل سمت چپ فاصله واقعی $S_O(t)$ طی شده توسط یک جسم متحرک، که برای آن رابطه بین زمان فردی آن τ و زمان کیهانی T ، در هر نمونه زمانی جداگانه t توسط تابع معلوم $T = g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ توصیف شده برابر است با سرعت فردی آن شی $v(\tau)$. در ضمن سرعت $v_o(\tau)$ عبارتست از

$$\begin{aligned} v_o(\tau) &= \frac{dS_O}{dt} = \frac{d \cdot {}_0 I_t^\alpha v(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} v(\tau) d\tau = {}^{RL}D_t^{\alpha-1} v(t). \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

بنابراین، مشتق مرتبه $(1-\alpha)$ -ام ریمان-لیوویل از سرعت فردی $v(t)$ برابر است با سرعت $v_o(t)$ از دیدگاه ناظر مستقل، اگر زمان فردی τ و زمان کیهانی $T = g_t(\tau)$ تشریح شده باشد، آنگاه برای $\alpha = 1$ وقتی تغییر شکل دینامیکی مقیاس زمانی وجود ندارد، هر دو سرعت بر هم منطبق هستند یعنی $v_o(t) = v(t)$. از طرف دیگر مطابق روابط جدول ۱، مشتق کسری سمت چپ کاپتو مسافت واقعی طی شده $S_O(t)$ برای $0 < \alpha < 1$ ، عبارت است از

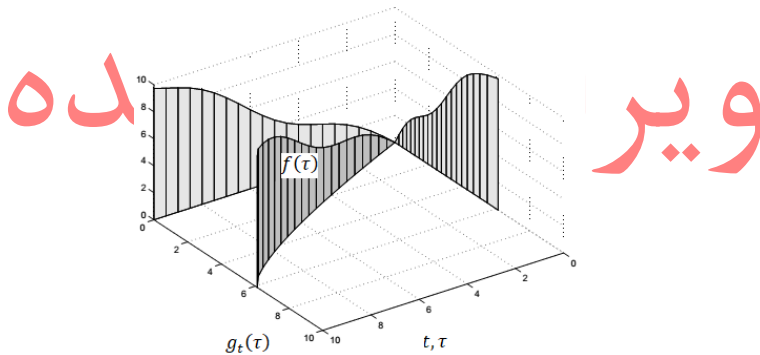
(۵.۵)

$${}_a^C D_t^\alpha S_O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dS_O(\tau)}{d\tau} d\tau = {}_0 I_t^{1-\alpha} \frac{dS_O(t)}{dt} = v(t).$$

بنابراین، مشتق کسری کاپتو تفسیر فیزیکی مشابهی با مشتق کسری ریمان-لیوویل دارد. لازم به ذکر است که اگر $f(0) = 0$ ، پس مشتق ریمان-لیوویل و مشتق کاپتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ منطبق هستند یعنی ${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t)$.

در ادامه به تعبیرهندسی انتگرالهای کسری پرداخته می‌شود. در ابتدا یک سیستم مختصات سه بعدی که محورهای مختصاتش نشان دهنده مختصات τ ، g و $f(\tau)$ هستند، در نظر گرفته می‌شود. در صفحه (τ, g) تابع $g_t(\tau)$ برای $0 \leq \tau \leq t$ ترسیم می‌شود. در امتداد منحنی به‌دست‌آمده، یک حصار با ارتفاع متغیر $f(\tau)$ ساخته می‌شود بنابراین لبه بالایی "حصار" منحنی سه بعدی $(f(\tau), g_t(\tau), \tau)$ است. این "حصار" را می‌توان بر روی دو سطح عمودی (صفحات مختصات) تصویر کرد (شکل ۳ را ببینید): مساحت تصویر این "حصار" بر روی صفحه (τ, f) با مقدار انتگرال کسری ${}_0 I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ مطابقت دارد. سطح تصویر همان "حصار"

روی صفحه (g, τ) مطابق با مقدار انتگرال $I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ یا است. به عبارت دیگر، ”حصار“ ما دو سایه روی دو دیوار می‌اندازد. اولین از آنها، که روی دیوار (τ, f) به ”سطح زیر منحنی $f(\tau)$ “ معروف است که یک تفسیر هندسی استاندارد از انتگرال $I_t^\alpha f(t)$ است. ”سایه“ روی دیوار (g, f) یک تفسیر هندسی از انتگرال کسری $I_t^\alpha f(t)$ برای یک t ثابت است. بدیهی است که برای $g_t(\tau) = \tau$ هر دو ”سایه“ برابر هستند. این نشان می‌دهد که تعریف کلاسیک انتگرال معین یک مورد خاص از انتگرال ریمان سمت چپ است. سوالی که در اینجا مطرح است این است که برای انتگرال کسری لیوویل حتی از نقطه نظر هندسی، وقتی t در حال تغییر است (یعنی در حال رشد) چه اتفاقی می‌افتد؟ با تغییر t ”حصار“ به طور همزمان تغییر می‌کند. طول و به تعبیری شکل آن تغییر می‌کند. در اینصورت ما یک تفسیر هندسی دینامیکی از انتگرال کسری به عنوان تابعی از t داریم.



شکل ۳: نمایش حصار و سایه‌های آن برای $\alpha = 0.75$ و $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$ [۲۹].

نکته چالش برانگیز این است که اگر چه فرض وجود تفاوت بین زمان فردی τ و زمان کیهانی T دارای شهود فیزیکی است اما وجود ارتباط بین این دو زمان که با تابعیت $T = g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ بیان شود می‌تواند ما به ازای فیزیکی نداشته باشد. مثلاً تبدیلات لورنتز که یک تبدیل زمانی برای فریمهای مرجع می‌باشد و به صورت $t' = t / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ نمایش داده می‌شود متفاوت از ارتباط زمانی معرفی شده در بالاست.

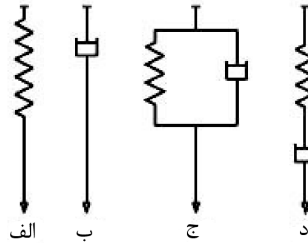
۶. کاربرد ی از حسابان کسری در مهندسی مواد، شیمی، برق، عمران و مکانیک

۱.۶. کاربرد حسابان کسری در مواد ویسکو الاستیک. همانطور که قبلاً اشاره شد مواد ویسکو الاستیک یا لاستیکها یا پولیمرها به طور وسیعی در مهندسی مکانیک، برق، مواد، شیمی و عمران بکار می‌روند. مثلاً در مهندسی برق این مواد به عنوان جداسازها یا عایقهای الکتریکی بکار می‌روند. در مهندسی عمران از این مواد برای کاهش ارتعاشات سازه‌های بزرگ نظیر پلها استفاده می‌شود. به دلیل اهمیت تولید و استفاده این مواد در مهندسی شیمی، گرایشی از این مهندسی بنام مهندسی پولیمر ایجاد شده است.

در دانش مهندسی وقتی یک جسم در امتداد یک محور بصورت یک بعدی تحت بارگذاری قرار می‌گیرد در یک حالت ساده، تنش (σ) به صورت توزیع نیرو بر واحد سطح ماده و کرنش (ϵ) به صورت تغییر طول نسبی ماده (نسبت تغییر طول ماده به طول اولیه) تعریف می‌گردند که از جمله کمتهای بسیار مهم در مهندسی می‌باشند. تعدادی معادلات ساختاری برای مواد مختلف وجود دارند که ارتباط بین تنش و کرنش را نشان می‌دهند. برای مثال، برای بسیاری از جامدات این رابطه ساختاری به صورت $\sigma(t) = m\epsilon(t)$ (مدل هوک) و برای اکثر سیالات تنش با نرخ زمانی کرنش در ارتباط است و رابطه ساختاری به صورت $\sigma(t) = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$ (مدل نیوتن) می‌باشد. برای مواد ویسکو الاستیک نظیر مواد پلیمری و لاستیک که رفتاری بین جامد و سیال دارند رابطه ساختاری بسته به مدل انتخابی در حالت کلاسیک ترکیبی از معادلات ساختاری جامدات و سیالات در نظر گرفته می‌شود. در واقع این مواد نه آنقدر صلب و محکم هستند که مانند مواد جامد در اثر نیروهای اعمالی تغییر شکلهای بسیار کمی داشته باشند و نه آنقدر شل و روان که مانند سیالات (مایعات و گازها) در اثر اعمال نیرو جریان یابند.

برای مواد ویسکو الاستیک، دو مدل ویگت با رابطه ساختاری $\sigma(t) = m\epsilon(t) + b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$ و مدل ماکسول با رابطه ساختاری $\sigma(t) + a_1 \frac{d\sigma}{dt} = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$ بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مدلها از مشتق مرتبه صحیح یا یک برای معادلات ساختاری استفاده شده است. مدل های ذکر شده در بالا در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. به دلیل وجود یک رابطه خطی بین تنش و کرنش در رابطه هوک که مشابه رابطه خطی بین نیرو اعمالی به فنر و تغییر طول آن است این مدل با فنر نمایش داده می‌شود. از طرف دیگر در مهندسی از وسیله دیگری بنام دمپر یا میراکننده یا دشپات (در خودروها کمک فنر نامیده می‌شود) استفاده می‌شود که از یک پیستون لغزنده در داخل یک استوانه حاوی روغن تشکیل شده و یک رابطه خطی بین نیروی اعمالی به آن و نرخ زمانی جابجایی پیستون

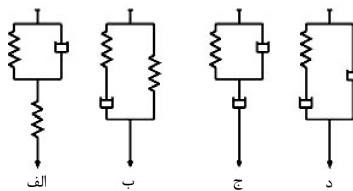
نسبت به استوانه یا سرعت نسبی حرکت پیستون وجود دارد. این رابطه شبیه معادله ساختاری سیالات یا $\sigma(t) = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$ می‌باشد و لذا مدل نیوتن در شکل ۴ (ب) با یک دمپر نمایش داده می‌شود. برای مواد ویسکوالاستیک ترکیبی از فنرها و دمپرها بصورت سری و موازی برای مدلسازی مواد ویسکوالاستیک بکار می‌روند.



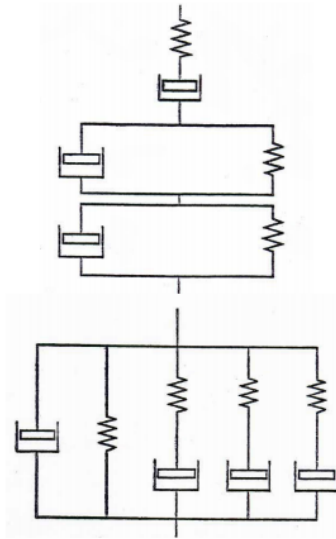
شکل ۴: مدل‌های مکانیکی کلاسیک: (الف) و (ب) مدل‌های مرتبه صحیح مواد ویسکوالاستیک، (ج) مدل ویگت، (د) مدل ماکسول [۲۳].

ویرایش نشده

در شکل‌های ۵ و ۶ مدل‌های پیچیده‌تری از مواد ویسکوالاستیک دیده می‌شود.



شکل ۵: نمایش‌های مکانیکی مدل‌های زبر و ضد زبر: (الف) فنر به صورت سری با مدل ویگت، (ب) فنر موازی با مدل ماکسول، (ج) داشپات به صورت سری با مدل ویگت، (د) داشپات به صورت موازی با مدل ماکسول [۲۳].

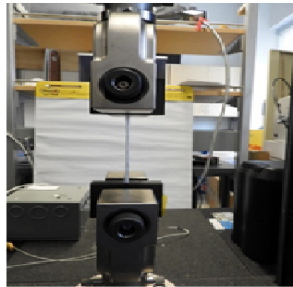


شکل ۶: نمایش‌های مکانیکی مدل برگرز: نمایش سازگاری با خزش (بالا)، نمایش آسودگی تنش (پایین) [۲۳].

ویرایش نشده

جهت مشخص نمودن رابطه ساختاری برای مواد مختلف معمولاً از یک دستگاه کشش تک محوره مطابق شکل ۷ استفاده می‌شود. نمونه به دو فک دستگاه بسته می‌شود و با حرکت فکها نسبت به یکدیگر نمونه تحت کشش قرار می‌گیرد. این دستگاهها طوری طراحی شده‌اند که امکان اعمال تنش ثابت $\sigma(t) = \sigma_0$ و اندازه‌گیری همزمان کرنش منتجه (حالت الف) و یا اعمال کرنش ثابت $\epsilon(t) = \epsilon_0$ و اندازه‌گیری همزمان تنش منتجه (حالت ب) وجود دارد. در حالت الف کمیت سازگاری با خزش به صورت $J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}$ و در حالت ب کمیت آسودگی تنش به صورت $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$ تعریف می‌شوند.

اخیراً برای مواد ویسکوالاستیک بصورت آزمایشگاهی نشان داده شده است که جایگزینی مشتقات معمولی زمانی در روابط ساختاری این مواد با مشتقات کسری از مرتبه α می‌توان رفتار این مواد را دقیق‌تر مدل‌سازی نمود. البته می‌باید مرتبه α را توسط آزمایش بدست آورد. در دهه‌های اخیر دسته دیگری از مواد بنام مواد مرکب بافته‌شده بطور وسیعی در صنعت بکار می‌روند. این مواد



شکل ۷: دستگاه کشش تک محوره [۱۰].

پارچه‌های بافته‌شده‌ای هستند که تارها و پودهای آنها از الیافی تشکیل شده‌اند که شامل هزاران فیلامنت باریکتر از مو هستند. هر فیلامنت از شیشه یا کربن که اطراف آن با یک ماده پولیمری خاص پوشش داده شده، ساخته می‌شود. فعال و همکارانش اخیراً با انجام تعدادی آزمایش توسط دستگاه کشش بر روی این مواد و استفاده از حسابان کسری اثبات نموده‌اند که نتایج حل‌های تحلیلی معادلات ساختاری این مواد در صورتیکه شامل مشتق کسری باشند به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیکتر از استفاده از معادلات ساختاری با مشتقات معمولی هستند [۱۰، ۱۱].

در جدول ۲، مدل‌های کسری مشابه آنچه که برای مدل‌های مکانیکی کلاسیک مواد ویسکوالاستیک (مدل‌های مرتبه صحیح) معرفی و کمیت‌های "سازگاری با خزش" و "آسودگی تنش" با حل معادلات دیفرانسیل کسری مربوطه بدست آمده‌اند. به عنوان مثال در سطر اول جدول با فرض کرنش ثابت $\epsilon(t) = \epsilon_0 u(t)$ ، که در آن تابع پله واحد می‌باشد و حل معادله مشتق کسری $\sigma(t) = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} + \sigma(t)$ و یافتن تنش $\sigma(t)$ کمیت آسودگی تنش به صورت $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ بدست می‌آید. یکی از روش‌های حل معادله $\sigma(t) = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} + \sigma(t)$ اعمال تبدیل لاپلاس به این معادله با استفاده از رابطه $\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$ می‌باشد. در این صورت $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \epsilon_0 b_1 s^{\alpha-1}$ بدست آمده و با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس $E(t)$ بدست می‌آید. در جدول ۲، $\hat{E}(t)$ تابع می‌تاک - لفلر $(\alpha > 0)$ $\hat{E}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ نامیده می‌شود و در حالت خاص به صورت تابع نمایی $E_1(z) = e^z$ در می‌آید. شایان ذکر است که ممکن است مدل‌های فوق را با هم ترکیب کرده و مدل‌های پیچیده‌تری را برای ارائه دقیق رفتار برخی از مواد ویسکوالاستیک پیدا کنیم.

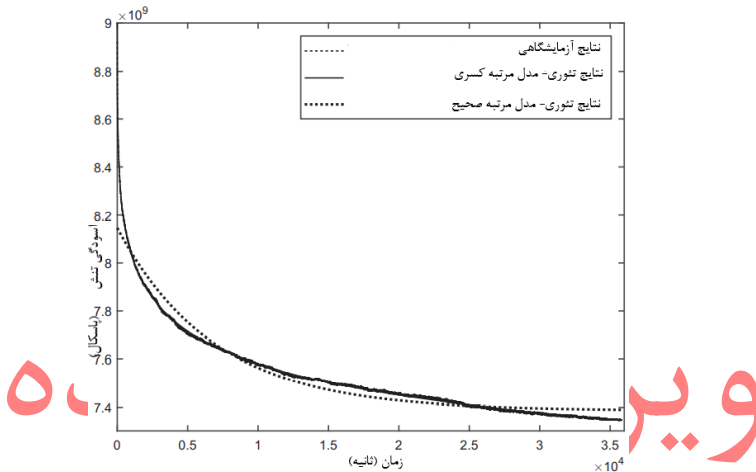
جدول ۲: مدل‌های کسری مواد ویسکوالاستیک

$\sigma(t) = b_1 \frac{d^{\alpha} \epsilon}{dt^{\alpha}}$	$J(t) = \frac{t^{\alpha}}{b_1 \Gamma(1+\alpha)}$	$E(t) = b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	مدل نیوتن کسری (اسکات بلر)
$\sigma(t) = m\epsilon(t) + b_1 \frac{d^{\alpha} \epsilon}{dt^{\alpha}}$	$J(t) = \frac{1}{m} \{1 - \hat{E}_{\alpha}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]\}$	$E(t) = m + b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	مدل ویگت کسری (τ_e) $^{\alpha} = \frac{b_1}{m}$
$\sigma(t) + a_1 \frac{d^{\alpha} \sigma}{dt^{\alpha}} = b_1 \frac{d^{\alpha} \epsilon}{dt^{\alpha}}$	$J(t) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{t^{\alpha}}{b_1 \Gamma(1+\alpha)}$	$E(t) = \frac{b_1}{a_1} \hat{E}_{\alpha}[-(\frac{t}{\tau_{\sigma}})^{\alpha}]$	مدل ماکسول کسری (τ_{σ}) $^{\alpha} = a_1$
$(1 + a_1 \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}})\sigma(t) = (m + b_1 \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}})\epsilon(t)$	$J(t) = J_g + J_1 \{1 - \hat{E}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]\}$	$E(t) = E_e + E_1 \hat{E}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]$	مدل زلز کسری $J_g = \frac{a_1}{b_1}, J_1 = \frac{1}{m} - \frac{a_1}{b_1}$ $\tau_e = \frac{b_1}{m}, E_e = m$ $\tau_{\sigma} = a_1, E_1 = \frac{b_1}{a_1} - m$
$(1 + a_1 \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}})\sigma(t) = (b_1 \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} + b_2 \frac{d^{\alpha+1}}{dt^{\alpha+1}})\epsilon(t)$	$J(t) = J_+ \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + J_1 \{1 - \hat{E}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]\}$	$E(t) = E_- \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + E_1 \hat{E}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]$	مدل ضد زلز کسری $J_+ = \frac{1}{b_1}, J_1 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}$ $\tau_e = \frac{b_1}{b_2}, E_- = \frac{b_2}{a_1}$ $\tau_{\sigma} = a_1, E_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_1}$

در مرجع [۲۹] برای آزمایش، نمونه‌هایی از تار مواد مرکب بافته‌شده شامل فیلامنت‌هایی از جنس شیشه که پیرامون آنها با یک ماده پولیمری خاص پوشش داده شده در نظر گرفته شده‌اند. نمونه‌های تار از یک پارچه بافت ساده، بازشده و خارج می‌شوند و سپس در زیر یک پرس هیدرولیک قرار داده شده و تحت بار فشاری ۴۵۴ کیلوگرم و تحت توزیع حرارتی خاصی با زمان قرار می‌گیرند. این فرآیند، تارها برای از بین رفتن چین و چروکشان قبل از شروع چرخه پرس داغ کشیده می‌شوند، در حالیکه در دمای ثابت ۱۶۰ درجه سانتیگراد به مدت ۶۰ دقیقه قرار دارند. بزرگی بار اعمال شده، دما و چرخه پخت بر اساس یک روش استاندارد توصیه شده توسط سازنده دستگاه پرس صورت می‌گیرد. چنین نمونه‌هایی در اصطلاح نمونه نیمه‌تلفیقی یا نیمه تحکیم‌یافته^۱ نامیده می‌شود. سپس نمونه آماده‌شده در دمای اتاق به دستگاه کشش بسته شده و تحت کرنش ثابت $\epsilon(t) = \epsilon_0 u(t)$ قرار می‌گیرد با اندازه‌گیری تنش $\sigma(t)$ کمیت آسودگی تنش با رابطه $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$ بدست می‌آید. نمودار مقادیر کمیت آسودگی تنش در برابر زمان که بر اساس اندازه‌گیریهای آزمایشگاهی برای یک نمونه خاص بدست آمده‌اند در شکل ۸ ترسیم شده است (منحنی خط چین). سپس با انتخاب مدل زلز کسری از جدول ۲ و استفاده از حل تحلیلی $E(t) = E_e + E_1 \hat{E}_{\alpha}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]$ موجود در آن جدول و برازش این حل بر نتایج آزمایشگاهی می‌توان پارامترهای ظاهرشده در این حل را بدست آورد. در نهایت تابع $E(t) = E_e + E_1 \hat{E}_{\alpha}[-(\frac{t}{\tau_e})^{\alpha}]$ ترسیم می‌گردد (منحنی خط پر). نمودار تابع بدست آمده از حل تحلیلی برای مدل مرتبه صحیح $\alpha = 1$ بصورت منحنی نقطه ای در شکل ۸، نشان داده شده‌است. امیدوارکننده‌ترین مشاهدات این است که در شکل ۸، نتایج نظری

¹Partially consolidated

بدست آمده بر اساس مدل کسری به خوبی در مناطق مختلف نمودار آسودگی تنش بر خلاف مدل‌های مبتنی بر مشتق مرتبه صحیح برازش شده است. مقایسه بین نتایج نظری و تجربی نشان می‌دهد که مدل‌های کسری چقدر دقیق و قدرتمند می‌توانند رفتار واقعی را به تصویر بکشند. بر اساس شکل ۸ در زمان $t = 0$ ، تفاوت قابل توجهی بین مقادیر مدول آسودگی تنش به دست آمده توسط آزمایش و مقادیر بدست توسط مدل مشتق مرتبه صحیح وجود دارد.



شکل ۸: نمودار آسودگی تنش در برابر زمان در دمای اتاق برای یک نمونه از تارهای نیمه‌تلفیقی [۲۹]

۲.۰۶. کاربرد حسابان کسری در کنترل سیستم‌های دینامیکی. نظریه کنترل سیستم‌های دینامیکی را می‌توان در دو غالب کنترل کلاسیک که مبتنی بر سیستم‌های تک ورودی و تک خروجی است و کنترل مدرن که سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهد دسته‌بندی کرد. خروجی یک سیستم در اثر تغییر در ورودی تغییر می‌یابد که به آن پاسخ سیستم گویند. مهندسی کنترل می‌کوشد تا با مدل‌سازی سیستم، پاسخ خروجی سیستم را نسبت به ورودی‌های مختلف تخمین بزند. اکثر روش‌های طراحی سیستم‌های کنترلی مبتنی بر نوعی مدل ریاضی از سیستم فیزیکی می‌باشد. روش‌های کنترل کلاسیک عموماً بر اساس رابطه ورودی-خروجی و استفاده از تابع

تبدیل لاپلاس بنا نهاده شده‌اند. یعنی با اعمال تبدیل لاپلاس به معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح حاکم بر سیستم که نشان دهنده ارتباط ورودی و خروجی سیستم دینامیکی است، آن را به معادله جبری تبدیل کرده و نسبت خروجی به ورودی در فضای لاپلاس بدست می‌آید که از آن به عنوان تابع تبدیل سیستم یاد می‌شود. مدل تابع تبدیل بخوبی قادر است رفتار ورودی-خروجی (توصیف خارجی) سیستمهای تک ورودی - تک خروجی مرتبه پایین را تشریح کند. نظریه‌های مربوط به کنترل کلاسیک توانسته بطور گسترده‌ای در بسیاری از سیستمها از جمله، سیستمهای چند ورودی - چند خروجی اما استفاده از این روشها در بسیاری از سیستمها از جمله، سیستمهای چند ورودی - چند خروجی و سیستمهای مرتبه بالا پیچیدگی زیادی را ایجاد می‌کند. به منظور تجزیه و تحلیل دقیق رفتاری سیستمهای پیچیده و طراحی سیستمهای کنترل پیشرفته (مدرن) با عملکرد بهتر و بهینه‌تر نیاز است مدل‌های ریاضی جامع‌تر و دقیق‌تری در مقایسه با مدل تابع تبدیل مورد استفاده قرار گیرد. اساس روشهای کنترل مدرن بر پایه روشهای فضای حالت است. در بازنویسی مدل ریاضی سیستم در فضای حالت، سیستم مرتبه n ، تک ورودی - تک خروجی (سیستمی که معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح حاکم بر دینامیک سیستم یک معادله مرتبه n می‌باشد) به صورت یک دسته از n معادله دیفرانسیل مرتبه اول بازنویسی می‌شود که این کار با تعریف تعداد کافی از متغیرهای جدید صورت می‌گیرد. نمایش سیستمها در فضای حالت می‌تواند توصیف ریاضی سیستمهای مرتبه بالا و همچنین سیستمهای چند ورودی - چند خروجی را بسیار ساده کند. مدل‌سازی سیستمها در فضای حالت علاوه بر توصیف رفتار ورودی-خروجی (توصیف خارجی) قادر است توصیفی از رفتار متغیرهای حالت دینامیک داخلی سیستم (توصیف داخلی) را ارائه دهد. بر اساس توصیف فضای حالت می‌توان تصویر کاملی از ساختار داخلی سیستم را بدست آورد و چگونگی ارتباط و وابستگی سیگنالهای ورودی، متغیرهای حالت و سیگنالهای خروجی را درک کرد.

همانطور که قبلاً ذکر شد معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم می‌تواند یک معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح باشد در حالیکه برای سیستم‌های با پیچیدگی بالا این معادله می‌تواند یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری باشد که در این صورت سیستم مرتبه کسری نامیده می‌شود که می‌تواند سیستم مرتبه کسری یا غیر خطی باشد [۴۷]. با اعمال تبدیل لاپلاس به این معادله دیفرانسیل مرتبه کسری می‌توان مشابه سیستمهای مرتبه صحیح، تابع تبدیل سیستم را که شامل توانهای کسری متغیر s تبدیل لاپلاس می‌باشد بدست آورد [۲۷، ۲۸].

مشابه شکل فضای حالت برای سیستمهای مرتبه صحیح، برای سیستم مرتبه کسری نیز می

توان معادله دیفرانسیل مرتبه کسری حاکم بر دینامیک سیستم را به صورت n سیستم مرتبه کسری خطی بیان نمود. تکنیکهای بکار رفته برای کنترل کلاسیک و مدرن سیستمهای مرتبه صحیح برای سیستمهای مرتبه کسری تعمیم یافته‌اند که برای مطالعه بیشتر می‌توان از مراجع [۴۲، ۲۸، ۲۷، ۴۷] بهره جست. در کنترل کلاسیک عموماً از کنترل کننده‌های تناسبی (P)، انتگرال‌گیر (I) و مشتق‌گیر (D) یا ترکیب آن‌ها تحت عنوان (PID) استفاده می‌شود. مشابه چنین کنترل کننده‌ای تحت عنوان $PI^\lambda D^\delta$ که شامل انتگرال‌گیر از مرتبه کسری λ و مشتق‌گیر از مرتبه کسری δ برای سیستمهای مرتبه کسری استفاده می‌شود [۴۲، ۲۸، ۲۷، ۴۷]. بررسی کنترل کننده مرتبه کسری به دلیل پیچیدگی آنها از حیثه این مقاله خارج بوده و برای مباحث تکمیلی‌تر به خوانندگان توصیه می‌شود به مراجع [۴۲، ۲۸، ۲۷، ۴۷] مراجعه نمایند. در ضمن در مبحث کنترل بهینه، حسابان کسری با مرتبه توزیعی نیز مطرح می‌شوند که در مراجع [۳۹، ۳۸] به آنها پرداخته شده است.

۳.۶. حسابان تغییراتی کسری. حسابان تغییرات شاخه‌ای از ریاضیات است که با بهینه

کردن (بیشینه یا کمینه کردن) تابعک‌ها یا آنچه که اصطلاحاً تابع تابع نامیده می‌شوند و به شکل $I(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$ هستند، سروکار دارد. همانطور که مشاهده می‌شود تابعک $I(x)$ تابعی است از $L(t, x(t), x'(t))$ که خود تابعی از $x(t)$ می‌باشد. در واقع تابع $x(t)$ به گونه‌ای بدست می‌آید که در نقاط ابتدا و انتها یعنی $t = a$ و $t = b$ مقدار مشخصی داشته و انتگرال $I(x)$ را بهینه می‌نماید. بر خلاف نمو (رشد) دیفرانسیلی که در آن نمو تابع dx در ازای نمو متغیر مستقل dt بوجود می‌آید، نمو تغییراتی δx نموی است که در آن نمودار تابع ضمن عبور از نقاط ثابت $(a, x(a))$ و $(b, x(b))$ در هر زمان t نمو می‌نماید بدون اینکه این نمو به ازای تغییر t رخ داده باشد. به عنوان مثال اگر $x(t)$ نمایش جابجایی یک ذره در زمان t باشد و نمایش تابع $x(t)$ یک منحنی عبورکننده از نقاط ثابت $(a, x(a))$ و $(b, x(b))$ باشد، در این صورت با انجماد زمان منحنی $x(t)$ را طوری نمو یا رشد می‌دهیم که همچنان از نقاط ثابت $(a, x(a))$ و $(b, x(b))$ عبور کند ولی در هر زمان t تابع $x(t)$ مقادیر متفاوتی از مقدار آن قبل از نمو داشته و به اندازه δx نمو کرده باشد. البته به لحاظ فیزیکی چون هر نوع جابجایی ذره توأم با گذشت زمان یا نمو زمان می‌باشد، چنین نمو تغییراتی δx مجازی نامیده می‌شود. برای بهینه کردن تابعک $I(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$ نمو تغییراتی (یا وردش) δI می‌بایست نادیده گرفته شود، یعنی $\delta I = 0$. حل تحلیلی چنین مسئله‌ای به معادله اوایلر-لاگرانژ و یا معادله $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0$ منتهی می‌شود. اگر به جای مشتق مرتبه اول $x'(t)$ مشتق مرتبه کسری قرار داده شود، با یک مسئله حسابان تغییراتی کسری سروکار

داریم. حل تحلیلی چنین معادله ای در مراجع [۱، ۴۵] مورد بحث قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۳ سامکو^۱ و راس^۲ [۳۰] تلاش‌های خود روی عملگرهایی که مرتبه‌ی α در طول فرایند ثابت نمی‌ماند، بلکه با زمان تغییر می‌کند یعنی $\alpha = \alpha(t)$ اختصاص دادند. یک تعمیم جالب جدید از نظریه حسابان کسری این است که اجازه می‌دهد تا مرتبه‌ی مشتق کسری ثابت نبوده و تابعی از زمان باشد. در واقع، استفاده از مشتق‌های کسری از مرتبه ثابت در مسایل حسابان تغییرات ممکن است بهترین گزینه‌ی ممکن نباشد، زیرا که مسیرها^۳ یک فرایند پویا هستند و در نتیجه مرتبه می‌تواند تغییر کند. بنابراین مهم است که فرض کنیم مرتبه تابعی از زمان است یعنی $\alpha = \alpha(t)$. بنابراین، در ادامه کار، می‌توانیم به دنبال یافتن بهترین تابع $\alpha(t)$ باشیم به قسمی که معادله دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر $D^{\alpha(t)}x(t) = f(t, x(t))$ بتواند فرایند پویای موردنظر را بهتر توصیف کند. با این رویکرد حسابان کسری مرتبه‌ی متغیر، خواص غیرموضعی بیشتر آشکار می‌شوند و کاربردهای فراوانی نیز در فیزیک، مکانیک، کنترل و پردازش سیگنال پیدا کرده‌اند. نکته دیگر این است که این رویکرد بسیار جدید است و کارهای زیادی لازم است تا انجام شود تا پروژه تکمیل گردد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید. به عنوان یک کاربرد خاص از حسابان کسری می‌توان به مساله بهینه‌سازی اشاره نمود. با تعمیم روش گرادیان نزولی به عنوان یک الگوریتم تکرارشونده برای یافتن نقطه‌ی ثابت یک تابع هدف بهینه شونده، یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان کسری کاپاتو، یعنی گرادیان نزولی کسری کاپاتو (CFGD) توسط شین و همکارانش [۳۲] پیشنهاد شده است. با تعریف گرادیان کسری کاپاتو بر اساس مختصات دکارتی، الگوریتم کلی مذکور تعریف می‌شود. CFGD منجر به شیب دارترین جهت نزول تابع هدف به صورت موضعی هموار شده می‌گردد.

مراجع

- [1] Almeida, R., Tavares, D., Torres, D. F. M., *The Variable-Order Fractional Calculus of Variations*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, Switzerland, Springer Verlag, 2019.
- [2] Ari, M., Faal, R.T., Zayernouri, M., (2020), Vibrations Suppression of Fractionally Damped Plates using Multiple Optimal Dynamic Vibration Absorbers. *Int. J. Comput. Math.* 97 (4), 851-874.

¹Samko

²Ross

³Trajectories

- [3] Bagley, R.L., Torvik, P.J., (1986), On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. Rheol.* 30, 133–155.
- [4] Calcagni, G., (2018), Toward multifractional calculus. *Front. Phys.* 6, 58. DOI:10.3389/fphy.2018.00058
- [5] Caputo, M., Fabrizio, M., (2017), The kernel of the distributed order fractional derivatives with an application to complex materials. *Fractal Fract.* 2017, 1, 13. DOI: 10.3390/fractalfract1010013
- [6] Chevalier, Y., Tuong, J.V., *Mechanics of viscoelastic materials and wave dispersion.* Wiley Online Library, 2010.
- [7] https://www.eurekalert.org/pub_releases/2016-12/caoa-fch122116.php
- [8] Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type,* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2010.
- [9] Ding, W., Patnaik, S., Sidhardh, S., Semperlotti, F., (2021), Applications of Distributed-Order Fractional Operators: A Review. *Entropy* 2021, 23, 110. DOI: 10.3390/e23010110.
- [10] Faal, R. T., (2020), Using Fractional Derivatives for Improved Viscoelastic Modeling of Textile Composites. Part I: Fabric Yarns, *J. Compos. Mater.* 54, 1 September, DOI: 10.1177/0021998320912479.
- [11] Faal R. T.,(2020), Using Fractional Derivatives for Improved Viscoelastic Modeling of Textile Composites. Part II: Fabric under Different Temperatures, *Compos. Struct.*, 248, 15 September, DOI: 10.1177/0021998320912479.
- [12] Fang, C.Q., Sun, H.Y, Gu J.P, (2010) Application of fractional calculus methods to viscoelastic response of amorphous shape memory polymers. *J. Mech.* 31, 427–432.
- [13] Heuchel, M., Cui, J., Kratz, K., (2010) Relaxation based modeling of tunable shape recovery kinetics observed under isothermal conditions for amorphous shape-memory polymers. *Polymer (Guildf).* 51,6212–6218.
- [14] Introductory Notes on Fractional Calculus, www.xuru.org.
- [15] Kontou, E., Katsourinis, S., (2016) Application of a fractional model for simulation of the viscoelastic functions of polymers. *J. Appl. Polym. Sci.* 133, 100-120.
- [16] Krasnobrizha, A., Rozycki, P., Gornet, L., Cosson, P., (2016) Hysteresis behaviour modelling of woven composite using a collaborative elastoplastic damage model with fractional derivatives. *Compos. Struct.* 158, 15 December, DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.09.016.

- [17] Lazopoulos, K.A., Karaoulanis, D., Lazopoulos, I., (2016), On fractional modelling of viscoelastic mechanical systems, Part A. Mech. Res. Commun. 78, December, DOI: [10.1016/j.mechrescom.2016.10.002](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.10.002).
- [18] Lorenzo, C.F., Hartley, T.T., (2002), Variable order and distributed order fractional operators. Non-linear Dyn. 29, 57–98.
- [19] Di Lorenzo, S., Di Paola, M., La Mantia, F.P., Pirrotta, A., (2017) Non-linear viscoelastic behavior of polymer melts interpreted by fractional viscoelastic model. Meccanica. 52, 1843-1850, DOI: [10.1007/s11012-016-0526-8](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0526-8).
- [20] Machado, J. A. T., Handbook of Fractional Calculus with Applications, De Gruyter, 2019.
- [21] Magin, R. L., Fractional Calculus in Bioengineering. Begell House Publishers, 2006.
- [22] Machado, J.A.T., Galhano, A.M.S.F., Trujillo, J.J., (2014) On development of fractional calculus during the last fifty years. Scientometrics 98, 577–582 (2014), DOI: [10.1007/s11192-013-1032-6](https://doi.org/10.1007/s11192-013-1032-6).
- [23] Mainardi, F., Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: an Introduction to Mathematical Models, World Scientific Publishing Europe Ltd, 2nd edition, 2022.
- [24] Nadzharyan, T.A., Kostrov, S.A., Stepanov, G. V., Kramarenko, E.Y., (2018) Fractional rheological models of dynamic mechanical behavior of magnetoactive elastomers in magnetic fields. Polymer. (Guildf) 142, 316–329.
- [25] Pan, Z., Liu, Z., (2018), A novel fractional viscoelastic constitutive model for shape memory polymers. J. Polym. Sci., Part B Polym. Phys. 56 (16), 1125–1134, DOI: [10.1002/polb.24631](https://doi.org/10.1002/polb.24631).
- [26] Patnaik, S., Hollkamp, J.P., Semperlotti, F., (2020), Applications of variable-order fractional operators: A review. Proc. R. Soc. A., 476, February, DOI: [10.1098/rspa.2019.0498](https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0498).
- [27] Podlubny, I., Fractional differential equations. San Diego, Academic Press, 1999.
- [28] Podlubny, I., (1999). Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\delta$ -controllers. IEEE Transactions on Automatic Control. 44, 208–213.
- [29] Podlubny, I., (2002), Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis, 5, 367-386.
- [30] Samko, S. G., Ross, B., (1993), Integration and differentiation to a variable fractional order. Integr. Trans. Spec. F. 1 (4), 277-300.
- [31] Sepehri-Amin S., Faal, R.T., Das, R., (2020), Analytical and numerical solutions for vibration of a functionally graded beam with multiple fractionally damped absorbers. Thin-Walled Struct., 157, 106-711.

- [32] Shin, Y., Darbon, J., Karniadakis, G. Em., A Caputo fractional derivative-based algorithm for optimization. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.02259>
- [33] Spanier, J., Oldham, K. B., The Fractional Calculus, New York, Academic Press, 1974.
- [34] Sun, H.G., Zhang, Y, Balean, D., Chen, W. and Chen, Y.Q (2018) A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 64, 213-231.
- [35] Sun, H., Chang, A., Zhang, Y., Chen, W., (2019), A review on variable-order fractional differential equations: Mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications. Fract. Calc. Appl. Anal., 22, 27–59.
- [36] Tenreiro MacHado, J.A., Silva, M.F., Barbosa, R.S., Jesus, I.S., Rris,C.M., and Marcus, M.G., (2010) Some applications of fractional calculus in engineering. Math. Probl. Eng., DOI: [10.1155/2010/639801](https://doi.org/10.1155/2010/639801).
- [37] <https://www.youtube.com/watch?v=Bt2Uf5Rj9hs>.
- [38] Zaky, M., Machado, J.T., (2017), On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 52, 177–189.
- [39] Zaky, M., (2018), A Legendre collocation method for distributed-order fractional optimal control problems. Nonlinear Dyn. 91, 2667–2681.
- [40] Zhang, Y., Xu, S., Zhang, Q., Zhou, Y., (2015) Experimental and Theoretical Research on the Stress-Relaxation Behaviors of PTFE Coated Fabrics under Different Temperatures. Adv Mater Sci Eng., DOI: [10.1155/2015/319473](https://doi.org/10.1155/2015/319473).
- [۴۱] اکرم، م. ح.، (۱۳۹۶) حسابان کسری از نظریه تا کاربرد، نشریه ریاضی و جامعه، جلد ۲، شماره ۴، صفحه ۶۹–۵۹.
- [۴۲] تواضعی، م. ص.، توکلی کاخکی، م.، (۱۳۹۵) سیستمها و کنترل کننده های مرتبه صحیح، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۲۶۸ صفحه.
- [۴۳] خاتمی، ز.، علیزاده، ی.، (۱۳۸۱) دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری. فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹، دوره ۲۱، صفحه ۳۰–۱۷.
- [۴۴] رودین، و.، (۱۴۰۱) اصول آنالیز ریاضی. مترجم علی اکبر عالمزاده، نوبت چاپ ۲۹، ۴۵۸ صفحه.
- [۴۵] سیدصادقی، م.، شفیعی، م.، (۱۴۰۰) حسابان کسری تغییرات با مرتبه متغیر، ترجمه، جهاد دانشگاهی استان اردبیل، ۲۰۰ صفحه.
- [۴۶] کاشانی، س. م. ب.، (۱۳۸۷) سخنرانی اینشتین: «ماهیت فضا» ارائه شده توسط مایکل عطیه. فرهنگ و اندیشه ریاضی، دوره ۲۷، شماره ۴۰، فروردین ۱۳۸۷، صفحه ۷۰–۶۳.

۳۵ ————— ح. تیموری و ر. تیموری

[۴۷] کبیری، ر.، چهارپاشلو، ر.، (۱۳۹۳) رضا چهار پاشلو، سیستم های مرتبه کسری و کاربرد آن ها در علم و صنعت، همایش ملی الکترونیکی دستاوردهای نوین در علوم مهندسی و پایه.

[۴۸] موسی زاده موسوی، س. (۱۳۹۶) ریشه ها، مبانی و سیر تکاملی نظریه استورم-لیوویل. فرهنگ و اندیشه ریاضی، دوره ۳۶، شماره ۶، خرداد ۱۳۹۶، صفحه ۸۷-۶۷.

(دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه) دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و

رایانه

تارنما: <https://www.researchgate.net/profile/Hossein-Teimoori-Faal>

رایانامه: hossein.teimoori@at.ac.ir

(دانشگاه زنجان، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک) دانشگاه زنجان، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

تارنما: <https://www.researchgate.net/profile/Reza-Faal>

رایانامه: faal92@yahoo.com

ویرایش نشده