

## حسابان کسری و کاربردهای نوظهور آن در مهندسی

حسین تیموری فعال✉، رضا تیموری فعال

چکیده. در این مقاله، تاریخچه، کاربردها، و حوزه‌های مرتبط با حسابان کسری را به اختصار معرفی و فرمول‌های اساسی حسابان کسری را بیان می‌کنیم. با عرضه شواهد فیزیکی، وجود دو نوع زمان مطلق و کیهانی را اثبات و به کمک آن‌ها تفسیر هندسی و فیزیکی برای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری ارائه می‌کنیم. به‌عنوان کاربردی جدید از مفاهیم حسابان کسری مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک را، که به‌طور گسترده‌ای در مهندسی مکانیک، برق، مواد، شیمی، و عمران به کار می‌روند، عرضه می‌کنیم. در پایان نیز اشاره‌هایی به کاربردهای حسابان کسری در کنترل بهینه، سیستم‌های دینامیکی، و حساب وردشی کسری می‌کنیم.

### ۱ مقدمه

در ریاضیات کاربردی و آنالیز ریاضی مشتق کسری مشتقی است که در آن مرتبه مشتق می‌تواند یک عدد حقیقی (مثلاً عددی گویا) یا مختلط دلخواه باشد. حسابان کسری حوزه‌ای از ریاضی است که با مشتق و انتگرال‌های کسری سروکار دارد. در علوم و مهندسی کاربردهای متعددی از حسابان کسری وجود دارد و در بسیاری از مسائل فیزیکی معادله‌های دیفرانسیل از مرتبه کسری حاکم هستند. برخی از کاربردهای حسابان کسری در علوم و مهندسی، از جمله نفوذ (انتشار) نامتعارف<sup>۱</sup>، کنترل، پردازش سیگنال و تصویر، مکانیک و سیستم‌های دینامیکی، زیست‌شناسی، علوم محیط زیست، علوم مواد، و اقتصاد را می‌توان در [۳۸] یافت.

عبارات و کلمات کلیدی: حسابان کسری، زمان کیهانی، مواد ویسکوالاستیک، مشتق ریمان-لیوویل، مشتق کاپتو، مشتق گرونوالد-لتنیکف

نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۱۸

1. anomalous diffusion

تا سال‌های اخیر حسابان کسری به منزله یک نظریه ریاضی خیلی انتزاعی و بدون کاربرد تصور می‌شد، اما در چند دهه اخیر انفجاری از فعالیت‌های تحقیقاتی در مورد کاربرد حسابان کسری در زمینه‌های علمی بسیار متنوع نمایان شده است. در واقع، در حال حاضر، برنامه‌ها و یا فعالیت‌های مرتبط با حسابان کسری حداقل در زمینه‌های زیر ظاهر شده‌اند: سیستم‌های مهندسی، تعمیم حساب وردش‌ها و کنترل بهینه به سیستم‌های دینامیکی کسری، طراحی فیلتر نقطه‌تنظیم<sup>۱</sup> برای یک سیستم کنترل کسری با دو درجه آزادی [۱۱]، ابزارها و تکنیک‌های تحلیلی و عددی، تطبیق سری تیلور با معادله‌های دیفرانسیل کسری [۲۳]، اکتشافات اساسی در زمینه روابط ساختاری مکانیکی، الکتریکی، حرارتی و سایر خواص مهندسی مختلف مانند پلیمرهای ویسکوالاستیک، فوم‌ها، ژل‌ها، بافت‌های حیوانی، و کاربردهای مهندسی زیستی و زیست پزشکی (بیوالکترودها، بیومواد، شبکه‌های عصبی، و غیره) [۲۵]، درک بینادی پدیده‌های موج و انتشار، اندازه‌گیری و تأیید آن‌ها، کاربردها در فیزیک پلاسما (مانند انتشار در توکامک<sup>۲</sup>)، مدل‌سازی حرارتی سیستم‌های مهندسی مانند ترمز و ماشین‌ابزار، و پردازش تصویر و سیگنال.

حسابان کسری ابزار بهتری برای بررسی «دینامیک سیستم‌های پیچیده» است. همچنین برخی از کاربردهای خاص حسابان کسری در مهندسی، از جمله تنظیم کنترل‌گرها، ربات‌های پادار، انتشار گرما، و سنتز مدار دیجیتال در [۴۰] بررسی شده‌اند.

کاربرد اصلی این حسابان را می‌توان در نظریه «ویسکوالاستیک» یافت. اخیراً مشاهدات مفید بسیاری از تعمیم مشتق مرتبه صحیح به مرتبه کسری در این زمینه در [۲۰، ۲۸، ۱۴] آمده است. روابط ساختاری برای یک ماده دلخواه نشان‌دهنده روابط بین توزیع نیروها در یک ماده و تغییر شکل‌های ناشی از نیروهای اعمال شده به ماده است که نقش کلیدی در مهندسی ایفا می‌کند و در انتهای این مقاله معرفی خواهد شد. این روابط می‌توانند شامل مشتق‌های مرتبه صحیح یا کسری باشند. روابط ساختاری مواد مرکب بافته‌شده<sup>۳</sup> (موادی که از یک پارچه بافته‌شده از الیاف شیشه یا کربن آغشته به پلیمر و یک چسب یا رزین تشکیل شده‌اند) با استفاده از مشتق‌های کسری در [۱۸] به روش آزمایشگاهی و با استفاده از حسابان کسری به دست آمده‌اند. در آنجا نشان داده شده است که نتایج حل تحلیلی معادله‌های ساختاری کسری این مواد به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیک‌تر از نتایج حل تحلیلی معادله‌های ساختاری با مشتق‌های معمولی‌اند.

کاربردهای حسابان کسری در علوم نیز مدنظر تعدادی از محققان بوده است. برای مثال، در

[۳] با استفاده از تابع گاما به نحوه محاسبه انتگرال و مشتق کسری یک تابع پرداخته شده است و به تعدادی از کاربردهای حسابان کسری در چند شاخه مختلف، از جمله هندسه فرکتالی، اشاره شده است. به طور مشابه در [۱] ضمن معرفی حسابان کسری و ارائه روابط مربوط به مشتق و انتگرال کسری به تعبیرهای مشتق و انتگرال کسری اشاره شده است. معادله‌های دیفرانسیل استورم-لیوویل کسری نیز در [۸] بررسی شده است. مجموعه هشت‌جلدی [۲۴] یک مرجع جامع و کامل است و خواننده علاقه‌مند می‌تواند در آن مطالب بسیاری درباره جنبه‌های اصلی و کاربردهای حسابان کسری بیابد.

در این مقاله ضمن معرفی تعریف‌های اساسی حسابان کسری تعبیرهای هندسی مشتق و انتگرال کسری بررسی و در مقایسه با شواهد فیزیکی مورد نقد و بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین به کاربردهای حسابان کسری در مهندسی خواهیم پرداخت؛ جنبه‌ای که در آثار منتشرشده درباره حسابان کسری کمتر به آن‌ها پرداخته شده است.

## ۲ تاریخچه حسابان کسری

آغاز حسابان نتیجه چندین ماه مکاتبه لایبنیتس و هوییتال بود که از سال ۱۶۹۵ شروع شده بود. در آن سال لایبنیتس نامه‌ای به هوییتال نوشت و این سؤال را مطرح کرد: «آیا می‌توان معنای مشتق از مرتبه اعداد صحیح را به مشتق از مرتبه‌های غیر صحیح تعمیم داد؟» هوییتال در مورد این سؤال تا حدودی کنجکاو شده بود و با طرح یک سؤال ساده دیگر به لایبنیتس پاسخ داد: «اگر مرتبه  $\frac{0}{5}$  باشد چطور؟» لایبنیتس در نامه‌ای به تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ پاسخ داد: «این منجر به یک ناسازگونه می‌شود که روزی نتایج مفیدی از آن حاصل خواهد شد». به نظر می‌رسد که حدس لایبنیتس تا حدودی درست بوده و امروزه نتایج مفیدی از این تعمیم استخراج شده است. همچنین، در سال ۱۹۶۷ لایبنیتس با اشاره به فرمول والیس برای  $\frac{\pi}{4}$  به صورت یک حاصل ضرب نامتناهی، نماد  $d^{\frac{1}{2}}y$  را به کار برد و بیان کرد که ممکن است بتوان از طریق حساب دیفرانسیل به نتیجه یکسانی رسید.

اولین اشاره به مشتق از هر مرتبه دلخواه را در سال ۱۸۱۹ در نوشته‌ای از ریاضی‌دان فرانسوی لاکروئا<sup>۱</sup> می‌بینیم. او در یک کتاب هفت‌صده‌ای در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال تنها دو صفحه درباره حسابان کسری نوشته بود. در واقع، او اولین کسی بود که به پرسش هوییتال پاسخ

کامل داد. نکته جالب این است که ۲۷۹ سال طول کشید تا بعد از پرسش مهم هوپیتال اولین کتاب مختص حسابان کسری منتشر شود [۳۷].

اوایلر و فوریه نیز از جمله ریاضی‌دانان معروفی بودند که اشاره‌هایی به مشتق از مرتبه دلخواه کرده‌اند ولی مثال یا کاربردی از آن را ذکر نکرده‌اند. به نظر می‌رسد که اولین کاربرد از این نوع مشتق متعلق به آبل در سال ۱۸۲۳ است. او از حسابان کسری برای حل معادله انتگرالی مربوط به مسئله «خم هم‌زمانی»<sup>۱</sup> استفاده کرده است؛ مسئله «خم هم‌زمانی» یافتن خمی است که اگر از روی آن تویی را رها کنیم زمان رسیدن توپ به پایین خم (صرف نظر از اصطکاک) مقدار ثابتی باشد و به مکان رها کردن توپ از روی خم وابسته نباشد. حل آبل چنان هوشمندانه بود که نظر لیوویل را به خود جلب کرد چنان‌که او مصمم شد تعریف منطقی برای مشتق کسری به دست آورد. به این منظور، لیوویل سه رساله طولانی در سال ۱۸۳۲ و چندین رساله دیگر در سال ۱۸۵۵ نوشت. همچنین توانست این تعریف‌ها را به‌طور موفقیت‌آمیزی در حل مسئله‌ای در نظریه پتانسیل به کار برد. ریمان نیز در سال ۱۸۴۷ زمانی که هنوز دانشجوی بود مقاله‌ای نوشت و در آن تعریفی برای عملگر کسری ارائه داد. هویساید<sup>۲</sup> نیز استفاده عملی از عملگرهای دیفرانسیل کسری را در تحلیل خطوط انتقال الکتریکی در حدود سال ۱۸۹۰ مطرح کرد. در شکل ۱ افرادی را که در ابداع و توسعه حسابان کسری نقش ایفاء کرده‌اند نام برده‌ایم.

### ۳ تعریف‌های اساسی حسابان کسری

در سال ۱۸۱۹، لاکروئا برای اولین بار به مسئله لایب‌نیتس و هوپیتال پاسخ صحیح داد [۲۴] و ادعا کرد که  $\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ . راه جواب دادن به این سؤال از مشتق مرتبه  $n$ م تابع توانی  $y = x^m$  ( $m$  عدد طبیعی) نشأت می‌گیرد. مشتق مرتبه  $n$ م این تابع از رابطه  $\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$  به دست می‌آید. با توجه به تعریف دانیل برنولی از تابع گاما به صورت  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  (برای هر عدد حقیقی  $z$ ) و استفاده از خاصیت  $\Gamma(n+1) = n!$  برای اعداد  $n = 0, 1, 2, \dots$  می‌توان نوشت

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.3)$$

از آنجا که تابع گاما برای اعداد غیرطبیعی نیز تعریف می‌شود برای  $n = \frac{1}{2}$  و  $m = 1$  رابطه (۱.۳) به صورت  $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$  در می‌آید. مطابق رابطه (۱.۳) یک مقدار غیرصفر برای



برای تعمیم فرمول مشتق کسری به تابع دلخواه  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f$  به صورت زیر عمل می‌کنیم. اولین مشتق تابع  $f(x)$  به صورت  $D^1 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  تعریف می‌شود. در نتیجه دومین مشتق تابع  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \frac{dD^1 f(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^1 f(x+h) - D^1 f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} f(x + (2-m)h) \end{aligned}$$

که در آن  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  ضریب دوجمله‌ای نیوتون است. به طور مشابه، مشتق مرتبه  $n$  ام تابع  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h). \quad (2.3)$$

تعمیم ضرایب دوجمله‌ای با استفاده از تابع گاما به صورت  $\binom{n}{m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}$  امکان تعمیم رابطه (2.3) به منظور تعریف مشتق کسری تابع  $f(x)$  را فراهم می‌کند. برای این منظور، عملگر انتقال  $d_h$  به صورت  $d_h f(x) = f(x+h)$  و تکرار آن به صورت  $d_h^\alpha f(x) = f(x+\alpha h)$  را تعریف می‌کنیم. در نتیجه رابطه (2.3) به صورت زیر در می‌آید

(3.3)

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} d_h^{n-m} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{d_h - 1}{h} \right)^n f(x).$$

با توجه به شباهت فرمول  $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h)$  به فرمول دوجمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m$$

می‌توان دستور دوجمله‌ای را به صورت

$$(a+b)^\alpha = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} a^{\alpha-m} b^m$$

نوشت. اکنون فرمول (3.3) برای مشتق مرتبه  $\alpha$  ام به صورت زیر در می‌آید [24]:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} d_h^{\alpha-m} f(x). \quad (4.3)$$

با توجه به رابطه بالا مشتق کسری تابع نمایی  $e^{ax}$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$D^\alpha e^{ax} = e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} e^{a\alpha h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + 1)}{m! \Gamma(\alpha - m + 1)} e^{-mah}. \quad (5.3)$$

دستور تعمیم یافته دوجمله‌ای رابطه  $e^{-mah} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)}$  را به دست می‌دهد و در نتیجه رابطه (۵.۳) به صورت زیر ساده می‌شود

$$D^\alpha e^{ax} = e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ah} - 1}{h} \right)^\alpha = a^\alpha e^{ax}. \quad (6.3)$$

این رابطه دقیقاً مشابه رابطه شناخته شده  $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$  برای مشتق مرتبه طبیعی تابع نمایی است. با انتخاب  $a = ib$  و جدانمودن قسمت‌های حقیقی و مختلط رابطه (۶.۳) روابط زیر برای مشتق توابع مثلثاتی به دست می‌آید که منسوب به گیرند<sup>۱</sup>

$$D^\alpha (\cos bx) = b^\alpha \cos\left(bx + \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)}\right), \quad D^\alpha (\sin bx) = b^\alpha \sin\left(bx + \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)}\right).$$

مشتق گرونوالد-لتنیکف<sup>۲</sup>، یا مشتق-انتگرال گرونوالد-لتنیکف، نوعی مشتق مشابه با تعمیم یاد شده در بالا از طریق فرمول دوجمله‌ای است. اگر به جای حد مجموع در رابطه (۴.۳) قرار دهیم  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-a}{h}$  برای  $x > a$ ، فرمول مشتق گرونوالد-لتنیکف نتیجه می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که وقتی  $h \rightarrow 0$  در عبارت  $d_h^{\alpha-m} f(x) = f(x + (\alpha - m)h)$  علی‌رغم کوچک بودن  $h$  نمی‌توان از  $-mh$  صرف نظر کرد زیرا ضرب  $m$  می‌تواند به بی‌نهایت میل کند. دلیل اینکه در روابط بالا به جای  $\infty$  در حد مجموع یک عدد مثبت، یعنی  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-a}{h}$  گذاشته می‌شود را می‌توان با در نظر گرفتن حالت  $\alpha = -1$  مشاهده کرد؛ در واقع در این حالت باید همان حاصل انتگرال‌گیری تابع را بتوان به دست آورد. این نکته را در ادامه اثبات خواهیم کرد. از دستور مشتق گرونوالد-لتنیکف با تبدیل  $\alpha$  به  $-\alpha$  می‌توان انتگرال گرونوالد-لتنیکف را، برای  $x > a$ ، نوشت

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(-\alpha + 1)}{m! \Gamma(-\alpha - m + 1)} f(x - mh). \quad (7.3)$$

در ضمن با توجه به روابط  $\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \sin(\pi z)}$  و  $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$  تساوی  $\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha-m+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(-1)^m \Gamma(\alpha)}$  به سادگی اثبات می‌شود.

با جانشانی رابطهٔ اخیر در دستور مشتق گرونوالت-لتنیگف و استفاده از رابطهٔ (۷.۳) روابط نهایی مشتق و انتگرال گرونوالت-لتنیگف به دست می‌آیند:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(-\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (x > a),$$

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x-mh) \quad (x > a). \quad (۸.۳)$$

توجه کنید که  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  و معمولاً مشتق گرونوالت-لتنیگف را با نماد  $GLaD_x^\alpha f(x)$  نمایش می‌دهند.

با توجه به دومین رابطهٔ (۸.۳) انتگرال‌گیری تابع  $f(x)$  به صورت

$$D^{-1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} h f(x-mh)$$

در می‌آید و اگر تعریف کنیم  $h = \frac{x-a}{n}$  می‌توانیم بنویسیم

$$D^{-1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+, n \rightarrow \infty} \int_0^{nh} f(x-t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+, n \rightarrow \infty} \int_{x-nh}^x f(u) du = \int_a^x f(u) du$$

همان‌طور که در انتگرال حدهای بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود در مشتق مرتبهٔ کسری نیز باید حدود در نظر گرفته شود. این حدها فقط در مشتق مرتبهٔ صحیح ناپدید می‌شوند. این نکته به این معنی نیز است که مشتق کسری غیرموضعی است. بعداً در مورد حدود انتگرال‌گیری (یا مشتق‌گیری) صحبت خواهیم کرد. مطابق فرمول کوشی  $n$  امین انتگرال مکرر تابع پیوستهٔ  $f(x)$  به صورت زیر است

$$D^{-n} f(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \cdots \int_a^{x_1} f(x_1) dx_1 \cdots dx_n dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (۹.۳)$$

اثبات رابطه برای  $n = ۲$  به سادگی انجام می‌شود. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که

نامساوی‌های  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x$  و  $a \leq x_2 \leq x$  و نامساوی‌های  $a \leq x_1 \leq x$  و  $x_1 \leq x_2 \leq x$  را نتیجه می‌دهند، پس

$$D^{-\gamma} f(x) = \int_a^x f(x_1) \int_{x_1}^x dx_2 dx_1 = \int_a^x (x - x_1) f(x_1) dx_1.$$

این روش را می‌توان تکرار کرد و رابطه (۹.۳) برای محاسبه انتگرال‌های مکرر را به دست آورد. اگر در رابطه (۹.۳) به جای  $\alpha$  مقدار  $n$  را بگذاریم می‌توان فرمول مشتق ریمان-لیوویل را به صورت  $RLaD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$  به دست آورد.

اکنون تعریف می‌کنیم  $m = [\Re(\alpha)] + 1$  که در آن  $\Re(\alpha)$  به معنای جزء حقیقی مرتبه مشتق و  $[ \cdot ]$  تابع جزء صحیح است. اگر  $\alpha > 0$ ، داریم  $\alpha - m < 0$ . پس اگر جزء حقیقی  $\alpha$  مثبت یا صفر باشد، انتگرال  $\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$  و اگر است. بنابراین فقط می‌توان از آن برای محاسبه انتگرال‌هایی استفاده کرد که در آن‌ها جزء حقیقی  $\alpha$  منفی است. باین‌حال، این مشکل را می‌توان به راحتی با مشتق‌گیری معمولی رفع کرد، یعنی بنویسیم  $aD_x^\alpha f(x) = D^m aD_x^{\alpha-m} f(x)$  که در آن  $m = [\Re(\alpha)] + 1$ . در این حالت  $\alpha - m$  منفی است و انتگرال مربوط و اگر نیست. در نهایت، برای  $\alpha$  با شرط  $m - 1 < \alpha < m$  تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل و کاپتو<sup>۱</sup> به ترتیب به صورت زیر در می‌آید

$$RLaD_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

$$CaD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m} d\tau$$

همان‌طور که از این تعریف‌ها مشاهده می‌شود برای تعریف مشتق کسری، در سمت چپ تعریف ریمان-لیوویل رابطه  $aD_x^\alpha f(x) = D^m aD_x^{\alpha-m} f(x)$  به کار رفته است که در آن نخست  $m$  بار مشتق مرتبه صحیح و سپس مشتق کسری از مرتبه  $\alpha - m$ ، مطابق توضیحات بالا، گرفته شده است؛ در اینجا مشتق کسری با مرتبه  $\alpha$ ، که در آن جزء حقیقی  $\alpha$  مثبت یا صفر است، به کار می‌رود. امروزه تعریف  $aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt$  با حد پایین  $a = -\infty$  را انتگرال کسری لیوویل و با حد پایین  $a = 0$  انتگرال کسری ریمان می‌نامند. اگر حد پایین دلخواه  $a$  را در نظر بگیریم آن را انتگرال کسری ریمان-لیوویل می‌نامند. نماد انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری فقط در علامت پارامتر  $\alpha$  با هم تفاوت دارند. انتگرال در سمت راست رابطه

بالا، یعنی  $\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt$ ، برای مرتبه‌های انتگرال منفی، و اگر است، با این حال، با استفاده از ادامه تحلیلی<sup>۱</sup> می‌توان نشان داد که  $aD_x^\alpha f(x) = D^m aD_x^{\alpha-m} f(x)$ . از بین تعریف‌های مختلف مشتق تعمیم‌یافته تعریف‌های ریمان-لیوویل و کاپتو در کاربردهای مهندسی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۸].

اکنون چند قضیه بیان می‌کنیم که شرط‌های لازم برای وجود مقادیر بالا را بیان می‌کنند.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $f \in L_1[a, b]$  و  $\alpha > 0$ . در این صورت انتگرال  $RLaI_t^\alpha f(t)$  تقریباً برای هر  $t \in [a, b]$  وجود دارد. علاوه بر این، تابع  $RLaI_t^\alpha f(t)$  خود عضوی از  $L_1[a, b]$  است.

**قضیه ۲.۳.** فرض کنید  $f \in A^1[a, b]$  و  $0 < \alpha < 1$ . در این صورت، مقدار  $RLaI_t^\alpha f(t)$  تقریباً همه جا در  $[a, b]$  وجود دارد. علاوه بر این، برای هر عدد حقیقی  $p$  با شرط  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$  داریم  $RLaI_t^\alpha f(t) \in L_p[a, b]$ .

**قضیه ۳.۳.** فرض کنید  $m = [\alpha]$ ،  $\alpha > 0$  و  $f \in C^m[a, b]$ . در این صورت برای  $t \in (a, b)$  داریم  $GLaI_t^\alpha f(t) = RLaI_t^\alpha f(t)$ .

فضاهای تابعی ذکر شده در بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند؛ اطلاعات کامل‌تر درباره این موضوع را در [۱۶] مطالعه کنید.

$$L_p[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid \int_a^b |f|^p dx < \infty \text{ و اندازه پذیر است} \right\}$$

$$C^k[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid \text{دارای } k \text{ آمین مشتق پیوسته است} \right\}$$

$$A^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \mid \text{دارای } (n-1) \text{ آمین مشتق پیوسته مطلق است} \right\}$$

مثالی ذکر می‌کنیم. با توجه به رابطه (۱.۳) و فرمول  $D^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}$ ، می‌توان انتگرال (یعنی حالت  $\alpha = -1$ ) توابع توانی و نمایی را به دست آورد و با انتگرال کسری ریمان-لیوویل مقایسه کرد:

$$\frac{e^{bx}}{b} = D^{-1} e^{bx} = \int_a^x e^{bt} dt = \frac{e^{bx} - e^{ba}}{b} \rightarrow a = -\infty$$

$$\frac{x^{b+1}}{b+1} = D^{-1} x^b = \int_a^x t^b dt = \frac{x^{b+1} - a^{b+1}}{b} \rightarrow a = 0$$

می‌توان ثابت کرد که مشتق گرونوالت-لتنیکف با هر حد دلخواه انتگرال‌گیری معین برابر با مشتق ریمان-لیوویل با همان حدود برای هر عدد مختلط با قسمت حقیقی منفی است. مشتق ریمان-لیوویل با حد پایین منفی بی‌نهایت به مشتق وایل<sup>۱</sup> معروف است.

توجه داشته باشید که مشتق‌های تعمیم‌یافته را می‌توان برحسب پیچش<sup>۲</sup> فرمول‌بندی کرد، برای

مثال

$$D^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x) dx = \int_0^t \phi_\alpha(t-x) f(x) dx = \phi_\alpha(t) * f(t)$$

که در آن  $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ .

### ۱.۳ تبدیل لاپلاس و مشتق‌های تعمیم‌یافته

تبدیل لاپلاس تابع  $f: [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$  به صورت  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  و تبدیل وارون آن به صورت  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \mathcal{L}\{f(t)\} ds$  تعریف می‌شود که در آن  $a$  طوری انتخاب می‌شود که بزرگ‌تر از جزء حقیقی هر یک از تکینگی‌های تابع  $f(t)$  باشد. با توجه به رابطه

$$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{m=0}^{n-1} s^m (D^{n-m-1} f)(0)$$

اگر عبارت داخل سیگما صفر باشد رابطه بالا بسیار ساده می‌شود. برای این نوع توابع و مشتق تعمیم‌یافته می‌توان این تساوی ساده را برای مقادیر غیر صحیح  $\alpha$  نیز صادق دانست زیرا برای  $l = 0, 1, 2, \dots, m-1$  و  $m = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$  داریم  $(D^l \circ D^{\alpha-m} f)(0) = 0$  و بنابراین  $\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = t^n \mathcal{L}\{f(t)\}$  اکنون چون  $m - \alpha > 0$  از رابطه

$$(D^l D^{\alpha-m} f)(0) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^l \int_0^0 \frac{f(t)}{(0-t)^{-(m-\alpha)+1}} dt$$

نتیجه بالا به راحتی اثبات می‌شود.

برای اثبات رابطه  $\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = t^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$  برای مشتق کسری به صورت زیر استدلال

می‌کنیم. می‌نویسیم

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} D^\alpha \{e^s\} \mathcal{L}\{f(t)\} ds \quad (10.3)$$

اکنون با توجه به رابطه معروف  $D^\alpha \{e^{st}\} = s^\alpha e^{st}$  فرمول (۱۰.۳) به صورت ساده  $D^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}\}$  در می‌آید.

در حالت کلی، برای  $\alpha$  با شرط  $m-1 < \alpha < m$  تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل و کاپتو به ترتیب در روابط زیر صدق می‌کنند

$$L\{RLaD_t^\alpha f(t)\} = L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \frac{d^{\alpha-k-1} f(t)}{dt^{\alpha-k-1}} \Big|_{t=0},$$

$$L\{CaD_t^\alpha f(t)\} = L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

تبدیل فوری تابع  $f(t)$  به صورت  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$  تعریف می‌شود که برای آن، مشابه تبدیل لاپلاس، رابطه  $D^\alpha f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{(i\omega)^\alpha \mathcal{F}\{f(t)\}\}$  برقرار است. در هردوی این تعریف‌ها باید حدود ضمنی مشتق‌گیری تعیین شوند. در تعریف تبدیل لاپلاس، مشتق تعمیم‌یافته مشتق ریمان-لیوویل با حد پایین صفر است، درحالی‌که در تبدیل فوری مشتق از نوع مشتق وایل است.

#### ۴ عملگرهای کسری از مرتبه متغیر و تابع تعمیم‌یافته

بیش از یک قرن مطالعه حسابان کسری بر عملگرهایی که دارای مرتبه‌ای ثابت (اما تک‌مقداری) بودند تمرکز یافته بود. این عملگرهای کسری را عملگرهای از مرتبه ثابت می‌نامند که در مقابل عملگرهای از مرتبه تابع تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> (اما ثابت) قرار دارند. با وجود این‌که عملگرهای از مرتبه ثابت نسبت به همتای مرتبه صحیح خود از عمومیت بیشتری برخوردارند، ماهیت ثابت و تک‌مقداری بودن مرتبه آن‌ها سبب می‌شود که توانایی‌شان برای ضبط دقیق برخی از پدیده‌های پیچیده که دینامیکشان ممکن است در طول زمان تکامل یابد و یا اساساً در نتیجه تعامل با مرتبه‌های متعدد شکل می‌گیرند، محدود شود. در سال‌های اخیر، این مشاهدات منجر به تدوین دو شکل قابل توجه و یگانه از عملگرها از مرتبه تعمیم‌یافته و مرتبه متغیر شده است. تعریف اخیر مربوط به عملگرهایی است که مرتبه آن‌ها می‌تواند یک تابع از متغیرهای وابسته (مثلاً متغیرهای حالت سیستم) یا متغیرهای مستقل (مثلاً فضا یا زمان) باشد و مقدار مرتبه به دنبال تکامل سیستم می‌تواند تغییر کند. این نوع مرتبه‌ها در این مقاله مورد توجه ما نیست ولی خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای مرور دقیق جنبه‌های ریاضی

و کاربردهای این نوع عملگرها به [۳۰، ۳۹] مراجعه کنند.

عملگرهای با مرتبه متغیر قطعاً می‌توانند ذاتاً تک‌مقدار یا تعمیم‌یافته باشند. در عملگرهای از مرتبه متغیر تعمیم‌یافته تعریف مرتبه تعمیم‌یافته عملگر برهم‌کنش‌های مراتب مختلف و یا پدیده‌های فیزیکی مانند اثرات حافظه در مواد مرکب [۱۳] یا اثرات چندمقیاسی [۱۲] را قابل توجیه و تفسیر می‌سازد. یک مثال ساده که قابلیت‌های این دسته از عملگرها را نشان می‌دهد، رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک است که خواص متغیر با مکان دارند [۲۲]. با توجه به اینکه هسته اصلی یک عملگر از مرتبه ثابت در عملگر از مرتبه تعمیم‌یافته حفظ می‌شود، عملگرها از مرتبه تعمیم‌یافته ویژگی‌های اساسی عملگرها از مرتبه ثابت مانند توانایی مدل‌سازی غیرموضعی و اثرات حافظه را به ارث می‌برند. یک نمای کلی از کاربردهای حسابان کسری از مرتبه تعمیم‌یافته در زمینه‌هایی مانند ویسکوالاستیسیته، فرآیندهای انتقال، و نظریه کنترل در [۱۷] یافت می‌شود.

## ۵ تعبیر هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری

تفسیر هندسی و فیزیکی انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری، که هم‌اکنون نظری و هم کاربردی حوزه‌ای به سرعت در حال رشد است، ساده نیست و موضوعی با قدمت ۳۰۰ سال است. این مسئله در اولین کنفرانس بین‌المللی حسابان کسری در نیویورک آمریکا در سال ۱۹۷۴ با گنجاندن آن در فهرست مسائل حل‌نشده مورد تأکید قرار گرفته است. این سؤال در چند کنفرانس بعدی – در دانشگاه استرترکلاید (بریتانیا) در سال ۱۹۸۴ و در دانشگاه نیپون (ژاپن) در سال ۱۹۸۹ – نیز بی‌پاسخ ماند. بحث می‌گذرد یکی از کنفرانس‌ها در وارنا به سال ۱۹۹۶ نشان از آن داشت که این مسئله هنوز حل نشده است. به دلایلی تلاش زیادی برای ارتباط انتگرال و مشتق‌های کسری با هندسه برخالی<sup>۱</sup> انجام شده است، اما به‌وضوح این رویکرد ناسازگار است. یکی از تعبیرهای نسبتاً مناسب هندسی و فیزیکی برای انتگرال و مشتق‌گیری کسری را پادوبنی [۳۲] مطرح کرده است که آن را در اینجا بیان خواهیم کرد. برای این کار لازم است چند مفهوم را یادآوری کنیم.

### ۱.۵ انتگرال ریمان-اشتیلتیس

انتگرال ریمان-اشتیلتیس تعمیم انتگرال ریمان است که آن را اولین بار اشتیلتیس در سال ۱۸۹۴ منتشر کرد. انتگرال ریمان-اشتیلتیس تابع  $f(x)$  نسبت به تابع حقیقی  $g(x)$  با  $\int_a^b f(x)dg(x)$  نشان داده می‌شود و برابر حد مجموع تقریبی  $S(P, f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$

تعریف می‌شود با این شرط که نُرم افراز (یعنی طول بزرگ‌ترین زیربازهٔ افراز)

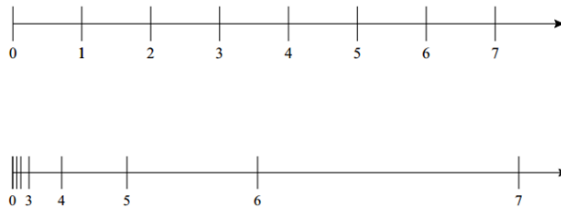
$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

از بازهٔ  $[a, b]$  به صفر نزدیک شود که در آن  $c_i$  در زیربازه  $i^{\text{ام}}$   $[x_i, x_{i+1}]$  قرار دارد. شرایطی روی  $g$  در نظر گرفته می‌شود اما پیوسته بودن  $g$  نیز لازم نیست. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه به [۴] مراجعه کنید.

## ۲.۵ دو نوع زمان

آگاهی از تفسیر فیزیکی انتگرال و مشتق‌گیری کسری نیاز به شناختن دو نوع زمان، یعنی زمان همگن (زمان مطلق) و زمان ناهمگن (زمان کیهانی)<sup>۱</sup> دارد. شواهدی در علم فیزیک وجود دارد که وجود مقیاس‌های زمانی مختلف را اثبات می‌کند. در ادامهٔ مقاله به این شواهد اشاره خواهیم کرد. در [۶]، شرحی توصیفی، تاریخی، و فلسفی بر سخنرانی‌ای از عطیه آمده است که برای فهم این قسمت مفید است.

فرض نیوتون این است که «زمان مطلق، حقیقی، و ریاضی، به‌خودی خود و بنابه سرشت خود، بدون رجوع به هیچ چیز خارجی، به‌نحوی یکنواخت جاری می‌شود.» چنین فرضی برای بسط حساب دیفرانسیل نیوتون و به کارگیری آن در مسائل مکانیک کاملاً ضروری بود. زمان اغلب با استفاده از محور زمان به تصویر کشیده می‌شود و فواصل هندسی مساوی محور زمان متناظر با بازه‌های زمانی برابر در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲ را ببینید). اما این فرض را با آزمایش نه می‌توان اثبات کرد و نه رد.



شکل ۲. محورهای زمان همگن و ناهمگن

هر دو طول از بازه‌های هندسی را می‌توان اندازه‌گیری و مقایسه کرد، زیرا آن‌ها به‌طور هم‌زمان برای اندازه‌گیری در دسترس هستند. هیچ دو بازهٔ زمانی را هرگز نمی‌توان با هم مقایسه کرد، زیرا آن‌ها

برای اندازه‌گیری (یا برای مشاهده) فقط به صورت متوالی در دسترس ما هستند. اخترشناس معروف آمریکایی کلمنس<sup>۱</sup> در جایی نوشته است: «اندازه‌گیری زمان اساساً یک فرآیند شمارش است. هر پدیده‌ای که تکرار می‌شود، هر اتفاقی که بتواند رخ دهد، دراصل معیاری برای زمان است.»

شکل ۲ تیک‌های ساعتی را نشان می‌دهند که می‌توانیم آن‌ها را فقط به صورت نمادین ثبت کنیم. می‌توان آن‌ها را به‌عنوان زمان مطلق و کیهانی تفسیر کرد که با برخی «تیک‌های ساعت» نشان داده می‌شود. تصویر ما از زمان همگن انفرادی به‌شکلی است که در شکل ۲ (بالا) نشان داده شده است. زمان کیهانی ممکن است به‌طور یکسان جاری نباشد، مانند آنچه در شکل ۲ (پایین) نشان داده شده است.

هاوکینگ گفته است: «به نظر می‌رسد زمان در نزدیکی جسم عظیمی مانند زمین کندتر می‌گذرد.» و «هیچ زمان مطلق انفرادی وجود ندارد، اما در عوض هر فردی معیار زمان خود را دارد که بستگی به این دارد که کجاست و چگونه حرکت می‌کند.» در [۱۵] آمده است که «طبق کیهان‌شناسی زمان‌سنجانه<sup>۲</sup> مدل اینشتین برای درک کل جهان (یعنی فضا-زمان همگانی) صحیح است با این تفاوت که دو نوع زمان وجود دارد: زمان کیهانی یا اینشتینی و زمان موضعی یا مینکوفسکی که (شاید!) زمانی است که با روش‌های موجود اندازه‌گیری می‌شود. به زبان ساده، زمان کیهانی اینشتین زمان «حقیقی» است درحالی‌که زمان مینکوفسکی تنها تقریبی از  $t$  است. بنابراین، مدل ایده‌آل زمان همگن با جریان یکسان را می‌توان به‌عنوان تقریبی از زمان کیهانی در نظر گرفت. این ایده که زمان از دید دستگاه‌های مختصات متحرک با سرعت بالا (سرعت‌های نزدیک سرعت نور) متفاوت از دستگاه مختصات ثابت سنجیده می‌شود از طریق بعضی شواهد فیزیکی قابل اثبات است، برای مثال بررسی فروپاشی یک ذره کیهانی ناپایدار و نیز تغییرناپذیری سرعت موج در معادلهٔ ماکسول با فرض وجود دو نوع زمان، دو شاهد فیزیکی مؤید این تفاوت‌اند.»

### ۳.۵ ذرات کیهانی

میون<sup>۳</sup> (که از حرف یونانی  $\mu$  برای نمایش آن استفاده می‌شود) یک ذرهٔ بنیادی شبیه به الکترون است که بار الکتریکی آن  $-1e$  و اسپین آن  $\frac{1}{2}$  است، اما جرم بسیار بیشتری از الکترون دارد. طبق نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین، ساعتی که با کسری از سرعت نور (به‌شرطی که مقدارش قابل توجه باشد) نسبت به ناظر حرکت می‌کند، کندتر از ساعت خود ناظر کار می‌کند. این بدان معنا است که زمان باید در یک چارچوب متحرک مرجع، که به آن اتساع زمان می‌گویند، کندتر جریان داشته باشد.

اگر فرآیندی (مانند فروپاشی یک ذره ناپایدار) با طول عمر متوسط  $\tau_0 = 1.56 \times 10^{-6}$  (s) در چارچوب ساکن اتفاق بیفتد، طول عمر ذره با سرعت  $v$  برابر با  $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$  خواهد بود که در آن سرعت نور برابر با  $c = 2.9979 \times 10^8$  (m/s) است؛ فروپاشی میون‌ها تأییدی بر فرمول اینشتین است.

اندازه‌گیری شار میون‌ها در سطح زمین یک معضل اولیه ایجاد می‌کرد، زیرا به دلیل نیمه‌عمر کوتاه  $1.56$  میکروثانیه‌ای میون‌های بسیار بیشتری از آنچه انتظار می‌رفت شناسایی شدند. این آزمایش مثال خوبی از کاربرد اتساع زمانی نسبیتی برای توضیح افزایش محدوده ذرات برای ذرات با سرعت بالا است. برای مثال از یک میلیون میون که در ارتفاع  $10^4$  کیلومتری زمین و با سرعت حدود  $v = 0.98c$  حرکت می‌کنند باید مسافت  $10000$  متر را در زمان  $\tau = 34 \times 10^{-6}$  (sec) با چنین سرعتی طی کنند که چنین زمانی  $218$  برابر طول عمر ذره  $\tau_0$  خواهد بود. درحقیقت نرخ حیات باید برابر با  $0.3 \times 10^{-6} \approx 2^{-218}$  باشد. در صورتی که در عمل مقدار بسیار بیشتری از این مقدار اندازه‌گیری شده است. اگر ساعت ذره میون تأخیر زمانی داشته باشد، یعنی مثلاً با ضریب تأخیری برابر با  $5 \approx 1 / \sqrt{1 - (0.98c/c)^2}$  کار کند، در این صورت طول عمر ذره برابر  $\tau = 5 \times 1.56 \times 10^{-6}$  (sec) اندازه‌گیری می‌شود که زمان لازم برای طی مسافت  $10000$  متر، یعنی  $\tau = 34 \times 10^{-6}$  (sec) مقدار  $436$  برابر طول عمر ذره خواهد بود. در این صورت نرخ حیات باید برابر  $0.49 \approx 2^{-436}$  باشد. چنین عددی با اندازه‌گیری‌های واقعی مطابقت دارد و تأخیر زمانی ساعت متصل به ذره میون را که با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کند اثبات می‌کند.

#### ۴.۵ معادله موج ماکسول

معادله موج ماکسول به صورت

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

است. با اعمال تبدیل گالیله  $x' = x - vt$ ،  $y' = y$ ،  $z' = z$ ،  $t' = t$  می‌کنیم که معادله موج تغییر کرده و سرعت موج  $c$  ثابت نخواهد بود. این تغییر برای توضیح اثبات تجربی مایکلسون و مورلی مبنی بر ثابت بودن سرعت نور مفید نبود. گفتنی است که تبدیل گالیله حرکت محور  $x'$  از دستگاه  $x'y'z'$  را به موازات محور  $x$  از دستگاه  $xyz$  با سرعت  $v$  نشان می‌دهد

که در آن  $t$  و  $t'$  زمان‌های اندازه‌گیری شده در دو دستگاه هستند. با اعمال تبدیلات لورنتس

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

که در آن  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  پایابودن معادلهٔ موج الکترومغناطیسی تحت تبدیل‌های لورنتس نتیجه می‌شود. می‌توانیم استدلال بالا را وارونه کنیم و نشان دهیم که اگر قرار است معادلهٔ موج ثابت بماند (به موجب نتیجهٔ مایکلسون-مورلی) تبدیل‌های لورنتس باید تبدیل‌های درستی باشند تا در تغییر بین چارچوب مرجع اولیهٔ استفاده شوند. اینشتین از اینجا نتیجه گرفت که تبدیل‌های لورنتس نشان می‌دهند که زمان و مکان چگونه باید در یک چارچوب مرجع با سرعت بالا تغییر کند. در واقع تفاوت زمان‌های  $t$  و  $t'$  تغییرناپذیری سرعت موج در معادلهٔ ماکسول را، که به کمک آزمایش تجربی مایکلسون و مورلی اثبات شده بود، توجیه می‌کند.

اکنون پس از ذکر این مقدمات به تفسیر هندسی انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل می‌پردازیم. انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل چپ و راست، یعنی  $I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$  و  ${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$  را می‌توان به شکل انتگرال اشتیلتیس نوشت [۳۲]:

$$I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau), \quad {}_t I_b^\alpha f(t) = \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau)$$

$$\text{که در آن } h_t(\tau) = \frac{t^\alpha + (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \text{ و } g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

حالا خودرویی را تصور کنید که مجهز به دو وسیلهٔ اندازه‌گیری است: سرعت‌سنج که سرعت  $v(\tau)$  را ثبت می‌کند و ساعتی که زمان را نشان می‌دهد. اما ساعت زمان را به اشتباه نشان می‌دهد. فرض کنید رابطهٔ بین زمان اشتباه  $\tau$  که توسط ساعت نشان داده می‌شود (و راننده آن را زمان صحیح در نظر می‌گیرد) از یک سو و زمان واقعی  $T$  از سوی دیگر، با تابع  $T = g(\tau)$  داده شود. رانندهٔ  $A$  که از عملکرد اشتباه ساعت اطلاعی ندارد، مسافت طی شده را با استفاده از انتگرال معمول ریمان محاسبه می‌کند، یعنی  $S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ . با این حال، ناظر  $O$  با اطلاع از ساعت اشتباه و داشتن تابع  $g(\tau)$ ، که مقادیر صحیح زمان را از روی زمان اشتباه راننده به دست می‌آورد، مسافت واقعی طی شده را به صورت  $S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) = I_t^\alpha v(t)$  محاسبه می‌کند. انتگرال کسری تابع  $v(\tau)$ ، یعنی  $S_O(t)$ ، را می‌توان به عنوان مسافت واقعی طی شده توسط یک جسم متحرک تفسیر کرد که مقادیر موضعی سرعت آن  $v(\tau)$  (سرعت انفرادی) و مقادیر موضعی زمان (زمان انفرادی) آن را ثبت کرده‌ایم. رابطهٔ بین زمان ثبت شده به صورت موضعی (که به صورت زمان

یکنواخت در نظر گرفته می‌شود) و زمان کیهانی (که به صورت غیریکنواخت جاری است) توسط یک تابع معلوم  $g_t(\tau)$  مشخص می‌شود. تابع  $g_t(\tau)$  مقیاس زمانی ناهمگن را توصیف می‌کند که نه تنها به  $\tau$  بلکه به پارامتر  $t$  نیز بستگی دارد که آخرین مقدار اندازگیری شدهٔ زمان انفرادی جسم متحرک را نشان می‌دهد. وقتی  $t$  تغییر می‌کند، کل بازهٔ زمانی کیهانی قبلی نیز تغییر می‌کند. این موضوع با دیدگاه‌های فعلی در فیزیک مطابقت دارد.

طبق تعریف مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل مسافت واقعی طی شده، یعنی  $S_O(t)$ ، برای

$$0 < \alpha < 1$$

$$\begin{aligned} RL \circ D_t^\alpha S_O(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} S_O(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} S_O(\tau) d\tau = {}_0 I_t^{-\alpha} S_O(t). \end{aligned}$$

با جانشانی  $S_O(t) = {}_0 I_t^\alpha v(t)$  در رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که

$$RL \circ D_t^\alpha S_O(t) = {}_0 I_t^{-\alpha} \circ {}_0 I_t^\alpha v(t) = v(t).$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل فاصلهٔ واقعی  $S_O(t)$  طی شده توسط یک جسم متحرک، که رابطهٔ بین زمان انفرادی  $\tau$  و زمان کیهانی  $T$ ، در هر لحظهٔ زمانی جداگانهٔ  $t$  توسط تابع معلوم  $T = g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$  داده شده، برابر است با سرعت انفرادی آن شیء  $v(\tau)$ . در ضمن سرعت  $v_o(\tau)$  برابر است با

$$\begin{aligned} v_o(\tau) &= \frac{dS_O}{dt} = \frac{d {}_0 I_t^\alpha v(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} v(\tau) d\tau = RL \circ D_t^{1-\alpha} v(t). \end{aligned}$$

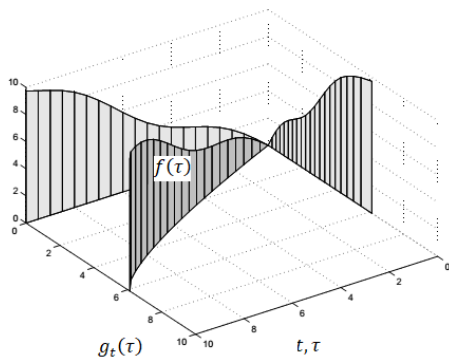
بنابراین، مشتق مرتبهٔ  $(1-\alpha)$  ام ریمان-لیوویل از سرعت انفرادی  $v(t)$  برابر است با سرعت  $v_o(t)$  از دیدگاه ناظر مستقل. اگر زمان انفرادی  $\tau$  و زمان کیهانی  $T = g_t(\tau)$  داده شده باشند، برای  $\alpha = 1$ ، وقتی تغییر شکل دینامیکی مقیاس زمانی وجود نداشته باشد، هر دو سرعت بر هم منطبق می‌شوند، یعنی  $v_o(t) = v(t)$ . از طرف دیگر، طبق تعریف مشتق کسری چپ کاپتو مسافت واقعی طی شدهٔ  $S_O(t)$  برای  $0 < \alpha < 1$  برابر است با

$$CaD_t^\alpha S_O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dS_O(\tau)}{d\tau} d\tau = {}_0 I_t^{1-\alpha} \frac{dS_O(t)}{dt} = v(t).$$

بنابراین، مشتق کسری کاپتو تفسیر فیزیکی مشابهی با مشتق کسری ریمان-لیوویل دارد. گفتنی است که اگر  $f(0) = 0$ ، مشتق ریمان-لیوویل و مشتق کاپتو از مرتبه  $0 < \alpha < 1$  برابرند، یعنی

$$CaD_t^\alpha f(t) = RL \circ D_t^\alpha f(t)$$

در ادامه به تعبیر هندسی انتگرال‌های کسری می‌پردازیم. در ابتدا یک دستگاه مختصات سه‌بعدی با محورهای  $\tau$ ،  $g$ ، و  $f(\tau)$  در نظر می‌گیریم. در صفحه  $(\tau, g)$  تابع  $g_t(\tau)$  را برای  $0 \leq \tau \leq t$  رسم می‌کنیم. در امتداد منحنی به دست آمده یک «حصار» با ارتفاع متغیر  $f(\tau)$  می‌سازیم، بنابراین لبه بالایی حصار منحنی سه‌بعدی  $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$  است. این حصار را می‌توان بر روی دو سطح عمودی (صفحه‌های مختصات) تصویر کرد (شکل ۳ را ببینید): مساحت تصویر این حصار بر روی صفحه  $(\tau, f)$  با مقدار انتگرال کسری  $I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  برابر است. سطح تصویر دقیقاً حصار روی صفحه  $(g, \tau)$  مطابق با مقدار انتگرال  $I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  است. به عبارت دیگر، حصار ما دو سایه روی دو دیوار می‌اندازد. اولی، که روی دیوار  $(\tau, f)$  و به «سطح زیر خم  $f(\tau)$ » معروف است، یک تفسیر هندسی معمول از انتگرال  $I_t^\alpha f(t)$  است. «سایه» روی دیوار  $(g, f)$  یک تفسیر هندسی از انتگرال کسری  $I_t^\alpha f(t)$  برای یک مقدار ثابت  $t$  است. بدیهی است که برای  $g_t(\tau) = \tau$  هر دو سایه برابرند. این نشان می‌دهد که تعریف رایج انتگرال معین یک مورد خاص از انتگرال ریمان چپ است. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که وقتی  $t$  تغییر می‌کند تعبیر انتگرال کسری لیوویل از دیدگاه هندسی چیست؟ با تغییر  $t$  حصار به‌طور هم‌زمان تغییر می‌کند؛ طول و به تعبیری شکل آن تغییر می‌کند. در این صورت ما یک تفسیر هندسی دینامیکی از انتگرال کسری به‌عنوان تابعی از  $t$  داریم.



شکل ۳. نمایش حصار و سایه‌های آن برای  $\alpha = 0.75$  و  $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$  [۳۲]

نکته چالش برانگیز این است که اگرچه فرض وجود تفاوت بین زمان انفرادی  $\tau$  و زمان کیهانی  $T$  از شهود فیزیکی برخوردار است اما وجود ارتباط بین این دو زمان که از طریق تابع  $T = g_t(\tau) = \frac{t^\alpha - (t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$  داده می‌شود ممکن است ما به‌زای فیزیکی نداشته باشد. مثلاً تبدیلات لورنتس که یک تبدیل زمانی برای چارچوب مرجع است و به‌صورت  $t' = t/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  معین می‌شود با رابطه زمانی یادشده تفاوت دارد.

## ۶ کاربردهایی از حسابان کسری در مهندسی

در این بخش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری را در زمینه‌های مختلفی از علوم مهندسی نام خواهیم برد و اشاره خواهیم کرد که چگونه استفاده از معادله با مشتق‌های کسری نتایج بهتری نسبت به مشتق‌های معمولی در مدل‌سازی پدیده‌های مهندسی به دست داده است.

### ۱۰.۶ کاربرد حسابان کسری در مواد ویسکوالاستیک

مواد ویسکوالاستیک یا لاستیک‌ها یا پلیمرها به‌طور وسیعی در مهندسی مکانیک، برق، مواد، شیمی، و عمران به کار می‌روند. مثلاً در مهندسی برق این مواد به‌عنوان جداسازها یا عایق‌های الکتریکی به کار می‌روند. در مهندسی عمران از این مواد برای کاهش ارتعاشات سازه‌های بزرگ نظیر پل‌ها استفاده می‌شود. به‌دلیل اهمیت تولید و استفاده این مواد در مهندسی شیمی گرایش از این مهندسی به‌نام مهندسی پلیمر ایجاد شده است.

از جمله کاربردهایی که در آن‌ها از مشتق‌های کسری برای مدل‌سازی مواد بهره گرفته شده است می‌توان به این موارد اشاره کرد: پیش‌بینی مواد پلیمری برای شکل فعال شده حرارتی پلیمرهای حافظه‌دار<sup>۱</sup> (SMPs) [۱۹، ۲۹]، الیاف شیشه پوشش داده شده با PTFE (پلی تترافلوئورواتیلن) [۴۳]، رزین اپوکسی،<sup>۲</sup> یک ترموپلاستیک و یک پلیمر زیست تخریب‌پذیر نیمه‌کریستالی<sup>۳</sup> [۲۱]، مذاب پلیمری [۲۳]، الاستومرهای مغناطیسی فعال<sup>۴</sup> (MAEs) [۲۸]، و معادلات کسری ساختاری سه‌بعدی کلی برای مواد همگن و همسانگرد [۱۰].

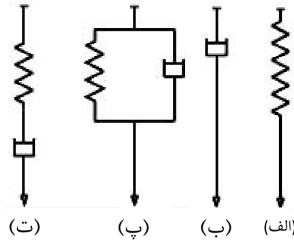
همان‌طور که گفتیم کاربرد دیگری از مواد ویسکوالاستیک در ساخت جاذب‌های ارتعاش است. تیرها و ورق‌های به کار رفته در سازه‌های مهندسی همواره تحت تاثیر نیروها و تحریک‌های خارجی دچار لرزش یا ارتعاش می‌شوند و فرونشانی یا کاهش یا به‌عبارت دیگر میرا کردن دامنه نوسان آن‌ها

1. thermally activated shape memory polymers 2. epoxy resin 3. semi-crystalline biodegradable polymer 4. magnetoactive elastomers

بسیار مهم است. برای این منظور از تجهیزات الصاق‌شونده به تیرها و ورق‌ها به نام جاذب‌های ارتعاش استفاده می‌شود که با نوسان خود از نوسان تیرها و ورق‌ها جلوگیری می‌کنند و ارتعاش آن‌ها را جذب می‌کنند. تحلیل فرونشانی ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک یا میراشدهٔ کسری با استفاده از چندین جاذب بهینهٔ دینامیکی در [۳۵] آمده است.

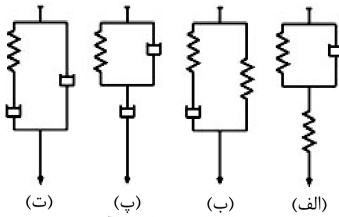
در دانش مهندسی وقتی یک جسم در امتداد یک محور به صورت یک بُعدی تحت بارگذاری قرار می‌گیرد در یک حالت سادهٔ تنش<sup>۱</sup>  $(\sigma)$  به صورت توزیع نیرو بر واحد سطح ماده و کرنش<sup>۲</sup>  $(\epsilon)$  به صورت تغییر طول نسبی ماده (نسبت تغییر طول ماده به طول اولیه) تعریف می‌گردد که از جمله کمیت‌های بسیار مهم در مهندسی هستند. چند معادلهٔ ساختاری برای مواد مختلف وجود دارند که ارتباط بین تنش و کرنش را نشان می‌دهند. برای مثال، برای بسیاری از جامدات این رابطه ساختاری به صورت  $\sigma(t) = m\epsilon(t)$  (مدل هوک) و برای اکثر سیالات تنش با نرخ زمانی کرنش در ارتباط است و رابطهٔ ساختاری به صورت  $\sigma(t) = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$  (مدل نیوتون) است. برای مواد ویسکوالاستیک، نظیر مواد پلیمری و لاستیکی که رفتاری بین جامد و سیال دارند، رابطهٔ ساختاری بسته به مدل انتخابی در حالت کلاسیک ترکیبی از معادلات ساختاری جامدات و سیالات در نظر گرفته می‌شود. در واقع این مواد نه آنقدر صلب و محکم‌اند که مانند مواد جامد در اثر نیروهای اعمالی تغییر شکل‌های بسیار کمی داشته باشند و نه آنقدر شل و روان که مانند سیالات (مایعات و گازها) در اثر اعمال نیرو جریان یابند.

برای مواد ویسکوالاستیک از مدل فوکت<sup>۳</sup> با رابطهٔ ساختاری  $\sigma(t) = m\epsilon(t) + b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$  و مدل ماکسول با رابطهٔ ساختاری  $\sigma(t) + a_1 \frac{d\sigma}{dt} = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$  بیشتر استفاده می‌شود. در این مدل‌ها از مشتق مرتبهٔ صحیح یا یک برای معادلات ساختاری استفاده شده است. مدل‌های یادشده در بالا در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. به دلیل وجود یک رابطهٔ خطی بین تنش و کرنش در رابطهٔ هوک، که مشابه رابطهٔ خطی بین نیروی اعمال‌شده به فنر و تغییر طول آن است، این مدل با فنر نمایش داده می‌شود. از طرف دیگر، در مهندسی از وسیلهٔ دیگری به نام ضربه‌گیر یا دشپات<sup>۴</sup> (در خودروها کمک‌فنر نامیده می‌شود) استفاده می‌شود که از یک پیستون لغزنده در داخل یک استوانهٔ حاوی روغن تشکیل شده است و یک رابطهٔ خطی بین نیروی اعمال‌شده به آن و نرخ زمانی جابه‌جایی پیستون نسبت به استوانه یا سرعت نسبی حرکت پیستون وجود دارد. این رابطه شبیه به معادلهٔ ساختاری سیالات یا  $\sigma(t) = b_1 \frac{d\epsilon}{dt}$  است و به همین دلیل مدل نیوتن در شکل ۴ (ب) با یک ضربه‌گیر نمایش داده



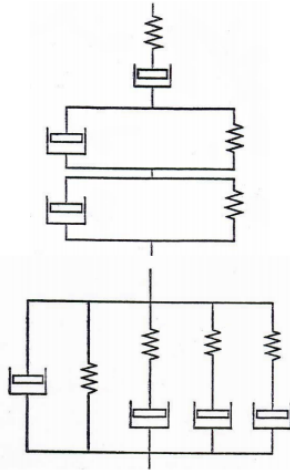
شکل ۴. مدل‌های مکانیکی کلاسیک. (الف) و (ب) مدل‌های مرتبهٔ صحیح مواد ویسکوالاستیک؛ (پ) مدل فوکت؛ (ت) مدل ماکسول [۲۷]

شده است. برای مواد ویسکوالاستیک ترکیبی از فنرها و ضربه‌گیرها به صورت سری و موازی برای مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک به کار می‌روند. در شکل‌های ۵ و ۶ مدل‌های پیچیده‌تری از مواد ویسکوالاستیک دیده می‌شود.



شکل ۵. نمایش‌های مکانیکی مدل‌های زلزله و ضدزلزله. (الف) فنر به صورت سری با مدل فوکت؛ (ب) فنر موازی با مدل ماکسول؛ (پ) ضربه‌گیر به صورت سری با مدل فوکت؛ (ت) ضربه‌گیر به صورت موازی با مدل ماکسول [۲۷]

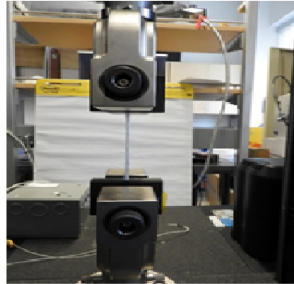
برای مشخص کردن رابطهٔ ساختاری مواد مختلف معمولاً از یک دستگاه کشش تک‌محوره، مثل شکل ۷، استفاده می‌شود. نمونهٔ مورد نظر به دو فک دستگاه بسته می‌شود و با حرکت فک‌ها نسبت به یکدیگر نمونه تحت کشش قرار می‌گیرد. این دستگاه‌ها طوری طراحی شده‌اند که امکان اعمال تنش ثابت  $\sigma(t) = \sigma_0$  و اندازه‌گیری هم‌زمان کرنش حاصل (حالت (الف)) و یا اعمال کرنش ثابت  $\epsilon(t) = \epsilon_0$  و اندازه‌گیری هم‌زمان تنش حاصل (حالت (ب)) وجود دارد. در حالت (الف) کمیت سازگاری با خزش<sup>۱</sup> به صورت  $J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}$  و در حالت (ب) کمیت آسودگی تنش<sup>۲</sup> به صورت  $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$  تعریف می‌شوند. اخیراً به صورت آزمایشگاهی برای مواد ویسکوالاستیک نشان داده شده است که با جایگزینی مشتق‌های معمولی زمانی با مشتق‌های کسری از مرتبهٔ  $\alpha$  در



شکل ۶. نمایش‌های مکانیکی مدل برگرز. (بالا) نمایش سازگاری با خزش؛ (پایین) نمایش آسودگی تنش [۲۷]

روابط ساختاری این مواد می‌توان رفتار این مواد را دقیق‌تر مدل‌سازی کرد. البته باید مرتبه  $\alpha$  را توسط آزمایش به دست آورد. در دهه‌های اخیر، دسته دیگری از مواد به نام مواد مرکب بافته‌شده به‌طور وسیعی در صنعت به کار گرفته شده است. این مواد پارچه‌های بافته‌شده‌ای هستند که تار و پودهای آن‌ها از الیافی تشکیل شده است که شامل هزاران رشته باریک‌تر از مو هستند. هر رشته از شیشه یا کربن که اطراف آن با یک ماده پلیمری خاص پوشش داده شده است ساخته می‌شود. اخیراً با انجام تعدادی آزمایش توسط دستگاه کشش بر روی این مواد و استفاده از حسابان کسری ثابت شده است که حل تحلیلی معادله‌های ساختاری این مواد در صورتی که شامل مشتق کسری باشد از حل معادله‌های ساختاری با مشتق‌های معمولی به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیک‌تر هستند [۱۸].

در جدول ۱ مدل‌های کسری مشابه مدل‌های مکانیکی کلاسیک مواد ویسکوالاستیک (مدل‌های مرتبه صحیح) معرفی و کمیت‌های سازگاری با خزش و آسودگی تنش با حل معادله‌های دیفرانسیل کسری مربوط به دست آمده‌اند. مثلاً در سطر اول جدول یادشده با فرض ثابت بودن کرنش  $\epsilon(t) = \epsilon_0 u(t)$ ، که در آن تابع پله‌ای واحد است، و حل معادله مشتق کسری  $\sigma(t) = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$  و یافتن تنش  $\sigma(t)$  کمیت آسودگی تنش به صورت  $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  به دست می‌آید. یکی از روش‌های حل معادله  $\sigma(t) = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$  استفاده از تبدیل لاپلاس با تعریف  $\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$  است. با این کار تابع  $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \epsilon_0 b_1 s^{\alpha-1}$  و با اعمال تبدیل وارون لاپلاس جواب  $E(t)$  به دست می‌آید. در جدول ۱ تابع می‌تاک-فلر،  $\hat{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$



شکل ۷. دستگاه کشش تک‌محوره [۱۸]

نامیده می‌شود که در آن  $\alpha > 0$  و در حالت خاص به صورت تابع نمایی  $E_1(z) = e^z$  در می‌آید. شایان ذکر است که ممکن است مدل‌های فوق را بتوان با هم ترکیب کرد و مدل‌های پیچیده‌تری برای بیان دقیق رفتار برخی از مواد ویسکوالاستیک پیدا کرد.

در [۳۲]، ضمن آزمایشی، نمونه‌هایی از تار مواد مرکب بافته‌شده شامل فیلامان‌هایی از جنس شیشه که دور آن‌ها با یک ماده پلیمری خاص پوشش داده شده بود در نظر گرفته شده است. نمونه‌هایی از تار یک پارچه بافت‌شده باز و خارج شده و سپس در زیر یک پرس هیدرولیکی قرار داده شده و تحت بار فشاری ۴۵۴ کیلوگرم و تحت توزیع حرارتی خاصی با زمان قرار گرفته است. در این فرآیند برای از بین رفتن چین‌وچروک تارها قبل از شروع چرخه روی آن‌ها پرس داغ تحت دمای ثابت  $160^\circ$  درجه سانتیگراد به مدت  $60$  دقیقه کشیده شده‌اند. بزرگی بار اعمال شده، دما، و چرخه پخت براساس یک روش استاندارد توصیه‌شده توسط سازنده دستگاه پرس صورت گرفته است. چنین نمونه‌هایی را نمونه نیمه‌تلفیقی<sup>۱</sup> می‌نامند. سپس نمونه آماده‌شده در دمای اتاق به دستگاه کشش بسته شده و تحت کرنش ثابت  $\epsilon(t) = \epsilon_0 u(t)$  قرار گرفته است. با اندازه‌گیری تنش  $\sigma(t)$  کمیت آسودگی تنش از رابطه  $E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$  به دست می‌آید. نمودار مقادیر کمیت آسودگی تنش در برابر زمان که براساس اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی برای یک نمونه خاص به دست آمده‌اند در شکل ۸ رسم شده است (خط‌چین). سپس با انتخاب مدل کسری زنر<sup>۲</sup> از جدول ۱ و استفاده از حل تحلیلی  $E(t) = E_e + E_1 \hat{E}_\alpha[-(\frac{t}{t_\sigma})^\alpha]$  (موجود در آن جدول) و برازش این جواب بر نتایج آزمایشگاهی، می‌توان پارامترهای ظاهر شده در این جواب را به دست آورد. در نهایت، تابع نتایج آزمایشگاهی، می‌توان پارامترهای ظاهر شده در این جواب را به دست آورد. در نهایت، تابع  $E(t) = E_e + E_1 \hat{E}_\alpha[-(\frac{t}{t_\sigma})^\alpha]$  به دست می‌آید (خط‌پر). نمودار تابع به دست آمده از حل

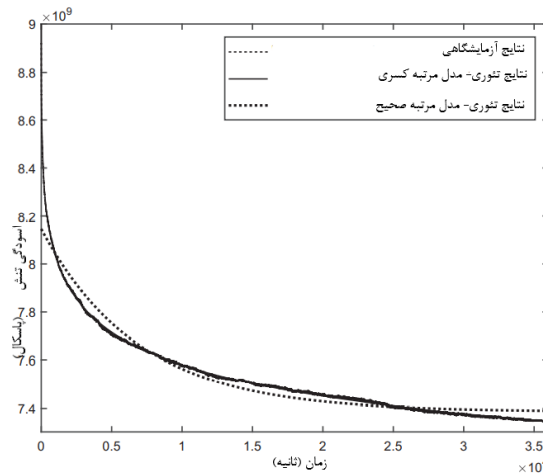
جدول ۱. مدل‌های کسری مواد ویسکوالاستیک

$\sigma(t) = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$	$J(t) = \frac{t^\alpha}{b_1 \Gamma(1+\alpha)}$	$E(t) = b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	مدل کسری نیوتون (اسکات بلر)
$\sigma(t) = m\epsilon(t) + b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$	$J(t) = \frac{1}{m} \left\{ 1 - \hat{E}_\alpha \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\epsilon}\right)^\alpha \right] \right\}$	$E(t) = m + b_1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	مدل کسری فوکت $(\tau_\epsilon)^\alpha = \frac{b_1}{m}$
$\sigma(t) + a_1 \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = b_1 \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$	$J(t) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{t^\alpha}{b_1 \Gamma(1+\alpha)}$	$E(t) = b_1 \hat{E}_\alpha \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\sigma}\right)^\alpha \right]$	مدل کسری ماکسول $(\tau_\sigma)^\alpha = a_1$
$(1 + a_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \sigma(t) = (m + b_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \epsilon(t)$	$J(t) = J_g + J_1 \left\{ 1 - \hat{E} \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\epsilon}\right)^\alpha \right] \right\}$	$E(t) = E_e + E_1 \hat{E} \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\sigma}\right)^\alpha \right]$	مدل کسری زرنر $J_g = \frac{a_1}{b_1}, J_1 = \frac{1}{m} - \frac{a_1}{b_1}$ $\tau_\epsilon = \frac{b_1}{m}, E_e = m$ $\tau_\sigma = a_1, E_1 = \frac{b_1}{a_1} - m$
$(1 + a_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \sigma(t) = (b_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} + b_2 \frac{d^{\alpha+1}}{dt^{\alpha+1}}) \epsilon(t)$	$J(t) = J_+ \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + J_1 \left\{ 1 - \hat{E} \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\epsilon}\right)^\alpha \right] \right\}$	$E(t) = E_- \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + E_1 \hat{E} \left[ -\left(\frac{t}{\tau_\sigma}\right)^\alpha \right]$	مدل کسری ضدزرنر $J_+ = \frac{1}{b_1}, J_1 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}$ $\tau_\epsilon = \frac{b_2}{b_1}, E_- = \frac{b_2}{a_1}$ $\tau_\sigma = a_1, E_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_1}$

تحلیلی برای مدل مرتبه صحیح  $\alpha = 1$  به صورت نقطه چین در شکل ۸ آمده است. مشاهدات حاکی از این است که در شکل ۸ نتایج نظری به دست آمده از مدل کسری، برخلاف مدل‌های مبتنی بر مشتق مرتبه صحیح، به خوبی در نواحی مختلف نمودار آسودگی تنش برآزش شده است. مقایسه بین نتایج نظری و تجربی نشان می‌دهد که مدل‌های کسری می‌توانند رفتار واقعی را بسیار دقیق ترسیم کنند. با توجه به شکل ۸ در زمان  $t = 0$  تفاوت قابل توجهی بین مقادیر مدل آسودگی تنش به دست آمده از آزمایش و مقادیر حاصل از مدل مشتق مرتبه صحیح وجود دارد.

## ۲.۶ کاربرد حسابان کسری در کنترل سیستم‌های دینامیکی

نظریه کنترل سیستم‌های دینامیکی را می‌توان در دو قالب کنترل کلاسیک، که مبتنی بر سیستم‌های تک‌ورودی و تک‌خروجی است، و کنترل مدرن، که سیستم‌های چندورودی و چندخروجی را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهد، دسته‌بندی کرد. خروجی یک سیستم در اثر تغییر در ورودی تغییر می‌یابد که به آن پاسخ سیستم می‌گویند. مهندسی کنترل می‌کوشد تا با مدل‌سازی سیستم پاسخ خروجی سیستم را نسبت به ورودی‌های مختلف تخمین بزند. اکثر روش‌های طراحی سیستم‌های کنترلی مبتنی بر نوعی مدل ریاضی از سیستم فیزیکی است. روش‌های کنترل کلاسیک عموماً براساس رابطه ورودی-خروجی و استفاده از تابع تبدیل لاپلاس بنا نهاده شده‌اند؛ یعنی با اعمال



شکل ۸. نمودار آسودگی تنش در برابر زمان در دمای اتاق برای یک نمونه از تارهای نیمه‌تلفیقی [۳۲]

تبدیل لاپلاس بر معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح حاکم بر سیستم که نشان‌دهنده ارتباط ورودی و خروجی سیستم دینامیکی است، آن را به معادله جبری تبدیل می‌کند و نسبت خروجی به ورودی در فضای لاپلاس به دست می‌آید که از آن به‌عنوان تابع تبدیل سیستم یاد می‌شود. مدل تابع تبدیل به‌خوبی قادر است رفتار ورودی-خروجی (توصیف خارجی) سیستم‌های تک‌ورودی-تک‌خروجی مرتبه پایین را تشریح کند. نظریه‌های مربوط به کنترل کلاسیک به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از سیستم‌های کنترل صنعتی به کار برده می‌شوند اما استفاده از این روش‌ها در بسیاری از سیستم‌ها، از جمله سیستم‌های چندورودی-چندخروجی و سیستم‌های مرتبه بالا پیچیدگی زیادی را ایجاد می‌کند. به منظور تجزیه و تحلیل دقیق رفتار سیستم‌های پیچیده و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته (مدرن) با عملکرد بهتر و بهینه‌تر نیاز است مدل‌های ریاضی جامع و دقیق‌تری در مقایسه با مدل تابع تبدیل مورد استفاده قرار گیرد.

اساس روش‌های کنترل مدرن بر پایه روش‌های فضای حالت است. در بازنویسی مدل ریاضی سیستم در فضای حالت، سیستم مرتبه  $n$  از نوع تک‌ورودی-تک‌خروجی (سیستمی که معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح حاکم بر دینامیک سیستم یک معادله مرتبه  $n$  است) به‌صورت دسته‌ای از  $n$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول بازنویسی می‌شود و این کار با تعریف تعداد کافی از متغیرهای جدید صورت می‌گیرد. نمایش سیستم‌ها در فضای حالت ممکن است توصیف ریاضی سیستم‌های مرتبه بالا و همچنین سیستم‌های چندورودی-چندخروجی را بسیار ساده کند. مدل‌سازی سیستم‌ها

در فضای حالت علاوه بر توصیف رفتار ورودی-خروجی (توصیف خارجی) قادر است توصیفی از رفتار متغیرهای حالت دینامیک داخلی سیستم (توصیف داخلی) را نیز ارائه دهد. براساس توصیف فضای حالت می‌توان تصویر کاملی از ساختار داخلی سیستم را به دست آورد و چگونگی ارتباط و وابستگی سیگنال‌های ورودی، متغیرهای حالت، و سیگنال‌های خروجی را درک کرد.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم می‌تواند یک معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح باشد درحالی‌که برای سیستم‌ها با پیچیدگی بالا این معادله ممکن است یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری باشد که در این صورت سیستم مرتبه کسری نامیده می‌شود و ممکن است سیستم مرتبه کسری خطی یا غیرخطی باشد [۷]. با اعمال تبدیل لاپلاس روی این معادله دیفرانسیل مرتبه کسری می‌توان مشابه سیستم‌های مرتبه صحیح تابع تبدیل سیستم را که شامل توان‌های کسری متغیر  $s$  تبدیل لاپلاس است به دست آورد [۳۱].

مشابه شکل فضای حالت برای سیستم‌های مرتبه صحیح برای سیستم مرتبه کسری نیز می‌توان معادله دیفرانسیل مرتبه کسری حاکم بر دینامیک سیستم را به صورت  $n$  سیستم مرتبه کسری خطی بیان کرد. روش‌های به کار رفته برای کنترل کلاسیک و مدرن سیستم‌های مرتبه صحیح برای سیستم‌های مرتبه کسری تعمیم یافته‌اند؛ برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۷، ۳۱، ۲] مراجعه کرد. در کنترل کلاسیک عموماً از کنترل‌کننده‌های تناسبی ( $P$ )، انتگرال‌گیر ( $I$ )، و مشتق‌گیر ( $D$ ) یا ترکیب آن‌ها تحت عنوان ( $PID$ ) استفاده می‌شود. مشابه چنین کنترل‌کننده‌ای تحت عنوان  $PI^\lambda D^\delta$  که شامل انتگرال‌گیری از مرتبه کسری  $\lambda$  و مشتق‌گیری از مرتبه کسری  $\delta$  برای سیستم‌های مرتبه کسری استفاده می‌شود [۷، ۳۱، ۲]. بررسی کنترل‌کننده مرتبه کسری به دلیل پیچیدگی آن‌ها از حیطة این مقاله خارج است و برای مباحث تکمیلی‌تر به خوانندگان توصیه می‌کنیم به [۷، ۳۱، ۲] مراجعه کنند. در ضمن در مبحث کنترل بهینه حسابان کسری از مرتبه تعمیم‌یافته نیز مطرح می‌شود که در [۴۱، ۴۲] به آن‌ها پرداخته شده است.

### ۳.۶ حسابان وردشی کسری

حسابان وردشی شاخه‌ای از ریاضیات است که با بهینه‌کردن (ماکسیم یا مینیم کردن) تابع‌ها یا آنچه اصطلاحاً تابع تابع نامیده می‌شوند و معمولاً به شکل  $I(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$  هستند سروکار دارد. تابع  $I(x)$  تابعی است از عبارت  $L(t, x(t), x'(t))$  که خود تابعی از  $x(t)$  است. در واقع تابع  $x(t)$  قرار است به گونه‌ای به دست آید که در نقاط ابتدا و انتها، یعنی

در آن  $t = b$  و  $t = a$ ، مقدار مشخصی بگیرد و انتگرال  $I(x)$  را بهینه کند. برخلاف نمو دیفرانسیلی که در آن نمو تابع  $dx$  در ازای نمو متغیر مستقل  $dt$  به وجود می‌آید، نمو وردشی  $\delta x$  نمو است که در آن نمودار تابع ضمن عبور از نقاط ثابت  $(a, x(a))$  و  $(b, x(b))$  در هر زمان  $t$  نمو می‌یابد بدون اینکه این نمو به‌ازای تغییر  $t$  رخ داده باشد. به‌عنوان مثال اگر  $x(t)$  نمایش جابه‌جایی یک ذره در زمان  $t$  باشد و نمایش تابع  $x(t)$  یک خم گذرنده از نقاط ثابت  $(a, x(a))$  و  $(b, x(b))$  باشد، در این صورت با انجام زمان خم  $x(t)$  را طوری نمو می‌دهیم که همچنان از نقاط ثابت  $(a, x(a))$  و  $(b, x(b))$  عبور کند ولی در هر زمان  $t$  تابع  $x(t)$  مقادیر متفاوتی با مقدار آن قبل از نمو داشته و به اندازه  $\delta x$  نمو کرده باشد. البته به‌لحاظ فیزیکی چون هر نوع جابه‌جایی ذره توأم با گذشت زمان یا نمو زمان می‌باشد، چنین نمو وردشی  $\delta x$  مجازی نامیده می‌شود. برای بهینه‌کردن تابع  $I(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$  نمو ت وردشی  $\delta I = 0$  یعنی  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x'}) = 0$  یا معادله لاگرانژ و یا معادله  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x'}) = 0$  منتهی می‌شود. اگر به‌جای مشتق مرتبه اول مشتق مرتبه کسری قرار داده شود، با یک مسئله حسابان وردشی کسری سروکار خواهیم داشت. حل تحلیلی چنین معادله‌ای در [۹، ۵] مورد بحث قرار گرفته است.

در [۳۴] به عملگرهایی که مرتبه  $\alpha$  در طول فرایند ثابت نمی‌ماند بلکه با زمان تغییر می‌کند، یعنی  $\alpha = \alpha(t)$ ، توجه شده است. تعمیم جالبی از نظریه حسابان کسری این است که در آن مرتبه مشتق کسری ثابت در نظر گرفته نمی‌شود و می‌تواند تابعی از زمان باشد. درواقع، استفاده از مشتق‌های کسری از مرتبه ثابت در مسائل حسابان وردشی ممکن است بهترین راه ممکن نباشد، زیرا که انتخاب مسیرها یک فرایند پویا است و در نتیجه مرتبه می‌تواند تغییر کند. بنابراین لازم است فرض کنیم مرتبه تابعی از زمان است، یعنی  $\alpha = \alpha(t)$ . بنابراین، می‌توان به دنبال یافتن بهترین تابع  $\alpha(t)$  باشیم به‌قسمی که معادله دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر  $D^{\alpha(t)}x(t) = f(t, x(t))$  بتواند فرایند پویای موردنظر را بهتر توصیف کند. با این رویکرد خواص غیرموضعی بیشتر آشکار می‌شوند. این رویکرد کاربردهای فراوانی در فیزیک، مکانیک، کنترل، و پردازش سیگنال پیدا کرده است. نکته دیگر این است که این رویکرد بسیار جدید است و هنوز در مراحل اولیه است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۹] مراجعه کنید.

کاربرد دیگری از حسابان کسری در مسئله بهینه‌سازی است. با تعمیم روش گرادیان نزولی به‌صورت یک الگوریتم تکرار شونده برای یافتن نقطه ثابت یک تابع هدف، یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان کسری کاپتو، یعنی گرادیان نزولی کسری کاپتو (CFGD) در [۳۶] به دست آمده

است. با تعریف گرادیان کسری کاپتو بر اساس مختصات دکارتی، الگوریتم کلی مذکور تعریف می‌شود.

## مراجع

- [۱] اکرمی، محمدحسین، حسابان کسری از نظریه تا کاربرد، ریاضی و جامعه، ۴ (۱۳۹۶)، ۵۹-۶۹.
- [۲] تواضعی، محمدصالح؛ توکلی کاخکی، مهسان، سیستم‌ها و کنترل‌کننده‌های مرتبه صحیح، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ۱۳۹۵.
- [۳] خاتمی، زهرا؛ علیزاده، یحیی، دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۲۹ (۱۳۸۱)، ۱۷-۳۰.
- [۴] رودین، و.، اصول آنالیز ریاضی، ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۴۰۱.
- [۵] سیدصادقی، میرصادق؛ شفیعی دیزج، محمد، حسابان کسری تغییرات با مرتبه متغیر، جهاد دانشگاهی استان اردبیل، اردبیل، ۱۴۰۰.
- [۶] کاشانی، سیدمحمدباقر، سخنرانی اینشتین: «ماهیت فضا» ارائه شده توسط مایکل عطیه»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۰ (۱۳۸۷)، ۶۳-۷۰.
- [۷] کبیری، رضا؛ چهارپاشلو، رضا، سیستم‌های مرتبه کسری و کاربرد آن‌ها در علم و صنعت، در همایش ملی الکترونیکی دستاوردهای نوین در علوم مهندسی و پایه، ۱۳۹۳.
- [۸] موسی‌زاده موسوی، سیف‌الله، ریشه‌ها، مبانی و سیر تکاملی نظریه استورم-لیوویل، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۶۰ (۱۳۹۶)، ۶۷-۸۷.
- [9] Almeida, R., Tavares, D., Torres, D. F. M., *The Variable-Order Fractional Calculus of Variations*, Springer Verlag, Switzerland, 2019.
- [10] Bagley, R. L., Torvik, P. J., On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *J. Rheol.*, **30** (1986), 133-155.
- [11] Bingi, K., Ibrahim, R., Karsiti, M. N., Hassan, S. M., Harindran, V. R., Fractional-order set-point weighted controllers, in *Fractional-order Systems and PID Controllers*, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 264. Springer, Cham, 2020.
- [12] Calcagni, G., Toward multifractional calculus, *Front. Phys.*, **6** (2018), 58.
- [13] Caputo, M., Fabrizio, M., The kernel of the distributed order fractional derivatives with an application to complex materials. *Fractal Fract.*, **1** (2017), no. 1, 13.
- [14] Chevalier, Y., Tuong, J. V., eds., *Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion*, John Wiley & Sons, London, , 2010.
- [15] Daigneault, A., Sangalli, A., Einstein's static universe: an idea whose time has come back? *Notices Amer. Math. Soc.*, **48** (2001), no.1, 9-16.
- [16] Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations; An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [17] Ding, W., Patnaik, S., Sidhardh, S., Semperlotti, F., Applications of distributed-order fractional operators: A review, *Entropy*, **23** (2021), no.1, 110.
- [18] Faal, R. T., Using fractional derivatives for improved viscoelastic modeling of textile composites, Part I: Fabric yarns, *J. Compos. Mater.*, **54** (2020), 3245-3260.
- [19] Fang, C. Q., Sun, H. Y., Gu J. P., Application of fractional calculus methods to viscoelastic response of amorphous shape memory polymers, *J. Mech.*, **31** (2010), 427-432.

- [20] Heuchel, M., Cui, J., Kratz, K., Relaxation based modeling of tunable shape recovery kinetics observed under isothermal conditions for amorphous shape-memory polymers, *Polymer (Guildf)*, **51** (2010), 6212-6218.
- [21] Kontou, E., Katsourinis, S., Application of a fractional model for simulation of the viscoelastic functions of polymers, *J. Appl. Polym. Sci.*, **133** (2016), 100-120.
- [22] Lorenzo, C. F., Hartley, T. T., Variable order and distributed order fractional operators, *Nonlinear Dynam.*, **29** (2002), 57-98.
- [23] Di Lorenzo, S., Di Paola, M., La Mantia, F. P., Pirrotta, A., Non-linear viscoelastic behavior of polymer melts interpreted by fractional viscoelastic model, *Meccanica*, **52** (2017), 1843-1850.
- [24] Machado, J. A. T., *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, De Gruyter, Berlin, 2019.
- [25] Magin, R. L., *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, Connecticut, 2006.
- [26] Machado, J. A. T., Galhano, A. M. S. F., Trujillo, J. J., On development of fractional calculus during the last fifty years, *Scientometrics*, **98** (2014), 577-582.
- [27] Mainardi, F., *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, World Scientific Publishing, Singapore, 2022.
- [28] Nadzharyan, T. A., Kostrov, S. A., Stepanov, G. V., Kramarenko, E. Y., Fractional rheological models of dynamic mechanical behavior of magnetoactive elastomers in magnetic fields, *Polymer (Guildf)*, **142** (2018), 316-329.
- [29] Pan, Z., Liu, Z., A novel fractional viscoelastic constitutive model for shape memory polymers, *J. Polym. Sci., Part B, Polym. Phys.*, **56** (2018), no. 16, 1125-1134.
- [30] Patnaik, S., Hollkamp, J. P., Semperlotti, F., Applications of variable-order fractional operators: A review, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **476** (2020), 20190498.
- [31] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego, Academic Press, 1999.
- [32] Podlubny, I., Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **5** (2002), 367-386.
- [33] Research Square, Adapting Taylor series to fractional differential equations (2017, March 17) [Video file], available at <https://www.youtube.com/watch?v=Bt2Uf5RJ9hs>.
- [34] Samko, S. G., Ross, B., Integration and differentiation to a variable fractional order, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **1** (1993), 277-300.
- [35] Sepeshri-Amin S., Faal, R.T., Das, R., Analytical and numerical solutions for vibration of a functionally graded beam with multiple fractionally damped absorbers, *Thin-Walled Struct.*, **157** (2020), 106-111.
- [36] Shin, Y., Darbon, J., Karniadakis, G. Em., A Caputo fractional derivative-based algorithm for optimization (2021), available at [arXiv: 2104.02259](https://arxiv.org/abs/2104.02259).
- [37] Spanier, J., Oldham, K. B., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [38] Sun, H. G., Zhang, Y, Balean, D., Chen, W., Chen, Y. Q., A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **64** (2018), 213-231.
- [39] Sun, H., Chang, A., Zhang, Y., Chen, W., A review on variable-order fractional differential equations: Mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **22** (2019), 27-59.
- [40] Tenreiro MacHado, J. A., Silva, M. F., Barbosa, R. S., Jesus, I. S., Rris, C. M., Marcus, M. G., Some applications of fractional calculus in engineering, *Math. Probl. Eng.*, (2010), article ID 639801.
- [41] Zaky, M., Machado, J. T., On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **52** (2017), 177-189.
- [42] Zaky, M., A Legendre collocation method for distributed-order fractional optimal control problems, *Nonlinear Dynam.*, **91** (2018), 2667-2681.

- [43] Zhang, Y., Xu, S., Zhang, Q., Zhou, Y., Experimental and theoretical research on the stress-relaxation behaviors of PTFE coated fabrics under different temperatures, *Adv. Mater. Sci. Eng.*, (2015), article ID 19473.

---

حسین تیموری فعال: دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه

رایانامه: [hossein.teimoori@atu.ac.ir](mailto:hossein.teimoori@atu.ac.ir)

رضا تیموری فعال: دانشگاه زنجان، دانشکدهٔ مهندسی، گروه مکانیک

رایانامه: [faal92@yahoo.com](mailto:faal92@yahoo.com)

## Fractional Calculus and Its Emerging Applications in Engineering

H. Teymoori Faal<sup>1</sup>✉, R. Teymoori Faal<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allameh Tabataba'i University, Iran

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Iran

**Abstract.** In this article, the history of fractional calculus along with the disciplines and involved fields are introduced briefly. In the following, the basic formulas of fractional calculus are obtained. By presenting physical evidence, the existence of two types of absolute and cosmic time is proven and with their help, the geometrical and physical interpretations of fractional integration and derivation are presented. As a new application of concepts of fractional calculus, modeling of viscoelastic materials where these materials are widely used in mechanical, electrical, material, chemical and civil engineering, is offered. Classical mechanical models of viscoelastic materials including integer order models and fractional orders of materials are introduced. Finally, the applications of fractional calculus in control, dynamic systems and fractional variational calculus are referred.

---

*Keywords:* fractional integration and derivation, absolute and cosmic time, viscoelastic materials, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative, Grunwald-Letnikov derivative

*Article history:* Recieved 23 December 2022; Accepted 8 June 2023

*Article type:* survey

---

---

1. hossein.teimoori@gmail.com

2. faal92@yahoo.com