فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۶۱ تا ۸۲

فصلی از یک کتاب

آنالیز در دوران کهن *

رودیگر تیله

ترجمهٔ ارشک حمیدی

چکیده. نویسنده در این مقاله به سهم ریاضیات یونانی در شکل‌گیری و تکامل آنالیز ریاضی می‌پردازد. عناصر مهم در این بررسی عبارت‌اند از تحلیل و ترکیب، عدد و کمیت، و نسبت و تناسب که همگی ریشه در تفکر فلسفی کهن یونان و کتاب *اصول* اقلیدس دارند. ــ م.

۱ نقش ریاضی‌دانان یونانی در شکل‌گیری آنالیز

۱.۱ موضوع برخی مسئله‌های اصلی آنالیز ریاضی در قالب هندسی نیز در ریاضیات یونانی مطرح شده‌اند. یونانیان علاوه‌بر مسئلهٔ ترسیم مماس بر منحنی‌ها به تعریف و محاسبهٔ طول، مساحت، حجم، و مرکز ثقل نیز پرداخته‌اند. در این موارد بوده که ایده‌های مربوط به بی‌نهایت و پارادوکس‌های مربوط به آن‌ها (مثلاً، در کارهای زنون و ارسطو) پدیدار شده است. بااین‌همه، به ارتباط این مسئله‌ها تا عصر مدرن پی برده نشده بود؛ بخش ۴.۲ از [۳] را ببینید.

اگر از دیدگاه امروزی به سیر تکامل آنالیز ریاضی نگاه کنیم، متوجه چهار خاستگاه می‌شویم: عملیات با حروف («جبر») (ویئت، دکارت)؛ هندسهٔ تحلیلی (فرما، دکارت)؛ ایدهٔ تابع، که مفهوم

عبارات و کلمات کلیدی: ریاضیات یونانی، آنالیز ریاضی، تحلیل و ترکیب، عدد و کمیت، نسبت به هم اندازه‌پذیر

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۱

* Thiele, Rüdiger, Antiquity, in *A History of Analysis*, H. N. Jahnke, ed., Hist. Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 1-14.

ترجمهٔ این مقاله به دعوت هیئت تحریریه به قلم ارشک حمیدی انجام گرفته است. ارشک حمیدی متولد ۱۳۵۲ در تهران است و دوران کارشناسی (۱۳۷۰–۱۳۷۶) را در دانشگاه صنعتی شریف و کارشناسی ارشد (۱۳۷۶–۱۳۷۹) را در دانشگاه علم و صنعت ایران گذرانده است. او علاوه‌بر تدریس در مدارس تهران از سال ۱۳۷۹، به‌طور حرفه‌ای از سال ۱۳۷۴ تاکنون به ترجمه و ویرایش متون ریاضی در انتشارات فاطمی و نشر الگو مشغول بوده است. ــ و.

doi: 10.30504/mct.2024.1457.2023

بنیادی آنالیز ریاضی است (اورم[1]، یوهان برنولی، اویلر) و میدان عددهای حقیقی (بولتسانو، ددکیند، کانتور). این خاستگاه‌ها را به‌صراحت نمی‌توان در ریاضیات یونانی سراغ گرفت. در عوضِ دستورهای معروفی که در جبر استفاده می‌کنیم از تناسب‌ها و کمیّت‌ها (مقادیر)[2] به‌جای متغیرها استفاده می‌کرده‌اند، و نقش میدان اعداد حقیقی را نظریهٔ تناسب‌های ائودوکسوس ایفا می‌کرده است. البته، می‌توانیم دیدگاه‌های آشنا و مدرن را با دیدگاه یونانیان تطبیق دهیم، مثلاً، این‌طور که وترهای دایره را که بطلیموس بر حسب دایرهٔ متناظرش بررسی کرده همچون تابع‌های (مثلثاتی) به‌صورت جدول تعبیر کنیم. البته، این کار مطابق دیدگاه یونانیان در این موضوع نیست [۲۴، ۲۷]. گاهی مقایسه‌هایی از این دست، میان موضوعاتی که تطابق زمانی ندارند، به روشن شدن حقایق آن‌ها کمک می‌کنند، هرچند که به فهم تاریخچهٔ آن‌ها کمکی نمی‌کنند.

۲.۱ دربارهٔ تحلیل و ترکیب یونانیان اساساً جمع کردن کمیت‌ها به یک مجموع را ترکیب (σύνθεσισ) و خُردکردن یک مجموع را تجزیه/تحلیل (ἀνάλυσισ)[3] می‌نامیدند. مثالی روشن از کاربردهای روزمرهٔ این دو کلمه جمع‌کردن مقادیری از پول به یک مجموع و در پی آن تقسیم این مجموع به مضاربی از مقداری از پول است. دو کلمهٔ «تجزیه/تحلیل و ترکیب» ابتدا در گفتار معمولی استفاده می‌شدند و کم‌کم با همین معنای متضادشان بخشی از زبان ریاضی شدند. در آنجا، تحلیل و ترکیب به دو بخش اصلی ساختار اثبات‌های یونانیان اشاره می‌کنند، که بالاخص در مبحث ترسیم‌های هندسی تکامل یافتند. تحلیلْ تقسیمِ مسئلهٔ داده‌شده با استفاده از گام‌های صحیح و منطقی است تا به چیزی که از قبل می‌دانیم درست است برسیم یا به تناقض (که در این حالت معلوم می‌شود مسئله حل‌نشدنی است). بعداز آن به روش ترکیب و وارونه کردن روند تحلیلْ اثبات کامل می‌شود و حکم را از آنچه در روش تحلیل فهمیدیم درست است نتیجه می‌گیریم.

یونانیان بجد میان کشف یا ابداع مطالب ریاضی (به لاتینی inventio) و اثبات اینکه حکم داده‌شده درست است (به لاتینی verificatio) تفاوت قائل بودند. براین‌اساس، از انواع مختلفی از تحلیل و ترکیب برای کشف و اثبات استفاده می‌کردند. پاپوس [۲۰، کتاب VII] روش تحلیل

۳. برای کلمهٔ «analysis» در فارسی می‌توان معادل‌های «تجزیه»، «تجزیه و تحلیل»، «تحلیل و بررسی»، «تحلیل»، «آنالیز»» (در اشاره به شاخه‌هایی از علوم ریاضی مثل «آنالیز ریاضی» [mathematical analysis]) را قرار داد. در اینجا متناسب با منظور نویسنده معادل مناسب قرار داده شده است. ــ و.

1. Oresme 2. magnitudes (quantities)

مربوط به جست‌وجو را معطوف به حل مسئله[۱] نامیده که مقابل نظری[۲] است که روش تحلیلی است که مربوط به اثبات نهایی است. فرانسوا ویئت هم در روش خودش با نام منطق انواع[۳] [۲۸، (1591) Isagoge] به‌طور مشابه از جست‌وجو[۴] و به دست‌دادن[۵] نوشته است. این دو کلمه از ریشهٔ ζήτησισ (یونانیِ search) و πόρισμα (یونانیِ provide) هستند. تربیع سهمی به دست ارشمیدس نمونه‌ای از این تمایز را نشانمان می‌دهد: تحلیل معطوف به حل مسئله[۶] مساحت قطعهٔ سهموی را مشخص می‌کند، و تحلیل نظری[۷] نشان می‌دهد که این مقدار درست است. به‌این‌ترتیب، ترکیبِ یک تحلیل معطوف به حل مسئله را می‌توان به‌خوبی یک تحلیل نظری دانست.

به گفتهٔ پاپوس، اقلیدس روش تحلیل و ترکیب را ابداع کرده است. بااین‌حال اصطلاح تخصصی «تحلیل» بخشی از تکنیک اثبات در منطق ارسطو است، که در آن این روش برای توصیف فرایند بازگشت از حکم نهایی به صورت‌هایی معمول به کار می‌رود. اصطلاح تحلیل به تعبیر تحلیل نظریدد(که، همان‌طورکه قبلاً خاطرنشان کردیم، برای یافتن اثبات به کار می‌رفته است) جلوتر از معنای تحلیل معطوف به حل مسئلهٔ آن (که برای حل‌کردن مسئله به کار می‌رفته) به کار برده شده است. این روش جست‌وجو برای حل را در آغاز اباغوجی[۸] (ἀπαγωγή، برگرداندن) می‌نامیدند و صرفاً بعدها، به‌دلیل شباهتش با تحلیل نظری آن را تحلیل معطوف به حل مسئله خواندند. پس‌از این، اثبات اباغوجی[۹] را اثبات غیرمستقیم تلقی کردند. اصطلاح ترکیب، که در حساب مرسوم بود، دست آخر به معنی تحلیلِ معکوس در هر دو حالت دانسته شد؛ [۱۵] و [۱۶، فصل ۸] را ببینید.

در دوران مدرن، تحلیل معطوف به حل مسئله یونانیان همان روش تحلیلی[۱۰] شد. فرانسوا ویئت نظریهٔ معادلاتش را در کتاب *In Artem Analyticam Isagoge* (مدخل فنون تحلیل) به رشتهٔ تحریر درآورد. به‌این‌ترتیب در قرن هفدهم اصطلاح analytica [فن تحلیل] دقیقاً به معنی کلمهٔ جبر به کار می‌رفته، که این خودش تحلیل حسابی، در مقابل تحلیل هندسی، بوده است. حتی در قرن هجدهم گاهی آنالیز تحلیلی به معنی کاربرد محاسبات جبری در هندسه به کار می‌رفته است. البته از آغاز قرن هجدهم اصطلاح آنالیز کم‌کم به معنای مدرنش درآمد. مثلاً، کریستیان وُلف[۱۱] معمولاً حساب دیفرانسیل را در زمرهٔ آنالیز می‌دانسته است [۲۹]. یک قرن بعدتر، گئورگ سیمون کِلوگِل[۱۲]

---

۱. problematic؛ بعضی آن را «امکانی» نیز ترجمه کرده‌اند. اساساً تحلیلی است که برای حل مسئله‌های ترسیمی در هندسه به کار می‌رفته است. ــ م. ۲. theoretical؛ منظور تحلیلی است که در اثبات قضیه‌ها در هندسه به کار می‌رفته است. ــ م.

3. logistica speciosa 4. zetetic 5. poristic 6. problematical analysis 7. theoretical analysis
8. apagogy 9. apagogical 10. analytic method 11. Christian Wolff 12. Georg Simon Klügel

همهٔ این‌ها را در کتاب پراستفاده‌اش (فرهنگ ریاضی) این‌طور آورد:

> مراد قدما از آنالیز، هندسه بوده است و درنتیجه در آن فقط از ابزار هندسی استفاده می‌کردند؛ مراد متأخرین از آنالیز همهٔ موارد اندازه‌پذیر است و از حساب معمول برای اینکه ارتباط میان اندازه‌ها را با تساوی‌ها نشان دهند استفاده می‌کنند [۱۴، ص ۸۶].

۳.۱ تفسیر منابعی که شناخت ما از ریاضیات یونانی را موجب می‌شوند دوسه دوجین اثرند که منعکس‌کنندهٔ بخشی کوچک از دانش یونانی هستند، و اکثریت قریب به اتفاق آن‌ها دست اوّل نیستند. قدیمی‌ترین متون یونانی، سوای چند پاپیروس قدیمی‌تر، مربوط به قرن نهم میلادی‌اند (که نسخه‌هایی دست‌نویس از آثار اقلیدس مربوط به سال ۸۸۸ میلادی‌اند)، یعنی اینکه نوشته‌های قرون وسطایی به زمانهٔ ما نزدیک‌ترند تا به زمانهٔ نویسندگان‌شان در دوران اوج ریاضیات یونانی (مانند اقلیدس و ارشمیدس). علاوه‌براین، این نوشته‌ها صرفاً رونویسی از نسخه‌هایی رونوشته شده‌اند، که اغلب به‌صورت ترجمه یا دست‌کاری شده‌اند، و معمولاً اشتباه دارند. علی‌رغم این مشکلات از این‌ها چیزهایی عایدمان می‌شود و می‌توانیم روند تکامل ریاضیات را به کمک بررسی‌های نسخه‌شناسی و تصحیح‌های انتقادی، که نحوهٔ رونویسی را بررسی می‌کنند، شرح دهیم. خیلی موارد مربوط به تقدم و تأخر است. مثلاً، با اینکه تامس هیث «روشِ» ارشمیدس را در ابتدای آثار او و نوشتهٔ مهم او دربارهٔ دایره را در انتهای آن آورده است، مورخان ریاضیات نظیر ویلبر کِنور[۱] اخیراً قائل به عکس این ترتیب شده‌اند [۶]؛ استدلال‌های [۲۲] را هم ببینید.

یکی دیگر از مشکلات تفسیر ریاضیات یونانی ناشی از طبع هندسی–کلامی آن است. مسلماً، ازنظر منطقی، فرقی نمی‌کند که اکتشافی ریاضی را با کلام بیان کنیم یا با فرمول. بااین‌حال، وقتی که به‌صورت کلامیِ اقلیدس از قضیهٔ تفاضل توجه می‌کنیم، تفاوتی روان‌شناختی وجود دارد، که به‌دلیل مشکلات ناشی از صورت‌بندی رابطهٔ میان کمیت‌ها خیلی بدترکیب شده است:

> دو کمیت نامتساوی داده شده‌اند، اگر از کمیت بزرگ‌تر کمیتی بزرگ‌تر از نصف آن را کم کنیم، و از باقی‌مانده کمیتی بزرگ‌تر از نصف آن را کم کنیم و اگر این عمل را مرتباً تکرار کنیم، سرانجام کمیتی باقی می‌ماند که از کمیت کوچک‌تری که در آغاز داده‌شده کمتر است [۱۱، اصول، مقالهٔ دهم، (۱)]؛

1. Wilbur Knorr

یا این قضیه، به‌عنوان مثالی دیگر، که صورت تقسیمی اصل موضوع اندازه‌گیری خوانده می‌شود:

> کمیت‌هایی را می‌گویند نسبتی با هم دارند که درصورت چند برابر شدن بتوانند از یکدیگر زیادتر شوند [۱۱، اصول، مقالهٔ پنجم، تعریف (۴)]؛

([۱۰، ۱۷] را ببینید) یا وقتی که از عبارت «متداوّلِ» مدرنِ زیر (یا صورت تحلیلی آن) استفاده می‌کنیم:

> هر کمیت مانند a را می‌توان هر قدر که بخواهیم کوچک کرد (یعنی با انتخاب مناسب عدد صحیح n کمیت $a/۲n$ را می‌توان از هر کمیتی مانند b کوچک‌تر کرد؛ بنابراین $a/۲n < b$).

ما هم مانند هیث[1] توصیفی مدرن از متون یونانی عرضه می‌کنیم، که به نظر می‌رسد برای چهارچوب‌های مورد نظرمان مناسب‌ترند (برای اطلاع از اصطلاحات به ویراست هیث از آثار ارشمیدس و اقلیدس [۱، ۱۱]، به ترتیب فصل‌های هشتم و نهم، مراجعه کنید).

۲ مفهوم عدد و کمیت نزد یونانیان

۱.۲ عدد به مثابهٔ موجودی ریاضی شمردن از کارهای اوّلیهٔ بشر است و در همهٔ شاخه‌های ریاضی مورد نیاز است. گوستا میتاگ‌ـلفلر[2] ریاضی‌دان سوئدی، جایی گفته است که عدد سرچشمهٔ تفکر است (Talet är tänkandets början ...)، و این گفته روی دودکش مؤسسهٔ ریاضی خودش حک شده است. امّا در ریاضیات یونانی عدد نه فقط وسیله‌ای برای اندیشیدن، بلکه موضوعی برای تفکر هم بوده است، دلیلش هم تمایز ظریفی است که بین عددهای زوج و فرد قائل بودند (فیثاغورس ۵۰۰ سال پیش‌از میلاد مسیح، آن‌طور که اپیکارموسِ شاعر مستند کرده است). بنابراین می‌توان حکم‌هایی دربارهٔ عددها مطرح کرد، و مسئلهٔ تعریف عدد پیش می‌آید.

قدیمی‌ترین ماتیمای (μάθημα، آموزش، تعلیم) یونانی، نظریهٔ سادهٔ ریاضی دربارهٔ عددهای زوج و فرد ــ به‌شکلِ تجدیدنظر شدهٔ آن ــ موضوع مقالهٔ نهم اصول اقلیدس است، و همین تمایز ساده منجر به نتیجه‌های فوق‌العاده‌ای نظیر شرط لازم برای تشخیص عددهای کامل زوج می‌شود ([۱۱، اصول، مقالهٔ نهم، ۳۶]، [۴، ص ۱۲۵–۱۴۵]). حتی امروزه هم این مسئله در مورد عددهای کاملِ فرد حل نشده است. چیزی که به بحث ما مربوط می‌شود این است که از این‌جور تمایز

1. Heath 2. Gösta Mittag-Leffler

قائل شدن در اثبات اقلیدس برای اینکه ضلع و قطر مربع اندازهٔ مشترک ندارند استفاده شده است؛ یعنی، نسبت به هم \اندازه‌ناپذیرند[1] [۱۱، اصول، مقالهٔ دهم، 115a]. در اثبات اقلیدس از استدلالی مبتنی‌بر زوجیت استفاده می‌شود که منجر به تناقض می‌شود. فرض می‌کنیم که برای ضلع و قطرْ واحد اندازه‌گیری مشترکی وجود داشته باشد. در این صورت می‌توانیم به تساوی $m^۲ = ۲n^۲$ برای ضریب‌های اندازه‌گیری برسیم که نسبت به هم اوّل‌اند و به این تناقض دست یابیم که n فرد و درعین‌حال زوج است.

معلوم نیست که خط‌های راست نسبت به هم اندازه‌ناپذیر چگونه کشف شده‌اند. کاملاً محتمل است که فیثاغورسی‌ها پدیدهٔ نسبت به هم اندازه‌ناپذیری را در این مورد ساده کشف نکرده باشند، بلکه در تئوری موسیقی یا در وارسی کردن نشان گروه‌شان، که ستارهٔ پنج‌پر بود، به آن رسیده باشند، یعنی شکلی که از قطرهای پنج‌ضلعی درست شده است، که در آن ضلع و قطر اندازهٔ مشترک ندارند ([۱۳]، [۵، ص ۲۷۱-۳۰۱]).

۲.۲ نوع عددها

ریاضی‌دانان یونانی عدد را فقط عدد طبیعی می‌دانستند. از نظر اقلیدس «عدد کثرتی است مرکب از واحدها» [۱۱، اصول، مقالهٔ هفتم، تعریف (۲)]، که در اینجا «واحد آن است که به کمک آن هریک از چیزهای موجود را یکی می‌نامیم» [۱۱، اصول، مقالهٔ هفتم، تعریف (۱)] خودِ واحد (یا یک) را عدد به شمار نمی‌آورده‌اند [۲، متافیزیک، 1088،N]. در اینجا سنت قدیمی شمردن هنوز هم به چشم می‌آید. یک موقعی، شمردن با جمع کردن اشیای یک‌جور (مثل درخت، برگ، ستاره، ...) کنار هم و سپس مشخص کردن تکثّر آن‌ها با یک عدد شروع شد. به‌تعبیر مدرن، این عددها ضریب «عضو واحد» در مجموعه هستند. درنتیجهٔ انتزاع‌گرایی و صورت‌گرایی این مفهوم رنگ‌ولعابش را از دست داد، البته «یک» (همان ۱) پیش‌از دوران مدرن عددی طبیعی به حساب نمی‌آمده است [۲۵]. این مفهوم اوّلیه هنوز هم در فیزیک به همین صورت است، زیرا ضریب هیچ اندازهٔ فیزیکی‌ای معنایی صرفِ عدد ندارد؛ معنایش فقط اندازهٔ نسبی در یک مقیاس اندازه‌گیری است.

امروزه اگر موجوداتی ریاضی از برخی قاعده‌های محاسبات نظیر موارد مربوط به جمع و ضرب تبعیت کنند، آن‌ها را در زمرهٔ اعداد به حساب می‌آوریم. از این راه ویژگی‌های مشترک موجودات مختلف را که حتی قاعده‌هایشان فرق دارد درک می‌کنیم. مثالی از این پدیده تعریف جمع برای عددهای طبیعی و کسرهاست که با هم فرق دارند. این دیدگاهِ یکی‌سازی در ریاضیات یونانی به

1. incommensurable

چشم نمی‌اید. در آثار اقلیدس **سه نوع عدد** مختلف پیدا می‌کنیم: عددهای طبیعی و دو جور نسبت، یکی نسبت عددهای طبیعی («کسرهای مثبت») ([۱۱، اصول، مقالهٔ هفتم]) و دیگری نسبت کمیت‌ها («عددهای حقیقی مثبت») ([۱۱، اصول، مقالهٔ پنجم]). اقلیدس به این سه نوع کمیت از طرق گوناگون پرداخته است هرچند که تا حدی هم متوجهٔ ویژگی‌های مشترک این سه نوع کمیت شده است. بااین‌همه، هیچگاه نسبت ۲:۱ را با عدد طبیعی ۲ یکی نگرفته است.

۳.۲ نسبت عددها(ی طبیعی) («کسرهای مثبت») اقلیدس نظریهٔ نسبت‌های عددها(ی طبیعی) را به‌عنوان نظریهٔ مقدماتی اعداد تدوین کرد. در مقالهٔ هفتم اصول مفاهیم «بخشی از عدد یا مضرب، عددهای فرد و زوج، عددهای اوّل و مرکب»، و چیزهایی از این دست را می‌بینیم؛ بااین‌حال، نسبت دو عدد طبیعی مفهومی بنیادی است که به آن پرداخته نشده است.

تعریفی قدیمی‌تر از نسبت عددهای طبیعی در کتاب نیکوماخوس ضبط شده است [۱۹، Arithmetic II, 21Y 1886]: «نسبت، رابطهٔ دو چیز نسبت به یکدیگر است»، هرچند که در اینجا مفهوم «رابطه» بی‌توضیح مانده است. البته اقلیدس در مقالهٔ پنجم اصول این‌طور تعریف کرده است: « نسبت، نوعی رابطه ازحیث اندازه بین دو کمیت از یک نوع است» (تعریف (۳)) و «کمیت‌هایی را می‌گویند نسبتی با هم دارند که در صورت چند برابرشدن بتوانند از یکدیگر زیادتر شوند» (تعریف (۴)). در این جمله‌ها مفهوم رابطه مبتنی‌بر معنی زیادترشدن است (یعنی، مبتنی‌بر اصول موضوع اندازه‌گیری؛ ۵.۲.۱ را ببینید.). تعریف (۲۰) از مقالهٔ هفتم به‌طور ضمنی اشاره دارد به اینکه «عددها [چهار عدد طبیعی a، b، c، و d] وقتی متناسب‌اند

$$a : b = c : d \tag{۱}$$

که اوّلی [a] همان مضرب، یا همان جزء، یا همان اجزایی از دومی [b] باشد که سومی [c] از چهارمی [d].» این تعریف اصول پایهٔ محاسبات با کمیت‌ها را در اختیارمان می‌گذارد. با رویکردی امروزی می‌توانیم این تعریف اقلیدس را بهتر بفهمیم، به این ترتیب که دو عدد نسبت به هم اوّلِ m و n را طوری در نظر بگیریم که

$$a = m\left(\frac{b}{n}\right), \qquad c = n\left(\frac{d}{n}\right). \tag{۲}$$

به ازای $n = ۱$ مضرب، به ازای $m = ۱$ جزء، و به ازای m و n بزرگ‌تر از ۱ مجموعهٔ اجزا را داریم. می‌توان این تعریف را به کمک روش تفاضل معکوس (ἀνθυφαίρεσισ[1] و ἀνταναίρεσισ[2]) به حالت نسبت به هم اندازه‌ناپذیر تعمیم دهیم.

برای اینکه کسرها را چون نسبت عددها بدانیم، ابتدا به تعریفی برای برابری نیاز داریم. به زبان امروزی کسرهای مسلسل، تعریف برای نسبت‌ها این است که a/b و c/d مولد یک کسر مسلسل باشند. بااین‌همه، برای سهولت در محاسبات، قضیه‌هایی لازم داریم که تبدیل کسرها را ممکن می‌کنند (مثلاً مانند قضیه‌های ۱۱–۲۴ مقالهٔ هفتم اصول). به زبان تناسب‌ها، قضیهٔ ۱۳ می‌گوید که اگر چهار عدد متناسب باشند، با ابدال نسبت‌ها نیز متناسب‌اند؛ قضیهٔ ۱۷ می‌گوید که اگر اجزای نسبتی را با مضرب‌های یکسانی از آن‌ها جایگزین کنیم، خود نسبت تغییر نمی‌کند (ساده کردن کسر). اقلیدس عملی حسابی برای نسبت عددها تعریف می‌کند، نسبت مؤلف: $a : c$ مؤلفِ $a : b$ و $b : c$ است (اصول، مقالهٔ هشتم، (۵)، و قبل آن در مقالهٔ ششم، (۲۳)، برای متوازی‌الاضلاع‌ها). به زبان نسبت‌ها، ضرب دو نسبت (کسر) یعنی تشکیل نسبت مؤلف آن‌ها. یعنی، ابتدا نسبت‌ها را به شکل گفته‌شده در می‌آوریم، بعد، نسبت مؤلف به‌طور یکتا طبق آنچه اقلیدس نشان داده مشخص می‌شود (اصول، مقالهٔ هفتم، [۱۸، ص ۸۶]). توجه کنید که در گام دوم صورتی مناسب برای نسبت دوم مسلّم گرفته شده است؛ یعنی، وجود جزء چهارم تناسب بدیهی فرض‌شده، یا به‌تعبیری‌دیگر پیوستگی میدان کمیت‌های از این دست فرض شده است. یونانیان ویژگی‌های پیوستگی را به‌طور ضمنی فرض‌شده می‌دانسته‌اند (بخش ۴.۲ را ببینید). اقلیدس در مقالهٔ ششم، (۲۳)، به دست آوردن نسبت مؤلف نسبت خط‌های راست را توضیح می‌دهد.

مفهوم نسبت مؤلف سخن از تئوری موسیقی فیثاغورسی را پیش می‌کشد، که شاخه‌ای از علوم اربعه بوده است و بخش آخر علوم سبعه. یکی از کشفیات مهم فیثاغورسیان رسیدن به درک طبیعت ناطق هارمونی بوده است. آن‌ها متوجه شدند که می‌توانند هارمونی را بی‌آنکه واقعاً صدای اشیاء را بشنوند حدس بزنند و حساب کنند. یونانیان عمیقاً از این کشف تحت تأثیر قرار گرفتند، و تئوری موسیقی یا، به زبان ریاضی، نظریهٔ نسبت‌ها، الگویی برای درک آن‌ها از طبیعت شد؛ یعنی، مدلی ریاضی برای پرده‌گشایی از رازها و پرداختن به آن به‌صورت انتزاعی (عددها) شد (فیلولائوس). به‌طور دقیق‌تر، فیثاغورسیان کشف کردند که فواصل (فاصلهٔ بین دو نُت) را می‌توان تنها با عددهای طبیعی مشخص کرد. آن‌ها بستگی «تابعی» بسامد تار مرتعش به طولش و ویژگی «لگاریتمی» آن

1. anthyphairesis 2. antanairesis

را دریافتند؛ یعنی، جمع فواصل متناظر با ضرب بسامدهاست. اُکتاو، فاصلهٔ پنجم و فاصلهٔ چهارم با قسمت‌های مرتعش تار که به نسبت ۲ : ۱، ۳ : ۲، و ۴ : ۳ هستند تولید می‌شوند. جمع فاصله‌های چهارم و پنجم اُکتاو (هشتم) را به وجود می‌آورد؛ ضرب نسبت‌های ۳ : ۲ و ۴ : ۳ نسبت مؤلف ۴ : ۲ را ایجاد می‌کند که به‌صورت ساده‌تر ۲ : ۱ است که اُکتاو را مشخص می‌کند. از نظر یونانیان، و بالاتر از همه در نظر افلاطونیان، این ملاحظات فراتر از مطالعات واقعی موسیقیایی تارهای مرتعش بوده و صداها را به سطحی از تجرد ریاضی رساند که به کمک نظریهٔ نسبت‌ها نمایش داده می‌شوند.

۴.۲ مفهوم کمیت چهار مقاله از هندسهٔ مسطحهٔ (اصول، مقاله‌های ۱-۴) با مقالهٔ پنجم پی گرفته شده که مفهوم نسبت و تناسب در آن موضوعی محوری است. اقلیدس در این مقاله نظریه‌ای را آورده که ائودوکسوس بسط داده است. هیچ تعریفی از مفهوم کمیت (به یونانی μέγεθοσ)[۱] وجود ندارد، زیرا هیچ مفهومی مافوق این مفهوم بنیادی وجود ندارد. بااین‌همه، اقلیدس در سراسر اصول به کمیت‌ها پرداخته است؛ به مفهوم کلی کمیت در مقالهٔ پنجم، تعریف (۳)، همین‌طور در مقالهٔ ششم و چند بار دیگر در مقاله‌های بعدی اشاره شده است. کمیت‌ها به‌طور کلی با این ویژگی که می‌توان آن‌ها را زیاد یا کم کرد مشخص شده‌اند. مفهوم کمیت را می‌توان دو گونه تعبیر کرد: موجود ریاضی یک جور کمیت (وجود ذی‌ابعاد) است و چنین موجودی را می‌توان اندازه گرفت و نتیجهٔ این اندازه‌گیری یک جور کمیت است (اندازه‌گیری).

یونانیان تمایز اساسی میان کمیت‌های عددی (عددهای طبیعی) و کمیت‌های هندسی (کمیت‌های پیوسته) قائل بودند، چراکه در حسابْ واحد عددی (عدد ۱) را نمی‌توان تقسیم کرد، امّا هرجور کمیت هندسی از جمله واحد نظیرش را می‌توان به‌طور نامحدود تقسیم کرد.[۲] معلوم می‌شود که کمیت‌های هم‌نوع را می‌توان مقایسه کرد، به ترتیب چید، همین‌طور جمع کرد، و، به‌ویژه، ضرب کرد. خط‌ها، صفحه‌ها، اجسام فضایی، یا زاویه‌ها کمیت‌های هندسی پیوسته‌اند؛ زمان، فضا، و وزن دیگر کمیت‌های پیوسته‌اند. چنین کمیت‌هایی دستگاه، به‌اصطلاح مدرن، ساختار جبری، تشکیل می‌دهند، که البته در ریاضیات یونانی به این موضوع اشاره نشده است.

اشاره کردیم که یونانیان از سدهٔ پنجم پیش‌از میلاد مسیح می‌دانستند برخی «کمیت‌ها (ی هندسی) نسبتی به هم دارند که هیچ عددی به عدد دیگر ندارد» (اصول، مقالهٔ دهم، (۷)). در تاریخ ریاضیات

---

۱. در ریاضیات یونانی اصطلاح فنی برای کمیتْ کلمهٔ «مِگِتوس» [megethos] است. ۲. در حساب و کتاب تجاری (به یونانی λογιστική [لوجیستیک]، فن محاسبه) اشیای شمرده‌شده در حالت کلی تقسیم‌پذیرند؛ البته، شخص، به‌عنوان واحد، چنین نیست.

کشف کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر را نخستین بحران در مبانی ریاضیات تلقی می‌کنند. اگر نسبت کمیت‌ها نسبتی از عددها نباشد، پس چیست؟ در آغاز یونانیان می‌گفتند که هندسه کلی‌تر از حساب است، زیرا نظیر هر نسبت عددی نسبتی هندسی وجود دارد، نه برعکس (مثال نقض: نسبت قطر به ضلع مربع). توجه کنید که مشکلْ اشیاء نیستند، بلکه نسبت اشیاء است. چون نسبت‌ها در نظریهٔ تناسب‌ها مهم‌اند، معلوم می‌شود که چرا یونانیان به این موضوع اهمیت می‌داده‌اند و چرا به‌جای نظریهٔ جبری معادلات آنچه را که برخی تاریخ‌دانان «جبر هندسی» می‌نامند بسط داده‌اند.

تلاش‌های متعددی برای برون‌رفت از وضعیت دشوار مربوط به نسبت به هم اندازه‌ناپذیری صورت گرفته است، مثل روش تفاضل معکوس (که بعداً به آن اشاره می‌کنیم). ریدل بر این باور است که ائودوکسوس ملهم از اعتقادش به نمایش اجرام سماوی به‌صورت کره‌های هم‌مرکز بوده است [۲۳]. کِنور این نظریه را رد می‌کند و معتقد است که نظریه‌ای که در مقالهٔ پنجم کتاب اصول عرضه شده از سوی ائودکسوس تکوین نیافته بوده است. کِنور معتقد است که ائودوکسوس نظریهٔ دیگری داشته که شبیه نظریهٔ مقالهٔ هفتم، ۱۰، است، که البته در آن به‌جای عددها کمیت‌ها بوده‌اند [۱۷]. هرچه که باشد، به نظر می‌رسد راه‌حل ائودوکسوسِ کُنیدوسی بهترین است، پس آن را با جزئیات ببیشتری بررسی می‌کنیم.

ابتدا چند کلمه‌ای دربارهٔ آنچه به نخستین بحران در مبانی مشهور است بگوییم. وجود کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر با اعتقاد فیثاغورسیان به دنیایی که تنها با عددهای طبیعی وصف می‌شد نمی‌خواند. البته، این کشف ضربه‌ای سهمناک به هر مکتب فلسفی معتقد به خردمندانگی جهان مادی بود. بااین‌همه هیچ نشانه‌ای از لرزه‌هایی عمیق‌تر در فلسفهٔ یونانی در پی کشف نسبت به هم اندازه‌ناپذیری وجود ندارد. در نظریهٔ قدیمی تناسب‌ها نسبت به هم اندازه‌پذیری نوعی ضرورت است؛ بااین‌حال، در ریاضیات یونانی لزومی نداشته که در بررسی‌های هندسی سروکارمان به نسبت‌های مشترک کمیت‌های مورد بررسی بیفتد. ارسطو گفته که هر هندسه‌دانی که اثبات نسبت به هم اندازه‌ناپذیری قطر و ضلع مربع را فهمید مجبور بود تصدیق کند که اگر هر دو کمیت نسبت به هم اندازه‌پذیر بودند اوضاع خیلی شگفت‌آورتر می‌شد. [۲، متافیزیک، 983 A 15؛ همچنین 76 B 9]. حتی در آثار افلاطون، آتنی در کتاب قوانین بی‌هیچ تعارفی گفته فقط یک یونانی که سوادش در حد خوکان است همهٔ کمیت‌های اندازه‌پذیر را نسبت به هم اندازه‌پذیر می‌داند [۲۱، قوانین، 819 D-820 C]. افلاطون به پیرمردان توصیه می‌کند که به‌جای بازی روی صفحه به‌قصد وقت‌گذرانی به نسبت به هم اندازه‌ناپذیری بیشتر بیندیشند.

اثبات وجود کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر، یا به‌عبارت‌دیگر، اینکه در چنین مواردی هیچ اندازهٔ مشترکی وجود ندارد، روی انتزاعی ریاضیات یونانی را نشان می‌دهد. تمدن‌های پیشایونانی به‌دلیل جهت‌گیری شهودیشان نمی‌توانستند چنین چیزی را بگویند. در این تمدن‌ها محدودیت‌های ذاتی هرجور اندازه‌گیری، مجالی برای طرح سؤال در باب وجود واحدی برای اندازه‌گیری نمی‌گذاشت. اثبات عدم وجود هرجور موجود ریاضی فقط به کمک منطق ممکن بوده و به هیچ وجه کار روش‌های تجربی نبوده است. اینجاست که فلسفهٔ ایلیایی که پارمندیس بیش از دیگران در سدهٔ پنجم پیش‌از میلاد مسیح در تکامل آن سهیم بوده نقشی بسیار مهم در تحول نظریهٔ اثبات نزد یونانیان داشته است (به‌ویژه در اثبات غیرمستقیم و برهان خلف). به یاد داشته باشید که هر جور اثبات با روش به تناقض رسیدن با این چالش آغاز می‌شود که موجودی ریاضی را که نیست (وجود ندارد) در نظر بگیریم، که به تعبیری ازنظر منطقی بی‌معناست.

۵.۲ نسبت کمیت‌ها («عددهای حقیقی») اقلیدس نسبت کمیت‌های پیوسته را جوری تعریف کرده است (اصول، مقالهٔ پنجم، تعریف (۳)) که با تعریف نسبت کمیت‌های گسسته، یعنی با نسبت عددها، فرق دارد (اصول، مقالهٔ هفتم). بعدِ این تعریف (تعریف (۳)) توضیحی (تعریف (۴)) آمده است که کورسویی بیش نیست.

۳) نسبت نوعی رابطه ازحیث اندازه بین دو کمیت از یک نوع است.

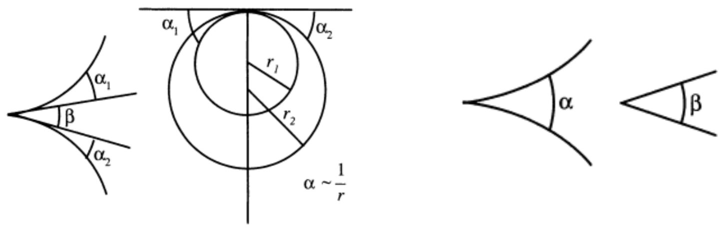
۴) کمیت‌هایی را می‌گویند نسبتی با هم دارند که درصورت چندبرابر شدن بتوانند از یکدیگر زیادتر شوند.

تعریف (۴) اندازه‌پذیری را توصیف می‌کند: فقط وقتی کمیتی نسبت به کمیتی دیگر (از همان نوع) اندازه‌پذیر است که با اضافه کردن کمیت دوم («قطعهٔ اندازه‌گیری») به دفعات کافی به خودش از کمیت اوّل زیادتر شود. واضح است که عددهای طبیعی این ویژگی را دارند. در مورد کسرها (یعنی نسبت‌های عددهای طبیعی) هم به‌سادگی می‌توان با تبدیل آن‌ها به کسرهایی با مخرج مشترک این موضوع را نشان داد، زیرا در این وضعیت در صورتْ فقط عددهای طبیعی داریم، که قبلاً حکم را برای آن‌ها ثابت کرده‌ایم. بااین‌حال، در مورد عددهای حقیقی (نسبت کمیت‌ها) باید این ویژگی را به‌صورت اصل موضوعی (فرض پذیرفته‌شده) برای اندازه‌پذیری به شمار آوریم. اشتولتس[۱] این روشن‌بینی ائودوکسوس برای لزوم اندازه‌پذیری نسبتِ کمیت‌های هندسی را اصل ارشمیدسی نامیده،

1. Stolz

هرچند که به‌لحاظ تاریخی درستش این است که آن را اصل ائودوکسوسی بخوانیم. این مطالبه برای دستگاه‌های غیرارشمیدسی از کمیت‌ها لازم نیست. به‌عبارت‌دیگر، در هر دستگاه ارشمیدسی از کمیت‌های از یک نوع، هیچ کمیت aای نسبت به کمیت دیگری از این دستگاه مانند b آن‌قدر کوچک نیست که به ازای هر عدد طبیعی مانند n، na از b کوچک‌تر باشد ($na < b$).

مثال زیر که یونانیان از آن آگاه بوده‌اند دستگاهی غیرارشمیدسی از کمیت‌ها را نشان می‌دهد: زاویه‌های شیپوری (شکل ۱).



(ب) (الف)

شکل ۱. مفهوم زاویه در اصول اقلیدس

(الف) زاویه‌های مستوی و راست‌خط (به‌ترتیب برابر α و β) (اصول، مقالهٔ اوّل، (۸) و (۹)).

(ب) زاویه‌های مستوی خاص: زاویه‌های شیپوری

زاویه‌های شیپوری، زاویه‌های «مانده» بین مماس بر دایره و محیط دایره هستند. می‌توان آن‌ها را با عکس شعاع دایره اندازه گرفت. چون چنین زاویه‌هایی را می‌توان با یک خط تقسیم کرد، به‌نظر یک دستگاه ارشمیدسی مرتب می‌آیند، امّا نسبتی با زاویه‌های مستوی ندارند. کمیت‌هایی که نسبتی با یکدیگر دارند، با ضرب کردن از یکدیگر زیادتر می‌شوند و به‌سادگی معلوم می‌شود که هر مضربی مانند $n\alpha$ از زاویهٔ شیپوری α از هر زاویهٔ راست‌خطی کوچک‌تر است (اصول، مقالهٔ سوم، (۱۶)). زاویه‌های شیپوری مثالی قدیمی از دستگاهی غیرارشمیدسی از کمیت‌ها هستند.

در تعریف مدرنِ زاویه از دو پاره‌خط برای مشخص کردن کمیت زاویه‌ای استفاده می‌کنند. بااین‌حال، اقلیدس این را حالتی خاص در تعریفش از زاویه می‌داند، یعنی زاویهٔ راست‌خط (اصول، مقالهٔ اوّل، تعریف (۹))، که می‌توان آن را ذیل تعریفی کلی‌تر گنجاند: «زاویهٔ مستوی، میلِ دو خطِ واقع در صفحه نسبت به هم است، که یکدیگر را قطع می‌کنند و روی خطی راست نیستند» (اصول،

مقالهٔ اوّل، تعریف (۸)). بااین‌همه، این حالت خاص همان است که اقلیدس در آثارش در نظر داشته است. در مفهوم کلی، مماس بر دایره و کمان متناظرش از دایره زاویه‌ای مانند α می‌سازند که آن را زاویهٔ شاخ‌دار می‌نامند. عکس شعاع دایره، $1/r$، را می‌توان اندازهٔ این زاویهٔ شیپوری به حساب آورد؛ یعنی، اندازهٔ عددی این زاویه‌های شیپوری بر حسب عکسِ طول شعاع مشخص می‌شود. اگر هریک از این زاویه‌های شیپوری را زاویه‌ای راست‌خط به حساب آوریم، مقدارش صفر است، همین‌طور در مورد هر مجموعی از این زاویه‌ها. به‌عبارت‌دیگر، هر مضربی از این زاویه‌های شیپوری (به تعبیر معمول) کمیتی هیچ برجا می‌گذارد؛ یعنی، عددی طبیعی مانند n وجود ندارد که $n\alpha > 0$، پس اصل ارشمیدسی در اینجا درست نیست.

روشن‌بینی مهم اقلیدس دربارهٔ نسبت‌های مشکل‌دار (در مقالهٔ پنجم کتاب اصول او، که البته از ائودوکسوس است) به صورت زیر است. لازم نیست که تعریف صریح باشد، یعنی بگوییم نسبت به هم اندازه‌ناپذیری نسبت‌ها یعنی چه، زیرا کافی است بدانیم نسبت‌ها را چطور مقایسه کنیم و بعد اینکه چگونه با آن‌ها کار کنیم. به‌این‌ترتیب اقلیدس توانسته همان‌طور جلو رود که هنگام معرفی نسبت عددها: او ابتدا چگونگی مقایسهٔ نسبت‌ها را مشخص کرده و از این طریق مجموعهٔ نسبت‌ها را به‌طور ضمنی مرتب کرده است. این مرتب‌کردنِ نسبت کمیت‌ها فقط با استفاده از نسبت عددها (عددهای گویا) صورت گرفته است.

توجه کنید که هنگام مقایسه نسبت کمیت‌ها، ممکن است نوع کمیت‌های مورد بررسی فرق کند (البته در مقالهٔ پنجم اصول، تعریف (۳)، آمدن کمیت‌های غیرهم‌نوع در یک نسبت را کنار گذاشته است). همچنین، می‌توانیم دو دستگاه مختلف از کمیت‌ها مانند $a, b, \ldots$ و $A, B, \ldots$ و نسبت‌های متناظرشان را در نظر بگیریم، مثلاً، خط و مساحت‌ها.[۱]

پرسش بنیادی این است: دو نسبت $a : b$ و $A : B$ چه وقت برابر یا نابرابرند،

$$a : b = A : B \quad \text{(الف)} \quad \text{یا} \quad a : b \neq A : B \quad \text{(ب)} \qquad (۳)$$

و در حالت دوم کدام یک از نابرابری‌های

$$a : b < A : B \quad \text{(الف)} \quad \text{یا} \quad a : b > A : B \quad \text{(ب)} \qquad (۴)$$

برقرار است؟ جالب‌ترین حالت مربوط به نسبت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر است (تعبیر مدرنش

۱. قانون اهرم‌های ارشمیدس مثالی روشن، امّا غیرتاریخی، از کمیت‌های غیرهم‌نوع در تناسب نشانمان می‌دهد: کمیت‌هایی که نسبت فاصله‌هایشان از تکیه‌گاه عکس نسبت وزن‌هایشان است در تعادل می‌باشند.

این است که نسبت مورد نظرْ عددی گنگ را نشان دهد). ائودوکسوس (۳۴۷-۴۰۰ پیش‌از میلاد مسیح) نسبت کمیت‌ها را با نسبت عددها (یعنی با کسرهای مثبت) مقایسه می‌کند. در انجام این کار، او دو نسبت از کمیت‌ها را برابر می‌خواند به شرطی که بین نسبت‌های عددی یکسانی (کران‌ها) قرار بگیرند و به کمک این کران‌ها بتوان آن‌ها را در بازه‌ای هرچقدر کوچک که بخواهیم بیندازیم. قاعده اصلی منسوب به بریسِن[1] (۳۶۰-۴۵۰ پیش‌از میلاد مسیح) است که می‌توان آن را این‌طور بیان کرد: کمیت‌هایی که در مقایسه با مقداری یکسان هم‌زمان برابر، بزرگ‌تر، یا کوچک‌ترند، برابرند.

تعریف تعیین‌کننده در \اصول اقلیدس به صورت زیر است (\اصول، مقالهٔ پنجم، (۵)):

> کمیت‌هایی را می‌گویند به یک نسبت‌اند که نسبت اوّلی به دومی و نسبت سومی به چهارمی هنگامی که مضرب‌های برابر دلخواهی از اوّلی و سومی و هر مضرب برابری از دومی و چهارمی گرفته شوند، مضرب‌های برابر قبلی و بعدی، به‌طور یکسان از هم بزرگ‌تر، یا با هم برابر، یا از هم کوچک‌تر باشند، وقتی به همان ترتیب در نظر گرفته شوند.

ترجمهٔ تعریف برابری با نمادهای جبری این است:

(۵)
(الف) اگر $ma > nb$ آنگاه $mA > nB$،
(ب) اگر $ma = nb$ آنگاه $mA = nB$،
(پ) اگر $ma < nb$ آنگاه $mA < nB$،

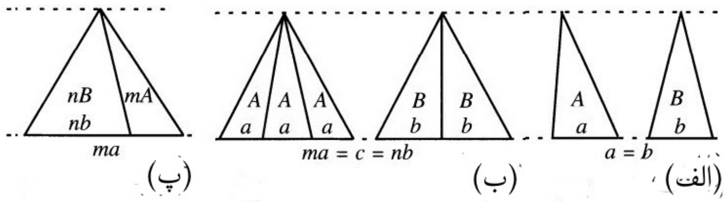
و برعکس. روش محاسبات ما با چنین عبارت‌هایی، استفاده از کسرهاست. مثلاً، می‌توانیم از «نسبت معیار» $\frac{n}{m}$ (کسر معیار) استفاده کنیم و مورد ۵ (الف) را این‌طور بنویسیم

(۶) اگر $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$، آنگاه $\frac{A}{B} > \frac{n}{m}$ و برعکس.

البته ائودوکسوس نمی‌توانسته به این شیوه جلو رود، زیرا رابطهٔ ترتیب برای نسبت‌ها وجود نداشته (یعنی، $<$، $=$، $>$) و باید ابتدا به کمک اصل ترتیب برای کمیت‌ها مشخص می‌شده است.

به‌عبارت‌دقیق‌تر، ترتیب گذاشتن مضرب‌ها در (۵) برای این منظور به کار گرفته شده است. حالت مربوط به نسبت به هم اندازه‌پذیربودن در دستورهای حاوی تساوی در ۵ (ب) توضیح داده شده است، (شکل ۲). نابرابری ۳ (ب) در مقالهٔ پنجم \اصول، (۷)، بررسی شده است. بااین‌حال،

1. Bryson



شکل ۲. توضیح هندسی تعریف ائودوکسوس (اصول، مقالهٔ پنجم، (۵)) به کمک قضیهٔ «مثلث‌های [با مساحت A] ... با یک ارتفاع نسبت به قاعده‌هایشان [a] مثل هم هستند» (اصول، مقالهٔ ششم، (۱))

(الف) قاعده‌ها برابرند؛ $a = b$ (مطابق اصول، مقالهٔ ششم، (۱)).
(ب) قاعده‌های a و b نسبت به هم اندازه‌پذیرند. در این صورت عددهایی طبیعی مانند m و n وجود دارند که مضرب‌های ma و nb قاعده‌ای مشترک را مشخص می‌کند: $c = ma = nb$.
(پ) قاعده‌های a و b نسبت به هم اندازه‌ناپذیرند، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m و n مضرب‌های ma، mA، ... این ویژگی را دارند: اگر $ma < nb$، آن‌وقت $mA < nB$.

در این مورد مثلاً، در ۵ (الف) یا (۶) حالت برعکس، دیگر درست نیست. به‌عبارت‌دیگر، در حالت نابرابری ۴ (الف) (دست‌کم) یک جفت عدد مانند n^* و m^* وجود دارند که $m^*A > n^*B$ درست است امّا $m^*a > n^*b$ درست نیست.

پس‌از آوردن تعریف‌ها، قاعده‌های محاسبات با نسبت‌ها را ذکر می‌کنیم. البته، این قاعده‌ها نظیر جمع و ضرب در حساب‌اند؛ بااین‌حال، این قاعده‌های محاسبات برای نیازهای لازم در کتاب اصول تدوین شده‌اند نه برای میدان‌های عددی مدرن. این موضوع به‌وضوح در مورد ضرب نسبت‌ها به چشم می‌آید. ضرب کردن نسبت‌ها مقدمات می‌خواهد: یکی از عامل‌ها باید به‌صورت نسبت $A : B$ درآید که در آن A تعیین شده است (و بستگی به عامل دیگر دارد). در مورد نسبت‌های مؤلف در تئوری موسیقی هم به همین ایده برمی‌خوریم و به زبان تناسب‌ها معنی این حرف این است که جزء چهارم تناسب همواره وجود دارد؛ به زبان دستگاه‌های جبری یعنی اینکه این سیستم بسته و پیوسته است. یونانیان فرض پیوستگی را بدیهی می‌گرفتند. دامنهٔ کمیت‌هایی مانند خط، مساحت، و چیزهایی از این دست، تلویحاً پیوسته تلقی می‌شده است، بی‌آنکه این ایده صراحتاً به زبان آورده شود. چنین اصل موضوع پیوستگی‌ای خیلی بعدتر به‌صراحت در نسخهٔ کریستف کلاویوس[۱] از

1. Christoph Clavius

\اصول اقلیدس (۱۵۸۰) آورده شده است. در سال ۱۵۸۵، سیمون استوین[1] پیوستگی اندازه‌ها را با مقایسه اندازه با میزان رطوبت توضیح داد، درست مثل کاری که افلاطون در «فیلبوس» با جفت متضاد گرم و سرد کرده بود.

مضرب‌های گویای هر کمیتی همه‌جا چگال‌اند: از اصل ارشمیدسی نتیجه می‌شود که در مورد هر دو کمیت مانند A و B و کمیت دلخواه C، عددهای طبیعی m و n وجود دارند که $nA \leq mC \leq nB$ (یا با صورت‌بندی مدرن‌تر، $A \leq \frac{m}{n}C \leq B$). نظریهٔ یونانی نسبت‌ها مربوط به کمیت‌هایی بوده است که می‌توان آن‌ها را به‌صورت هندسی درست کرد (و درنتیجه وجود دارند) و لاغیر. بدیهی است که این دستگاه از کمیت‌های هندسی یا پیوسته ناقص است. در هندسهٔ اقلیدسی احتیاجی به فضایی پیوسته نیست، زیرا همهٔ ترسیم‌های هندسی را می‌توان در چنین فضای ناقصی انجام داد. هندسه‌دانان ناپیوستگی چنین فضایی را متوجه نمی‌شوند. این موضوع را ریشارت ددکیند در کتابش به سال ۱۸۸۸ با عنوان عدد چیست و به چه درد می‌خورد؟[2] متذکر شده است. درست برعکس نظریهٔ قدیمی تناسب‌ها، ددکیند نظریهٔ عددهای حقیقی‌اش را از مجموعهٔ عددهای گویا (به‌عنوان مجموعه‌ای مفروض) شروع کرد و در آن برش‌های معروف ددکیند را تعریف کرد که عددهای حقیقی را تولید می‌کنند.

تا قبل‌از ددکیند \آنالیز \از هندسه کاملاً جدا\ نبود و مفاهیمی نظیر پیوستگی بدون تکیه بر هندسه صورت‌بندی نشده بودند. تعریف خالص حسابی از عددهای حقیقی لازم بود تا بالاتر از همهٔ «خاستگاه واقعی مبانی حساب کشف شود و درنتیجه در عین‌حال تعریفی حقیقی برای ماهیت پیوستگی فراهم شود» [۸، پیش‌گفتار]. برای این منظور، ددکیند از این ویژگی خط اقلیدسی استفاده کرد که «اگر همهٔ نقطه‌های خط راست را به دو رده تقسیم کنیم به‌طوری‌که هر نقطه از ردهٔ اوّل در سمت چپ هر نقطه از ردهٔ دوم باشد، آن‌وقت یک و فقط یک نقطه وجود دارد که چنین تقسیمی را ایجاد می‌کند» [۸، فصل ۳]. این پیوستگی بدیهی در هندسه (که عکس این است که نقطه خط را تقسیم می‌کند) بود که الهام‌بخش تعریف تحلیلی برش ددکیند شد.

ازطرف‌دیگر، نمی‌توان از ویژگی‌های هندسی برای تعریف عددهای حقیقی به‌صورت حسابی استفاده کرد. بنابراین ددکیند این ویژگی تعیین‌کنندهٔ خط راست را که او ماهیت پیوستگی (هندسی) می‌دانست به دامنهٔ عددهای گویا، R، انتقال داد. دامنهٔ عددهای گویا، R، به دو ردهٔ $A_۱$ و $A_۲$ تقسیم می‌شود، که همهٔ عددهای یکی از آن‌ها از همهٔ عددهای دیگری کم‌ترند (برش ددکیند). این

1. Simon Stevin 2. *Was sind und was sollen die Zahlen?*

دستگاه برش‌ها همهٔ ویژگی‌های دامنهٔ عددهای حقیقی را دارد؛ به هر زوج مانند $(A_۱, A_۲)$ عددی حقیقی مانند α نظیر می‌شود. ددکیند این مطلب را که هر برش در عددهای گویا (نسبت‌های عددهای طبیعی) دقیقاً یک کمیت هندسی (یک پاره‌خط) مشخص می‌کند به‌عنوان اصل موضوع پذیرفت، درنتیجه پیوستگی دستگاه برش‌ها را به دستگاه کمیت‌های هندسی تعمیم داد.

در همان سال، ۱۸۷۲، گئورک کانتور همین مسیر را رفت، منتها در جهت دیگر. او، به‌جای برش‌های ددکیند، به‌کمک دنباله‌های بنیادی برای کامل‌سازی متریک استفاده کرد. کانتور ابتدا در مقالهٔ «تعمیم قضیه‌ای از نظریهٔ سری‌های مثلثاتی»[۱] همگرایی سری‌های فوریه را بررسی کرد. این بررسی نهایتاً او را به روش جدیدی برای توصیف عددهای حقیقی به کمک دنباله‌های بنیادی رساند. کانتور متوجه شد که به هر نقطه روی خطْ دنباله‌ای بنیادی نظیر می‌شود. او عکس این حکم را به‌عنوان اصل موضوع پذیرفت؛ به‌عبارت‌دیگر، او فرض کرد که به هر عدد حقیقی (یا به هر رده از دنباله‌های بنیادی که این عدد حد آن است) نقطه‌ای معلوم روی خط راست نظیر می شود [۷، ص ۱۲۸].

روش ددکیند برای تعریف عددهای گنگ از دامنهٔ عددهای گویا (میدان کسرها) شروع می‌شود، که وجود آن فرض شده است. ددکیند با شروع از مجموعه‌ای مفروض دامنهٔ توسعه‌یافتهٔ عددهای حقیقی را می‌سازد. در هر دو نظریهٔ ددکیند و کانتور برای عددهای حقیقی هر خطِ اقلیدسی (نامتناهی) مانند ℓ نگاشتی دوسویی مانند φ از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های ℓ به مجموعهٔ $\mathbb{R}$ متشکل از همهٔ عددهای حقیقی وجود دارد که ℓ را با محور عددهای حقیقی یکسان می‌گیرد. نگاشت φ به هر نقطه در هندسهٔ (شهوداً مفروض) مختصی (تابع مختصات) نسبت می‌دهد. بااین‌همه، برای اطمینان از وجود چنین ویژگی‌های پیوستگی، اصل موضوع کانتور لازم است، درحالی‌که در حسابْ ابزاری فرمالیستی (برش‌های ددکیند) برای توسیع گویاها (که مفروض گرفته می‌شوند) به حقیقی‌ها کافی است.

ددکیند، مانند کانتور، پی برده بود که پذیرش چنان پیوستگی شهودی در هندسه را باید اصل موضوع قرار داد؛ وانگهی، ددکیند متوجه شد که با این اصل موضوع است که پیوستگی را به ساختار هندسی خط راست می‌آوریم. درحقیقت، در هر میدان عددی مرتب می‌توان ثابت کرد که پیوستگی تعریف‌شده توسط برش‌های ددکیند با موارد زیر هم‌ارز است: (الف) اصل موضوع ارشمیدسی اندازه‌پذیری (که کمیت‌های بی‌نهایت کوچک را کنار می‌گذارد) و (ب) اصل بازه‌های تودرتو که می‌گوید هر دنبالهٔ بنیادی از عددهای حقیقی همگراست (کمال عددهای حقیقی). این

1. über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen

روش‌های معمول ساختنِ دامنه‌های توسعه‌یافته از روی عددهای گویا، بی‌نهایت کوچک‌های (عددهای فراحقیقی) آنالیز نااستاندارد را از قلم می‌اندازد.[۱]

باهمهٔاین‌ها، فرقی اساسی میان مجموعهٔ نسبت‌های ساختنی هندسی و مجموعهٔ برش‌هاست، که منجر به تفاوت نظریهٔ تناسب‌های قدیمی یونانی و نظریهٔ مدرنِ ددکیند برای عددهای حقیقی می‌شود. در ریاضیات یونانی، نسبت عددها و نسبت‌ها را موجودات نو تلقی می‌کنند و تلاشی برای یافتن ساختاری (انتزاعی) یک‌دست‌کننده به چشم نمی‌اید. مثلاً اقلیدس سراغ مفهوم تساوی نسبت[۲] عددها نمی‌رود و از چهار عدد متناسب صحبت می‌کند (اصول، مقالهٔ هفتم، ۲۰)، همین‌طور در مورد کمیت‌ها (اصول، مقالهٔ پنجم، (۵)). هر نسبتی که در یک ترسیم هندسی که یونانیان باستان رسم کرده‌اند وجود دارد همواره در دامنه‌ای متناهی می‌ماند. ازطرف‌دیگر، ددکیند از همان آغاز وجود دامنهٔ عددهای گویا را فرض گرفته است؛ یعنی، او همه‌جا مجموعهٔ نامتناهی عددهای گویا را فرض گرفته است.

تا سدهٔ پنجم پیش‌از میلاد مسیح برخی قضیه‌ها را خیلی ساده‌لوحانه با استفاده از اندازه‌ای مشترک برای کمیت‌های مورد بررسی با فرض وجود آن (نه اثبات آن) اثبات می‌کردند. در میان این قضیه‌ها حکم بسیار مهم مربوط به هم‌نسبت‌بودن در مثلث‌های متشابه است (اصول، مقالهٔ ششم، قضیهٔ (۲)). با کشف نسبت به هم اندازه‌ناپذیری، این حکم‌ها متزلزل شدند، امّا این قضیه‌های با استدلال آبکی را می‌توان در نظریهٔ تناسب‌هایی که درست صورت‌بندی‌شده خیلی محکم ثابت کرد.

۶.۲ دریافت‌های متفاوت پیش و پس‌از نظریهٔ تناسب‌های ائودوکسوس ایده‌های دیگری برای بررسی کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر خلق شده بود. به سؤال «دو کمیت اندازهٔ مشترک دارند یا خیر؟» می‌شد به روش تفاضل معکوس[۳] پاسخ داد. مشخص کردن وجود اندازهٔ مشترک، مشابه پیدا کردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک در نظریهٔ اعداد (اصول، مقالهٔ هفتم، (۲)) با استفاده از الگوریتم اقلیدسی است (که خیلی پیش‌از اقلیدس از آن آگاه بودند).

بزرگ‌ترین اندازهٔ مشترک دو کمیت هندسی A و B $(A > B)$ به روش تکرار پیدا می‌شود. ابتدا mB، بزرگ‌ترین مضرب کمیت کوچک‌تر را که از کمیت بزرگ‌تر کمتر است، از کمیت بزرگ‌تر

۱. اشتولتس [۲۶] نشان می‌دهد که چگونه اصل ارشمیدسی را به کمک برش‌های ددکیند نتیجه بگیریم ([۱۱، Heath Euclid 3, 16]). یعنی اینکه برش‌های ددکیند دستگاه عددهای فراحقیقی را که در آنالیز نااستاندارد استفاده می‌شود در اختیارمان نمی‌گذارد. ۲. دیدگاه متفاوتی را دیوید فاوْلر [۱۲] پیدا کرد، که اهمیت نسبت‌ها را در آثار اقلیدس یا افلاطون و بی‌اهمیت بودن تناسب‌ها را در آن‌ها گوشزد کرده است.

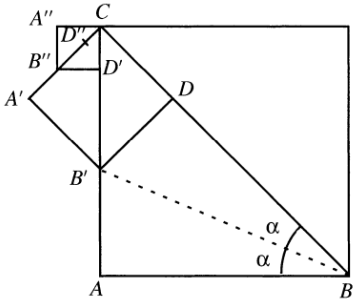
3. antanairesis or anthyphairesis

کم می‌کنیم: $A - mB = R$. حاصل، R، باقی‌مانده‌ای است که از کمیت کوچک‌تر کمتر است ($R < B$). سپس، nR، بزرگ‌ترین مضرب این باقی‌مانده را که از کمیت کوچک‌تر کمتر است، از کمیت کوچک‌تر کم می‌کنیم: $B - nR = R'$. دو مرتبه، حاصل باقی‌مانده‌ای است که از R، باقی ماندهٔ گام اوّل، کمتر است. کار را به همین روش ادامه می‌دهیم. یا این روند پس‌از تعدادی متناهی گام متوقف می‌شود و درنتیجه اندازه‌ای مشترک برای کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌پذیر مورد نظر به دست می‌دهد، یا این روند هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود، که نشان می‌دهد کمیت‌های موردنظر نسبت به هم اندازه‌ناپذیرند.

در نظریهٔ اعداد مدرن، همان‌طورکه در بالا گفتیم، این روشِ تکرار چیزی نیست جز الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح. برای یونانیان، عددهای مورد بررسی عددهایی طبیعی بودند: عدد بزرگ‌تر بر دیگری تقسیم می‌شد، سپس عدد کوچک‌تر بر باقی‌ماندهٔ تقسیم اوّل تقسیم می‌شد، بعد باقی‌ماندهٔ اوّل بر باقی‌ماندهٔ دوم، و همین‌طور کار ادامه پیدا می‌کرد تا کار با رسیدن به باقی‌ماندهٔ صفر خاتمه می‌یافت. در این صورت، آخرین مقسوم‌علیه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای طبیعی (صحیح) مفروض است. اگر این مقسوم‌علیه مشترک برابر با واحد، ۱، باشد، این عددها نسبت به یکدیگر اوّل‌اند. امروزه این مراحل را می‌توان با کسرهای مسلسل نشان داد. هر عدد حقیقی را می‌توان با کسری مسلسل نشان داد. از این دیدگاه مدرن به‌سادگی می‌توان تشخیص داد که چه وقت یک اندازه (یک عدد حقیقی) و واحد، ۱، نسبت به هم اندازه‌پذیرند (گویاست) یا نسبت به هم اندازه‌ناپذیرند (گنگ است).

در مورد دیگر انواعِ کمیت‌ها روش تفاضل معکوس را باید جور دیگر تعریف کرد، درحالی‌که نظریهٔ ائودوکسوس را می‌توان در مورد همهٔ انواع کمیت‌ها استفاده کرد. ارسطو این مزیت را در آنالوطیقای اوّل [۲، I، ۵، a۷۴] خاطر نشان کرده است. در اصول اقلیدس، که به روش گفته‌شده یک بار برای عددها (کمیت‌های گسسته) (مقالهٔ هفتم، (۱)-(۲)) و یک بار برای کمیت‌های هندسی (کمیت‌های پیوسته)(مقالهٔ دهم، (۲)-(۳)) برمی‌خوریم، باز هم این سابقهٔ قدیمی‌تر به چشم می‌آید (شکل ۳ را ببینید).

بااینکه روش ائودوکسوس بررسی یکدست چند حوزهٔ مختلف ریاضی را میسر می‌کند، در جزئیات تفاوت‌هایی را آشکار می‌کند که از دیدگاه یونانیان مهم‌اند. واحد به‌عنوان عددْ تقسیم‌پذیر نیست، امّا واحد به‌عنوان کمیتی هندسی، واحد فاصله، تقسیم‌پذیر است. بنابراین، در دیدگاه یونانیان روشی متفاوت لازم به نظر می‌رسیده است. از دیدگاه یونانیان دستور کم‌کردن مضربی از کمیت کوچک‌تر



شکل ۳. صورت هندسی الگوریتم اقلیدس برای مشخص کردن نسبت به هم اندازه‌ناپذیری ضلع و قطر مربع

روش مورد استفاده همان تفاضل معکوس است. فرض کنید ضلع AB از مربع $ABCD$ و قطر BC اندازه مشترکی مانند e داشته باشند. در این صورت e اندازهٔ مشترک تفاضل $BC - AB = DC$ نیز هست، درعین‌حال، برای قطر $CB' = AB - CD$ از مربع $A'B'DC$ به ضلع DC. با تکرار این کار، مربع‌هایی به ضلع‌های CA'، CA''، ... به دست می‌آوریم و دنباله‌ای نزولی اکید متناظر آن از طول‌ها

$$CD > CD' > CD'' > \cdots$$

که در آن طول‌های هرچقدر که بخواهیم کوچک است. درنتیجه این دنباله جمله‌ای مانند $CD^{(n)}$ دارد که از واحد e کمتر است. البته، این ناممکن است و فرض ما مبنی‌بر نسبت به هم اندازه‌پذیری باید غلط باشد.

از کمیت بزرگ‌تر که از کمیت بزرگ‌تر کوچک‌تر است کاملاً طبیعی است. زیرا تفاضل کمیت‌ها باید کمیتی از همان نوع باشد. حالت بینابینی تباه‌شدن این اختلاف است (طول تبدیل به نقطه شود)؛ کمیت‌های با اندازهٔ منفی از نظر هندسی بی‌معنی‌اند، بنابراین اختلاف کمیت‌های هندسی، که کمیت می‌شوند، غیرمنفی‌اند.

نتیجه‌های مهمی از هندسه را می‌توان بدون اتکا به نظریهٔ تناسب‌ها ثابت کرد (اصول، مقالهٔ پنجم)، همان‌طورکه اقلیدس در چهار مقالهٔ نخست اصول این کار را کرده است. درحقیقت، به‌جای (۱) می‌توانیم خیلی از قضیه‌ها را با استفاده از ایدهٔ تشابه یا به کمک تساوی مساحت‌ها، $ad = bc$، نتیجه بگیریم. در مقالهٔ دهم کتاب اصول، که به‌مراتب طولانی‌ترین مقاله در اصول است، اقلیدس رده‌بندی‌ای از برخی انواع کمیت‌های نسبت به هم اندازه‌ناپذیر می‌کند که به تئاتئوس منسوب است.

یکی از هدف‌های اقلیدس در این رده‌بندی در مقالهٔ دهم بررسی طول یال چندوجهی منتظم است. بررسی شده که طول‌هایی که با طول واحد نسبت به هم اندازه‌پذیر نیستند آیا مربع‌شان یا به‌طور کلی‌تر عبارت «جبری» دیگری از آن‌ها با واحد نسبت به هم اندازه‌پذیر هستند یا خیر. البته، از هیچ ابزار جبری استفاده نشده است و همه‌چیز به‌طور هندسی انجام شده است. از دیدگاه مدرن جبری، عددهای گنگ در جمله‌های مورد بررسی وجود دارند، و بررسی چنین جمله‌هایی (فقط گنگ‌ها بدون گویاها، جمله‌های گنگ و گویا با هم و عامل‌ها و مجموع‌های گنگ‌ها) کمک می‌کند در نهایت آن‌ها را با اطمینان به‌عنوان عدد (گنگ) بپذیریم.

مراجع

[1] Archimedes, *Opera* , 3 vol., J. L. Heiberg, B. G. Teubner, eds., Leipzig, 1910-1915 (reprint 1972); English translation by T. L. Heath, *The works of Archimedes with a supplement The Method of Archimedes*, University Press , Cambridge, 1897 and 1912 (reprint by Dover n.d. [1953], New York).

[2] Aristotle, *Opera*, 5 vol., I. Bekker et al., ed., Reimer, Berlin, 1831-1836, 1870 (reprint 1960); English translation by W. D. Ross, Claredon Press, Oxford, 1936; also see T. Heath, L., *Mathematics in Aristotle*, Claredon Press, Oxford, 1949.

[3] Barrow, I., *Lectiones Geometricae*, reprint of the 1674, Hildesheim, London, 1976.

[4] Becker, O., *Das Mathematische Denken in der Antike*, Vandenhoek & Ruprecht, Gottingen, 1957.

[5] Becker, O., *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgemeinschaft, Darmstadt, 1965.

[6] Berggren, J. L., History of greek mathematics: A survey of recent research, *Historia Math.*, **11** (1984), 394-410.

[7] Cantor, G., über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1872), 123-132.

[8] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen. Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, 11^{th} and 8^{th} eds., Vieweg, Braunschweig, 1967.

[9] Descartes, R., *The Geometry of Rene Descartes (with a facsimile of the first edition)*, reprint of the 1637 Leiden edition, with English translation by D. E. Smith and M. L. Latham, Open Court Publ., Chicago.

[10] Dijksterhuis, E. J., *Archimedes*, E. Munksgaard, Copenhagen, 1956.

[11] Euclid, *Opera Omnia*, 8 vol., J. L Heiberg, H. Menge, eds., B. G. Teubner, Leipzig, 1883-1888 (including Euclidis elementa); English translation of *The thirteen books of Euclid's elements* by T. L. Heath, 3 vol., 2nd ed., University Press, Cambridge, 1926.

[12] Fowler, D. H., *Ratio in early Greek mathematics*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **1** (1979), 807-846.

[13] von Fritz , K., The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Ann. of Math.*, (2) **46** (1945), 242-264.

[14] Klügel, G. S., *Mathematisches Worterbuch, Abtheilung*, Reine Mathematik, vol. 1, Schwickert, Leipzig, 1803.

[15] Knobloch, E., Archimedes, Kepler, and Guldin: The role of proof and analogy, in *Mathesis*, R. Thiele, ed., GNT–Verlag, Berlin, 2000, 82-100.

[16] Knorr, W. R., *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston, 1986.

[17] Knorr, W. R., Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory, *Arch. Int. Hist. Sci.*, **28** (1978), 183-244, .

[18] Lorenzen, P., *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*, Springer, Berlin, 1960.
[19] Nicomachus of Gerasa, *Introductio Arithmetica* (ed. R. Hoche), B. G. Teubner, Leipzig, 1866; English translation by M. L. D'Ooge, *Introduction to Arithmetic* , Michigan, 1926.
[20] Pappus, *Pappi Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, 3 vol., in Greek and Latin, F. Hultsch, ed., Weidmann, Berlin, 1876-1878; English translation of *The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements* by G. Junge and W. Thompson, University Press, Cambridge (MA), 1930.
[21] Plato, *Opera*, 5 vol., J. Burnet, ed., Claredon, Oxford, 1899-1906.
[22] Reidemeister, K., *Das exakte Denken der Griechen*, Claasen & Goverts, Hamburg, 1949.
[23] Riddell, R. C., Eudoxan mathematics and the Eudoxian spheres, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **20** (1979), 1-19.
[24] Schramm, M., Steps toward the ideas of function, *Hist. Sci.*, **4** (1965), 70-103.
[25] Stevin, Simon, *Les œuvres Mathématiques*, Leiden, B. & A. Elzevier, 1634
[26] Stolz, O., Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes, *Math. Ann.*, **22** (1883), 504-519, .
[27] Thiele, R., Carnots Betrachtungen über die Grundlagen der Analysis, in *Rechnen mit dem Unendlichen*, D. Spalt, ed., Birkhäuser, Basel, 1990.
[28] Viete, F., *Opera Mathematica*, F. van Schooten, ed., Leiden, 1646.
[29] Wolff, C., *Mathematisches Lexicon*, Gleditsch, Leipzig, 1716.

ارشک حمیدی: تهران، نشر الگو
رایانامه: arashk.hamidi@gmail.com

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 61–82
doi: 10.30504/mct.2024.1457.2023

Antiquity*

R. Thiele
Translated by A. Hamidi[1]

Olgoo Publication, Tehran, Iran

Abstract. The purpose of the paper is to focus on the contribution of Greek mathematics in the development of mathematical analysis. The important elements in this study are analysis and synthesis, number and magnitude, and ratio and proportion, all of which have roots in ancient Greek philosophical thought and Euclid's *Elements*.

Keywords: Greek mathematics, mathematical analysis, analysis and synthesis, numbers and magnitudes, commensurable
Article history: Recieved 16 November 2023; Accepted 22 December 2023
Article type: translation

* Thiele, Rüdiger, Antiquity, in *A History of Analysis*, H. N. Jahnke, ed., Hist. Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 1-14.
1. arashk.hamidi@gmail.com