فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۸۳ تا ۱۱۰

فصلی از یک کتاب

اقلیدس و هندسهٔ اصل موضوعی *

جان ام. لی

ترجمهٔ فرشته ملک

داستان هندسهٔ اصل موضوعی با اقلیدس، مشهورترین ریاضی‌دان تاریخ، شروع می‌شود. ما در مورد زندگی اقلیدس تقریباً هیچ نمی‌دانیم، جز اینکه او یونانی بود و حدود ۳۰۰ ق‌م در اسکندریهٔ مصر زندگی و کار می‌کرد. معروف‌ترین اثر او کتاب اصول [۳] است، رساله‌ای سیزده‌جلدی که دراصل تمام دانش هندسه و نظریهٔ اعداد را که تا آن زمان در مغرب‌زمین به وجود آمده بود تدوین و نظام‌مند کرد.

اعتقاد بر این است که بیشتر نتایج ریاضی مطرح‌شده در کتاب اصول خیلی قبل‌تر از زمان اقلیدس شناخته شده بودند. دستاورد اصلی اقلیدس کشف حقایق جدید ریاضی نبود بلکه چیزی بسیار عمیق‌تر بود: ظاهراً او اولین ریاضی‌دانی بود که توانست راهی بیابد که به‌وسیلهٔ آن تمام دانش ریاضی شناخته‌شده را در یک نظام منسجم و منطقی واحد گرد آورد، نظامی که با فهرستی از تعاریف، و تعداد کمی مفروضات (موسوم به اصل موضوع) شروع می‌شد و با شیوه‌ای منطقی برای اثبات نتایج حاصل از اصول موضوعه و نتایجی که قبلاً به دست آمده‌اند گسترش می‌یافت. کتاب اصول مدلی از استدلال استنتاجی ریاضی را برای مغرب‌زمین به ارمغان آورد که ویژگی‌های اساسی آن هنوز الگوی کار ما است.

دربارهٔ تألیف کتاب اصول اشاره‌ای کوتاه لازم است. صاحب‌نظران تاریخ ریاضیات یونان به

عبارات و کلمات کلیدی: اقلیدس، هندسهٔ اصل موضوعی، هندسهٔ نااقلیدسی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۷

* Lee, John M., *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, 1-21.

doi: 10.30504/mct.2023.1380.1969

این نتیجه رسیده‌اند که برخی از مطالبی که از طریق کتاب اصول به ما رسیده، واقعاً توسط اقلیدس نوشته نشده بلکه بعداً توسط نویسندگانی به آن اضافه شده است. این نتیجه‌گیری دربارهٔ بخش‌هایی از آن کتاب کاملاً مستدل است ــ مثلاً قسمت‌هایی وجود دارد که در نسخه‌های خطی یونانی قبلاً در حاشیهٔ کتاب بوده‌اند ولی در نسخه‌های بعدی به‌صورتِ بخشی از متن اصلی درآمده‌اند. قاعدتاً نتیجه می‌گیریم که این قسمت‌ها را دانشمندان بعد از اقلیدس اضافه کرده‌اند و بعدها هنگام استنساخ به متن اصلی اقلیدس اضافه شده است. دربارهٔ تألیف بخش‌های دیگر کتاب به این صراحت چیزی معلوم نیست ــ حتی بعضی از محققان حدس می‌زنند که برخی از تعریف‌ها نیز ممکن است در زمرهٔ افزوده‌های بعدی باشد. احتمالاً هرگز نخواهیم فهمید که نسخهٔ اصلی کتاب اصول چگونه بوده است!

ازآنجاکه اساساً هدف ما در اینجا بررسی بسط منطقی هندسه است و نه سیر تکامل تاریخی آن، اجازه دهید نام اقلیدس را منتسب به نویسنده یا نویسندگانی بدانیم که نوشته‌هایشان از طریق کتاب اصول به ما رسیده است، و کشف چندوچون وجود چندین نویسنده در این کتاب را به مورخان واگذار کنیم.

مطالعهٔ اصول

قبل‌از آنکه جلوتر برویم، لازم است کمی وقت صرف کنید و به مقالهٔ اول اصول، که بیشترین نتایج مقدماتی اقلیدس در هندسهٔ مسطحه را شامل می‌شود، نگاهی بیندازید. در حین بحث دربارهٔ قسمت‌های مختلف متن ــ تعریف‌ها، اصول موضوع، مفاهیم رایج، و گزاره‌ها ــ لازم است به عقب برگردید و آن قسمت‌ها را با دقت بخوانید. ببینید که چگونه گزاره‌ها و قضیه‌ها به‌طور منطقی یکی بر روی دیگری ساخته می‌شود و چطور اثبات‌ها فقط بر تعاریف، اصل‌های موضوع، مفاهیم رایج، و قضیه‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها ثابت شده استوار می‌شوند.

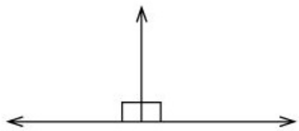
در اینجا نکاتی در مورد اجزای مختلف مقالهٔ اول ارائه می‌کنیم.

تعاریف

اگر تعریف‌های اقلیدس را با دقت مطالعه کنید، خواهید دید که می‌توان آن‌ها را به دو دستهٔ کاملاً متفاوت تقسیم کرد. بسیاری از تعریف‌ها (از جمله نُه‌تای اوّل) تعریف‌های توصیفی‌اند، یعنی مراد از آن‌ها انتقال حسی شهودی به خواننده است از آنچه اقلیدس در مورد آن صحبت می‌کند. به‌عنوان مثال، اقلیدس نقطه را «چیزی که جزء ندارد»، خط را «طولی بدون عرض»، و خط راست را «خطی

که به‌گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد» تعریف می‌کند.[۱] این توصیفات برای هدایت ذهن خواننده به این مفاهیم است اما برای توجیه مراحل استدلال‌های منطقی، به اندازهٔ کافی دقیق نیستند زیرا معمولاً اصطلاحات جدید را براساس اصطلاحات تعریف‌نشدهٔ قبلی بیان می‌کنند. مثلاً اقلیدس هرگز منظور خود را از «طول بدون عرض» یا «خطی که به‌گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد» بیان نمی‌کند؛ خواننده باید براساس تجربه و دانش خود این تعاریف را تفسیر کند. درواقع، اقلیدس، در تمام مقالات اصول، هرگز برای توجیه مراحل برهان‌ها به نُه تعریف اوّل یا تعاریف توصیفی دیگری رجوع نمی‌کند.

در مقابل تعاریف توصیفی، تعاریف منطقی قرار دارد. این‌ها تعاریفی هستند که در آن‌ها، برای آنکه یک شی بتواند در تعریفی مشخص صدق کند، لازم است که در یک شرط دقیق ریاضی صدق کند. تعریف ۱۰ اوّلین تعریف منطقی در کتاب اصول است: «وقتی خط راستی بر خط راستی فرود آید و دو زاویهٔ مجاور مساوی با هم بسازد هریک از آن زاویه‌ها یک قائمه است و خط راست فرود آمده بر خطّ اوّل عمود بر آن خط نامیده می‌شود.» به‌این‌ترتیب این زاویه‌ها در قالب یک ساختار هندسی خاص تعریف می‌شوند (شکل ۱) و به ما گفته می‌شود که یک زاویه را باید قائمه بنامیم اگر و تنها اگر در ساختاری که توصیف شد ظاهر شود. برخی اصطلاحات دیگر که اقلیدس برای آن‌ها تعاریف منطقی ارائه می‌دهد عبارت‌اند از دایره، مثلث متساوی‌الساقین، و توازی.



شکل ۱. تعریف اقلیدس از زاویهٔ قائمه

اصل‌های موضوع

بیشترین نبوغ اقلیدس در ارائه اصل‌های موضوع پدیدار می‌شود. اگرچه ریاضی‌دانانی قبل از اقلیدس برهان‌هایی برای برخی مطالب ریاضی ارائه داده بودند (مثل قضیهٔ فیثاغورس که احتمالاً حداقل دویست سال قبل از اقلیدس ثابت شده بود)، ظاهراً اقلیدس برای اولین‌بار این ایدهٔ را مطرح کرد که همهٔ برهان‌ها باید براساس یک ترتیب منطقی دقیق باشند. اقلیدس دریافت که هر حقیقت هندسی لزوماً قابل اثبات نیست، زیرا هر برهانی باید بر دانش هندسی قبلی استوار باشد. بنابراین

۱. ترجمهٔ نقل‌قول‌های کتاب اصول را از ترجمهٔ زنده‌یاد محمدهادی شفیعیها آورده‌ایم. ـ و.

هرگونه تلاش برای اثبات همهٔ حقایق هندسی منجر به دور خواهد شد. به‌این‌ترتیب او فهمید که لازم است برخی حقایق را بدون اثبات بپذیریم. پس او تصمیم گرفت با پذیرش پنج حکم سادهٔ هندسی شروع کند:

- **اصل موضوع ۱ اقلیدس:** رسم کردن یک خط راست از یک نقطه به هر نقطهٔ دیگر.
- **اصل موضوع ۲ اقلیدس:** ادامه دادن یک خط راست متناهی به یک خط راست به‌طور پیوسته.
- **اصل موضوع ۳ اقلیدس:** رسم کردن یک دایره به هر مرکز و شعاعی.
- **اصل موضوع ۴ اقلیدس:** اینکه همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.
- **اصل موضوع ۵ اقلیدس:** اینکه اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموع دو زاویهٔ درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بی‌نهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌بُرند.

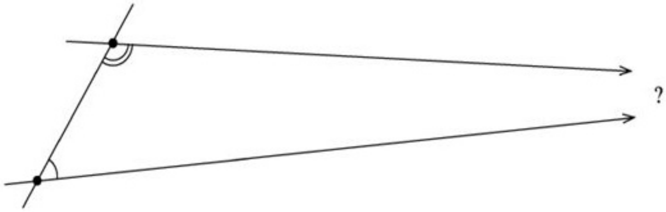
سه اصل موضوع اوّل مربوط به ترسیمات‌اند و باید طوری خوانده شوند که انگار با کلمات «امکان‌پذیر است» همراه‌اند. مثلاً اصل موضوع ۱ می‌گوید «رسم کردن یک خط راست از یک نقطه به هر نقطهٔ دیگر [امکان‌پذیر است].» (از نظر اقلیدس اصطلاح خط راست به بخشی از یک خط با طول متناهی ــ همان چیزی که ما آن را پاره‌خط می‌نامیم ــ اشاره می‌کند.) آنچه از سه اصل موضوع اوّل به‌طور کلی برداشت می‌شود بیان انتزاعی همان چیزی است که ما به‌طور عینی با دو ابزار سنتی ترسیم در هندسه انجام می‌دهیم، یعنی خطکش (نوعی خطکش ایده‌ال که مدرّج نیست ولی به‌طور نامحدود قابل گسترش است) و پرگار (وسیله‌ای با دو بازو که توسط لولایی به هم متصل شده‌اند، یک نوک تیز در انتهای یکی از بازوها و یک رسّام در انتهای بازوی دیگر). با یک خطکش می‌توانیم دو نقطهٔ داده‌شده را با یک پاره‌خط به هم وصل کنیم (اصل موضوع ۱) و یا می‌توانیم خطکش را روی لبهٔ یک پاره‌خط قرار دهیم و آن را در دو سو امتداد دهیم تا یک پاره‌خط بلندتر به وجود آید(اصل موضوع ۲). می‌توانیم نوک تیز آن پرگار را در هر نقطه ازپیش داده‌شده در صفحه قرار دهیم، نوک رسّام آن را در یک نقطهٔ داده‌شدهٔ دیگر، و یک دایرهٔ کامل رسم کنیم که مرکز آن نقطهٔ اول است و محیط آن از نقطهٔ دوم می‌گذرد. عبارت اصل موضوع ۳ دقیقاً مشخص نمی‌کند که منظور اقلیدس از جملهٔ «هر مرکز و هر فاصله» چیست اما در استفاده از این اصل موضوع، مثلاً در گزاره‌های ۱.I و ۲.I، روشن می‌شود که تنها وقتی این اصل موضوع قابل استفاده است که مرکز و یک نقطه از

محیط دایره داده شده باشد. (در این نوشتار ما برای ارجاع به گزاره‌های اقلیدس از همان روش سنتی پیروی می‌کنیم که بر طبق آن «گزاره ۲.I» به معنای گزارهٔ ۲ از مقالهٔ I کتاب اصول است.)

دو اصل موضوع آخر متفاوت‌اند: به‌جای اینکه ترسیم شکلهای هندسی خاصی را مد نظر داشته باشند، روابطی را توصیف می‌کنند که در یک شکل هندسی خاص باید برقرار باشند. اصل موضوع ۴ ساده است: این اصل می‌گوید هرگاه دو زاویهٔ قائمه رسم شده باشد، آن دو زاویه باهم برابرند. برای تفسیر این اصل لازم است منظور اقلیدس از کلمهٔ «برابر» را درک کنیم. در ریاضیات امروز وقتی می‌گوییم «A برابر است با B» به این معناست که A و B دو نام متفاوت برای یک شیءِ ریاضی است (که این شی می‌تواند یک عدد، یک زاویه، یک مثلث، یک چندجمله‌ای، یا هر چیز دیگری باشد). اما اقلیدس این کلمه را به معنای متفاوتی به کار می‌برد وقتی اقلیدس می‌گوید دو شیءِ هندسی باهم برابرند، اساساً منظورش این است که آن‌ها اندازه‌های یکسانی دارند. وقتی اقلیدس می‌گوید دو زاویه برابرند، در اصطلاح امروزی به این معناست که اندازهٔ درجهٔ آن‌ها یکسان است، وقتی او می‌گوید دوخط (یعنی دو پاره‌خط) برابرند، ما می‌گوییم طول آن‌ها یکسان است، و وقتی او می‌گوید دو شکل، مثلاً دو مثلث یا دو متوازی‌الاضلاع برابرند، ما می‌گوییم مساحت یکسانی دارند. به‌این‌ترتیب اصل موضوع ۴ عملاً حاکی از این است که همهٔ زاویه‌های قائمه اندازهٔ یکسانی دارند.

مهم است بدانیم چرا وجود اصل موضوع ۴ لازم است. تعریف اقلیدس از زاویهٔ قائمه تنها در مورد زاویه‌ای به کار می‌رود که شکلی خاص داشته باشد (یکی از دو زاویهٔ مجاوری که از تلاقی یک خط راست با خط راست دیگری پدید می‌آید به‌شرطی که زاویه‌های مجاور برابر باشند). پس مجاز نیستیم که رابطه‌ای بین یک زاویهٔ قائمه که در قسمتی از صفحه ظاهر شده با زاویهٔ قائمهٔ دیگری که در جای دیگری ظاهر می‌شود برقرار کنیم. بنابراین اصل موضوع ۴ را می‌توان به‌منزلهٔ نوعی «یکسان‌سازی» خاص در صفحه تلقی کرد: زاویه‌های قائمه در هر کجای صفحه ظاهر شوند اندازهٔ یکسانی دارند.

اصل موضوع ۵، به زبانی ساده‌تر، می‌گوید اگر یک خط راست دو خط راست دیگر را قطع کند به‌طوری‌که مجموع زاویه‌های داخلی در یک طرف این خط کمتر از ۱۸۰° («کمتر از دو قائمه») شود آنگاه دو خط راست یکدیگر را در همان طرف قطع می‌کنند (شکل ۲). منظور این است که اگر دو خط «به سمت یکدیگر» امتداد یابند در نهایت به هم می‌رسند. ازآنجاکه از این خاصیت عمدتاً برای اثبات ویژگی‌های خطوط موازی استفاده می‌شود (مثلاً در گزارهٔ ۲۹.I برای اثبات اینکه



شکل ۲. اصل موضوع پنجم اقلیدس

خطوط موازی در تلاقی با یک خط، زاویه‌های متناظر برابر می‌سازند)، اصل موضوع پنجم اقلیدس را معمولاً «اصل موضوع توازی» می‌نامند.

اصل‌های بدیهی

در ادامه، اقلیدس پنج «اصل بدیهی» را بیان می‌کند، که منظورش این است که این‌ها حقایقی بدیهی‌اند و باید بدون اثبات آن‌ها را قبول کنیم:

- **اصل بدیهی ۱**: چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با هم مساوی‌اند.
- **اصل بدیهی ۲**: اگر به چیزهای متساوی چیزهای متساوی افزوده شوند نتیجه‌ها با هم مساوی‌اند.
- **اصل بدیهی ۳**: اگر از چیزهای متساوی چیزهای متساوی کم شده باشند باقی‌مانده‌ها با هم مساوی‌اند.
- **اصل بدیهی ۴**: چیزهای قابل انطباق بر هم با هم مساوی‌اند.
- **اصل بدیهی ۵**: کلّ بزرگ‌تر از جزء است.

درحالی‌که اصل‌های موضوع حقایقی در مورد شکل‌های هندسی بیان می‌کنند، اصل‌های بدیهی حقایقی در مورد کمیت‌ها\مقادیر [1] بیان می‌کنند. از نظر اقلیدس، کمیت‌ها چیزهایی هستند که می‌توان آن‌ها را مقایسه کرد، به هم افزود، و از هم کم کرد به‌شرطی‌که از «یک نوع» باشند. در مقالهٔ اوّل، انواع کمیت‌هایی که اقلیدس در نظر می‌گیرد مربوط می‌شود به (طول) پاره‌خط‌ها، (اندازهٔ) زاویه‌ها، و (مساحت) مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها. به‌عنوان مثال یک پاره‌خط (که اقلیدس آن را یک «خط راست متناهی» می‌نامد) می‌تواند مساوی، بزرگ‌تر، یا کوچک‌تر از یک پاره‌خط دیگر باشد، دو پاره‌خط می‌توانند به یکدیگر اضافه شوند و پاره خطی بزرگ‌تر به وجود آورند، و یک پاره‌خط

1. magnitudes

کوچک‌تر می‌تواند از یک پاره‌خط بزرگ‌تر کم شود.

جالب آنکه اقلیدس اندازه‌ها از یک نوع را با هم مقایسه، جمع، و یا از هم کم می‌کند، اما هرگز از *اعداد* برای اندازه‌گیری کمیت‌های هندسی استفاده نمی‌کند. چنین چیزی ممکن است باعث تعجب ما باشد، زیرا جوامع بشری از زمان‌های ماقبل تاریخ برای اندازه‌گیری‌های مختلف از اعداد استفاده می‌کردند. اما نبود اعداد در نظام اصل موضوعی اقلیدس دلیل ساده‌ای دارد: برای یونانیان باستان، *اعداد* همان اعداد صحیح، و در خوش‌بینانه‌ترین حالتْ نسبت اعداد صحیح (آنچه که اکنون *اعداد گویا* می‌نامیم) بوده است. این در حالی است که پیروان فیثاغورس مدت‌ها قبل از اقلیدس کشف کرده بودند که رابطهٔ بین طول قطر یک مربع و اندازهٔ ضلع آن را نمی‌توان به‌صورت نسبتی از اعداد صحیح نمایش داد. امروزه می‌گوییم حاصل تقسیم طول قطر یک مربع به اندازهٔ ضلع آن برابر است با $\sqrt{۲}$؛ اما هیچ عدد گویایی وجود ندارد که مربع آن ۲ باشد. در اینجا اثباتی از این مطلب آورده می‌شود.

قضیه ۱ (گنگ بودن $\sqrt{۲}$). *هیچ عدد گویایی وجود ندارد که مربع آن برابر ۲ باشد.*

اثبات. خلاف آن را فرض بگیرید: یعنی، فرض کنید اعداد صحیح p و q وجود دارند به‌طوری‌که $q \neq ۰$ و $(p/q)^۲ = ۲$. با حذف عاملهای مشترک صورت و مخرج این کسر، درصورت وجود، فرض میکنیم p و q عامل مشترکی ندارند. سپس دو طرف معادله را در $q^۲$ ضرب می‌کنیم و تساوی زیر را به دست می‌آوریم $p^۲ = ۲q^۲$. ازآنجاکه $p^۲$ با عدد زوج $۲q^۲$ برابر است، پس p عددی زوج است، و بنابراین عدد صحیحی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $p = ۲k$. با اعمال این تساوی در معادلهٔ بالا داریم $۴k^۲ = (۲k)^۲ = ۲q^۲$. با تقسیم این معادله بر ۲ به دست می‌آید $q^۲ = ۲k^۲$، که نشان می‌دهد q نیز زوج است. اما این یعنی p و q دارای عامل اوّل مشترک ۲اند، که ناقض فرض ما مبنی‌بر ساده بودن کسر p/q است. پس فرض اوّلیهٔ ما باید غلط باشد. □

این یکی از قدیمی‌ترین مثال‌های چیزی است که ما آن را اثبات به برهان خلف یا برهان غیرمستقیم می‌نامیم، و در آن فرض می‌کنیم که حکم غلط است و نشان می‌دهیم این فرض به تناقضی می‌انجامد. نمونه‌ای از این استدلال در *اصول* ضمن گزارهٔ ۸.VIII آمده است (اگرچه تشخیص آن به‌دلیل اصطلاحات قدیمی اقلیدس دشوار است).

نتیجهٔ این مطلب برای یونانیان این بود که «عددی» وجود ندارد که اندازهٔ قطر مربعی با اضلاع به طول ۱ را نشان دهد. درنتیجه محال است که به هر پاره‌خط یک طول عددی نسبت دهیم.

راه حل اقلیدس برای این مشکل صرفاً این بود که برای اندازه‌گیری کمیت‌ها از اعداد استفاده نکند و فقط کمیت‌ها از یک نوع را با هم مقایسه، به هم اضافه، و یا از هم کم کند (او در مقاله‌های دیگر کتاب اصول نسبت‌های کمیت‌ها را با هم مقایسه می‌کند.) همان‌طور که در بالا اشاره شد، اقلیدس کلمهٔ «برابر» را به‌وضوح به معنای داشتن «اندازه‌های یکسان» به کار می‌برد و درنتیجه هر حکمی مبنی‌بر برابربودن دو شکل هندسی مستلزم آن است که نشان دهیم یکی را با جابه‌جایی می‌توان بر دیگری منطبق کرد یا دو شی را می‌توان به قطعه‌هایی قابل انطباق بر یکدیگر تقسیم کرد. اقلیدس همواره عبارات «بزرگ‌تر از» و «کوچک‌تر از» را منطبق‌بر اصل بدیهی ۵ به کار می‌برد: اگر یک شی هندسی (مثل یک پاره‌خط یا یک زاویه) بخشی از دیگری و یا هم‌اندازه با آن بخش باشد، آنگاه اولی کوچک‌تر از دومی است.

پس‌از بیان تعاریف و مفروضات، اکنون اقلیدس آمادهٔ اثبات احکام است.

گزاره‌ها

اقلیدس هر حکم ریاضی را که ثابت می‌کند گزاره می‌نامد. این نام‌گذاری تا حدودی با آنچه امروزه در نوشتار ریاضی رایج است متفاوت است. امروزه مطلبی را که ثابت می‌کنند ممکن است قضیه بنامند (حکمی مهم که معمولاً به اثبات طولانی یا دشواری نیاز دارد)؛ یا گزاره (حکمی جالب که به اثبات نیاز دارد ولی معمولاً به اندازهٔ قضیه مهم نیست)؛ یا نتیجه (حکمی جالب که با کمی تلاش از یک قضیه قبلی به دست می‌آید)؛ و یا یک لم (نتیجه‌ای مقدماتی که به خودی خود جالب نیست ولی برای اثبات یک قضیه یا گزارهٔ دیگری لازم است).

گرچه احکام اقلیدس گزاره نامیده می‌شوند، اولین چیزی که هنگام بررسی آن‌ها باید مورد توجه قرار داد این است که این‌ها نیز مانند اصل‌های موضوع به دو دستهٔ مجزا تقسیم می‌شوند. بعضی از گزاره‌ها (مانند ۱.I، ۲.I، و ۳.I) چگونگی ترسیم اشکال هندسی را توصیف می‌کنند. (اهل فن این گزاره‌ها را مسئله نامیده‌اند. ما برای وضوح بیشتر آن‌ها را مسائل ترسیمی می‌نامیم). صورت این مسائل معمولاً به صورت مصدری است («ترسیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی یک پاره‌خط مفروض»)، اما مانند سه اصل موضوع اوّل، باید طوری خوانده شوند که بر امکان‌پذیری انجام چنین ترسیمی تأکید شود: «[می‌توان] یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی یک پاره‌خط رسم کرد.»

بقیهٔ گزاره‌ها (که سنتاً آن‌ها را قضیه می‌نامند) مقرر می‌دارند که روابط مشخصی در یک شکل هندسی مفروض برقرار است. مثل گزارهٔ ۴.I (قضیهٔ ض‌زض در مورد قابلیت انطباق مثلث‌ها) و

گزارهٔ ۵.I (مبنی‌بر برابری زاویه‌های مجاور به ساق در یک مثلث متساوی‌الساقین) از این نوع‌اند. این‌ها در مورد ترسیم چیزی نیستند، بلکه فقط وقتی مطرح می‌شوند که شکل مورد بحث ترسیم شده است، و ما با استفاده از آن‌ها نتیجه می‌گیریم که روابط خاصی در آن شکل همواره برقرار است.

گزاره‌ها و برهان‌های اقلیدس در هر دو مورد مسائل ترسیمی و قضیه‌ها از یک الگوی مشخص تبعیت می‌کنند. بیشتر گزاره‌ها دارای شش بخش قابل تشخیص‌اند. در اینجا توصیف این بخش‌ها از زبان ریاضی‌دان یونانی پروکلوس آمده است [۶]:

(۱) **بیان حکم**: بیان کلی مسئلهٔ ترسیمی که قرار است حل شود یا قضیه‌ای که قرار است اثبات شود. مثال از گزارهٔ I ۱.: «ترسیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی یک پاره‌خط.»

(۲) **حالت فرضی**: انتخاب یک نمونهٔ خاص (اما اختیاری) از یک وضعیت کلی و نام‌گذاری نقاط و خطوط تشکیل‌دهندهٔ آن. مثال: «فرض کنید AB خط راست متناهی مفروضی باشد.»

(۳) **تعیین هدف**: بیان آنچه قرار است در این حالت خاص ترسیم یا اثبات شود. مثال: «بنابراین لازم است یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی پاره خط AB ترسیم شود.»

(۴) **ترسیم**: اضافه کردن نقطه، خط، و دایره برحسب ضرورت. در مسائل ترسیمی این همان جایی است که الگوریتم اصلی ترسیم بیان می‌شود. این قسمت، اگر در قضیه‌ها ظاهر شود، هر آنچه را که لازم است به شکلی اضافه کنیم تا اثبات تکمیل شود بیان می‌کند؛ اگر هم چیزی لازم نباشد می‌توان آن را حذف کرد.

(۵) **برهان**: بیان استدلال منطقی مبنی‌بر اینکه روش ترسیم گفته‌شده واقعاً مسئلهٔ مورد بحث را حل می‌کند و یا روابط داده‌شده واقعاً برقرارند.

(۶) **نتیجه‌گیری**: بیان مجدد آنچه که ثابت شده است.

لازم است نکته‌ای را در مورد قسمت نتیجه‌گیری‌ها بگوییم. اقلیدس و ریاضی‌دانان قدیم پیرو او بر این باور بودند که برهان کامل نیست مگر آنکه در انتها با جمله‌ای دقیقاً گفته شود که چه چیزی اثبات شده است. این قسمت همیشه، برای مسائل ترسیمی، با عبارتی به معنای «آنچه می‌خواستیم انجام شود» (به لاتینی quod erat faciendum یا .q.e.f) و برای قضیه‌ها با جملهٔ «آنچه می‌خواستیم ثابت شود» (به لاتینی quod erat demonstrandum یا .q.e.d) تمام می‌شد، و این ریشهٔ علامت اختصاری پایان برهان است که امروزه متداول است. در ترجمهٔ هیث از گزارهٔ I.۱، قسمت نتیجه‌گیری به‌این‌ترتیب است: «بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و بر خط راست متناهی AB

بنا شده است. آنچه می‌خواستیم.» ازآنجاکه این مرحلهٔ آخر، قالبی است که همواره باید تکرار شود، هیث بعداز چند گزارهٔ اول عبارت مخفف «درنتیجه الی‌آخر. q.e.f.» یا «درنتیجه الی‌آخر. q.e.d.» را به کار می‌برد.

مطالعهٔ دقیق گزاره‌های \اصول را به عهدهٔ شما می‌گذارم، اما خوب است که به‌اختصار به سه گزارهٔ اول آن توجه کنیم زیرا حاوی مطلب مهمّی درخصوص برداشت اقلیدس از ترسیمات باخط‌کش و پرگارند. در اینجا سه گزارهٔ اول اقلیدس را می‌آوریم:

گزارهٔ ۱.I اقلیدس. مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر یک خط راست متناهی مفروض.

گزارهٔ ۲.I اقلیدس. مطلوب رسم خط راستی است از یک نقطهٔ مفروض، مساوی با خط راستی مفروض که آن نقطه یک سرِ آن باشد.

گزارهٔ ۳.I اقلیدس. دو خط راست نامساوی داده شده‌اند. مطلوب جدا کردن خط راستی است مساوی با خط راست کوچک‌تر از خط راست بزرگ‌تر.

ممکن است تعجب کنید که چرا اقلیدس با این گزاره‌ها شروع کرده است. بدون تردید، رسم یک مثلث متساوی‌الاضلاع مفید است، اما آیا واقعاً مهم‌تر از ترسیم‌های اساسی دیگر مانند نصف‌کردن یک زاویه، نصف‌کردن یک پاره‌خط، یا رسم خط عمود است؟ گزارهٔ دوم متحیّرکننده‌تر است، تنها کاری که می‌کند رسم پاره‌خطی برابر با پاره‌خطی مفروض از نقطه‌ای داده‌شده است، بدون آنکه در مورد جهت آن اختیاری داشته باشیم. این ترسیم به چه درد می‌خورد؟

گزارهٔ سوم راز این کار را آشکار می‌کند. اگر به استفادهٔ اصل موضوع ۳ در دو گزارهٔ اول دقت کنید، روشن می‌شود که اقلیدس از «توصیف یک دایره با هر مرکز و هر شعاعی» معنای بسیار خاصی در ذهن داشته است. او در اثبات گزارهٔ ۱.I دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB، و دایره‌ای به مرکز B و شعاع BA را به کار می‌برد؛ و در اثبات گزارهٔ دوم دوایری به مرکز B و شعاع BC و به مرکز D و شعاع DG را به کار می‌برد. در هر دو مورد، مرکز نقطه‌ای ازقبل معیّن بوده و «شعاع» هم درواقع طول پاره‌خطی است که ازقبل رسم شده و یکی از نقاط انتهایی آن مرکز دایره است. او در هیچ‌یک از این دو گزاره به کاری که ما معمولاً با پرگار به‌طور فیزیکی انجام می‌دهیم وقعی نمی‌گذارد: پرگار را به اندازهٔ طول یک پاره‌خط معیّن باز کنید و دایره‌ای به همان شعاع در نقطه‌ای دیگر رسم کنید. این محدودیت کاربرد پرگار را اصطلاحاً این طور توضیح می‌دهند که پرگار فرضی اقلیدس یک «پرگار

فروریختنی» است، یعنی به‌محض برداشتن پرگار از روی کاغذ دهانهٔ آن بسته می‌شود، و درنتیجه شما نمی‌توانید آن را در نقطهٔ دیگری قرار دهید و دایره‌ای به همان شعاع قبلی رسم کنید.

هدف گزارهٔ سوم دقیقاً شبیه‌سازی پرگار غیرفروریختنی است. بعداز اثبات گزارهٔ سوم، اگر شما نقطه‌ای مانند O داشته باشید که بخواهید مرکز دایره‌ای باشد و یک پاره‌خط AB هم در جای دیگر داشته باشید و بخواهید شعاع آن دایره باشد، می‌توانید از نقطهٔ O خطی به نقطهٔ دیگری مثل E رسم کنید (اصل موضوع ۱)، سپس درصورت لزوم آن را امتداد دهید تا از AB بزرگ‌تر شود (اصل موضوع ۲)، بعداز آن با استفاده از گزارهٔ سوم نقطهٔ C را طوری روی این خط قرار دهید تا $OC = AB$ ، و سپس دایره به مرکز O و شعاع OC را رسم کنید (اصل موضوع ۳).

واضح است که یونانیان می‌توانستند پرگارهایی بسازند که وقتی از روی کاغذ برداشته می‌شوند دهانه‌اش باز بماند، پس جالب است بدانیم چرا در اصل‌های موضوع اقلیدس فقط از پرگار فروریختنی صحبت می‌شود. شاید پیش‌نویس اولیهٔ کتاب اصول حاوی صورت قوی‌تری از اصل موضوع ۳ مبتنی‌بر وجود پرگار غیرفروریختنی بوده است، بعداً اقلیدس در می‌یابد که با استفاده از سه گزارهٔ اوّل می‌تواند با یک اصل موضوع ضعیف‌تری از فرض پرگار غیرفروریختنی خلاصی یابد. اگر چنین بوده باشد، اقلیدس باید به خودش خیلی افتخار کرده باشد (و واقعاً هم افتخار دارد).

بعداز اقلیدس

کتاب اصول اقلیدس به کتاب درسی هندسه در جهان تبدیل شد و آن را به مدت دوهزار سال اکثر درس‌خوانده‌های مغرب‌زمین خوانده بودند. بااین‌حال، از همان دوران قدیم تلاش زیادی صرف شد تا روش اقلیدس در هندسه بهبود یابد.

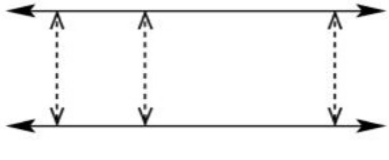
در بیشتر آن دوهزار سال، کانون توجه معطوف به اصل موضوع پنجم اقلیدس بود که معمولاً آن را مشکل‌سازترین آن پنج اصل موضوع می‌دانستند. درحالی‌که اصل‌های موضوع ۱ تا ۴ مطالب و ویژگی‌هایی را بیان می‌کنند که برای هر کسی که نگاهی هندسی به تجربیات روزمره دارد واقعاً بدیهی است، اصل موضوع ۵ کاملاً با آن‌ها تفاوت دارد. نکتهٔ جالب توجه اینکه عبارتی که برای بیان آن آمده به‌طور قابل ملاحظه‌ای طولانی‌تر از چهار اصل موضوع دیگر است. مهم‌تر از آن اینکه این اصل موضوع مطلبی را بیان می‌کند که نمی‌توان آن را مانند چهار اصل موضوع دیگر بدیهی دانست. گرچه می‌توان باور کرد که دو خط که به سمت هم شروع می‌شوند درنهایت به هم می‌رسند، اما پذیرفتن اینکه این حکم بدیهی است زیادی خوش‌بینی است. اگر مجموع دو زاویهٔ داخلی در شکل ۲، مثلاً

۱۷۹٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸ درجه باشد، آنگاه نقطهٔ تلاقی آن دو خط از فاصلهٔ دورترین کهکشان شناخته‌شدهٔ عالم نیز بیشتر خواهد بود. آیا واقعاً کسی می‌تواند بگوید که وجود چنین نقطهٔ تقاطعی بدیهی است؟ به نظر می‌رسد که ظاهر اصل موضوع پنجم طوری است که به‌جای آنکه آن را به‌عنوان یک اصل بپذیریم لازم است که آن را ثابت کنیم.

دلایلی وجود دارد که اقلیدس خودش هم از اصل موضوع پنجم راضی نبود: او تا قبل از گزارهٔ ۲۹.I در هیچ برهانی از آن استفاده نمی‌کند، درحالی‌که برخی از این برهان‌ها را می‌توانست با استفاده از آن ساده‌تر کند.

قرن‌ها، ریاضی‌دانان اصل پنجم را ضعیف‌ترین حلقه در زنجیرهٔ استدلال‌های قرص و محکم اقلیدس می‌دانستند. بسیاری از ریاضی‌دانان سعی کردند ثابت کنند که اصل پنجم به‌طور منطقی از چهار اصل دیگر نتیجه می‌شود یا اینکه دست‌کم آن را با یک اصل بدیهی‌تر جایگزین کنند، اما نتوانستند. درواقع، این جستجو موجب بیشترین گسترش هندسه از زمان اقلیدس به بعد شد.

اولین تلاش برای اثبات اصل پنجم که تا عصر جدید باقی‌مانده است به دست پروکلوس (۴۸۵–۴۱۲ ب‌م) انجام شد. او فیلسوف و ریاضی‌دان یونانی بود که در آسیای صغیر و در زمان امپراطوری بیزانس اول زندگی می‌کرد و شرح مهمی بر کتاب \اصول اقلیدس نوشته است [۶]. (درضمن، این شرح بیشترین اطلاعات ما از زندگی اقلیدس را شامل می‌شود، گرچه آن‌ها را باید اساساً افسانه دانست زیرا این کتاب ۷۰۰ سال پس از اقلیدس نوشته شده است.) پروکلوس در این کتاب معتقد است که اصل ۵ ماهیت بدیهی یک اصل موضوع را ندارد و درنتیجه باید درستی آن ثابت شود، و سپس به ارائهٔ برهانی برای آن می‌پردازد. متأسفانه، مانند بسیاری از برهان‌های دیگر پس از او، اثبات پروکلوس مبتنی‌بر یک فرض ناگفته و اثبات‌نشده بود. گرچه اقلیدس خطوط موازی را خطوطی در یک صفحه تعریف می‌کرد که هر چقدر امتداد یابند به هم نمی‌رسند، اما پروکلوس فرض کرده بود که خطوط موازی همه‌جا متساوی\الفاصله‌اند (شکل ۳ را ببینید)؛ این فرض دقیقاً معادل اصل پنجم اقلیدس است.



شکل ۳. فرض پروکلوس

پس از سقوط امپراطوری رم، مطالعهٔ هندسه بیشتر به جهان اسلام منتقل شد. گرچه متن اصلی یونانی کتاب اصول اقلیدس پیش‌از رنسانس از بین رفت، ترجمه‌های عربی آن در سراسر امپراطوری اسلامی گسترش و مورد مطالعه قرار گرفت و سرانجام دوباره به اروپا بازگشت و به لاتین و سایر زبان‌ها ترجمه شد.

طی سال‌های ۱۰۰۰–۱۳۰۰، چندین ریاضی‌دان مهم اسلامی به مطالعهٔ اصل پنجم پرداختند. برجسته‌ترین آن‌ها عمر خیام ، محقّق و شاعر ایرانی (۱۰۴۸–۱۱۲۳ م) بود که از تلاش‌های قبلی برای اثبات اصل پنجم انتقاد کرد و خود برهانی برای آن ارائه داد. برهان او نادرست بود زیرا او نیز، مثل پروکلوس، از این فرض اثبات‌نشده که همهٔ خطوط موازی متساوی‌الفاصله‌اند، استفاده کرده بود.

با شروع رنسانس، ریاضی‌دانان در اروپای غربی دوباره به بررسی اصل پنجم پرداختند. یکی از مهم‌ترین این بررسی‌ها را ریاضی‌دان ایتالیایی جووانّی ساکری (۱۶۶۷–۱۷۳۳) انجام داد. ساکری برای اثبات اصل پنجم سعی کرد با فرض غلط‌بودن آن شروع کند و به تناقضی برسد. استدلال‌های او با دقت تنظیم شده بودند و چنین دقتی برای آن روزگار قابل تحسین است. او با فرض نادرست‌بودن اصل پنجم، قضایای بسیاری را ثابت کرد که بسیار عجیب و غریب و خلاف شهود بودند، مثل اینکه مستطیل‌ها نمی‌توانند وجود داشته باشند، و یا مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها کمتر از ۱۸۰ درجه است. بااین‌حال، او نتوانست تناقضی بیابد که در چارچوب معیارهای سخت‌گیرانه‌ای که برای خودش وضع کرده بود بگنجد. فرض او باعث به وجود آمدن خطوط موازی‌ای شده بود که به یکدیگر نزدیک و نزدیک‌تر میشوند اما به هم نمی‌رسند، و او ادعا کرد که چنین چیزی «با ماهیت خط راست در تناقض است» و درنتیجه فرض ابتدایی او نادرست است.

امروزه نام ساکری در یادها مانده است، البته نه به دلیل تلاش ناموفق‌اش در اثبات اصل پنجم اقلیدس، بلکه به این دلیل که طی انجام آن کار موفق شد نتایج بسیار خوبی را ثابت کند که امروزه در یک نظام اسرارآمیز به نام هندسهٔ نااقلیدسی قضیه به حساب می‌آیند. برای ساکری، به دلیل باورهایی که در آن زمان تثبیت شده بودند، این دستاوردها فقط گام‌هایی در راه رسیدن به تناقضی بود که امیدوارانه به دنبال آن بود و هرگز به آن نرسید.

نفر بعدی در داستان ما کسی است که نقشی جزئی اما برجسته داشته است. در سال ۱۷۹۵، ریاضی‌دان اسکاتلندی جان پلی‌فیر[۱] (۱۷۴۸–۱۸۱۹) نسخه‌ای از شش مقالهٔ اول اصول اقلیدس

1. John Playfair

را منتشر کرد [۵] و در آنجا به تصحیح برخی مطالبی که اشتباه محسوب می‌شد پرداخت. یکی از آن اصلاحات جایگزینی اصل موضوع زیر با اصل پنچم اقلیدس بود.

اصل پلی‌فیر. از یک نقطه نمی‌توان دو خط به موازات خطی رسم کرد، بدون آنکه بر هم منطبق شوند.

به‌عبارت‌دیگر، از یک نقطه خارج یک خط حداکثر یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. پلی‌فیر نشان داد که این اصل همان نتایج اصل پنجم را دارد. این اصل برتری قابل‌توجهی نسبت به اصل پنجم دارد، زیرا توجه را به یکتایی خطوط موازی جلب می‌کند، که (همان‌طورکه ریاضی‌دانان نسلهای بعد دریافتند) اصل مطلب همین است. در اکثر متون مدرن هندسهٔ اقلیدسی صورتی از اصل پلی‌فیر را به‌جای اصل موضوع پنجم اقلیدس به کار می‌برند.

کشف هندسهٔ نااقلیدسی

رویداد دیگری در تاریخ هندسه به وقوع پیوست که بنیادی‌ترین پیشرفت در ریاضیات از زمان اقلیدس به بعد بود. در دههٔ ۱۸۲۰، اندیشه‌ای انقلابی به‌طور مستقل و کم و بیش هم‌زمان به ذهن سه ریاضی‌دان رسید: شاید علت دشواری اثبات اصل پنجم این باشد که یک نظریهٔ کاملاً سازگار در هندسه وجود دارد که در آن چهار اصل اول اقلیدس درست ولی اصل پنجم غلط است. اگر چنین حدسی درست باشد به این معنی است که اثبات اصل پنجم به کمک چهار اصل دیگر از نظر منطقی غیرممکن است.

در سال ۱۸۲۹، نیکلای لباچفسکی (۱۷۹۲–۱۸۵۶) مقاله‌ای منتشر کرد که در آن بنیان آنچه ما امروزه هندسهٔ نااقلیدسی می‌نامیم گذاشته شد؛ او در آن مقاله اصل پنجم را نادرست می‌انگارد و قضیه‌های بسیاری دراین‌خصوص ثابت می‌کند. درهمین‌زمان در مجارستان، یانوش بویویی (۱۸۰۲–۱۸۶۰)، پسر جوان یک ریاضی‌دان برجستهٔ مجارستانی، سال‌های ۱۸۲۰–۱۸۲۳ را صرف نوشتن مقاله‌ی با همان مضمون کرد. مقالهٔ او در ۱۸۲۳ به‌عنوان ضمیمهٔ کتاب درسی‌ای از پدرش انتشار یافت. وقتی که ریاضی‌دان بزرگ آلمانی کارل فردریش گاوس (۱۸۵۵–۱۷۷۷) ــ یکی از دوستان پدر بویویی ــ مقالهٔ بویویی را ملاحظه کرد، گفت که این‌ها دقیقاً همان مطالبی است که خودش قبلاً آن‌ها را کشف کرده است اما هیچگاه منتشر نکرده است. گرچه لباچفسکی و بویویی براساس آثار منتشرشده‌شان سزاوار دریافت عنوان خالق هندسهٔ نااقلیدسی را داشتند، با توجه به خلاقیت و عمق آثار دیگر گاوس در ریاضی، هیچ دلیلی وجود ندارد که شک کنیم که گاوس نیز به‌واقع همان

اندیشه‌های لباچفسکی و بویویی را داشته است.

به نوعی، سهم اصلی این ریاضی‌دانان بیش‌از هر چیز دیگر ایجاد یک تغییر نگرش بود: درحالی‌که عمر خیام، جووانّی ساکری، و دیگران نیز قضیه‌هایی در هندسهٔ نااقلیدسی ثابت کرده بودند، ولی لباچفسکی و بویویی (و همچنین احتمالاً گاوس) افرادی بودند که برای اولین‌بار آن را با چنین عنوانی متمایز کردند. بااین‌حال، حتی پس‌از کار پیشگامانهٔ آن‌ها، هیچ دلیلی مبنی‌بر سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی وجود نداشت (یعنی اینکه چنین هندسه‌ای منجر به تناقضی نمی‌شود). ضربهٔ نهایی این همه تلاش برای اثبات اصل پنجم را در سال ۱۸۶۸ ریاضی‌دان ایتالیایی دیگری به نام ائوجینیو بلترامی (۱۸۳۵–۱۹۰۰) وارد کرد، او برای اولین‌بار ثابت کرد که هندسهٔ نااقلیدسی به اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی سازگار است و به‌این‌ترتیب این سؤال قدیمی را که آیا اصل پنجم می‌تواند از چهار اصل دیگر نتیجه شود پاسخ داد.

مدل‌های هندسهٔ نااقلیدسی که لباچفسکی، بویویی، گاوس، و بلترامی مورد مطالعه قرار دادند اساساً با یکدیگر معادل‌اند. این نوع هندسه را امروزه هندسهٔ هذلولوی می‌نامند. برجسته‌ترین ویژگی این هندسه این است که اصل پلی‌فیر در آن برقرار نیست: در هندسهٔ هذلولوی همواره این امکان وجود دارد که از یک نقطه چندین خط متمایز به موازات یک خط رسم کرد. به‌همین‌دلیل بسیاری از قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی دربارهٔ خطوط موازی (مانند گزارهٔ I.۲۹ در مورد تساوی زاویه‌هایی که از تقاطع یک خط با دو خط موازی پدید می‌آید) در هندسهٔ هذلولوی معتبر نیستند. درواقع ثابت می‌شود که پدیدهٔ به هم نرسیدن خطوط موازی که به‌صورت مجانبی به یکدیگر نزدیک می‌شوند ــ همانی که ساکری می‌گفت «با ماهیت خطوط راست در تناقض است» ــ واقعاً در هندسهٔ هذلولوی رخ می‌دهند.

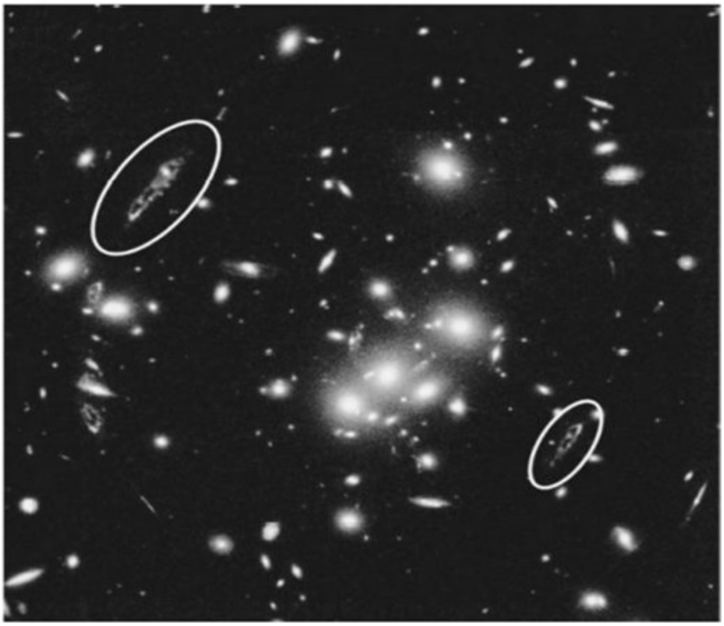
همچنین ممکن است سؤال شود که آیا ممکن است نظریهٔ اقلیدس در مورد خطوط موازی در جهت عکس هم برقرار نباشد: به‌جای وجود دو خط موازی یا بیشتر گذرنده از یک نقطه، آیا می‌توان نظریه‌ای سازگار بنا کرد که در آن از یک نقطه هیچ خطی به موازات خطی مفروض نتوان رسم کرد؟ تصور هندسه‌ای که در آن خطوط موازی وجود ندارد آسان است: هندسهٔ یک کره. اگر شما همان‌طورکه روی یک سطح در امتداد یک خط راست حرکت می‌کنید روی کره نیز حرکت کنید، مسیر حرکت شما یک دایرهٔ عظیمه روی کره خواهد بود ــ دایره‌ای که مرکز آن همان مرکز کره است. این دایره محل تلاقی کره با صفحهٔ گذرنده از مرکز کره است. اگر «خط» را به معنای دایرهٔ عظیمه روی کره بگیریم، در این صورت هیچ دو خط موازی روی کره نداریم، زیرا هر دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را

قطع می‌کنند. اما به نظر می‌رسد این مطلب ارتباط چندانی با هندسهٔ اقلیدسی ندارد، زیرا خطوط را نمی‌توان به دلخواه روی کره امتداد داد ـــ در هندسهٔ کروی هیچ خطی نمی‌تواند طویل‌تر از محیط کره باشد. به نظر می‌رسد که این مطلب با اصل موضوع ۲ اقلیدس، که به‌تعبیری می‌گوید هر خط را می‌توان در هر دو جهت به هر اندازه امتداد داد مغایرت دارد.

بااین‌حال، پس از کشف هندسهٔ هذلولوی، ریاضی‌دان آلمانی دیگری به نام برنهارد ریمان (۱۸۲۶–۱۸۶۶) متوجه شد که اصل دوم اقلیدس را می‌توان به‌گونه‌ای تعبیر کرد که روی سطح یک کره نیز برقرار باشد. او می‌گفت که اصل دوم اقلیدس فقط می‌گوید که هر پاره‌خطی را می‌توان از دو جهت امتداد داد و به پاره‌خطی طویل‌تر تبدیل کرد و به‌طور مشخص نمی‌گوید که به اندازهٔ هر طولی بخواهیم می‌توانیم آن را امتداد دهیم. با این تعبیر، هندسهٔ کروی را می‌توان یک هندسهٔ سازگار تلقی کرد که در آن هیچ دو خطی نمی‌توانند موازی باشند. البته در این حالت، تعدادی از برهان‌های اقلیدس نامعتبر می‌شوند، زیرا بسیاری از مفروضاتی که او در برهان‌هایش به کار برده روی کره برقرار نیست؛ برای مثال، بحث زیر دربارهٔ گزاره I.۱۶ اقلیدس را ببینید. این صورت از هندسهٔ نااقلیدسی را گاهی هندسهٔ بیضوی می‌نامند. (به‌دلیل ارتباط این هندسه با ریمان، گاهی به‌اشتباه آن را هندسهٔ ریمانی می‌نامند، حال‌آنکه این عنوان اکنون عموماً به هندسه‌ای از نوعی کاملاً متفاوت اطلاق می‌شود که شاخه‌ای از هندسهٔ دیفرانسیل است.)

شاید قانع‌کننده‌ترین تأیید بر اینکه هندسهٔ اقلیدسی تنها نظریهٔ ممکن و سازگار هندسی نیست نظریهٔ نسبیت عام اینشتین در اواخر قرن بیستم باشد. اگر مانند اقلیدس بر این باور باشیم که اصل‌های موضوع برگرفته از حقایق هندسی جهانی است که در آن زندگی می‌کنیم، در این صورت احکام اقلیدس در مورد «خط راست» باید در مورد رفتار پرتوهای نور در جهان واقعی درست دربیایند. (به‌هرحال، ما معمولاً «راست»بودن خطوط را با مشاهدهٔ آن‌ها معلوم می‌کنیم، و کدام پدیدهٔ فیزیکی می‌تواند مدل بهتری برای «خط راست» باشد به‌جز احتمالاً پرتوهای نور؟) بنابراین شبیه‌ترین مدل فیزیکی به یک مثلث در عالم یک شکل سه ضلعی است که اضلاع آن پرتوهای نورند.

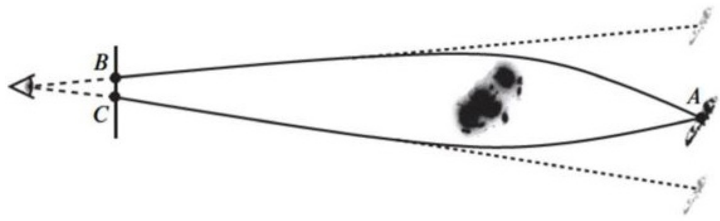
اما نظریهٔ اینشتن به ما می‌گوید که با وجود میدان‌های گرانشی، فضا خودش «تابیده» است، و این بر مسیر پرتوهای نور تأثیر می‌گذارد. یکی از مهم‌ترین تأییدیه‌های نظریهٔ اینشتن از پدیده‌ای به نام همگرایی گرانشی نور ناشی می‌شود: این پدیده زمانی اتفاق می‌افتد که ما یک جسم دوردست را مشاهده می‌کنیم، اما یک خوشهٔ کهکشانی عظیم بین ما و جسم وجود دارد. نظریهٔ اینشتن پیش‌بینی می‌کند که به‌دلیل وجود انحراف و خمیدگی در اطراف خوشهٔ کهکشانی، پرتوهای نور از جسم دوردست



شکل ۴. نمونه‌ای از همگرایی گرانشی

باید بتوانند دو (یا چند) مسیر مختلف را برای رسیدن به چشم ما دنبال کنند.

این پدیده واقعاً مشاهده شده است؛ شکل ۴ عکسی را نشان می‌دهد که توسط تلسکوپ فضایی هابل گرفته شده و در آن یک کهکشان حلقه‌ای‌شکل (که دور آن دایره کشیده شده است) دوبار در یک تصویر عکاسی ظاهر شده است، زیرا پرتوهای نور آن، در دو طرف خوشهٔ کهکشانی بزرگ، در وسط تصویر، حرکت کرده است. شکل ۵ یک نمای کلی از همان وضعیت را نشان می‌دهد. نور از نقطهٔ A در وسط کهکشان حلقه‌ای‌شکل ساطع می‌شود و از دو مسیر به چشم ما می‌رسد و در طول مسیر، دو نقطهٔ متمایز (B و C) روی صفحهٔ عکاسی ایجاد می‌کند. به‌این‌ترتیب، سه نقطهٔ A، B، و C یک مثلث پدید می‌آورند که مجموع زوایای داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه است. (گرچه در این نمودار چندان شبیه به مثلث به نظر نمی‌رسد، توجه داشته باشید که اضلاع مثلث مسیرهای پرتوهای نور هستند. چه چیزی راست‌تر از این پرتوها می‌تواند باشد؟) اما پیش‌بینی هندسهٔ اقلیدسی این است که مجموع زوایای داخلی هر مثلث دقیقاً ۱۸۰ درجه است. با بررسی شکل می‌توانیم دلیل نادرستی استدلال‌های اقلیدس را در این حالت مشاهده کنیم: در اینجا دو خط وجود دارد که نقطهٔ A را به چشم ناظر متصل می‌کند، و این با آنچه اقلیدس در اصل اوّل در نظر داشت تناقض دارد. ما چاره‌ای نداریم جز اینکه به این نتیجه برسیم که هندسهٔ جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، لزوماً از



شکل ۵. مثلثی که مجموع زاویه‌های آن بیشتر از ۱۸۰ درجه است.

قوانین اقلیدس تبعیت نمی‌کند.

ایرادهایی در استدلال‌های اقلیدس

با پیشرفت‌هایی که ایدهٔ هندسهٔ نااقلیدسی به دست لباچفسکی، بویویی، و گاوس کرد ریاضی‌دانان مجبور شدند مبانی کار خود را مورد بررسی مجدد قرار دهند. اقلیدس و پیروان او اصل‌های موضوع او را حقایقی بدیهی در دنیای واقعی تلقی می‌کردند. اما وقتی معلوم شد که دو یا سه دستگاه متضاد از اصل‌ها، به‌عنوان مبانی منطقی هندسه، به همان اندازه کارامدند، ریاضی‌دانان با یک سؤال چالشی مواجه شدند: وقتی ما اصل‌هایی را می‌پذیریم و از آن‌ها برای اثبات قضیه‌هایی استفاده می‌کنیم دقیقاً چه اتفاقی می‌افتد؟ روشن است که دستگاه اصل موضوعی‌ای که افراد به کار می‌برند به‌نوعی یک انتخاب دلخواه است، و پس از انتخاب اصل‌ها، تا زمانی که تناقضی ایجاد نشود، می‌توان هر قضیهٔ مبتنی‌بر آن‌ها را ثابت کرد.

به‌این‌ترتیب مفهوم دستگاه اصل موضوعی برای نظریه‌های ریاضی متولد شد ــ سلسله‌ای از قضیه‌ها متکی‌بر مجموعه‌ای خاص از مفروضات به نام بنداشت یا اصل موضوع (این دو کلمه در ریاضیات امروزی مترادف به کار برده می‌شوند).

البته، دستگاه‌های اصل موضوعی‌ای که ما انتخاب می‌کنیم آن‌چنان هم دلبخواهی نیستند، زیرا تنها دستگاه‌های اصل موضوعی‌ای که ارزش مطالعه دارند آن‌هایی هستند که چیز مفید یا جالبی را توصیف می‌کنند، مثلاً جنبه‌ای از دنیای فیزیکی یا دسته‌ای از ساختارهای ریاضی که در زمینه‌هایی مفید واقع شده‌اند. اما از دیدگاهی کاملاً منطقی، ما می‌توانیم هر دستگاه اصل موضوعی کاملاً سازگاری را انتخاب کنیم، که در این صورت قضیه‌های حاصل‌شده نیز یک نظریهٔ ریاضی معتبر خواهد بود.

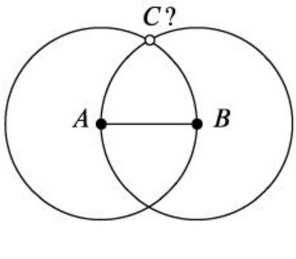
نکتهٔ اصلی این است که باید اطمینان کامل پیدا کنیم که در اثبات قضیه‌ها در یک نظام اصل

موضوعی از هیچ چیزی به‌جز آنچه در اصل‌های موضوع آمده است استفاده نشده باشد. اگر اصل‌های موضوع به‌جای حقایق بدیهی از جهان واقعی بیانگر مفروضات دلبخواهی باشند، در این صورت به‌جز اصل‌های موضوع هیچ چیز دیگری در آن نظام ارتباطی با برهان‌ها پیدا نمی‌کند. استدلال شهودی دربارهٔ رفتار خطوط مستقیم یا ویژگی‌هایی از آن‌ها که از روی نمودار یا تجربهٔ روزمره معلوم است دیگر جایی در آن دستگاه اصل موضوعی نخواهد داشت.

وقتی ریاضی‌دانان با این بینش جدید به اصول اقلیدس نگاه کردند دریافتند که اقلیدس بسیاری از ویژگی‌های خطوط و دایره‌ها را که اصل‌های موضوع او برای آن‌ها کفایت نمی‌کنند به کار برده است. اجازه دهید چندتا از آن ویژگی‌ها را بررسی کنیم تا انگیزهٔ ابداع دستگاه‌های اصل موضوعی دقیق‌تر برای هندسهٔ اقلیدسی معلوم شود. برخی از برهان‌های پُرایراد اقلیدس را به همان ترتیبی که در مقالهٔ اول اصول آمده بررسی خواهیم کرد.

به خاطر داشته باشید که ما در تحلیل برهان‌های اقلیدس ازلحاظ بی‌نقض بودن معیارهایی را به کار می‌بریم که در زمان اقلیدس اصلاً مطرح نبوده‌اند. برای یونانیان باستان برهان‌های هندسی در حکم استدلال‌هایی قانع‌کننده در مورد هندسهٔ جهان طبیعی بودند، بنابراین استناد به نتایجی براساس حقایقی که از نمودارها آشکار بود، هرگز به‌عنوان شکلی نامعتبر از استدلال تلقی نمی‌شد. بنابراین این مشاهدات را نباید به‌عنوان نقد کار اقلیدس تلقی کرد، بلکه منظور ما از طرح آن‌ها نشان دادن راهی به سوی ابداع یک دستگاه اصل موضوعی جدید است که با مفهوم جدید دقت (پسااقلیدسی) در زمان ما مطابقت داشته باشد.

گزارهٔ I.۱ اقلیدس. مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر یک خط راست متناهی مفروض.

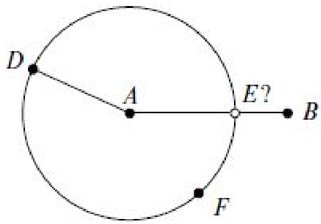


شکل ۶. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ I.۱

تحلیل. در اثبات اقلیدس برای این اوّلین گزارهٔ اصول، او دو دایره رسم می‌کند، هریک به مرکز دو

سر پاره‌خط AB (شکل ۶). (در نمودارهای هندسی، نقاط انتخاب‌شده را برای نشان دادن موقعیت مکانی‌شان به‌صورت نقاط کوچک سیاه‌رنگ نشان می‌دهیم، و این کار صرفاً برای راحتی نمایش است و به این معنا نیست که آن‌ها جایی در صفحه اِشغال می‌کنند.) او سپس نقطهٔ C را به‌عنوان محل تلاقی دو دایره در نظر می‌گیرد. با توجه به نمودار، واضح به نظر می‌رسد که دایره‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند، اما کدام‌یک از اصل‌های اقلیدس وجود چنین نقطه‌ای را توجیه می‌کند؟ دقت کنید که اصل ۵ وجود نقطهٔ تلاقی برای دو خط را در شرایطی خاص بیان می‌کند، اما اقلیدس هیچ کجا هیچ توجیهی برای وجود نقطهٔ تلاقی دو دایره به ما نمی‌دهد.

گزارهٔ I.۳ اقلیدس. دو خط راست نامساوی داده شده‌اند. مطلوب جدا کردن خط راستی است مساوی با خط راست کوچک‌تر از خط راست بزرگ‌تر.



شکل ۷. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ I.۳

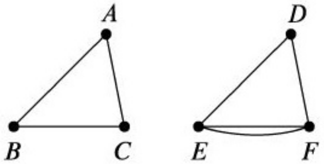
تحلیل. اقلیدس در سومین برهان از کتابش هم به‌طور ضمنی ویژگی توجیه‌نشده‌ای از دایره‌ها را استفاده می‌کند، البته این یکی کمی ظریف‌تر است. او با پاره‌خط ترسیم‌شدهٔ AD که یک نقطهٔ مشترک با پاره‌خط بلندتر AB دارد شروع می‌کند و دایرهٔ DEF را به مرکز A که از D نیز می‌گذرد رسم می‌کند (بنابه اصل ۳). گرچه او به‌صراحت نمی‌گوید، اما از نمودارش پیداست که منظور او از نقطهٔ E، نقطهٔ تلاقی دایرهٔ DEF و پاره‌خط AB است. اما بار دیگر، هیچ‌چیزی در اصل‌های او (یا دو گزارهٔ اوّل که قبلاً ثابت کرده) وجود ندارد که این ادعای تلاقی دایره و پاره‌خط را توجیه کند.

گزارهٔ I.۴ اقلیدس. هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی دیگر مساوی باشند ضلع‌های سوم آن ها نیز با هم مساوی‌اند، درنتیجه دو مثلث متساوی و زاویه‌های دیگر آن‌ها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلع های متساوی نیز نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند.

تحلیل. این اثبات اقلیدس برای قضیهٔ معروف تساوی دو مثلث به حالت ض‌زض است. او با دو مثلث ABC و DEF شروع می‌کند، که $AB = DE$ و $AC = DF$ و زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF برابر است. (درحال‌حاضر، می‌پذیریم که منظور اقلیدس از «برابری» همان «یک اندازه بودن» است.) سپس می‌گوید باید مثلث ABC را «بر روی مثلث DEF بنهیم». منظور آن است که تصوّر کنیم مثلث ABC حرکت می‌کند و نقطهٔ A روی نقطهٔ D، و پاره‌خط AB روی پاره‌خط DE قرار می‌گیرد به‌طوری‌که کپی منتقل‌شده از ABC در همان وضعیت مثلث DEF قرار گیرد. (گرچه اقلیدس به‌صراحت نمی‌گوید اما می‌خواهد نقطهٔ C را هم در همان طرف DE که F قرار دارد جای دهد تا به‌این‌ترتیب مطمئن شود که کپی منتقل‌شدهٔ ABC به‌جای آنکه تصویر آینه‌ای DEF باشد، بر آن منطبق شود.) این شیوه به روش برهم‌نهی معروف شده است.

این استدلال به‌لحاظ شهودی جذاب است، زیرا برای همهٔ ما در زندگی روزمره پیش آمده است که با جابه‌جا کردن برش‌هایی از اشکال هندسی آن‌ها را بر هم منطبق کنیم. بااین‌حال، هیچ‌یک از اصل‌های اقلیدس نه امکان جابه‌جایی اشکال هندسی را توجیه نمی‌کند و نه اینکه ویژگی‌های هندسی اشکال مانند طول اضلاع و اندازهٔ زاویه‌ها بعد از حرکت بدون تغییر بماند. البته، گزاره‌های ۲.I و ۳.I چگونگی ترسیم «نسخه‌هایی» از یک پاره‌خط در جاهای دیگری از صفحه را شرح می‌دهند، اما چیزی در مورد المثنای زاویه‌ها یا مثلث‌ها نمی‌گویند. (واقع این است که اقلیدس بعداً در گزارهٔ ۲۳.I ثابت می‌کند که می‌توان یک کپی از یک زاویه را در مکان دیگری از صفحه رسم کرد، اما این اثبات متکی‌به گزارهٔ ۴.I است!)

این یکی از جدی‌ترین موردهای ایراددار اثبات‌های اقلیدس است. درواقع، بسیاری از محقّقان عقیده دارند که اقلیدس خودش هم در استفاده از روش برهم‌نهی آسوده‌خاطر نبوده است، زیرا او از این روش تنها در سه برهان از کل سیزده جلد مقالات اصول استفاده کرده است (گزاره‌های ۴.I، ۸.I، ۲۳.III)، علی‌رغم آنکه او می‌توانست با به‌کارگیری این روش بسیاری از برهان‌های دیگر را

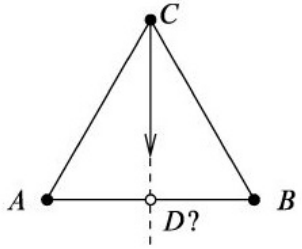


شکل ۸. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ ۴.I

ساده‌تر کند.

در این استدلال اقلیدس ایراد مهم دیگری نیز وجود دارد. او با این استدلال که مثلث ABC را می‌توان به‌گونه‌ای جابه‌جا کرد که A بر D ، B بر E ، و C بر F منطبق شود، نتیجه می‌گیرد که پاره‌خط‌های BC و EF نیز بر هم منطبق خواهند شد، و درنتیجه باهم برابرند (از نظر اندازه). درحالی‌که اصل ۱ می‌گوید که می‌توان یک خط (یا پاره‌خط) از یک نقطه به هر نقطهٔ دیگری رسم کرد اما نمی‌گوید که چنین خطی را به‌صورت یکتا می‌توان ترسیم کرد. بنابراین، اصل‌های موضوع هیچ توجیهی برای لزوم انطباق BC بر EF ارائه نمی‌دهند، حتّی اگر نقاط انتهایی یکسانی داشته باشند. واضح است که منظور اقلیدس این بوده است که خواننده بفهمد که یک پاره‌خط یکتا از یک نقطه به نقطهٔ دیگر وجود دارد. در یک دستگاه اصل موضوعی جدید، چنین چیزی باید به‌صراحت بیان شود.

گزارهٔ I.۱۰ اقلیدس. مطلوب نصف کردن یک خط راست متناهیِ مفروض است.



شکل ۹. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ I.۱۰

تحلیل. اقلیدس در اثبات این گزاره از ویژگی ظریف دیگری از محل‌های تلاقی استفاده می‌کند که برای آن توجیهی براساس اصل‌های موضوع وجود ندارد. او با داشتن پاره‌خط AB مثلث ABC را که AB یکی از اضلاع آن است رسم می‌کند (که گزارهٔ I.۱ آن را توجیه می‌کند) و سپس نیمساز زاویهٔ ACB را رسم می‌کند (گزارهٔ I.۹ که قبل از آن اثبات شده است آن را توجیه می‌کند). تا اینجای کار خوب است و مشکلی نیست. اما نمودار او نشان می‌دهد که این نیمساز پاره‌خط AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند، و او ثابت می‌کند AB دقیقاً در این نقطه نصف شده است. باردیگر اصل‌های موضوع هیچ توجیهی برای ادعای اقلیدس مبنی‌بر وجود چنین تلاقی‌ای در اختیار نمی‌گذارند.

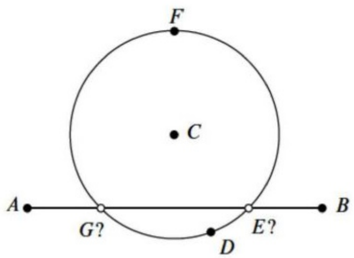
گزارهٔ I.۱۲ اقلیدس. مطلوب رسم خط راستی است عمود بر یک خط راست نامتناهیِ مفروض، از نقطهٔ مفروض ناواقع بر آن.

تحلیل. اقلیدس در این اثبات با خط AB و نقطهٔ C ناواقع بر آن شروع می‌کند. بعد میگوید «فرض کنید نقطهٔ D در سمت دیگر AB باشد، و دایرهٔ EFG را به مرکز C و شعاع CD در نظر بگیرید.» او تصریح می‌کند که D باید روی محیط دایرهٔ رسم‌شده قرار گیرد، که دقیقاً همان چیزی است که اصل ۳ اجازه انجامش را می‌دهد. بااین‌حال او تلویحاً فرض می‌کند که چنین دایره‌ای AB را در دو نقطه قطع می‌کند، و آن‌ها را G و E می‌نامد. بدیهی است که آنچه قرار است وجود این تقاطع را تضمین کند، همانا قرارگرفتن C و D در دو طرف خط AB است، اما کدام‌یک از اصل‌های موضوع یا گزاره‌هایی که قبل از این ثابت کرده است چنین چیزی را توجیه می‌کند؟ منظور از «طرف دیگر» چه می‌تواند باشد؟ در تعاریف و اصل‌های موضوع اقلیدس به‌هیچ‌وجه اشاره‌ای به «طرف» برای خطوط نشده است، اما او دائماً در برهان‌های خود از آن نام می‌برد. از شکل‌ها و نمودارها معلوم است که منظور او چیست، اما اصل‌های موضوع چیزی دربارهٔ آن نمی‌گویند.

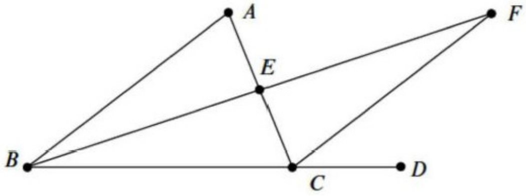
گزارهٔ ۱۶.I اقلیدس. در هر مثلث اگر یکی از ضلع‌ها را امتداد دهیم زاویهٔ خارجیِ حاصل، از هریک از زاویه‌های داخلیِ غیرمجاورِ با آن بزرگ‌تر است.

تحلیل. امروزه این حکم را نابرابری زاویهٔ خارجی می‌نامند. اثبات آن یکی از ظریف‌ترین و هوشمندانه‌ترین استدلال‌های کتاب اصول است و برای اینکه اثر کامل آن را درک کنید ارزش بیش‌از یک بار خواندن را دارد.

دو ایراد در این استدلال وجود دارد که کشف آن‌ها ساده نیست. اقلیدس بعداز رسم نقطهٔ E که AC را به دو نیم می‌کند (با استفاده از گزارهٔ ۱۰.I) BE را از طرف E امتداد می‌دهد و با استفاده از گزارهٔ ۳.I نقطهٔ F را روی آن چنان انتخاب می‌کند که اندازهٔ EF با اندازهٔ BE برابر باشد. اینجاست که اوّلین مشکل پیش می‌آید. گرچه اصل ۳ تضمین می‌کند که یک پاره‌خط را می‌توان امتداد داد تا پاره‌خطی بلندتر و شامل آن به دست آید، اما به‌صراحت نمی‌گوید که آن را به هر اندازه



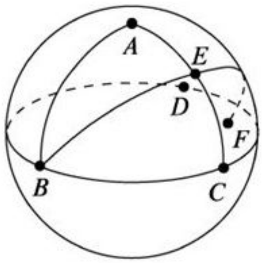
شکل ۱۰. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ ۱۲.I



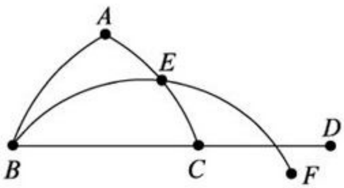
شکل ۱۱. اثبات اقلیدس برای گزارهٔ I.۱۶

که بخواهیم می‌توانیم امتداد دهیم. همان‌طورکه در بالا اشاره کردیم، روی کُره چنین کاری امکان‌پذیر نیست، زیرا دوایر عظیمه بیشترین طول ممکن را دارند.

مشکل دوم در پایان اثبات ظاهر می‌شود، جایی‌که اقلیدس ادعا می‌کند که زاویهٔ ECD بزرگ‌تر از زاویهٔ ECF است. گمان بر این است که این مطلب با این نکته که کل بزرگ‌تر از جز است، توجیه می‌شود. اما برای آنکه ادعا کنیم زاویهٔ ECF بخشی از زاویه ECD است، لازم است بدانیم که F داخل زاویهٔ ECD قرار دارد. با توجه به شکل چنین چیزی بدیهی به نظر می‌رسد، اما هیچ‌یک از اصل‌ها و گزاره‌های قبل از آن چنین چیزی را تضمین نمی‌کنند. برای اینکه ببینیم چگونه چنین چیزی ممکن است غلط باشد، یک بار دیگر سطح یک کره را در نظر بگیرید. در شکل ۱۲ نموداری شبیه به وضعیت بالا را نشان داده‌ایم که در آن نقطهٔ A در قطب شمال و نقاط B و C روی خط استوا قرار دارند. اگر B و C به اندازهٔ کافی از هم دور باشند، کاملاً امکان‌پذیر است که نقطهٔ F در ناحیهٔ جنوبی خط استوا قرار گیرد، که در این صورت داخل زاویهٔ ECD قرار نمی‌گیرد. (شکل ۱۳ همان شکل سمت راست را نشان می‌دهد که روی صفحه پهن شده است.)



شکل ۱۲. نادرستی برهان اقلیدس روی یک کره



شکل ۱۳. تصویر گسترده‌شدهٔ شکل مجاور

ممکن است در عمل برخی از این ایرادات به استدلال‌های اقلیدس خیلی مهم به نظر نیایند،

زیرا، بالاخره، کسی در درستی قضیه‌های اقلیدس شک نمی‌کند. اما اگر به روابطی که از روی شکل بدیهی به نظر می‌رسند تکیه کنیم، ممکن است به بیراهه برویم. این بخش را با ارائهٔ یک «اثبات» مغالطه‌آمیز از یک «قضیه» کاذب به پایان می‌بریم که آشکارا خطر تکیه به نمودارها را نشان می‌دهد.

استدلال زیر به اندازهٔ اثبات‌های اقلیدس دقیق است، و هر مرحلهٔ آن با اصل‌های اقلیدس، اصل‌های بدیهی، و گزاره‌های اقلیدس توجیه می‌شود، بااین‌حال قضیه‌ای حاصل می‌شود که نادرستی آن بر همه آشکار است. این اثبات اولین‌بار در سال ۱۸۹۲ در یک کتاب سرگرمی‌های ریاضی نوشتهٔ بال [۱] آمده است.

قضیهٔ جعلی. هر مثلث حداقل دو ضلع برابر دارد.

برهان نادرست. فرض کنید ABC مثلث دلخواهی باشد و AD را نیمساز زاویه A بگیرید (گزارهٔ ۹.I). حالت‌های مختلفی را در نظر می‌گیریم.

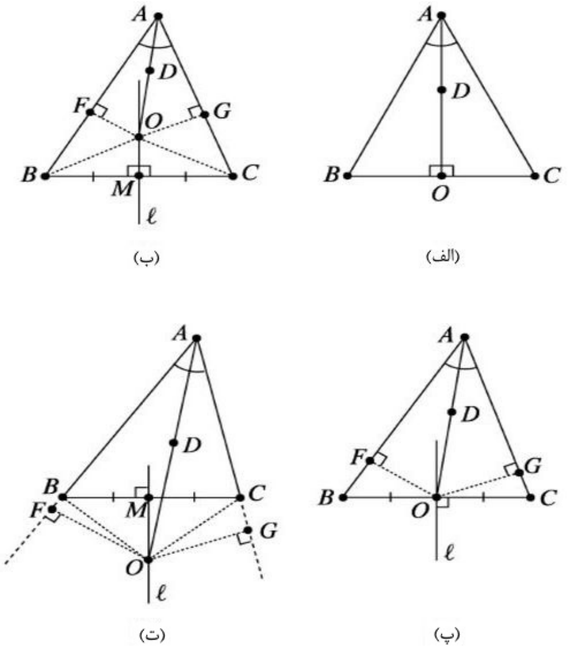
فرض کنید وقتی AD را امتداد می‌دهیم (اصل ۲)، BC را به‌صورت عمودی قطع کند. فرض کنید نقطهٔ O محل این تلاقی باشد (شکل ۱۴(الف)). به‌این‌ترتیب، طبق تعریف «عمود بودن»، دو زاویهٔ AOB و AOC زوایای قائمه‌اند. پس دو مثلث AOB و AOC دارای دو جفت زاویهٔ برابر و یک ضلع مشترک AO هستند، و درنتیجه طبق گزارهٔ ۲۶.I اضلاع AB و AC با هم برابرند.

در تمام حالت‌های بعدی فرض می‌کنیم امتداد AD بر BC عمود نباشد. فرض کنید BC در M نصف شود (گزارهٔ ۱۰.I)، فرض کنید ℓ خط عمود بر BC در M باشد (گزارهٔ ۱۱.I)، و AD را امتداد دهید (اصل ۲) تا ℓ را در O قطع کند. حال بسته به محل O، سه حالت ممکن است پیش بیاید.

حالت ۱: O داخل مثلث ABC قرار دارد (شکل ۱۴(ب)). BO و CO را رسم کنید (اصل ۱). توجه داشته باشید که دو مثلث BMO و CMO دارای دو جفت ضلع متناظر برابر هستند (MO مشترک و $BM = CM$)، و زاویه‌های BMO و CMO هر دو قائمه‌اند. به‌این‌ترتیب، طبق گزارهٔ ۴.I ضلع‌های باقی‌مانده، یعنی BO و CO نیز با هم برابرند. اکنون OF را عمود بر AB و OG را عمود بر AC رسم کنید (گزارهٔ ۱۲.I). به‌این‌ترتیب، مثلث‌های AFO و AGO دارای دو جفت زاویه‌های متناظر برابر و ضلع مشترک AO هستند، پس طبق گزارهٔ ۲۶.I جفت اضلاع باقی‌ماندهٔ متناظر نیز با هم برابرند: $AF = AG$ و $FO = GO$. اکنون می‌توان نتیجه گرفت که مثلث‌های BFO و CGO قائم‌الزاویه‌اند که در آن‌ها وترهای BO و CO و همچنین اضلاع FO و GO برابرند. به‌این‌ترتیب، طبق قضیهٔ فیثاغورس و اصل بدیهی ۳، FB و GC

برابرند، بنابراین تساوی‌های $AF = AG$ و $FB = GC$ را داریم که با توجه به اصل بدیهی ۲، نتیجه می‌گیریم $AB = AC$.

حالت ۲: O روی BC قرار دارد (شکل ۱۴(پ)). در این صورت O همان نقطه‌ای است که BC را به دو نیم تقسیم می‌کند، زیرا آنجا همان نقطه‌ای است که خط ℓ با BC برخورد می‌کند. در این حالت نیز دقیقاً مانندحالت (۱) استدلال می‌کنیم، با این تفاوت که می‌توانیم از گام اول مربوط به مثلث‌های BMO و CMO بگذریم، زیرا از قبل می‌دانیم که $BO = CO$ (زیرا BC در O به دونیم شده است). بقیهٔ اثبات دقیقاً مانند حالت قبل پیش می‌رود تا به نتیجهٔ $AB = AC$ برسیم.



شکل ۱۴. «اثبات» اینکه هر مثلث دو ضلع برابر دارد.

حالت ۳: O خارج مثلث ABC قرار دارد (شکل ۱۴(ت)). مجدداً اثبات دقیقاً مانند حالت (۱) پیش می‌رود، با این دو تغییر: اول، قبل از رسم OF و OG لازم است AB را از سمت B، و AC را از سمت C امتداد دهیم (اصل ۲) و OF و OG را عمود بر این امتدادها رسم کنیم (گزارهٔ ۱۲.I). دوم، در آخرین مرحله بعد از نشان دادن اینکه $AF = AG$ و $FB = GC$ ، به‌جای اصل بدیهی ۲ از اصل بدیهی ۳ استفاده می‌کنیم و تساوی $AB = AC$ را نتیجه می‌گیریم.

دستگاه‌های اصل موضوعی جدید

دیدیم کشف هندسهٔ نااقلیدسی بازنگری در مبانی هندسه، حتّی هندسهٔ اقلیدسی، را ضروری کرد. در سال ۱۸۹۹، این تلاش‌ها به دست ریاضی‌دان آلمانی داوید هیلبرت (۱۸۶۲–۱۹۴۳)، با ابداع اوّلین مجموعه از اصل‌های موضوع برای هندسهٔ اقلیدسی ــ که برای اثبات همهٔ گزاره‌های کتاب اصول کافی بود ــ به اوج خود رسید. به پیروی از سنّت ایجادشده توسط اقلیدس، هیلبرت نیز در دستگاه اصل موضوعی خود از اعداد یا مفهوم اندازه‌گیری استفاده نکرده است. او حتّی از مقایسه‌هایی نظیر «بزرگ‌تر از» یا «کوچک‌تر از» نیز استفاده نکرده است. در عوض او روابط جدیدی به نام «قابلیت انطباق» و «میان‌بود» را تعریف کرد و از طریق بیان اصل‌های موضوع مربوط، ویژگی‌های این مفاهیم را وارد کار می‌کند. مثلاً، دو پاره‌خط قابل انطباق بر یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند هرگاه طول‌های برابر داشته باشند (اقلیدس آن‌ها را «برابر» می‌نامید)، و یک نقطهٔ B میان A و C در نظر گرفته می‌شود هرگاه B یک نقطهٔ داخلی پاره‌خط AC باشد (اقلیدس AB را بخشی از AC می‌نامید). اما این ایده‌های شهودی تنها انگیزه‌ای برای تعریف اصطلاحات بودند. ما در اثبات‌ها فقط حق استفاده از آن دسته حقایقی را داریم که در اصل‌های موضوع به آن ها تصریح شده باشد، مانند اصل موضوع ۳.II هیلبرت: از هر سه نقطهٔ روی یک خط، فقط یکی بین دو تای دیگر قرار دارد.

گرچه اصل‌های موضوع هیلبرت همهٔ ایرادهای برهان‌های اقلیدس را پُر می‌کند، اما در مقایسه با اصل‌های موضوع اقلیدس یک نقطه‌ضعف دارد: اصل‌های موضوع هیلبرت طولانی و پیچیده‌اند و به نظر می‌رسد سادگی زیبای اصل‌های موجز اقلیدس را ندارند. یکی از دلایل این پیچیدگی، لزوم بیان همهٔ ویژگی‌های «میان‌بودن» و «قابلیت انطباق» بود که برای توجیه ادعاهای اقلیدس در مورد مقایسهٔ اندازه‌ها ضرورت داشت.

در سال ۱۹۳۲، جورج دی. برکوف[1]، ریاضی‌دان آمریکایی، مجموعه‌ای کاملاً متفاوت از بنداشتها را برای هندسهٔ مسطحه مطرح کرد که در آن‌ها از اعداد حقیقی برای اندازه‌گیری پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها استفاده شده بود. مبانی نظری اعدادحقیقی تا آن موقع کاملاً تثبیت شده بود، و برکوف معتقد بود که ازآنجاکه اندازه‌گیری‌های عددی همه‌جا در کاربردهای عملی هندسه استفاده می‌شوند (همان‌طورکه در خط‌کش و نقاله هم به کار می‌رود)، دیگر دلیلی برای کنار گذاشتن آن‌ها از اصل‌های موضوع هندسه وجود ندارد. با چنین تفکری او توانست فهرست طولانی اصل‌های موضوع هیلبرت

1. G. D. Birkhoff

را با تنها چهار اصل موضوع جایگزین کند.

هنوز طرح برکوف جا باز نکره بود که مؤلفان کتب دبیرستانی به میدان آمدند. انتشار کتاب درسی دبیرستانی‌ای در این زمینه با همکاری خود برکوف [۲] آغازگر انتشار کتاب‌های درسی دبیرستانی هندسه در آمریکا بود که در آن‌ها اصل‌های موضوعی کم و بیش مشابه اصل‌های برکوف اختیار شده بود. در دههٔ ۱۹۶۰، گروه مطالعاتی ریاضیات مدرسه‌ای، گروهی تحت حمایت بنیاد ملی علوم ایالات متحده، یک دستگاه اصل موضوعی کارامد برای دورهٔ دبیرستان ابداع کرد که از اعداد حقیقی منطبق با روش برکوف استفاده می‌کرد. استفاده از اعداد برای اندازه‌گیری طول‌ها و زاویه‌ها در دو اصل موضوع تجسم یافته بود که نویسندگان گروه آن‌ها را \اصل موضوع خطکش و \اصل موضوع \اندازه‌گیری ز\اویه می‌نامیدند. به‌هرحال، دستگاه اصل موضوعی آن‌ها امروزه اساس دستگاه اصل موضوعی مورد استفاده در کتاب‌های درسی هندسهٔ دبیرستانی است.

برای مطالعهٔ مفصل و دلنشینی از تاریخ هندسه از زمان اقلیدس تا قرن بیستم، کتاب [۴] قویاً توصیه می‌شود.[۱]

مراجع

[1] Ball, W. W. Rouse, *Mathematical Recreations and Essays*, 13th ed., Dover, Mineola, NY, 1987.
[2] Birkhoff, George D., Beatley, R., *Basic Geometry*, Scott, Foresman, Chicago, 1941.
[3] Euclid, *Euclid's Elements* (Dana Densmore, ed.), translated by Thomas L. Heath, Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002.
[4] Greenberg, Marvin J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, 4th ed., W. H. Freeman, New York, 2008
[5] Playfair, John, *Elements of Geometry: Containing the First Six Books of Euclid, with Two Books on the Geometry of Solids*, Bell & Bradfute and G. G. & J. Robinson, London, 1795.
[6] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, translated by Glenn R. Morrow, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

فرشته ملک: دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکدهٔ ریاضی
رایانامه: `malek@kntu.ac.ir`

۱. این کتاب توسط محمدهادی شفیعیها به فارسی ترجمه شده است و مرکز نشر دانشگاهی آن را منتشر کرده است. ـ و.

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 83–110
doi: 10.30504/mct.2023.1380.1969

Euclid and Axiomatic Geometry*

John M. Lee
Translated by F. Malek[1]

Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Iran

Abstract. In this paper, the logical development of Euclidean geometry as presented in Euclid's *Elements*, has been studied. Pointing out some gaps in the Euclid arguments, the need for modern axiomatic systems has been explored.

Keywords: Euclid, axiomatic geometry, non-Euclidean geometry
Article history: Recieved 16 March 2023; Accepted 27 April 2023
Article type: translation

* Lee, John M., *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, 1-21.

1. malek@kntu.ac.ir