

کران‌هایی برحسب نسبت طلایی برای برخی پارامترهای یک گراف

سعید علیخانی

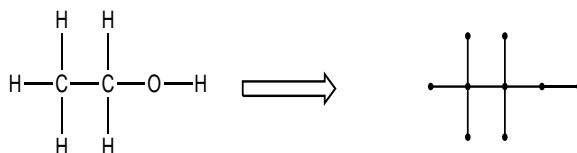
چکیده. در ریاضی، شیمی، و علوم نانو برای هر مولکول مدلی به صورت گراف در نظر می‌گیرند به طوری که رأس‌های آن گراف اتم‌های مولکول و یال‌های آن پیوندهای بین اتم‌ها است. شاخص‌های توپولوژیکی یک گراف پارامترهای عددی وابسته به گراف هستند که اعدادی منحصر به فرد بوده و نسبت به یکریختی گراف‌ها ثابت‌اند. بسیاری از شاخص‌های توپولوژیکی تعریف شده در شیمی ریاضی برحسب درجات رئوس گراف است. در این مقاله، ارتباط برخی از مقادیر این شاخص‌های توپولوژیکی و نسبت طلایی را بررسی و مطالعه خواهیم کرد.

۱ مقدمه و پیش‌نیازهای لازم

گراف G زوج مرتبی مانند $(V(G), E(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه متناهی ناتهی از عناصری به نام رأس‌ها و $E(G)$ یک مجموعه متناهی از جفت عناصر متمایز $V(G)$ است که مجموعه یال‌ها نامیده می‌شود. دو رأس v_1 و v_2 را مجاور می‌نامند هرگاه $\{v_1, v_2\} \in E(G)$. رأس x را همسایه مشترک v_1 و v_2 می‌نامند هرگاه x با هر دو رأس v_1 و v_2 مجاور باشد. درجه رأس v تعداد یال‌های متصل به رأس v است و آن را با نماد $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهند. رأس v را تنها گویند اگر $d(v) = 0$. کمترین و بیشترین درجه رأس‌های گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند. گراف k -منتظم گراف ساده‌ای است که تمام درجه‌های رئوس آن برابر با عدد صحیح و نامنفی k است.

گراف کامل K_n گرافی است با n رأس که درجه هر رأس آن $n - 1$ است. به عبارت دیگر، در گراف کامل هر دو رأس متمایز، مجاورند. گراف دوبخشی گرافی است که رئوس آن را بتوان به دو

عبارت و کلمات کلیدی: شاخص توپولوژیکی، شاخص هوسویا، شاخص زاگرب، نسبت طلایی، دنباله فیبوناتچی
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۱



شکل ۱. مولکول اتانول

مجموعه مجزا مانند X, Y چنان افراز کرد که هر یال گراف دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. هرگاه در گراف دوبخشی بین هر رأس از مجموعه رئوس بخش U و هر رأس از مجموعه رئوس بخش V یک یال وجود داشته باشد، گراف را دوبخشی کامل می‌گویند. اگر m و n به ترتیب تعداد رئوس بخش U و بخش V باشند، گراف دوبخشی کامل را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف $K_{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامند و معمولاً با نماد S_n نشان می‌دهند. برای اطلاعات بیشتر از نظریه گراف به [۱] مراجعه کنید.

مجموعه $M \subseteq E(G)$ را یک جورسازی گراف G گویند، هرگاه یال‌های موجود در M طوقه نبوده و هیچ دوتایی آن‌ها در G مجاور نباشند (یعنی رأس مشترک نداشته باشند). دو انتهای یک یال در M را جورشده توسط جورسازی M می‌خوانند. جورسازی M رأس v را اشباع می‌کند و v را M -اشباع شده گویند اگر یالی در M از v بگذرد. در غیر این صورت v ، M -اشباع نشده است. اگر هر رأس G ، M -اشباع شده باشد، جورسازی M کامل (تام) است. جورسازی M جورسازی ماکزیمم است، اگر G دارای جورسازی دیگری مانند M' با خاصیت $|M'| > |M|$ نباشد. اندازه جورسازی ماکسیمم گراف G را با نماد $\alpha'(G)$ نشان داده و به آن عدد جورسازی گراف G گویند. منظور از یک k -جورسازی گراف G ، مجموعه جورسازی با اندازه k در G است. تعداد k -جورسازی‌های گراف G با نماد $m(G, k)$ نشان داده می‌شود و معلوم است که برای هر گراف G داریم $m(G, 0) = 1$.

در نظریه گراف شیمیایی به هر مولکول یک گراف متناظر می‌شود. هر رأس در گراف نشان‌دهنده اتم مولکول متناظر و بین دو رأس یال وجود دارد، هرگاه بین دو اتم متناظر پیوند شیمیایی وجود داشته باشد. برای مثال، مولکول اتانول با فرمول C_2H_5OH را می‌توان به صورت گراف شکل ۱ نمایش داد. توجه داریم که در این گراف درجه هر رأس متناظر با ظرفیت اتم نظیر است. برای نمونه، در گراف شکل ۱ رئوس متناظر با اتم کربن درجه ۴، رأس متناظر با اکسیژن درجه ۲، و رئوس متناظر با اتم هیدروژن درجه ۱ دارند. ساختار نانوکربنی و از جمله آن‌ها نانولوله‌ها از دیرباز مورد

توجه دانشمندان علوم مختلف قرار گرفته داشته است. نانولوله‌های کربنی که از صفحات کربن به ضخامت یک اتم و به شکل استوانه توخالی ساخته شده‌اند در سال ۱۹۹۱ توسط سامیو ایجیما [۱۰] کشف شد. گراف نانولوله گرافی مسطح است که درجه رئوس آن دو یا سه بوده و وجوه آن همگی شش ضلعی هستند. یک گراف فولرینی گرافی مسطح، قفسه مانند، و ۳-منتظم است که وجوه آن ترکیبی از شش ضلعی‌ها و پنج ضلعی‌هاست.

شاخص توپولوژیک گراف G عددی حقیقی وابسته به گراف G است که نشان‌دهنده یک ویژگی شیمیایی مولکولی است که گراف مولکولی آن G است. این عدد به ساختار یا نمایش ظاهری گراف بستگی ندارد. در نظریه گراف شیمیایی و شیمی ریاضی یک شاخص توپولوژیکی که به عنوان شاخص اتصال نیز شناخته می‌شود، نوعی توصیف‌کننده مولکولی است که براساس گراف متناظر مولکول یک ترکیب شیمیایی محاسبه می‌شود. شاخص‌های توپولوژیکی به عنوان ابزارهایی برای مدل‌سازی خواص شیمیایی مولکول‌ها کاربردهای زیادی دارند. شاخص وینر از لحاظ نظری و کاربرد اصلی‌ترین شاخص توپولوژیکی مورد مطالعه است و اولین شاخص توپولوژیکی است که در شیمی استفاده شده است. نقطه جوش ترکیبات آلی و همچنین تمام خواص فیزیکی آن‌ها از نظر عملکردی به تعداد، نوع، و ساختار آن‌ها بستگی دارد. آرایش اتم‌ها در مولکول یک گروه از ایزومرها، تعداد و نوع اتم‌ها ثابت هستند و در آن‌ها تغییرات وجود دارد. خواص فیزیکی تنها به دلیل تغییرات در روابط متقابل ساختاری است. هاری وینر، شیمی‌دان اتریشی-آمریکایی، در [۱۴] ثابت کرد که نقطه جوش پارافین‌ها با حاصل جمع فواصل بین هر دو کربن ارتباط دارد. او این شاخص را به صورت $W(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y\} \subseteq V(G)} d(x,y)$ تعریف کرد که در آن طول $\{x,y\}$ کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس x و y است.

شاخص هوسویای گراف G توسط هارو هوسویا^۱ در سال ۱۹۷۱ معرفی شد [۸]. این شاخص برابر مجموع تعداد k -جورسازهای گراف تعریف شده است و با نماد $Z(G)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر $Z(G) = \sum_{k=0}^{\alpha'(G)} m(G,k)$. از این شاخص غالباً در شیمی برای بررسی ترکیبات آلی استفاده می‌شود.

بسیاری از شاخص‌های توپولوژیکی تعریف شده در شیمی ریاضی برحسب درجات رئوس گراف است. فرمول کلی شاخص‌های توپولوژیکی گراف G مبتنی بر درجه رئوس عبارت است از

$$TI(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} F(d(v_i), d(v_j)).$$

در میان قدیمی‌ترین و مشهورترین شاخص‌های توپولوژیکی دو شاخص توپولوژیکی مشهور مبتنی بر درجه رأس وجود دارد که ما در این مقاله آن‌ها را در نظر می‌گیریم: شاخص اول زاگرب و شاخص دوم زاگرب. شاخص‌های زاگرب را بیش از چهل سال پیش گوتمن^۱ و ترینایستیچ^۲ تعریف کردند [۵]. شاخص زاگرب اول و دوم گراف G را به ترتیب با $M_1(G)$ و $M_2(G)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} d^x(v),$$

$$M_2 = M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v) = \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)),$$

که در آن $d(u)$ درجه رأس u در گراف G است. به راحتی می‌توان دید که شاخص زاگرب اول گراف‌های دور، مسیر، و کامل مرتبه n برابر است با

$$n \geq 3, M_1(C_n) = 4n \quad (1)$$

$$n > 1, M_1(P_n) = 4n - 6, M_1(P_1) = 0 \quad (2)$$

$$M_1(K_n) = n(n-1)^2 \quad (3)$$

همچنین با محاسباتی ساده می‌توان دید که شاخص زاگرب دوم گراف‌های دور، مسیر و کامل مرتبه n برابر است با:

$$n \geq 3, M_2(C_n) = 4n \quad (1)$$

$$n > 2, M_2(P_n) = 4(n-2) \quad (2)$$

$$M_2(K_n) = \frac{n(n-1)^2}{2} \quad (3)$$

تعمیم شاخص زاگرب اول گراف G با نماد $M_1^k(G)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف

می‌شود.

$$M_1^k(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u)^k.$$

توجه کنید که

$$M_1^{\setminus}(G) = 2|E(G)| \quad (۱)$$

$$M_1^{\vee}(G) = M_1(G) \quad (۲)$$

$$M_1^{\exists}(G) = F(G) \quad (۳)$$

به $F(G)$ شاخص فراموش شده^۱ نیز می‌گویند.

دو کمیت را دارای نسبت طلایی، τ ، می‌گویند اگر نسبت آن‌ها برابر با نسبت جمع‌شان به کمیت بزرگ‌تر باشد. پس اگر $a > b > 0$ دو عدد باشند، این دو دارای نسبت طلایی هستند اگر

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \tau.$$

این نسبت عددی گنگ و جوابی برای معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است. از زیباترین روش‌های رسیدن به این نسبت طلایی استفاده از اعداد فیبوناتچی با تعریف $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ است. در مورد این عدد جالب و شگفت‌انگیز بسیار گفته و نوشته شده است [۱۲]. خواننده علاقه‌مند برای مشاهده جزئیات بیشتر درباره نسبت طلایی و توان‌های آن به‌عنوان ریشه‌های برخی از چندجمله‌ای‌های وابسته به گراف می‌تواند به [۲، ۴] رجوع کند.

در این مقاله به ارتباط شاخص‌های توپولوژیکی زاگرب تعمیم‌یافته و هوسویا با نسبت طلایی می‌پردازیم.

۲ ارتباط شاخص زاگرب تعمیم‌یافته و نسبت طلایی

اولین و دومین شاخص زاگرب برای تحقیق در مورد انرژی π -الکترون ذرات مختلف میکروسکوپی خاصی کاربرد دارد [۱۳].

در این بخش به مطالعه ارتباط شاخص زاگرب تعمیم‌یافته $M_1^k(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u)^k$ و نسبت طلایی می‌پردازیم. نتایج این بخش از [۱۱] گرفته شده‌اند.

ابتدا برخی پیش‌نیازها. گراف $G = (V, E)$ جهت‌دار است هرگاه $E \subseteq V \times V$ به‌عبارت‌دیگر، در این گراف‌ها هر یال به‌صورت زوج مرتب (a, b) است که a و b دو رأس گراف هستند. به رئوس گراف‌های جهت‌دار، گره و به یال‌های آن کمان هم می‌گویند. در یک گراف جهت‌دار تعداد کمان‌هایی را که از یک رأس (گره) خارج می‌شوند درجه بیرونی (خروجی) گره گوئیم و آن را با $od(v)$ یا $d^-(v)$ نشان می‌دهیم و تعداد کمان‌هایی را که به رأس وارد می‌شوند درجه درونی گره

1. forgotten index

می‌گوییم و با $\text{id}(v)$ یا $d^+(v)$ نشان می‌دهیم. زوج مرتب $(d^+(v), d^-(v))$ را زوج درجه رأس v می‌گویند. دنباله $\{(d_i^+, d_i^-) : i = 1, 2, \dots, n\}$ از زوج اعداد نامنفی را قابل تحقق گوئیم هرگاه گراف جهت‌دار G وجود داشته باشد که رئوس v_1, v_2, \dots, v_n از آن به ترتیب دارای زوج درجات $(d_1^+, d_1^-), (d_2^+, d_2^-), \dots, (d_n^+, d_n^-)$ باشند. در [۷] شرایط لازم و کافی برای یک مجموعه معین از زوج‌های صحیح نامنفی قابل تحقق ارائه شده است. همچنین شرط لازم و کافی برای آنکه گراف G یک جهت‌دهی با ماکسیمم درجه بیرونی حداکثر k $(d^+(v) \leq k)$ داشته باشد بیان شده است.

اینک قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. برای هر عدد طبیعی k و هر گراف G صادق در شرط $\Delta(G) \leq 2k$ نابرابری $M_{\tau}(G) \leq k^{2-\tau} M_{\tau}(G)$ برقرار است.

اثبات. با توجه به تعاریف شاخص زاگرب دوم و تعمیم شاخص اول کافی است ثابت کنیم که

$$\sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v) \leq k^{2-\tau} \sum_{v \in V(G)} d(v)^{\tau}.$$

اثبات به حالت ویژه‌ای از نابرابری میانگین حسابی-هندسی متکی است: برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, p, q و q با شرط $p + q = 1$ داریم

$$x^p y^q \leq px + qy. \quad (1.2)$$

گراف G را که دارای یک جهت‌دهی با ماکسیمم درجه بیرونی حداکثر k است در نظر بگیرید. برای هر کمان \vec{uv} در G از نابرابری (۱.۲) با $x = k^{-1}d(u)^{\tau}, y = d(v)^{\tau}, p = \tau^{-2} = 2 - \tau, q = \tau^{-1} = \tau - 1$ و $q = \tau^{-1} = \tau - 1$ داریم $k^{\tau-2}d(u)d(v) \leq \tau^{-2}k^{-1}d(u)^{\tau} + \tau^{-1}d(v)^{\tau}$. با گرفتن مجموع روی تمام کمان‌ها و توجه به اینکه $d^+(u) \leq k$ داریم

$$\begin{aligned} k^{\tau-2} \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v) &\leq \sum_{u \in V(G)} \tau^{-2}k^{-1}d(u)^{\tau}d^+(u) + \sum_{v \in V(G)} \tau^{-1}d(v)^{\tau}d^-(v) \\ &\leq \tau^{-2} \sum_{u \in V(G)} d(u)^{\tau} + \tau^{-1} \sum_{v \in V(G)} d(v)^{\tau+1} \\ &= \sum_{v \in V(G)} d(v)^{\tau}. \end{aligned}$$

□ با توجه به اینکه $M_{\tau^2}(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v)^{\tau^2}$ حکم ثابت می‌شود.

ناکس، موهار، و وود [۱۱] با اثبات لم زیر (که آن را بر حسب شاخص توپولوژیکی نوشته‌ایم) نشان دادند که نمی‌توان توان τ^2 و ثابت $k^{\tau-2}$ را در قضیه ۱.۲ بهبود بخشید.

لم ۲.۲. برای هر عدد طبیعی k و $\epsilon > 0$ گراف G با شرط $\Delta(G) \leq 2k$ وجود دارد به طوری که

$$(1 + \epsilon)M_2(G) \geq k^{2-\tau}M_{\tau^2}(G).$$

۳ ارتباط شاخص هوسویا و نسبت طلایی

در این بخش به ارتباط شاخص هوسویا برخی از گراف‌ها با نسبت طلایی می‌پردازیم. روابط زیر که در [۶] به دست آمده است برای محاسبه شاخص هوسویای گراف G بسیار سودمند است.

قضیه ۱.۳. گراف $G = (V, E)$ مفروض است.

(۱) اگر $uv \in E(G)$ ، آنگاه $Z(G) = Z(G - uv) + Z(G - \{u, v\})$.

(۲) اگر v رأسی از گراف G باشد، آنگاه

$$Z(G) = Z(G - v) + \sum_{u \in N_G(v)} Z(G - \{u, v\}).$$

با استفاده از قضیه ۱.۳ نتایج زیر را که ارتباط شاخص هوسویای برخی گراف‌ها با اعداد فیبوناتچی را نشان می‌دهد بیان و اثبات می‌کنیم [۳].

قضیه ۲.۳. گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) شاخص هوسویای گراف مسیر مرتبه n برابر است با $Z(P_n) = F_{n+1}$ ، و شرایط اولیه $Z(P_0) = 0$ و $Z(P_1) = 1$ برقرار است.

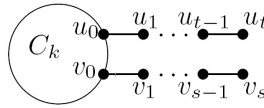
(۲) شاخص هوسویای گراف دور مرتبه n برابر است با $Z(C_n) = F_{n-1} + F_{n+1}$.

(۳) شاخص هوسویای گراف $L_{n,k}(s, t)$ که گرافی تک‌دور با شرط $s + t + k = n$ است و دو رأس u_0 و v_0 مجاورند (شکل ۲ را ببینید) برابر است با

$$Z(L_{n,k}(s, t)) = F_{n+1} + F_{k-1}F_{s+1}F_{n-s-k+1}.$$

(۴) اگر D_n^m گراف آسیاب‌بادی هلندی باشد که از m دور C_n که در یک رأس مشترک هستند

به دست آمده باشد (شکل ۳)، آنگاه $Z(D_n^m) = (F_n)^{m-1}(F_n + 2mF_{n-1})$ (شکل ۳).



شکل ۲. گراف $L_{n,k}(s, t)$

اثبات. گزاره‌ها را با استفاده از قضیه ۱.۳ به ترتیب اثبات می‌کنیم.

(۱) برای گراف مسیر P_n داریم $Z(P_n) = Z(P_{n-1}) + Z(P_{n-2})$ و لذا حکم ثابت می‌شود.

(۲) برای گراف دور C_n داریم $Z(C_n) = Z(P_n) + Z(P_{n-2})$ و بنابراین قسمت اول قضیه حکم ثابت می‌شود.

(۳) با در نظر گرفتن یال $v_0 v_1$ داریم

$$\begin{aligned} Z(L_{n,k}(s, t)) &= Z(L_{n,k}(s, t) - v_0 v_1) + Z(L_{n,k}(s, t) - \{v_0, v_1\}) \\ &= Z(P_s)Z(L_{n-s,k}) + Z(P_{s-1})Z(P_{n-s-1}) \\ &= F_{s+1}(F_{n-s+1} + F_{k-1}F_{n-s-k+1}) + F_s F_{n-s} \\ &= F_{s+1}F_{n-s+1} + F_s F_{n-s} + F_{k-1}F_{s+1}F_{n-s-k+1} \\ &= F_{n+1} + F_{k-1}F_{s+1}F_{n-s-k+1}. \end{aligned}$$

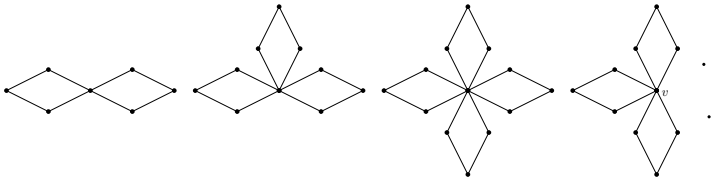
(۴) فرض کنید رأس v رأس مشترک دورهای C_n باشد (شکل ۳). با به کار بردن قسمت دوم قضیه ۱.۳ داریم

$$Z(D_n^{(m)}) = Z(D_n^{(m)} - \{v\}) + \sum_{u \in N(v)} Z(D_n^{(m)} - \{v_i, v\}),$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Z(D_n^{(m)}) &= (Z(P_{n-1}))^m + 2m(Z(P_{n-1}))^{m-1}Z(P_{n-2}) \\ &= Z(P_{n-1})^{m-1}(Z(P_{n-1}) + 2mZ(P_{n-2})) \\ &= (F_n)^{m-1}(F_n + 2mF_{n-1}). \end{aligned}$$

□



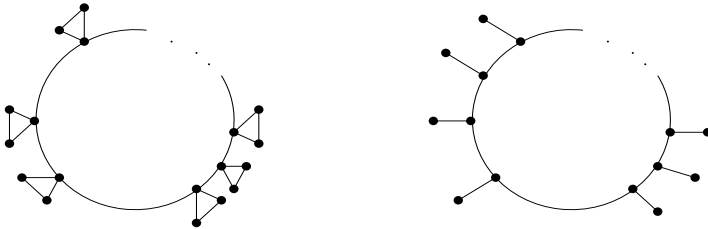
شکل ۳. گراف‌های $D_4^1, D_4^2, D_4^3, D_4^4$

قضیه ۳.۳ ([۹]). فرض کنید G یک گراف با اندازه m است. در این صورت

$$m + 1 \leq Z(G) \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\tau^{m+2} - (-\tau^{-1})^{m+2} \right].$$

با استفاده از قضیه ۳.۳ و معرفی چند گراف نتایجی را که نشان‌دهنده ارتباط شاخص هوسویا و نسبت طلایی است به دست می‌آوریم.

حاصل ضرب کرونای دو گراف G_1 و G_2 را با $G_1 \circ G_2$ نشان می‌دهیم. این گراف شامل یک نسخه از G_1 و به اندازه $|V_1|$ نسخه از G_2 است که i امین رأس G_1 با همه رئوس نسخه i ام G_2 مجاور است. برای نمونه گراف‌های $C_n \circ K_1$ و $C_n \circ K_2$ را در شکل ۴ ببینید.



شکل ۴. از راست گراف $C_n \circ K_1$ و $C_n \circ K_2$

در گراف $G = (V, E)$ یک زیربخش مقدماتی G وقتی نتیجه می‌شود که یال $e = \{u, v\}$ از گراف G حذف و سپس یال‌های $\{u, w\}$ و $\{w, v\}$ را که در آن‌ها w متعلق به V نیست به $G - e$ اضافه کنیم. رأس درونی این مسیر به طول دو رأسی جدید است. هرگاه برای هر یال گراف G زیربخش‌های مقدماتی را به دست آوریم به گراف حاصل گراف زیربخش G گفته می‌شود و آن را با نماد $S(G)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، $S(G)$ گرافی است که از گذاشتن یک رأس جدید روی هر یال G به دست می‌آید.

گراف کلی $T(G)$ گرافی است که از گراف G به این صورت به دست می‌آید که مجموعه رأس آن شامل رئوس و یال‌های G و دو رأس در $T(G)$ در مجاورت یکدیگر هستند، هرگاه رئوس مجاور یا واقع بر رأسی مشترک باشند.

قضیه زیر با استفاده از قضیه ۳.۳ و با توجه به اندازه گراف‌های جدید به دست می‌آید.

قضیه ۴.۳. فرض کنید G و H به ترتیب دو گراف با مرتبه‌های n_1 و n_2 و اندازه‌های m_1 و m_2 باشند. در این صورت

(۱) شاخص هوسویای گراف $S(G)$ در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$2m_1 + 1 \leq Z(S(G)) \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\tau^{2m_1+2} - (-\tau^{-1})^{2m_1+2} \right]$$

(۲) شاخص هوسویای گراف $G \circ H$ در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$m_1 + n_1 m_2 + n_1 n_2 + 1 \leq Z(G \circ H) \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\tau^{m_1+n_1 m_2+n_1 n_2+2} - (-\tau^{-1})^{m_1+n_1 m_2+n_1 n_2+2} \right].$$

(۳) شاخص هوسویای گراف $T(G)$ در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$2n_1 - 1 \leq Z(T(G)) \leq \left(\frac{n_1(n_1^2 - 1)}{2} + 2 \right) \tau^{\frac{n_1(n_1^2 - 1)}{2} + 1}.$$

سپاسگزاری بر خود لازم می‌دانم از پیشنهاد‌های داوران محترم که باعث ارتقاء و بهبود مقاله شد سپاسگزاری کنم.

مراجع

- [۱] علیخانی، سعید؛ جهری، سمیه، نظریه گراف و کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه یزد، یزد، ۱۳۹۶.
- [2] Alikhani, S., Hasni, R., Algebraic integers as chromatic and domination roots, *Int. J. Combin.*, (2012), Article ID: 780765.
- [3] Alikhani, S., Hosoya index and Fibonacci numbers, *J. Math. Nonosci.*, **1** (2011), 51-57.
- [4] Alikhani, S., Peng, Y. H., Chromatic roots and generalized Fibonacci numbers, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **3** (2009), 330-335.
- [5] Diudea, M. V., Gutman, I., Jantschi, L., *Molecular Topology*, Huntington, NY, 2001.
- [6] Gutman, I., Polansky, O. E., *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer, Berlin, 1986.
- [7] Hakimi, S. L., On the degrees of the vertices of a directed graph, *J. Franklin Inst.*, **279**(1965), 290-308.
- [8] Hosoya, H., Topological index: A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, **44** (1971), 2332-2339.

- [9] Huang, Y., Shi, L., Xu, X., The Hosoya index and the Merrifield–Simmons index, *J. Math. Chem.*, **56** (2018), 3136-3146.
- [10] Iijima, S., Synthesis of carbon nanotubes, *Nature*, **354** (1991) 56-58.
- [11] Knox, F., Mohar, B., Wood, D. R., A golden ratio inequality for vertex degrees of graphs, *Amer. Math. Monthly*, **126** (2019), 742-747.
- [12] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Willey-Interscience, New York, 2001. Publication.
- [13] Siddiqui, M. K., Gharibi, W., On Zagreb indices, Zagreb polynomials of mesh derived networks, *J. Comput. Theor. Nanosci.*, **13** (2016), 8683-8688.
- [14] Wiener, H., Structural determination of paraffin boiling points, *J. Amer. Chem. Soc.*, **69** (1947), 17-20.

سعید علیخانی: دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: alikhani@yazd.ac.ir

Golden Ratio Bounds for Some Parameters of a Graph

S. Alikhani¹

Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Iran

Abstract. In mathematics, chemistry, and nanoscience a graph model is considered for each molecule, so that the vertices are the atoms of the molecule and the edges are the bonds between the atoms. Graph topological indices are numerical parameters dependent on the graph, which are unique numbers and are fixed with respect to the isomorphism of the graphs. Many topological indices in Mathematical Chemistry are in terms of degrees of vertices. In this article, we study the relationship between some values of these topological indices and the golden ratio.

Keywords: topological index, Hosoya index, Zagreb Index, golden ratio, Fibonacci sequence

Article history: Received 14 August 2022; Accepted 12 March 2023

Article type: review
