فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۲۶۵ تا ۲۹۶

آنالیز متناهی‌وار در فضاهای همگن *

امیر محمدی

ترجمهٔ کیوان ملّاحی کارای

چکیده. در این مقاله، مروری از تحولات اخیر مربوط به جنبه‌های کمّی سیستم‌های دینامیکی فضاهای همگن ارائه می‌دهیم.

۱ مقدمه

نظریهٔ سیستم‌های دینامیکی بازیگری شاخص در حوزه‌هایی از ریاضیات مدرن شده است که انتظار آن را نداریم. فضاهای همگن و فضاهای پیمانه‌ای رویه‌های ریمانی فشرده در نقش دو قطبی ظاهر می‌شوند که در آن‌ها تکنیک‌های سیستم‌های دینامیکی و آنالیزی به طرزی کمابیش جادویی دوئل می‌کنند و در ضمن آن ویژگی‌های غنی هندسی، جبری، و حسابی ساختار مربوط را به دست می‌دهند.

بررسی‌های انجام شده در این زمینه‌ها منجر به نتایجی نافذ با کاربردهایی شگفت‌انگیز در حوزه‌های دیگر ریاضیات شده است. باوجوداین، جای نتایج کمّی در میان بیشتر این دستاوردهای مشهور خالی است. بسط استدلال‌های متناهی‌وار در این شرایط کاری مبارزطلب و مورد انتظار است؛ قصد این مقاله آن است که نمایی کلی از برخی نتایج کمّی در این حوزه ارائه دهد.

اجازه دهید با یادآوری چارچوب کلی دینامیک همگن شروع کنیم. فرض کنید $G \subset \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$

عبارات و کلمات کلیدی: آنالیز متناهی‌وار، دینامیک همگن، مدار تناوبی، صورت کارا، هم‌توزیعی

نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۴

* Mohammadi, A., Finitary analysis in homogeneous spaces, in *ICM–International Congress of Mathematicians*, vol. V., D. Beliaev, S. Smirnov, eds., EMS Press, Berlin, 2023, 3530-3551.

doi: 10.30504/mct.2024.1459.2024

یک گروه لی خطی همبند باشد و $\Gamma \subset G$ یک مشبّکه[۱] (زیرگروهی گسسته با حجم مکمل[۲] متناهی) باشد. فرض کنید $W \subset G$ یک زیرگروه بسته و همبند G باشد. مشخص شده است که سؤال زیر از اهمیت اساسی برخوردار است.

رفتار مدار Wx را برای هر نقطهٔ $x \in G/\Gamma$ توصیف کنید.

توجه کنید که این اطلاعات را برای مدار هر نقطه از فضا می‌خواهیم و نه صرفاً یک نقطهٔ نوعی[۳] که موضوع معمول در نظریهٔ ارگودیک است. همچنین توجه کنید که نمی‌توان انتظار پاسخی معنادار به این سؤال در این کلیت را داشت. مثلاً اگر $G = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$ و W گروه ماتریس‌های قطری در G باشد، آنگاه هر مدارِ خاص می‌تواند رفتاری بسیار پیچیده داشته باشد و به‌ویژه بستار مدارها می‌تواند مجموعه‌های فراکتالی باشند؛ مثلاً [۶۳] را ببینید.

اگر W توسط اعضای تک‌توان[۴] تولید شده باشد، راگوناتان[۵] حدس زده بود که برای هر نقطهٔ $x \in G/\Gamma$ زیرگروه همبند $W \subset L \subset G$ وجود دارد چنان‌که Lx یک مدار تناوبی[۶] و بستار Wx برابر Lx است ــ مدار Lx تناوبی است اگر پایدارساز[۷] x در L یک مشبکه در L باشد؛ بخش ۲ را ببینید.

حدس راگوناتان در کلی‌ترین صورتش را رَتنر[۸] اثبات کرد [۸۷، ۸۸، ۸۹]، پیش‌از کار تاثیرگذار رَتنر چند حالت خاص مهم آن را مارگولیس[۹] [۷۴]، و دَنی[۱۰] و مارگولیس [۲۵، ۲۶] اثبات کرده بودند.

همان‌طورکه در بالا اشاره شد، این نتایج بنیادی از نوع کمّی نیستند، مثلاً نرخی برای پر شدن مدار در بستارش به دست نمی‌دهند. درحقیقت، کار رَتنر مبتنی‌بر قضیهٔ نقطه به نقطهٔ ارگودیک است که به‌سختی صورت کارا[۱۱] به خود می‌گیرد. در کار دَنی و مارگولیس از زیرمجموعه‌های مینیمال استفاده می‌شود که گرچه صورتی ناکارا دارد، می‌توان آن را با مقداری تلاش کارا کرد. این کار بسیار پرچالش است؛ به‌علاوه، نرخ‌هایی که از این راه به دست می‌آیند معمولاً ضعیف‌اند. برای بحث تکمیلی بخش ۶ را ببینید.

اشاره کنیم که کران‌های کارای خوب برای هم‌توزیعی[۱۲] مدارهای تک‌توان می‌تواند نتایج گسترده‌ای داشته باشد. درحقیقت، حدس ریمان هم‌ارز با این است که جملهٔ خطایی به‌صورت $O_\varepsilon\left(y^{\frac{۳}{۴}+\varepsilon}\right)$

---

۱۱. effective؛ این اصطلاح رایج را به «کارا» ترجمه کرده‌ایم.

1. lattice 2. covolume 3. typical 4. unipotent 5. Raghunathan 6. periodic orbit 7. stabilizer 8. Ratner 9. Margulis 10. Dani 12. equidistribution

برای هم‌توزیعی دورِ ساعتی‌های تناوبی[1] با تناوب $\frac{1}{y}$ برای رویهٔ پیمانه‌ای[2] پیدا کنیم [۹۰، ۹۹]. کاربردهای مرتبط امّا کمتر چشمگیر ما را بر آن می‌دارند که نرخ‌هایی از نوع چندجمله‌ای به دست آوریم. بااین‌حال، در کلیّتی که در بخش ۶ بحث خواهد شد، چنین کران‌هایی فراتر از دسترس ابزارهای کنونی‌اند. اما، پیشرفت‌های هیجان‌انگیزی در این زمینه به دست آمده است که در ادامه بحث خواهد شد.

این مقدمه را با ذکر این نکته به پایان می‌آوریم که کارهای پیشگامانه‌ای مشابه با پدیده‌های مربوط به صلبیّت که در قلب این مقاله قرار دارد در چارچوب‌های دیگری نیز انجام شده است: مقاله‌های [۳۰، ۶۷] به شارش‌های قطری‌شونده از مرتبه‌های بالاتر[3] مربوط‌اند؛ مقاله‌های [۵، ۶، ۷، ۱۲] به طبقه‌بندی اندازه‌های مانا[4] مربوط‌اند. مقاله‌های [۳۹، ۴۰] مربوط به عمل $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ بر فضاهای پیمانه‌ای‌اند و روش‌هایی را که برای توزیع‌های مانا توسعه یافته‌اند به کار می‌برند؛ و [۴، ۶۵، ۷۸، ۷۹] مربوط به وضعیتی هستند که Γ حجم مکمل نامتناهی داشته باشد. همهٔ این آثار به‌استثنای [۱۲] کیفی هستند و اثبات هر صورت کمّی از آن‌ها جالب توجه خواهد بود.

۲ پیچیدگی مدارهای تناوبی

فرض کنید $L \subset G$ زیرگروهی بسته باشد. نقطهٔ $x \in X = {}^{G}/_{\Gamma}$ را Lـ‌تناوبی می‌خوانیم اگر

$$\mathrm{Stab}_L(x) = \{g \in L : \; gx = x\}$$

یک مشبکه در L باشد. یک Lـ‌مدار تناوبی (یا به‌طور خلاصه تناوبی، اگر L از سیاق بحث روشن باشد) مدار Lx است چنان‌که x یک نقطهٔ Lـ‌تناوبی باشد. توجه کنید که یک Lـ‌مدار تناوبی لزوماً بسته است؛ [۸۶] را ببینید.

نتایج صلبیّت که در اینجا بحث خواهد شد بیان می‌کنند که بستار یک مدار Wx مدار تناوبی Lx برای زیرگروه میانی[5] $W \subset L \subset G$ است. لذا این انتظاری طبیعی است که نتایج کمّی در این چارچوب به ویژگی‌های حساس نقطهٔ x و گروه عمل‌کنندهٔ W بستگی داشته باشند. مثلاً حتی در مورد دَوران‌های غیرگویای دایره ویژگی‌های دیوفانتی زاویهٔ دَوران نرخ هم‌توزیعی را تعیین می‌کنند. در وضعیت کلی‌تری که اساس بحث ما است نیز مدارهای تناوبی زیرگروه‌های بینابینی نقش اعداد

1. periodic horocycles 2. modular surface 3. higher rank diagonalizable flows 4. classification of stationary measures 5. intermediate subgroup

گویا را بازی می‌کنند. بنابراین مهّم است که یک سنجهٔ پیچیدگی[1] را برای مدارهای تناوبی که مانع چگال‌شدن یک مدار در X هستند مشخص کنیم.

یک همسایگی باز و کران‌دار Ω از عنصر خنثی e را ثابت نگه می‌داریم. برای یک مدار تناوبی $Lx \subset X$ تعریف کنید

$$\mathrm{vol}(Lx) = \frac{m_L(Lx)}{m_L(\Omega)}, \qquad (۱.۲)$$

که در آن m_L یک اندازه هار دلخواه روی L و $m_L(Lx)$ حجم مکمل $\mathrm{Stab}_L(x)$ در L نسبت به m_L است. این مفهوم حجم نقش سنجهٔ پیچیدگی برای مدارهای تناوبی L را ایفا می‌کند.

برای ویژگی‌های اساسی تعریف بالا خواننده را به [۳۱، بخش ۳.۲] ارجاع می‌دهیم. در اینجا تنها اشاره می‌کنیم که هرچند این مفهوم به انتخاب Ω وابسته است، هر دو انتخاب متفاوت Ω به تعریف‌های قابل‌مقایسه‌ای از vol منجر می‌شوند، به این مفهوم که نسبت آن دو از بالا و پایین کران‌دار است. بنابراین از نشان دادن بستگی به Ω در نمادگذاری چشم می‌پوشیم. برای مدار تناوبی Lx، اندازهٔ احتمال Lـناوردا روی Lx را با μ_{Lx} نشان خواهیم داد. اندازهٔ احتمال Gـناوردا روی X با m_X نشان داده خواهد شد. مضمون یک حکم متضمن مفهوم متناهی‌وار گزاره‌ای دوحالتی[2] به‌صورت زیر است: مدار Wx فضای X را با نرخی مشخص پر می‌کند مگر آنکه مانعی مشخص با پیچیدگی پایین وجود داشته باشد ــ چنان‌که خواهیم دید کیفیت نرخ در وضعیت‌های متفاوت متغیر است.

۳ هم‌توزیعی کارای پوچ‌شارش‌ها

پوچ‌شارش‌ها احتمالاً اولین جای طبیعی برای یافتن نتایج چگالی کمّی هستند. فرض کنید X یک پوچ‌خمینه[3] باشد. به‌عبارت‌دیگر، $X = {}^{G}/_{\Gamma}$ که در آن G یک زیرگروه بستهٔ همبند از گروه ماتریس‌های $d \times d$ اکیداً بالا مثلثی است و $\Gamma \subset G$ یک مشبکه است.

به مدد کارهای وایل[4]، کرونکر[5]، ال. گرین[6]، و پَری[7] [۲، ۸۴] و همچنین آثار متأخر لایبمن[8] [۶۶] نتایج صلبیّت در این حوزه از مدت‌ها پیشتر معلوم شده‌اند.

نتایج کمّی، با نرخ خطای چندجمله‌ای نیز در این چهارچوب و فراتر از حالت ویژهٔ آبلی اثبات شده‌اند؛ [۶۳، ۵۲] را ببینید. راه‌حل کامل را بی. گرین[9] و تی. تائو[10] ارائه دادند. حالتی خاص از

1. measure of complexity 2. dichotomy 3. nilmanifold 4. Weyl 5. Kronecker 6. L. Green 7. Parry 8. Leibman 9. B. Green 10. T. Tao

قضیهٔ اصلی [۵۲] به شرح زیر است.

قضیه ۱.۳ ([۵۲]). فرض کنید $X = G/\Gamma$ پوچ‌خمینه‌ای به شکل بالا باشد. دراین‌صورت ثابت $A \geq ۱$ وابسته به $\dim G$ وجود دارد به‌طوری‌که حکم زیر صادق است. فرض کنید $x \in X$ و $\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ زیرگروهی تک پارامتری از G باشد، فرض کنید $۰ < \eta < ۱/۲$ و $T > ۰$. دراین‌صورت دست‌کم یکی از دو حکم زیر برای مسیر جزئی[1] $\{u(t)x : t \in [۰, T]\}$ برقرار است.

(۱) برای هر $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ داریم

$$\left| \frac{۱}{T} \int_۰^T f\big(u(t)x\big)\,\mathrm{d}t - \int_X f\,\mathrm{d}m_x \right| \ll_{X,f} \eta$$

که در آن وابستگی به f توسط یک نرم لیپ‌شیتسی خاص داده می‌شود.

(۲) برای هر $۰ \leq t_۰ \leq T$ یک $g \in G$ و $H \subsetneq G$ وجود دارد چنان‌که $H\Gamma/\Gamma$ تناوبی است و $\mathrm{vol}\big(gH\Gamma/\Gamma\big) \ll_X \eta^{-A}$ و برای هر $t \in [۰, T]$ با شرط $|t - t_۰| \leq \eta^A T$ داریم

$$\mathrm{dist}_X\big(u(t)x, gH\Gamma/\Gamma\big) \ll_X \eta$$

که در آن dist_X متریکی روی X است که از یک اندازهٔ ریمانی ناوردای راست[2] روی G القاء شده است.

خواننده را برای دیدن این صورت‌بندی و استنتاج آن از حکم اصلی [۵۲] به [۳۳] ارجاع می‌دهیم. امّا اجازه دهید که در اینجا وضعیت دو حالتی‌ای را که پیشتر ذکر کردیم مورد تأکید قرار دهیم؛ یا مدار $\{u(t)x : t \in [۰, T]\}$ به‌صورتی کارا هم‌توزیع است، یعنی حالت (۱) در قضیهٔ ۱.۳، یا مانعی صریح با پیچیدگی پایین حاضر است که مانع آن می‌شود، یعنی حالت (۲) در قضیهٔ ۱.۳.

۴ گروه‌های کُره‌ساعتی

فرض کنید G یک گروه لی همبند و نیم‌ساده باشد. زیرگروه $W \subset G$ را کُره‌ساعتی[3] می‌نامیم اگر عنصر $\mathbb{R}$ـ‌قطری‌شوندهٔ $a \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$W = W^+(a) := \{g \in G : \text{وقتی که } n \to \infty \;\; a^n g a^{-n} \to e\}.$$

1. partial trajectory 2. right invariant 3. horospherical group

معلوم شده است که $G \supset W$ کُره‌ساعتی است اگروتنهااگر رادیکال تک‌توان یک زیرگروه سرهٔ سهموی[۱] از G باشد. به‌ویژه، یک زیرگروه کُره‌ساعتی همواره تک‌توان است، امّا نه برعکس. درواقع، اگر W کُره‌ساعتی باشد، آنگاه $W/N_G(W)$ فشرده خواهد بود که در آن $N_G(W)$ نرمال‌ساز[۲] W در G را نشان می‌دهد.

بررسی عمل گروه‌های کُره‌ساعتی G بر G/Γ تاریخچه‌ای طولانی دارد و نتایج صلبیّت به سبک رَتنر در این حالت توسط هِدلاند[۳]، فورستنبرگ[۴]، ویچ[۵]، و دنی[۶] [۲۰، ۲۱، ۲۴، ۴۷، ۵۸، ۹۶] پیش از قضیه‌های رَتنر ثابت شدند. درحقیقت با استفاده از این مطلب که می‌توان رفتار تک‌تک مدارهای یک زیرگروه کَره‌ساعتی را به زوال ضرایب ماتریسی ربط داد، می‌توان نتایجی دربارهٔ هم‌توزیعی کارآمد، با خطای چندجمله‌ای، را می‌توان اثبات کرد. در این زمینه [۱۶، ۶۳، ۹۰] و آثار جدیدتر [۴۴، ۹۲، ۹۴] اولین کارهایی هستند که از آن‌ها اطلاع داریم. اکنون این نتایج با کلیّتی بسیار بیشتر ثابت شده‌اند [۶۱، ۶۲، ۷۷، ۸۱]. حالت مدارهای انتقال‌یافتهٔ[۷] زیرگروه‌های G که توسط یک برگشت[۸] ثابت نگه داشته می‌شوند نیز تا حدی مرتبط با این موضوع است [۳، ۲۹، ۳۸].

خواننده را به [۷۷، قضیهٔ ۱.۳] برای حالتِ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ و [۶۱، قضیهٔ ۱.۱۱] برای حالت کلی ارجاع می‌دهیم. لازم است اشاره کنیم که می‌توان موانع هم‌توزیعیِ کارای Wx را که در آن $W = W^+(a)$ بر حسب میزان گذار[۹] $\{a^{-n}x \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ به بی‌نهایت مشخص کرد. نتیجتاً، ناواگرایی کمّی[۱۰] شارش‌های تک‌توان نقش اساسی در این تحلیل ایفا می‌کنند [۲۲، ۲۳، ۲۷، ۶۴، ۷۳]؛ همچنین بحثِ بخشِ ۲.۶ را ببینید. به‌ویژه وقتی که $X = G/\Gamma$ فشرده باشد، برای هر $x \in X$ مدار Wx در (X, m_X) هم‌توزیع با نرخ خطاهای چندجمله‌ای است.

ساختارهای حاصل از ضرب نیم‌مستقیم[۱۱] ردهٔ دیگری از مثال‌هایی را فراهم می‌کنند که در آن می‌توان از ویژگی‌های زیرگروه‌های کُره‌ساعتی بهره برد. فرض کنید $G = H \ltimes V$ که در آن H یک گروه لی نیم‌سادهٔ غیرفشرده و V یک نمایش تحویل‌ناپذیر H است. حال می‌توان عمل یک زیرگروه کُره‌ساعتی $H \supset W$ بر G/Γ را بررسی کرد. این حالت به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای پیچیده‌تر از حالت زیرگروه‌های کره‌ساعتی است و پیشرفتی جزئی در این زمینه حاصل شده است. اشترومبرگسون[۱۲] [۹۵] از روش‌های آنالیزی استفاده کرده است و اثباتی برای حالتی آورده است که $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ با نمایش استاندارد $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ بر $\mathbb{R}^2$ و $\Gamma = \mathrm{SL}_2((Z)) \ltimes \mathbb{Z}^2$ و W

1. parabolic 2. normalizer 3. Hedlund 4. Furstenberg 5. Veech 6. Dani 7. translates of orbits 8. involution 9. excursion 10. quantitative non-divergence 11. semidirect product 12. Strömbergsson

برابر با گروه ماتریس‌های تک‌توان بالا مثلثی در $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ است. این روش را می‌توان برای بررسی برخی حالت‌های دیگر نیز به کار بست.

این بخش را با ذکر این نکته به پایان می‌بریم که مفاهیم بسط‌یافته در حالت همگن در شناخت برگ‌بندی‌های[1] کُره‌ساعتی (برگ‌بندی قویاً ناپایدار)[2] در فضای رویه‌های انتقالی[3] نیز کاربرد یافته اند؛ مثلاً [۴۱، ۶۹] را ببینید.

۵ مدارهای تناوبی گروه‌های نیم‌ساده

تا حدود پانزده سال پیش می‌شد منشأ بررسی‌های کمّی در این حوزه را در صورت‌های بحث شده در بخش ۳ و بخش ۴ یافت. امّا وضعیت اخیراً بهتر شده است. در بخش‌های باقی‌ماندهٔ این مقاله برخی از این پیشرفت‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

یکی از اولین کارها در این موج نوی نتایج، مقالهٔ راهگشای آینزیدلر[4]، مارگولیس[5]، و وِنکاتِش[6] در مورد مدارهای تناوبی گروه‌های نیم‌ساده بوده است. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک گروه همبندِ نیم‌ساده و $\mathbb{Q}$–جبری و G مؤلفهٔ همبند همانی در گروه لی $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ باشد. فرض کنید Γ یک زیرگروه هم‌نهشتی[7] از $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ باشد. بنویسید $X = G/\Gamma$. فرض کنید $H \subset G$ یک زیرگروه نیم‌ساده بدون عامل فشرده[8] باشد که مرکزساز[9] آن در G متناهی است.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ قضیهٔ اصلی هم‌توزیعی اثبات شده در [۳۲] است.

قضیه ۱.۵ ([۳۲]). عدد $\delta = \delta(G,H)$ وجود دارد چنان‌که حکم زیر برقرار است. فرض کنید Hx یک مدار تناوبی باشد. برای هر $V > 1$ زیرگروه $H \subset S \subset G$ وجود دارد به‌طوری‌که Sx تناوبی است، $\mathrm{vol}(Sx) \leq V$، و برای هر $f \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$،

$$\left| \int_X f \mathrm{d}\mu_{Hx} - \int_X f \mathrm{d}\mu_{Sx} \right| \ll_{G,\Gamma,H} \mathcal{S}(f) V^{-\delta}$$

که در آن $\mathcal{S}(f)$ یک نُرم سوبولفِ[10] خاص را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۵ صورتی کارآمد از (حالتی خاص از) قضیه‌ای متعلق به مُوزِس و شاه[11] [۸۳] است. چندجمله‌ای بودن جملهٔ خطا، یعنی نمای (منفیِ) V، در قضیهٔ ۱.۵ نکته‌ای قابل توجه است ــ

1. foliation 2. strong unstable foliation 3. translation surfaces 4. Einsiedler 5. Margulis 6. Venkatesh 7. congruence subgroup 8. compact factors 9. centralizer 10. Sobolev norm 11. Mozes and Shah

کاراسازیِ برهان‌های دینامیکی معمولاً نرخ خطای بدتری به‌دست می‌دهد: بخش ۶ را ببینید. منشأ این نرخِ خطای چندجمله‌ای شکاف یکنواخت طیفی[1] زیرگروه‌های هم‌نهشتی است که در [۳۲] در نقش یک دادهٔ بسیار اساسی به کار رفته است.

همان‌طورکه اشاره کردیم ویژگی ضروری روش‌های بسط‌یافته در [۳۲] این است که سروکار ما با مدارهای تناوبی گروه‌های نیم‌ساده در فضاهای خارج‌قسمتی حسابی است ـــ یعنی همان شکاف یکنواخت طیفی برای فضاهای خارج قسمتی هم‌نهشتی. بااین‌حال، برخی از فرض‌های قضیهٔ ۱.۵ را می‌توان آسان‌تر کرد. در ادامهٔ [۳۲] آینزیدلر، مارگولیس، محمدی، و وِنکاتش صورت اَدلیک[2] حکمی را اثبات کردند که دو محدودیت اعمال‌شده در قضیهٔ ۱.۵ را برمی‌داشت: یکی اینکه H ثابت فرض شده است (تقریب قضیهٔ ۱.۵ به H وابسته است) و دیگری فرض شکافندگی[3] اعمال‌شده بر H در یک مکان ارشمیدسی (H عامل فشرده ندارد).

فرض کنید $\mathbf{G}$ یک گروه همبندِ نیم‌ساده و $\mathbb{Q}$ـجبری باشد و تعریف کنید $X = {}^{\mathbf{G}(\mathbb{A})}/_{\mathbf{G}(\mathbb{Q})}$ که در آن $\mathbb{A}$ حلقهٔ اَدِل‌ها[4] را نشان می‌دهد. در این صورت گروه موضعاً فشرده $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ بر X عمل می‌کند و اندازهٔ احتمال m_x را ناوردا نگه می‌دارد. فرض کنید $\mathbf{H}$ یک $\mathbb{Q}$ـگروه جبری نیم‌ساده و همبند ساده باشد و $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$. همریختی جبری‌ای مثل $\iota : \mathbf{H} \to \mathbf{G}$ روی $\mathbb{Q}$ با هستهٔ مرکزی متناهی را ثابت در نظر بگیرید. مثلاً، فرض کنید $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d$ و $\mathbf{H} = \mathrm{Spin}(Q)$ که در آن Q یک صورت درجه دوم صحیح[5] با d متغیر است.

به این داده‌های جبری و عضو $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$ فضای همگن

$$Y := g\iota\big({}^{\mathbf{H}(\mathbb{A})}/_{\mathbf{H}(\mathbb{Q})}\big) \subset X$$

و اندازهٔ احتمال همگن μ را نسبت می‌دهیم.

حالتی خاص از قضیهٔ اصلی [۳۱] از این قرار است.

قضیه ۲.۵ ([۳۱]). فرض کنید $\mathbf{G}$ همبند ساده نیز باشد. در این صورت عدد $\delta > 0$ وابسته به $\dim \mathbf{G}$ وجود دارد که حکم زیر برقرار است. فرض کنید Y مجموعه‌ای همگن و $\iota(\mathbf{H}) \subset \mathbf{G}$ ماکسیمال باشد. آنگاه برای هر $f \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$،

$$\left|\int_X f \mathrm{d}\mu - \int_X f \mathrm{d}m_X\right| \ll_{\mathbf{G}} \mathcal{S}(f)\mathrm{vol}(Y)^{-\delta}$$

1. uniform spectral gap 2. adelic 3. splitting assumption 4. adeles 5. integral quadratic form

که در آن $S(f)$ یک نُرم سوبولفِ اَدِلیک خاص است.

انعطاف‌پذیری نهفته در قضیهٔ ۲.۵ کاربردهای جالبی در نظریهٔ اعداد دارد. تعمیم زیر از قضیهٔ دوک[1] در [۳۱] ثابت شده است.

فرض کنید $\mathcal{Q}_d = \mathrm{PO}_d(\mathbb{R})\backslash\mathrm{PGL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Z})$ فضای صورت‌های درجه دوم مثبت روی $\mathbb{R}^d$ با تقریب رابطهٔ هم‌ارزی تعریف‌شده توسط مقیاس‌بندی[2] و هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ باشد. مجموعهٔ $\mathcal{Q}_d$ را به تصویر[3] اندازهٔ هار نرمال‌شده[4] روی $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Z})$ مجهز می‌کنیم.

فرض کنید Q یک صورت درجه دوم صحیح و معیّنِ مثبت بر $\mathbb{Z}^d$ باشد و $\mathrm{genus}(Q)$ $(\mathrm{spin\ genus}(Q))$ گونای[5] (گونای اسپین)[6] Q را نمایش دهد.

قضیه ۳.۵ ([۳۱]). فرض کنید $\{Q_n\}$ دنباله‌ای از صورت‌های درجه دومِ معیّنِ مثبت صحیح و دوبه‌دو ناهم‌ارز باشد. در این صورت، وقتی $n \to \infty$ گونای Q_n (همچنین گونای اسپینQ_n) به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{Q}_d$ هم‌توزیع می‌شود (با سرعتی که با توانی از $|\mathrm{genus}(Q_n)|$ مشخص می‌شود).

گفتنی است که وقتی $d = ۳, ۴$ حتی شکل کیفی این نتیجه، جدید است. وقتی $d > ۵$، صورت کیفی این قضیه از یک قضیهٔ هم‌توزیعی در [۵۱] نتیجه می‌شود. برای بررسی مشابهی با شرط شکافندگی در جای ارشمیدسی[7] [۴۲] را ببینید.

یک کاربرد دیگر از قضیهٔ ۲.۵ اثباتی مستقل از خاصیت (τ) برای تمام گروه‌ها به‌جز گروه‌های نوع $A_۱$ است. به‌ویژه مقالهٔ [۳۱] اثبات متفاوتی از قضیهٔ اصلی کلوزل[8] در [۱۹] است هرچند با نماهایی ضعیف‌تر؛ [۳۱] را ببینید.

اثبات قضیهٔ ۲.۵ علاوه‌بر مفاهیم موجود در [۳۲] متکی‌بر فرمول حجم پراساد[9] [۸۵] و قضیهٔ بُورل[10] و پراساد [۹] است. این داده‌های بنیادی دلیل امتیازاتی است که قضیهٔ ۲.۵ در اختیار ما می‌گذارد.

مسئلهٔ اصلی حل‌نشده در این زمینه اثبات صورتی از قضیهٔ ۲.۵ است که در آن اجازه دهیم $\iota(H)$ مرکزساز نامتناهی داشته باشد؛ چنین قضیه‌ای کاربردهای بسیار جالبی در نظریهٔ اعداد خواهد داشت؛ [۳۶] را ببینید. به تازگی پیشرفت‌هایی در جهت حل این مسئله حاصل شده است، خواننده را دعوت می‌کنیم که برای مثال به [۱، ۳۴، ۳۵] رجوع کند.

1. Duke's theorem 2. scaling 3. push-forward 4. normalized 5. genus 6. spin genus 7. Archimedean place 8. Clozel 9. Prasad's volume formula 10. Borel

۶ دینامیک تک‌توان کارا

با نظر به قضیهٔ ۱.۳ فرض کنیم G زیرگروه‌های نیم‌ساده غیرفشرده دارد، مثلاً فرض کنید G یک گروه لی خطی نیم‌ساده و غیرفشرده است. در پرتو نتایج گفته‌شده در بخش ۴، تحلیل رفتار کمّی مدارهای تک‌توان در G/Γ به مدارهای گروه‌هایی باز می‌گردد که کُره‌ساعتی نیستند. جای تعجب نیست که این کار بسیار چالش‌برانگیز از کار درآمده است. در این بخش، از پیشرفت‌های اخیر در این زمینه خواهیم گفت. مضمون کلی نتایج این بخش حول کاراسازی و استفاده از رفتارِ چندجمله‌ای‌وار[۱] مدارهای تک‌توان می‌چرخد.

۱.۶ صورت‌های کارای حدس اوپنهایم

حدس اوپنهایم[۲] که توسط مارگولیس ثابت شد [۷۴] بیان می‌کند که اگر Q یک صورت درجهٔ دوم نامعیّن و ناتباهیده باشد که مضربی از یک صورت با ضرایب صحیح نیست در این صورت برای هر $\varepsilon > ۰$ بردار $\nu \in \mathbb{Z}^۳ \setminus \{۰\}$ وجود دارد چنان‌که $|Q(\nu)| < \varepsilon$. دَنی و مارگولیس پیش از قضیهٔ رَتنر تعمیم‌هایی از این حکم را ثابت کردند.

بعدتر، اسکین[۳]، مارگولیس، و موزس [۳۷] صورت‌هایی کمّی (هم‌توزیعی) از حدس اوپنهایم را ثابت کردند. این اثبات متّکی است بر قضیهٔ توزیع یکنواخت رَتنر، تکنیک خطی‌سازی دَنی و مارگولیس، و یک دستگاه از نابرابری‌ها برای یک تابع مارگولیس خاص ــ ایده‌ای بدیع که در [۳۷] ابداع شد و به ابزاری بی‌بدیل در دینامیک همگن و خارج از آن تبدیل شده است. نتایجی مشابه برای صورت‌های ناهمگن در [۷۲، ۷۵] اثبات شده‌اند.

برای کسب نتایج کارا در این چهارچوب نیز بسیار تلاش شده است. روش‌های تحلیلی (روش دایرهٔ هاردی–لیتل‌وود)[۴] که پیش از کار مارگولیس به کار گرفته شده بود ذاتاً کمّی است. بااین‌حال، این رهیافت عموماً وقتی کارساز است که یا تعداد متغیرها زیاد باشد و یا صورت درجهٔ دوم صورت ویژه‌ای داشته باشد؛ مثلاً [۵۹] را ببینید. اخیرتر، بوتروس[۵]، گوتزه[۶]، هیل[۷]، و مارگولیس [۱۸] صورت کارای حدس اوپنهایم را (به همراه هم‌توزیعی) با خطای چندجمله‌ای، وقتی تعداد متغیرها دست‌کم ۵تا باشد، ثابت کرده‌اند. اثبات آن‌ها روش‌های تحلیلی را با ایده‌هایی از هندسهٔ اعداد به‌شکل نابرابری‌هایی که یادآور [۳۷] هستند ترکیب می‌کند. همچنین، در [۹۱] و [۱۱] از روش‌های تحلیلی

1. polynomial like behavior 2. Oppenheim conjecture 3. Eskin 4. Hardy-Littlewood 5. Buterus 6. Götze 7. Hille

استفاده کرده‌اند و تقریب‌های چندجمله‌ای برای تقریباً همهٔ[1] صورت‌های درجهٔ دوم در خانواده‌هایی خاص از صورت‌های ابعاد ۳ و ۴ به دست داده‌اند. امّا به نظر می‌آید که حالت صورت‌های سه و چهار متغیری خارج از دسترس روش‌های تحلیلی باشد.

لیندنشتراوس[2] و مارگولیس صورتی کارا از حدس اوپنهایم را برای فرم‌های سه متغیری با نرخ خطای چندلگاریتمی[3] ثابت کردند [۶۸].

قضیه ۱.۶ ([۶۸]). ثابت‌های مطلق $A \geq ۱$ و $k > ۰$ وجود دارند چنان‌که حکم زیر برقرار است. فرض کنید Q یک صورت درجهٔ دوم نامعین سه‌متغیری باشد که $\det Q = ۱$ و $\varepsilon > ۰$. در این صورت عدد $T_۰(\varepsilon) > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $T \geq T_۰(\varepsilon)\|Q\|^A$ دست‌کم یکی از دو حکم زیر برقرار است.

(۱) برای هر عدد $\xi \in \big[-(\log T)^k, (\log T)^k\big]$ بردار صحیح اولیهٔ[4] $\nu \in \mathbb{Z}^۳$ با خاصیت $۰ < \|\nu\| < T^A$ وجود دارد به‌طوری‌که $|Q(\nu) - \xi| \ll \big(\log T\big)^{-k}$.

(۲) صورت درجهٔ دوم صحیح Q' وجود دارد به‌طوری‌که $|\det Q'| < T^\varepsilon$ و

$$\|Q - \lambda Q'\| \ll \|Q\| T^{-۱}$$

که در آن $\lambda = |\det Q'|^{-۱/۳}$.

ثابت‌های ضربی حاصل[5] مطلق‌اند و $\|\cdot\|$ نرمی روی $\mathrm{Mat}_۳(\mathbb{R})$ است.

توجه کنید که در حالت خاص وقتی Q یک صورت درجهٔ دوم سه‌متغیری نامعیّن و تحویل‌یافته[6] باشد و مضربی از یک صورت صحیح نباشد، آنگاه قسمت (۱) از قضیهٔ ۱.۶ برای Q برقرار است؛ [۶۸، نتیجه ۱۲.۱] را ببینید.

دوگانگی یادشده در بالا باز هم در قضیهٔ ۱.۶ پابرجا است: یعنی، یک نتیجهٔ چگالی کارا به دست می‌آید، مگر آنکه مانعی صریح (بخش (۲) از قضیهٔ ۱.۶) موجود باشد.

اثبات [۶۸] به نسبت پیچیده و بر کاراسازی اثبات اولیهٔ مارگولیس برای حدس اوپنهایم و تحقیقات بعدی دَنی و مارگولیس استوار است. این رهیافت مبتنی‌بر بررسی عمل گروه $\mathrm{SO}(Q)$، گروه طولپایی‌های Q، بر فضای همگن $X = \mathrm{SL}_۳(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_۳(\mathbb{Z})$ است و به مفهوم مجموعهٔ مینیمال در دینامیک توپولوژیک اتّکا دارد. مجموعه‌های مینیمال برای استدلال‌های کمّی مناسب

1. almost every 2. Lindenstrauss 3. poly-log 4. primitive 5. implied multiplicative constants 6. reduced

نیستند. مقالهٔ [۶۸] این مفهوم کیفی را با یک شرط دیوفانتی[1] بر حسب سرعت گریز به بی‌نهایت تحت یک زیرگروه تک پارامتری $\mathbb{R}$–قطری‌شونده جایگزین کرده است. این عنصر جدید نقشی اساسی در به دست آوردن یک بیان کمّی دارد ــ عناصر مشابه در چهارچوب‌هایی کلی‌تر در بخش ۲.۶ بحث خواهند شد. شایان ذکر است که با اتکای صرف به این داده نرخی به دست می‌آید که $\log(\log T) \ll$ است. کران قوی‌تر حاصل در [۶۸] به یُمن یک لم ترکیبیاتی [۶۸، بخش ۹] به دست آمده که در جای خود قابل توجه است.

۲.۶ خطی‌سازی مدارهای تک‌توان

همان‌طور که پیشتر اشاره شد، مارگولیس و دَنی رویکردی توپولوژیک مبتنی‌بر مفهوم مجموعهٔ مینیمال را توسعه دادند تا حالت‌هایی خاص از حدس راگوناتان[2] را اثبات کنند. لذا یکی از اولین گام‌ها در کاراسازی این استدلال توپولوژیک جایگزینی مجموعه‌های مینیمال با یک شرط دیوفانتی صریح است. این کار را لیندنشتراوس، مارگولیس، محمدی، و شاه در [۷۱] انجام دادند که آن را می‌توان به چشم صورتی کارا از تکنیک خطی‌سازی دَنی و مارگولیس تصور کرد [۲۸].

تکنیک خطی‌سازی ریشه در روشی دارد که مارگولیس در اثبات‌اش برای ناواگرایی مدارهای تک‌توان ابداع کرد [۷۳]. این نتایج ناواگرایی کارآمدند. این قضیه‌ها را دَنی در [۲۲، ۲۳] تظریف کرد و کلاینباک[3] و مارگولیس در [۶۴] صورتی صریح و کارا از آن‌ها را به دست آوردند. بااین‌حال، اطلاعی از وجود صورت کارای نتایج [۲۸] قبل از [۷۱] نداریم.

اجازه دهید مقدمات گفته‌شده در [۷۱] را یادآوری کنیم. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک $\mathbb{Q}$–گروه همبند باشد و تعریف کنید $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$. فرض کنید $\Gamma \subset G$ یک مشبکه حسابی باشد. مشخص‌تر اینکه، یک نشانندهٔ $\iota : \mathbf{G} \to \mathrm{SL}_{\mathbf{N}}$ که بر روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده است را چنان در نظر می‌گیریم که $\iota(\Gamma) \subset \mathrm{SL}_N(\mathbb{Z})$. پس به کمک ι گروه $\mathbf{G}$ را با $\iota(\mathbf{G}) \subset \mathrm{SL}_{\mathbf{N}}$ یکی می‌کنیم و لذا همیشه فرض خواهیم کرد که $G \subset \mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$.

خانوادهٔ زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{H} \subset \mathbf{G} : \quad R(\mathbf{H}) = R_u(\mathbf{H}) \text{ و } \mathbb{Q}\text{–زیرگروه همبند است} \text{ یک } \mathbf{H}\}$$

که در آن $R(\mathbf{H})$ (به ترتیب، $R_u(\mathbf{H})$) رادیکال حل‌پذیر (به ترتیب، تک‌توان) $\mathbf{H}$ را نشان می‌دهد.

1. Diophantine 2. Raghunathan’s conjecture 3. Kleinbock

یعنی، $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ اگروتنهااگر $\mathbf{H}$ یک $\mathbb{Q}$–گروه همبند باشد که روی بستار جبری $\mathbb{Q}$ توسط زیرگروه‌های تک‌توان تولید شده است. بنابر قضیه‌ای از بُورل و هاریش چاندرا[1] برای هر $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$، $\mathbf{H}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{\Gamma}$ در $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ یک مشبکه است. همواره فرض می‌کنیم که $\mathbf{G} \in \mathcal{H}$.

فرض کنید $U \subset G$ یک زیرگروه (همبند) و تک‌توان از G باشد و بنویسید $X = G/\Gamma$. برای هر $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ قرار دهید $H = \mathbf{H}(\mathbb{R})$. تعریف کنید

$$N_G(U, H) := \{g \in G : \ Ug \subset gH\}.$$

توجه کنید که $N_G(U, H)$ یک $\mathbb{R}$–زیرچندگونای جبری[2] G است. به‌علاوه، اگر $H \lhd G$ و $U \subset H$، آنگاه $N_G(U, H) = G$.

تعریف کنید

$$\mathcal{S}(U) = \Big(\bigcup_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ H \neq G}} N_G(U, H) \Big) / \Gamma \quad \text{و} \quad \mathcal{G}(U) = X \backslash \mathcal{S}(U).$$

اعضای $\mathcal{S}(U)$ نقاط تکین[3] نسبت به U و اعضای $\mathcal{G}(U)$ نقاط عام[4] نسبت به U خوانده می‌شوند ــ این نقاط، به لحاظ نظری، با نقاط عامِ نظریه‌اندازه‌ی به مفهومِ فورستنبرگ برای عمل U روی X نسبت به اندازهٔ m_X متفاوت‌اند (برای دیدن تعریف [۴۹، صفحهٔ ۹۸] را ببینید). باوجوداین، هر نقطهٔ عامِ نظریه‌اندازه‌ای نیز به مفهوم بالا عام خواهد بود. قضیهٔ قابل توجه رَتنر، که پیشتر ذکر شد [۸۹]، بیان می‌کند که برای هر $x \in \mathcal{G}(U)$ داریم $\overline{Ux} = X$.

دَنی و مارگولیس [۲۸] ثابت کردند که U–مدارهای نقاط $\mathcal{G}(U)$ از $\mathcal{S}(U)$ دوری می‌کنند. این مطلب در [۷۱] با نرخ چندجمله‌ای کمّی‌سازی شده است.

برای بیان این نتیجهٔ کمّی به نمادگذاری بیشتری نیاز داریم. فرض کنید $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ و تعریف کنید $\mathfrak{g}(\mathbb{Z}) := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{sl}_N(\mathbb{Z})$. فرض کنید $\|\cdot\|$ نرم ماتریسی روی $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{R})$ نسبت به پایهٔ متعارف را نشان دهد. این نُرمْ خانواده‌ای از نرم‌ها را روی $\wedge \mathfrak{sl}_N(\mathbb{R})$ القا می‌کند که ما آن‌ها را با $\|\cdot\|$ نمایش خواهیم داد. فرض کنید $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ یک زیرگروه سره و نابدیهی از $\mathbf{G}$ باشد و تعریف کنید

$$\rho_H := \wedge^{\dim \mathbf{H}} \mathrm{Ad} \quad \text{و} \quad V_H := \wedge^{\dim \mathbf{H}} \mathfrak{g}.$$

نمایش ρ_H روی $\mathbb{Q}$ تعریف شده است.

---
1. Harish-Chandra 2. $\mathbb{R}$-subvariety 3. singular 4. generic

فرض کنید $\mathbf{v_H}$ یک بردار صحیح و اولیه در $\wedge^{\dim \mathbf{H}}\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ متناظر با جبر لی $\mathbf{H}$ باشد؛ یعنی، یک پایه صحیح برای $\mathrm{Lie}(H) \cap \mathfrak{sl}_N(\mathbb{Z})$ در نظر و $\mathbf{v_H}$ را حاصل‌ضرب گوه‌ای[1] متناظر آن‌ها می‌گیریم. بردار $\mathbf{v_H}$ به شکل قطری در $\wedge^{\dim \mathbf{H}}\mathfrak{g}$ می‌نشیند. این بردار قطری‌نشسته را با $\nu_{\mathbf{H}}$ نشان می‌دهیم. برای هر $g \in G$ تعریف کنید

$$\eta_{\mathbf{H}}(g) := \rho_{\mathbf{H}}(g)\nu_{\mathbf{H}}.$$

برای ساده کردن کار، فرض کنیم که U یک زیرگروه تک‌پارامتری تک‌توان از G باشد. بردار $z \in \mathfrak{g}$ را با شرط $\|z\| = ۱$ ثابت در نظر می‌گیریم چنان‌که $U = \{u(t) = \exp(tz) : \ t \in \mathbb{R}\}$. با این نمادگذاری، برای هر $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ خواهیم داشت

$$N_G(U, H) = \{g \in G : \ z \wedge \eta_H(g) = ۰\}.$$

همان‌طورکه پیشتر مشاهده شد $N_G(U, H)$ یک چندگونا است؛ بنابراین می‌تواند تحت پریشیدگی‌ها[2] کوچک به شکل قابل‌ملاحظه‌ای تغییر کند. امّا، مفاهیم کارا باید تحت پریشیدگی‌های کوچک پایا باشند. یکی از نوآوری‌های [۷۱] معرفی مفهوم کارایی از نقطهٔ عام است به این شرح:

تعریف ۲.۶. فرض کنید $\epsilon : \mathbb{R}^+ \to (۰, ۱)$ تابعی نزولی باشد و $t \in \mathbb{R}^+$. نقطهٔ $g\Gamma$ را (ϵ, t)–دیوفانتی برای عمل $U = \{\exp(tz) : \ t \in \mathbb{R}\}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ با شرط $\{e\} \neq \mathbf{H} \neq \mathbf{G}$ داشته باشیم

$$\text{(۱.۶)} \qquad \text{اگر } \|\eta_{\mathbf{H}}(g)\| < e^t \quad \text{آنگاه} \quad \|z \wedge \eta_{\mathbf{H}}(g)\| \geq \epsilon\big(\|\eta_{\mathbf{H}}(g)\|\big).$$

یک نقطه ϵ–دیوفانتی است اگر برای یک $t > ۰$، (ϵ, t)–دیوفانتی باشد. توجه کنید که این شرطی روی زوج $(U, g\Gamma)$ است. مجموعهٔ $\mathcal{G}(U)$ ناتهی است مگر وقتی‌که $U \subset \mathbf{H}(\mathbb{R})$ به ازای زیرگروه (سره) مثل $\mathbf{H} \lhd \mathbf{G}$. به‌علاوه، هر $x \in \mathcal{G}(U)$ به ازای ϵی ϵ–دیوفانتی است. در جالب‌ترین مثال‌ها، مجموعهٔ $\mathcal{S}(U)$ زیرمجموعه‌ای چگال از X است. بنابراین $\mathcal{G}(U)$ معمولاً یک مجموعهٔ G_δی بدون نقاط درونی است. ازسوی‌دیگر، برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ مجموعهٔ نقاط (ϵ, t)–دیوفانتی در تعریف ۲.۶ مجموعهٔ بستهٔ مناسبی دارای نقاط درونی است (درواقع، این مجموعه بستار نقاط درونی خودش است).

1. wedge product 2. perturbations

همان‌طورکه در بخش ۲ بحث شد و در بخش‌های پیشین دیدیم، احکام متناهی‌وار مستلزم یک سنجهٔ پیچیدگی برای عوامل بازدارنده[1] هستند. در [۷۱] این سنجهٔ پیچیدگی حسابی برای زیرگروه‌های $\mathcal{H}$ به کار رفته است. تعریف کنید $\mathrm{ht}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{v}_{\mathbf{H}}\|$. به‌عبارت‌دیگر، ارتفاع[2] یک $\mathbb{Q}$–زیرگروه $\mathbf{H}$ توسط ارتفاع نقطهٔ متناظر آن در گراسمانی[3] $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ داده می‌شود؛ [۸، بخش ۵.۱] را ببینید. گفتنی است که $\mathrm{ht}(\mathbf{H})$ برای زیرگروه‌های $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$ ارتباط نزدیکی با حجم مدار تناوبی $H\Gamma/\Gamma$، که در بخش ۲ تعریف شد، دارد؛ [۳۲، بخش ۱۷]، [۳۱، پیوست ب]، و [۸۰، بخش ۲.۶] را ببینید.

فضای X لزوماً فشرده نیست. برای رفع این مشکل، یک برون‌کشی[4] از X توسط زیرمجموعه‌های فشرده را چنین در نظر می‌گیریم

$$X_\eta = \{g\Gamma \in X : \min_{0 \neq \nu \in \mathfrak{g}(\mathbb{Z})} \|\mathrm{Ad}(g)\nu\| \geq \eta\}.$$

بنابر (تعمیمی از) محک فشردگی مالر[5] مجموعهٔ X_η، برای هر $\eta > 0$، فشرده است؛ مثلاً [۷۱، لم ۸.۲] را ببینید. به‌علاوه، $\bigcup_{\eta>0} X_\eta = G/\Gamma$.

برای هر $g \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$، و در حالت خاص برای هر $g \in G$، تعریف می‌کنیم

$$|g| = \max\{\|g\|, \|g^{-1}\|\}$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم ماکزیمم روی $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$ نسبت به پایهٔ متعارف است.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ اصلی [۷۱] برای گروه‌های حقیقی است.

قضیه ۳.۶ ([۷۱]). ثابت‌های $A, D > 1$ وابسته به N، و $E > 1$ وابسته به N، G، و Γ وجود دارد چنان‌که حکم زیر برقرار است. فرض کنید $g \in G$، $t > 0$، $k \geq 1$، و $0 < \eta < 1/2$. فرض کنید $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to (0, 1)$ برای هر $s > 0$ در نابرابری $\varepsilon(s) \leq \eta^A s^{-A}/E$ صدق کند. آنگاه دست‌کم یکی از سه امکان زیر برقرار است.

(۱)

$$\left|\{\xi \in [-1, 1] : u(e^k\xi)g\Gamma \notin X_\eta \text{ یا } u(e^k\xi)g\Gamma\text{، } (\epsilon, t)-\text{ دیوفانتی نیست}\}\right| < E\eta^{1/D}$$

---

1. obstructions 2. height 3. Grassmanian 4. exhaustion 5. Mahler

(۲) زیرگروه سرهٔ $\mathcal{H}$ $\mathbf{H} \in$ با شرط

$$\mathrm{ht}(\mathbf{H}) \leq E\big(|g|^A + e^{At}\big)\eta^{-A}$$

چنان وجود دارد که برای هر $\xi \in [-۱, ۱]$ داریم

$$\|\eta_H\big(u(e^k\xi)g\big)\| \leq E\big(|g|^A + e^{At}\big)\eta^{-A}$$
$$\|z \wedge \eta_H\big(u(e^k\xi)g\big)\| \leq Ee^{-k/D}(|g|^A + e^{At})\eta^{-A}$$

که در آن $U = \{\exp(tz) : t \in \mathbb{R}\}$.

(۳) زیرگروه نرمال سره و نابدیهی $\mathbf{H} \lhd \mathbf{G}$ با شرط $\mathrm{ht}(\mathbf{H}) \leq Ee^{At}\eta^{-A}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|z \wedge \nu_H\| \leq \epsilon\big(\mathrm{ht}(\mathbf{H})^{۱/A}\eta/E\big)^{۱/A}.$$

فی‌الواقع، در مقالهٔ [۷۱] صورت‌هایی از این قضیه برای اندازه‌های خودی[۱] [۷۱، قضیه ۷.۱] و همچنین صورت‌های S–حسابی از این قضیه در [۷۱، بخش ۳] اثبات شده است. به‌ویژه، با توجه به [۷۱، قضیه ۲.۳] و استفاده از تحدید اسکالرها[۲] از میدان‌های عددی[۳] به $\mathbb{Q}$ می‌توان قضیه‌های [۷۱] را در حالت کلی‌تر گروه‌های تعریف‌شده روی میدان‌های عددی نیز به کار برد.

برهان‌های [۷۱] نیز مانند استدلال‌های [۲۸] متکی‌بر رفتار چندجمله‌ای مدارهای تک‌توان‌اند. امّا، این قضیه‌ها، علاوه‌بر اینکه به شکل چندجمله‌ای کارآمد هستند با نتایج [۲۸] نیز تفاوت دارند: این قضیه‌ها زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathcal{G}(U)$ به دست می‌دهند که مستقل از نقطهٔ مبنا است و هر مدار تک‌توان، جز آنکه مانعی جبری وجود داشته باشد، به آن باز می‌گردد؛ [۷۱، قضیه‌های ۱.۰۱، ۵.۰۱] را ببینید. این یکنواختی برای ناواگرایی مدارهای تک‌توان قبلاً شناخته شده بود و اولین بار دَنی متوجه آن شد، امّا در این چهارچوب پیش‌از [۷۱] شناخته شده نبود.

دو عامل این ویژگی‌ها را میسّر کرده‌اند. اولی استفاده از یک مفهوم کارآمد از نقطهٔ عام (تعریف ۲.۶) است و دومین عامل، استفاده از زیرگروه خاصی در $\mathcal{H}$ است که سرعت مدارهای تک‌توان در فضای نمایش V_H را کنترل می‌کند؛ [۷۱، بخش ۷.۴] را ببینید. به‌علاوه، استدلال‌های [۷۱] متّکی‌بر صورت‌های کارایی از قضیهٔ صفرهای هیلبرت[۴] [۷۱، قضیه ۱۷] و قضیه‌های صفرناشوندگی موضعی[۵] مربوط به نابرابری ویاسوویچ[۶] هستند.

1. friendly measures 2. restriction of scalars 3. number fields 4. Nullstellensatz 5. local non-vanishing 6. Lojasiewicz

۳.۶ چگالی کارای مدارهای تک‌توان

مقالهٔ [۷۱] اولین مقاله در سلسله مقالاتی است که هریک قضیهٔ کلی‌ای دربارهٔ چگالی کارای مدارهای تک‌توان در فضاهای خارج‌قسمتی حسابی ارائه می‌دهند. دومین مقاله، که در دست آماده شدن است، اساساً متکی‌بر [۷۱] است.

نرخی که برای چگال بودن مدارهای تک‌توان به دست می‌آید لگاریتم مکرری[۱] از اندازهٔ پارامترِ شار است که تعداد تکرارها به $\dim G$ وابسته است.

۷ ترکیبیاتِ حسابی و کران‌های چندجمله‌ای

در ضمن بخش ۶ به این موضوع اشاره شد که کاراسازی[۲] استدلال‌های موجود برای دینامیک تک‌توان معمولاً به کران چندجمله‌ای منجر نمی‌شود. درواقع، اگر از وضعیت‌های خاص بحث‌شده در بخش ۵.۳ فراتر رویم، نرخ‌های چندجمله‌ای برای چگالی و یا هم‌توزیعی به نسبت کمیاب هستند. در این بخش در مورد پیشرفت‌های اخیر در این زمینه بحث خواهیم کرد.

۱.۷ قدم‌زدن تصادفی با خودریختی‌های چنبره‌ای

فرض کنید $\Gamma \subset \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ یک زیرگروه زاریسکی‌چگال[۳] باشد که قویاً تحویل‌ناپذیر بر $\mathbb{R}^d$ عمل می‌کند (یعنی هیچ زیرفضای نابدیهی $\mathbb{R}^d$ که تحت یک زیرگروه با اندیس متناهی Γ ناوردا باشد وجود ندارد). فرض کنید ν یک اندازهٔ احتمال روی Γ با تکیه‌گاه متناهی[۴] باشد که Γ را تولید می‌کند.

فورستنبرگ نشان داد که [۴۶]

$$\nu^{\mathbb{N}} - \text{تقریباً همه‌جا} \qquad \lambda_1(\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|g_1 \cdots g_n\|}{n}.$$

بورگین[۵]، فورمن[۶]، لیندنشتراوس، و موزِس در مقالهٔ دوران‌ساز [۱۲] یک قضیهٔ هم‌توزیعی برای قدم‌زدن تصادفی روی $\mathbb{T}^d$ وابسته به ν با جملهٔ خطای چندجمله‌ای ثابت کردند.

قضیه ۱.۷ ([۱۲]). برای هر $0 < \lambda < \lambda_1(\nu)$ ثابتی مثل $0 < C = C(\nu, \lambda)$ وجود دارد به‌طوری که اگر برای $x \in \mathbb{T}^d$ اندازهٔ $\mu_n = \nu^{(n)} * \delta_x$ با این ویژگی باشد که برای یک

1. iteration of logarithms 2. effectivizing 3. Zariski dense 4. finitely supported 5. Bourgain 6. Furman

$a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{۰\}$ و $n > C \log(۲\|a\|/t)$ داشته باشیم

$$|\hat{\mu}_n(a)| > t > ۰,$$

آنگاه X یک تقریب گویای p/q دارد که $p \in \mathbb{Z}^d$ و $q \in \mathbb{Z}$ و داریم

$$|q| < (۲\|a\|/t)^C \quad \text{و} \quad \|x - \frac{p}{q}\| < e^{-\lambda n}.$$

قضیهٔ اصلی [۱۲] برای ردهٔ وسیع‌تری از زیرگروه‌های Γ و اندازه‌های ν صادق است. اجازه دهید به این نکته نیز اشاره کنیم که نتایج [۱۲] در کارهای بعدی [۵۶، ۵۷] تعمیم یافته‌اند.

استدلال گفته‌شده در [۱۲] بسیار پیچیده و متّکی‌بر چندین عنصر است. در اینجا تنها یکی از گام‌های اصلی اثبات را مطرح می‌کنیم که به بالا کشیدن اطلاعات مربوط به یک ضریب فوریهٔ بزرگ به یک ساختار (بزرگ‌مقیاس) مرتبط با یک مجموعه ضرایب فوریهٔ بزرگ می‌شود. فرض کنید برای یک n بزرگ و a ناصفر داشته باشیم $|\hat{\mu}_n(a)| > t$. آنگاه می‌توان با کمک نظریهٔ ضرب ماتریس‌های تصادفی[1] نشان داد که برای انتخابی مناسب از $n_۱ \leq n$ اندازهٔ $\mu_{n_۱}$ دارای ضرایب فوریه‌ای است که روی مجموعه‌ای با بُعد مثبت (کوچکی) از $t/۲$ بزرگ‌تر است؛ [۱۲، گزاره ۲.۶]. کار بعدی ما پیدا کردن مقیاسی احتمالاً کوچک‌تر از $n_۱$ است که $n_۲ < n_۱$ دارای ضرایب فوریهٔ بزرگ (چندجمله ای بر حسب t) روی مجموعه‌ای باشد که بُعد بزرگ‌مقیاس آن d است. این کار در دو مرحله انجام می‌پذیرد. گام اول و دشوارتر، بالا کشیدن[2] بُعد به $d - \epsilon$ برای ϵای کوچک (وابسته به ν) است: [۱۲، گزاره ۳.۶]. مقالهٔ [۱۲] ایده‌هایی از ترکیبیات جمعی[3]، به‌طور خلاصه حدسِ حلقهٔ گسسته‌شده[4] [۱۰]، را به کار می‌برد تا این نتیجه بهتر را به انجام رساند. پس‌از انجام این کار، می‌توان از تخمین‌های کمابیش کلاسیک نظریهٔ فوریه استفاده کرد تا بُعد را از $d - \epsilon$ به d بهبود بخشید؛ [۱۲، گزاره ۵.۶، ۱۱.۶].

۲.۷ فضاهای خارج‌قسمتی $\mathrm{SL}_۲(\mathbb{C})$ و $\mathrm{SL}_۲(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$

اکنون به مسئلهٔ چگالی (حتی بلندپروازانه‌تر، هم‌توزیعی) در فضاهای خارج‌قسمتی گروه‌های نیم‌ساده با نرخ چندجمله‌ای می‌پردازیم. بنابر دلایلی که بحث کردیم، معلوم شده است که این مسئله بسیار چالش‌برانگیز است.

1. random matrix products 2. bootstrap 3. additive combinatorics 4. discretized ring conjecture

اخیراً لیندنشتراوس و محمدی [۷۰] اولین نتایجی را به دست آورده‌اند که چگالی با نرخ چندجمله‌ای برای مدارهای کلی در فضاهای همگن در گروه‌های نیم‌ساده را، کلی‌تر از حالت‌های بحث‌شده در بخش‌های ۴ و ۵ ، به دست می‌دهند.

اجازه دهید چند نماد بیاوریم. فرض کنید

$$G = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{C}) \quad \text{یا} \quad G = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$$

و فرض کنید dist اندازهٔ راست‌ناوردایی روی G باشد که توسط صورت کیلینگ[1] تعریف شده است. این متریک، متریک dist_X را روی X القا می‌کند. شعاعِ یک‌به‌یکی[2] نقطهٔ $x \in X$ را می‌توان توسط این متریک تعریف کرد. برای هر $\eta > ۰$ تعریف کنید

$$X_\eta = \{x \in X : \ x \text{ شعاع یک‌به‌یکی } \geq \eta\};$$

این تعریف با تعریف ۲.۶ قرابت نزدیکی دارد، مثلاً [۷۰، بخش ۳] و مراجع آن را ببینید.

فرض کنید $H \subset G$ یکی از مجموعه‌های زیر باشد

$$\mathrm{SL}_۲(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_۲(\mathbb{C}) \quad \text{یا} \quad \{(g,g) : \ g \in \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})\} \subset \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R}).$$

فرض کنید $P \subset H$ گروه ماتریس‌های بالامثلثی در H باشد.

همانند قبل، فرض کنید $\|\cdot\|$ نرم ماکسیمم روی $\mathrm{Mat}_۲(\mathbb{C})$ یا $\mathrm{Mat}_۲(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_۲(\mathbb{R})$ برحسب پایهٔ متعارف را نشان دهد. برای هر $R > ۰$ و هر زیرگروه $L \subset G$ تعریف کنید

$$B_R^L = \{g \in L : \ \|g - I\| \leq R\}.$$

یکی از نتایج اصلی [۷۰] از این قرار است:

قضیه ۲.۷ ([۷۰]). فرض کنید Γ یک مشبکه حسابی باشد. برای هر $۰ < \delta < ۱/۲$، هر $x_۰ \in X$، و T به اندازهٔ کافی بزرگ (صریحاً وابسته به δ و شعاع یک‌به‌یکی $x_۰$) دست‌کم یکی از موارد زیر برقرار است.

(۱) برای هر $x \in X_{T^{-K\delta}}$ داریم

$$\mathrm{dist}_X\big(x, B^P_{T^A} \cdot x_۰\big) \leq CT^{-K\delta}.$$

1. Killing form 2. injectivity radius

(۲) عنصر $x' \in X$ چنان وجود دارد که Hx' تناوبی است و $\mathrm{vol}(Hx') \le T^{\delta}$ و

$$\mathrm{dist}_X(x', x_\circ) \le CT^{-1}.$$

که در آن A، κ، و C ثابت‌های مثبتی وابسته به Xاند.

اثبات قضیه۲.۷ حال و هوایی شبیه به مقالهٔ [۴۸] از گمبورد[1]، جیکوبسون[2]، و سارنک[3] و همچنین کار بورگین[4]، گمبورد[5] [۱۳، ۱۴]، و کار بورگین، فورمن[6]، لیندنشتراوس و موزس[7] [۱۲] دارد که پیشتر ذکر کردیم؛ قضیهٔ ۱.۷ را ببینید.

به‌ویژه، سه مرحلهٔ اثبات، که در بخش ۱.۷ بحث شدند، در اینجا نیز حاضرند: در گام اول، از شرطی دیوفانتی (در قالب یک لمِ بسته شدن[8]) استفاده می‌شود و نشان داده می‌شود که به‌جز وقتی که حالت (۲) از قضیهٔ ۲.۷ برقرار باشد می‌توانیم بُعدی مثبت در مقیاس مشخص (بُعد آغازین)[9] تولید کنیم. حسابی بودن Γ در این مرحله استفاده می‌شود.

گام دوم ،مرحلهٔ بالاکشیدن به‌شکل زیر است: با گذر به مقیاسی بزرگ‌تر و انتقال دادن $B^P_{T^\delta} \cdot x_\circ$ با یک عضو تصادفی با اندازه‌ای کنترل‌شده می‌توان مجموعه‌ای با بُعد بزرگ به دست آورد. این گام با استدلالی وابسته به یک تابع مارگولیس انجام می‌شود. همان‌طورکه اشاره شد، توابع مارگولیس که در چهارچوب دینامیک همگن در [۳۷] توسط اسکین[10]، مارگولیس، و موزس معرفی شدند به ابزاری غیرقابل اجتناب در دینامیک همگن و فراتر از آن تبدیل شده‌اند.

گام سوم، نتیجه‌گیری چگال‌بودنِ کارا از بزرگ بودن بُعد است. دو جزء اصلی در این گام موجود است: اولی، یک قضیهٔ تصویرسازی براساس کارهای ولف[11] و شلاگ[12] [۹۳، ۹۸] است که صورتی تغییریافته از [۶۰] است. از این مطلب به این منظور آن استفاده می‌شود که بُعد اضافی حاصل در مرحلهٔ بالاکشیدن را به راستای یک زیرگروه کُره‌ساعتی G منتقل کنیم. جزء دوم، استدلالی است که اولین بار ونکاتش ارائه داد و مبتنی است بر زوال همبستگی کمّی برای فضای X: ثابت $\kappa_X > \circ$ وجود دارد که برای هر $\varphi, \psi \in C^\infty(X)$،

$$\left| \int \varphi(gx)\psi(x)\, dm_X - \int \varphi dm_X \int \psi dm_X \right| \ll_G \mathcal{S}(\varphi)\mathcal{S}(\psi)e^{-\kappa_X \mathrm{dist}(e,g)} \tag{۱.۷}$$

1. Gamburd 2. Jakobson 3. Sarnak 4. Bourgain 5. Gamburd 6. Furman 7. Mozes 8. closing lemma 9. initial dimension 10. Eskin 11. Wolff 12. Schlag

که در آن S یک نرم سوبولف مشخص و dist متریک راست G–ناوردای ثابت روی G است.

برای دیدن جزئیات رابطهٔ (۱.۷) [۶۳، بخش ۴.۲] و مراجع آن را ببینید. گفتنی است که وقتی Γ زیرگروه پیمانه‌ای باشد، κ_X ثابتی مطلق است [۱۷، ۱۹، ۵۰].

مدارهای تناوبی

می‌توان روش‌های [۷۰] را برای اثبات قضیهٔ چگال‌بودن کارا برای مدارهای تناوبی H به کار بست.

اجازه دهید در ابتدا قضیهٔ ناواگرایی را یادآوری کنیم. ثابت $\eta_X > 0$ وجود دارد که برای هر مدار تناوبی Y داریم

$$\mu_Y(X_{\eta x}) \geq 0/9 \tag{۲.۷}$$

که در آن μ_Y اندازه احتمال H–ناوردا روی Y است؛ مثلاً [۷۰، لم ۶.۳] را ببینید.

قضیه ۳.۷ ([۷۰]). فرض کنید $Y \subset X$ یک H–مدار تناوبی در X باشد. در این صورت برای هر $x \in X_{\mathrm{vol}(Y)^{-K}}$ داریم $\mathrm{dist}_X(x, Y) \leq C\mathrm{vol}(Y)^{-K}$. در اینجا $K \geq \kappa_X^2/L$ (به ازای یک ثابت مطلق L) و C به شکلی صریح به κ_X، $\mathrm{vol}(X)$، و مینیمم شعاع یک‌به‌یکی نقاط $X_{\eta x}$ وابسته است. اگر Γ زیرگروهی پیمانه‌ای باشد، آنگاه K مطلق است.

اگر Γ یک زیرگروه حسابی باشد، قضیهٔ ۳.۷ حالتی نسبتاً خاص از قضیه‌های گفته‌شده در بخش ۵ است. امّا توجه کنید که در قضیهٔ ۳.۷ Γ لزوماً حسابی نیست ــ به یاد بیاورید که حسابی بودن Γ تنها در اولین گام قضیهٔ ۲.۷ استفاده می‌شود. به‌ویژه، برخلاف [۳۱، ۳۲] قضیهٔ ۳.۷ وابسته به ویژگی (τ) نیست.

همچنین توجه خواننده را به استفاده از توابع مارگولیس برای اثبات خواص جداسازی مدارهای تناوبی (و حالت کلی‌تر، میانی) در [۴۰] و [۸۲] جلب می‌کنیم.

بحث را با کاربردی از قضیهٔ ۳.۷ به پایان می‌بریم.

صفحات کلاً ژئودزیک در خمینه‌های پیوندی

گرومُف[1] و پیاتتسکی–شاپیرو[2] مثال‌هایی از خمینه‌های هذلولوی غیرحسابی[3] را با چسباندن قطعاتی از خمینه‌های حسابی نامتوافق[4] ساخته‌اند [۵۵]. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو مشبکهٔ بی‌تاب[5] در $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ باشد ــ به خاطر بیاورید که $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ یک زیرگروه با اندیس ۲ در $\mathrm{O}(3, 1)$ است

1. Gromov 2. Piatetski-Shapiro 3. non-arithmetic hyperbolic 4. non-commensurable arithmetic 5. torsion free

و $\mathrm{SL}_۲(\mathbb{C})$ موضعاً یکریخت با $\mathrm{O}(۳,۱)$ است. تعریف کنید $M_i = \mathbb{H}^۳/\Gamma_i$. همچنین فرض کنید برای $i = ۱,۲$ زیرخمینه‌های ۳ـبُعدی با مرز $N_i \subset M_i$ وجود دارند چنان‌که

- بستار زاریسکی $\pi_۱(N_i) \subset \Gamma_i$ شامل $\mathrm{O}(۳,۱)^\circ$ است که در آن $\mathrm{O}(۳,۱)^\circ$ مولفهٔ همبندی همانی در $\mathrm{O}(۳,۱)$ است.
- هر مولفهٔ همبندی ∂N_i یک رویهٔ کاملاً ژئودزیک نشانده‌شده در M_i است و M_i را جدا[1] می‌کند.
- $\partial N_۱$ و $\partial N_۲$ طولپا هستند.

فرض کنید M خمینه‌ای باشد که با چسباندن $N_۱$ و $N_۲$ با استفاده از طولپایی بین $\partial N_۱$ و $\partial N_۲$ حاصل می‌شود. در این صورت M یک متریک هذلولوی کامل را می‌پذیرد. لذا، $\pi_۱(M)$ را به عنوان یک مشبکه در $\mathrm{O}(۳,۱)$ می‌نگریم. فرض کنید $\Gamma' = \pi_۱(M) \cap O(۳,۱)^\circ$ و فرض کنید Γ تصویر وارون Γ در $G = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{C})$ باشد.

اگر $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ حسابی و نامتوافق باشند، در این صورت M غیرحسابی است، یعنی Γ یک مشبکه غیرحسابی در G است. یک صفحه کاملاً ژئودزیک در M را می‌توان به یک مدار تناوبی $H = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$ در $X = G/\Gamma$ فراکشید.

قضیه ۴.۷. فرض کنید M یک خمینهٔ هذلولوی ۳-بُعدی باشد که با چسباندن دو قطعهٔ $N_۱$ و $N_۲$ از دو خمینهٔ حسابی غیرمتوافق در امتداد $\Sigma = \partial N_۱ = \partial N_۲$ به شکلی که در بالا توصیف شد به دست آمده باشد. تعداد صفحات کاملاً ژئودزیک در M حداکثر برابر

$$L\big(\mathrm{area}(\Sigma)\mathrm{vol}(X)\eta_X^{-۱}k_X^{-۱}\big)^{L/k_X^۲}$$

است که در آن L ثابت مطلق و $X = G/\Gamma$ مطابق بالاست.

شکل کیفی این قضیه را فیشر[2]، لافون[3]، میلر[4]، و استُور[5] ثابت کردند [۴۳، قضیه ۴.۱]؛ همچنین [۴، بخش ۱۲] را ببینید.

سپاسگزاری قرار است که براساس این مقاله سخنرانی‌ای در بخش دینامیک و بخش نظریهٔ لی و تعمیم‌های آن در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان سال ۲۰۲۲ ارائه دهم.

1. separates 2. Fisher 3. Lafont 4. Miller 5. Stover

نتایجی که در بالا آمد نتیجهٔ چندین سال همکاری با دوستان، همکاران، و استادانی است که بی‌اندازه سپاسگزار آن‌ها هستم. به‌ویژه قدردانی می‌کنم از آینزیدیلر[1]، اسکین[2]، لیندنشتراوس[3]، مارگولیس[4]، اُو[5]، صالحی گل‌سفیدی[6]، شاه[7]، و وِنکاتش[8]. از اُو بابت نظراتش در مورد نسخه‌های قبلی این مقاله تشکر می‌کنم.

افزوده‌های مترجم

برای راحتی خواننده و کمک به فهم بهتر مقاله، در این بخش تعریف‌ها و قضیه‌هایی را که در متن به آن‌ها اشاره شده است می‌آوریم.

حدس اوپنهایم فرض کنید Q یک صورت درجهٔ دوم ناتباهیده روی $\mathbb{R}^n$ باشد. به‌عبارت‌دیگر،

$$Q(x) = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

که در آن $x = \sum_{i=۱}^{n} x_ie_i$ و $e_۱, \cdots, e_n$ پایهٔ متعارف برای $\mathbb{R}^n$ را نشان می‌دهد و $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس متقارن وارون‌پذیر است. صورت $Q(x)$ مثبت معیّن نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $Q(x) \geq ۰$. همچنین $Q(x)$ نامعیّن نامیده می‌شود اگر $Q(x)$ هم مقادیر مثبت و هم منفی را اختیار کند. صورت $Q(x)$ را گویا می‌نامیم اگر عدد $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{۰\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تمام $۱ \leq i, j \leq n$، $\lambda a_{ij} \in \mathbb{Z}$؛ در غیر این صورت Q را ناگویا می‌نامیم.

حدس اوپنهایم (۱۹۲۹) این است که اگر $n \geq ۵$ و Q صورت درجهٔ دوم نامعیّن و ناگویا باشد، آن‌گاه بستار مجموعهٔ مقادیر

$$V(Q) = \{Q(x) :\ x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{۰\}\}$$

شامل نقطهٔ صفر است. به‌عبارتی، دنباله‌ای از بردارهای ناصفر $x_m \in \mathbb{Z}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $Q(x_m) \to ۰$. دَوِنپورت[9] این حدس را برای $n \geq ۳$ تعمیم داد. صورت قوی‌تری از این حدس ادعا می کند که $\overline{V(Q)} = \mathbb{R}$. استدلالی مقدماتی نشان می‌دهد این حدس برای $n = ۲$ نادرست است و درستی آن برای $n = ۳$، آن را برای تمام مقادیر $n \geq ۳$ اثبات می‌کند.

---
1. M. Einsiedler 2. A. Eskin 3. E. Lindenstrauss 4. G. Margulis 5. H. Oh 6. A. Salehi Golsefidy 7. N. Shah 8. A. Venkatesh 9. Davenport

در میانهٔ دههٔ ۷۰ میلادی، راگوناتان شکلی دینامیکی از حدس اوپنهایم را صورت‌بندی کرد. برای بیان این صورت معادل حدس اوپنهایم نیاز به چندین تعریف داریم. فرض کنید

$$Q_\circ(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱^۲ + x_۲^۲ - x_۳^۲,$$

و گروه متعامد متناظر با $Q_\circ$ را در نظر بگیرید:

$$H = \{g \in \mathrm{SL}_۳(\mathbb{R}) : \ Q_\circ(gx) = Q_\circ(x) \text{ ،} x \in \mathbb{R} \text{ برای هر } \}.$$

می‌توان دید که H یک گروه لی ۳-بعدی و به‌طور موضعی یکریخت با $\mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$ است.

فضای مشبکه‌های $\mathbb{R}^n$ زیرگروه گسستهٔ $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ را یک مشبکه می‌نامیم اگر $\mathbb{R}^n/\Lambda$ فشرده باشد. معادلاً، Λ یک مشبکه است اگر پایهٔ $v_۱, \cdots, v_n$ برای $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\Lambda = \mathbb{Z}v_۱ + \cdots + \mathbb{Z}v_n.$$

اگر $e_۱, \cdots, e_n$ پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^n$ باشد، داریم

$$\Lambda_\circ = \mathbb{Z}e_۱ + \cdots + \mathbb{Z}e_n = \mathbb{Z}^n.$$

مشبکهٔ $\Lambda_\circ = \mathbb{Z}^n$ را مشبکهٔ مبدأ می‌نامیم. برای هر مشبکهٔ $\wedge$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{covol}(\Lambda) = \left|\det\left[v_۱|\cdots|v_n\right]\right|.$$

فرض کنید $\mathcal{L}_n$ مجموعهٔ همهٔ مشبکه‌های $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ با شرط $\mathrm{covol}(\Lambda) = ۱$ باشد. به‌سادگی می‌توان دید که گروه $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ به‌صورت ترایا[1] بر $\mathcal{L}_n$ عمل می‌کند و پایدارساز $\Lambda_\circ = \mathbb{Z}^n$ زیرگروه $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ است. به‌این‌ترتیب می‌توان $\mathcal{L}_n$ را با فضای خارج قسمتی $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ یکی در نظر گرفت. در این تناظر هم‌دسته $g\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ در مقابل شبکه $g\mathbb{Z}^n$ قرار می‌گیرد. به‌این‌ترتیب می‌توان فضای $\mathcal{L}_n$ را با توپولوژی خارج قسمتی $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ مجهز کرد.

دو نکتهٔ زیر از اهمیت اساسی برخور دارند.

(۱) $\mathcal{L}_n$ فشرده نیست. به‌سادگی می‌توان دید که مثلاً برای $n = ۲$ دنبالهٔ

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} k & \circ \\ \circ & \frac{۱}{k} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^۲$$

واگراست.

1. transitive

(۲) اندازهٔ احتمال μ بر روی $\mathcal{L}_n$ وجود دارد که تحت عمل $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ناوردا است.

وجود این اندازهٔ احتمال نتیجه‌ای نابدیهی از نظریهٔ تحویل[۱] است. برای اثبات به کتاب راگوناتان [۸۶] رجوع کنید.

در حالت کلی‌تر، اگر G یک گروه لی همبند باشد (مثلاً $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$)، زیرگروه گسستهٔ Γ از G را یک مشبکه می‌نامیم اگر اندازهٔ احتمال μ بر فضای خارج قسمتی G/Γ وجود داشته باشد که تحت عمل G ناوردا باشد. به‌عبارت‌دیگر، برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیرِ $A \subset G/\Gamma$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $\mu(A) = \mu(gA)$. در حالتی که $G = \mathbb{R}^n$ این تعریف از مشبکه با تعریف بالا سازگار است.

فرض کنید G یک گروه لی و $\Gamma \subset G$ یک مشبکه باشد. یکی از مسائل اساسی نظریهٔ دینامیک همگن، بررسی مدارهای Hx برای زیرگروه‌های لی $H \subseteq G$ و نقاط $x \in G/\Gamma$ است.

فرض کنید $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ یک گروه لی همبند و $\Gamma \subseteq G$ یک مشبکه باشد. زیرگروه $U \subseteq G$ را تک‌توان می‌نامیم اگر برای هر $u \in U$، ۱ تنها ویژه‌مقدار u باشد. به‌عبارت‌دیگر، $(u-1)^n = 0$.

حدس راگوناتان حدس توپولوژیک راگوناتان بیان می‌کند که اگر $U \subseteq G$ یک زیرگروه تک‌توان باشد و $x \in G/\Gamma$، آن‌گاه بستار Ux خود مجموعه‌ای همگن است. به‌بیان‌دیگر، زیرگروه $L \supseteq U$ (وابسته به x) چنان وجود دارد که $\overline{Ux} = Lx$. در حالت کلی‌تر، اگر $W \subseteq G$ زیرگروه همبند و بسته‌ای باشد که توسط اعضای تک‌توان تولید بشود (مثلاً اگر W همریخت با $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ باشد) آنگاه برای هر $x \in G/\Gamma$ زیرگروه $W \subset L \subset G$ چنان وجود دارد که $\overline{Wx} = Lx$. به‌علاوه، $\Gamma \cap L$ یک مشبکه در L است. حالت خاص این حدس وقتی $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ و $W = \mathrm{SO}(Q_0)$ را مارگولیس ثابت کرد و درستی حدس اوپنهایم را نشان داد. این حدس را رتنر در کلی‌ترین شکلش اثبات کرد.

پیش‌از بیان قضیه‌های رَتنر به ساده‌ترین حالت آن توجه می‌کنیم.

مثال. فرض کنید $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ و $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. می‌توان دید که $\Gamma < G$ یک مشبکه است. حال فرض کنید W متشکل از ماتریس‌های 2×2 بالامثلثی با مقادیر ویژهٔ ۱ باشد:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

---

1. reduction theory

عمل W برروی $\mathbf{G}/\Gamma$ را شارش دورساعتی[1] می‌نامند. در این حالت دو نوع مدار برای W وجود دارد:

۱) مدارهای بسته. بنویسید $\Lambda_\circ = \mathbb{Z}^n$. در این صورت به‌سادگی می‌توان نشان داد که مدار $W\Lambda \in G/\Gamma$ یک مدار تناوبی است و با $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ همریخت است. به‌طورکلی، اگر $\Lambda = g\mathbb{Z}^n$ که در آن $g \in \mathrm{SL}_۲(\mathbb{Q})$، می‌توان دید که مدار $W\Gamma$ بسته است. ازطرفی، می‌توان دید که برای تقریباً هر Λ، مدار $W\Lambda$ چگال و حتی هم‌توزیع است. این حالتی بسیار خاص از قضیه‌های رَتنر است.

در اوائل دههٔ ۹۰ میلادی، رَتنر قضیه‌های اساسی در دینامیک همگن اثبات کرد که رفتار مدارهای گروه‌های تک‌توان در فضاهای همگن را توصیف می‌کنند. این قضیه‌ها منجر به اثبات حدس مشهور راگوناتان شدند که حالت‌هایی خاص از آن را پیشتر مارگولیس و دنی–مارگولیس اثبات کرده بودند. یکی از قضیه‌های رَتنر توصیفی از اندازه‌های ناوردا تحت خانوادهٔ وسیعی از زیرگروه‌های G ارائه می‌دهد.

قضیه (رده‌بندی اندازه‌های رَتنر). فرض کنید G یک گروه لی همبند و $\Gamma \leq G$ یک مشبکه باشد. فرض کنید $U \subset G$ زیرگروهی همبند از G باشد که توسط زیرگروه‌های تک‌پارامتری تک‌توان تولید شده است. در این صورت، هر اندازهٔ U-ناوردای ارگودیک در G/Γ منشأ «جبری» دارد. به‌عبارت‌دیگر، نقطهٔ $\overline{x} \in G/\Gamma$ و زیرگروه $U \subset S \subset G$ وجود دارد به‌طوری‌که $S\overline{x}$ بسته است و μ اندازهٔ S–ناوردا برروی مدار $S\overline{x}$ است.

ملاحظه. اندازهٔ μ ارگودیک است اگر نتوان آن را به‌شکلی نابدیهی به‌صورت ترکیب محدب اندازه‌های ناوردای U–ناوردا نمایش داد. بنابر قضیهٔ تجزیهٔ ارگودیک، هر اندازهٔ U–ناوردا را می‌توان به‌صورت ترکیبی محدب (احتمالاً پیوسته) از اندازه‌های ارگودیک U– ناوردا نمایش داد.

توجه کنید که اگر $H \leq G$ یک زیرگروه دلخواه باشد، دراین‌صورت لزومی ندارد که اندازه‌های H–ناوردا منشأ جبری داشته باشند. مثلاً اگر $G = \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$ و

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t & \circ \\ \circ & t^{-۱} \end{pmatrix} :\ t > \circ \right\}$$

آنگاه اندازه‌های H–ناوردایی وجود دارند که تکیه‌گاه آن‌ها مجموعه‌هایی فرکتال‌مانند هستند. چنین اندازه‌هایی نمی‌توانند منشأ جبری داشته باشند.

1. horocycle flow

قضیهٔ دیگر رَتنر این است.

قضیه (هم‌توزیعی رَتنر). فرض کنید G یک گروه لی و $\Gamma < G$ یک مشبکه باشد. فرض کنید $W = \{w_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ یک شارش تک‌توان یک‌بعدی باشد. در این صورت برای هر $x \in G/\Gamma$، زیرگروه همبندی مثل L وجود دارد به‌طوری‌که $W \subset L \subset G$ و $\overline{Wx} = Lx$. به‌علاوه، اگر μ_S تکیه‌گاه اندازهٔ احتمال S-ناوردا بر $L\overline{x}$ را نشان دهد آنگاه برای هر تابع پیوسته با محمل فشرده مثل $f : G/\Gamma \to \mathbb{R}$ داریم

$$\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} f(w_t x)\, dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_{Lx} f\, d\mu_S.$$

به‌عبارت‌دیگر، مدار Lx توسط شارش تک‌توان $\{w_t x\}$ به‌طور یکنواخت «پُر می‌شود». توجه کنید که نرخ پُر شدن بسته به ویژگی‌های دیوفانتی نقطهٔ x دارد. مثال زیر این بستگی را به ساده‌ترین شکل توصیف می‌کند.

قضیه (قضیهٔ کرونکر، ۱۸۸۴). فرض کنید $\alpha = (\alpha_۱, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ طوری باشد که اعداد حقیقی $۱, \alpha_۱, \cdots, \alpha_m$ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند. در این صورت مجموعهٔ

$$H_\alpha := \big\{n\alpha(\mathrm{mod}\mathbb{Z}^m) :\ n \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$$

چگال است. به‌علاوه، مدار $\big\{n\alpha(\mathrm{mod}\mathbb{Z}^m) :\ n \geq ۱\big\}$ در $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ هم‌توزیع است.

به‌سادگی می‌توان دید که اگر شرط استقلال خطی برقرار نباشد، در این صورت $\overline{H}_\alpha$ زیرگروهی سره از $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ است. وابستگی خطی $۱, \alpha_۱, \cdots, \alpha_m$ معادل است با وجود بردار ناصفر $k = (k_۱, \cdots, k_m)$ با این ویژگی که

$$k \cdot \alpha := \sum_{i=۱}^{m} k_i \alpha_i \in \mathbb{Z}.$$

حال اگر بردار $k \in \mathbb{Z}^m$ با طولی «کوتاه» وجود داشته باشد که $||k\cdot\alpha||_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ ناصفر ولی بسیار کوچک باشد، آنگاه زمان لازم T برای آنکه مدار $\{n\alpha\}_{۱\geq n\geq T}$ δ-چگال در $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ شود (یعنی هر گوی به شعاع δ را قطع کند) می‌تواند به اندازهٔ کافی بزرگ شود. ازاین‌رو، هر صورت کارا از قضیهٔ کرونکر نیازمند شرطی دیوفانتی روی α است. قضیهٔ زیر نمونه‌ای ساده از صورت کارای یک قضیهٔ هم‌توزیعی را نشان می‌دهد؛ برای اثبات، قضیهٔ ۱.۳ در [۵۲] را ببینید.

قضیه. فرض کنید $m \geq ۱$ و $۰ < \delta < ۱/۲$. اگر $\alpha \in \mathbb{R}^m$ چنان باشد که مدار $\{n\alpha\}_{۱\leq n\leq T}$ در $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ δ-چگال نباشد آنگاه بردار ناصفر $k \in \mathbb{Z}^m$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|k\| < \delta^{-C}$ و $\|k\cdot\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} < \frac{۱}{T}\delta^{-C}$. دراینجا C ثابتی وابسته به m است.

کاراسازی حدس اوپنهایم همان‌طورکه اشاره شد، حدس اوپنهایم که توسط مارگولیس ثابت شد بیان می‌کند که اگر Q یک صورت درجهٔ دوم نامعیّن و ناگویا از $n \geq ۳$ متغیر باشد آنگاه صفر یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\vee(Q) = \{Q(x) : x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{۰\}\}$ است. برای $T \geq ۱$ فرض کنید

$$\vee_T(Q) = \{Q(x) : x \in \mathbb{Z}^n,\ ۰ < \|x\| < T\}.$$

صورتی کارا از قضیهٔ بالا وجود نقطه‌ای مثل $x \in \vee_T(Q)$ را تضمین می‌کند که $|Q(x)| < \varepsilon$. بزرگی T وابسته به ε است. به‌دلایلی مشابه با مثال بالا چنین حکمی مستلزم فرض دیوفانتی روی صورت درجهٔ دوم Q است. صورت‌های کارایی از قضیهٔ مارگولیس برای صورت‌هایی با علامت $(۲,۱)$ و $(۲,۲)$ در مقاله‌های زیر ثابت شده‌اند.

1) Lindenstrauss, E., Mohammadi, A., Wang, Z., Effective equidistribution for some one pa- rameter unipotent flows (2022), available at `arXiv:2211.11099`.
2) Lindenstrauss, E., Mohammadi, A., Wang, Z., Polynomial effective equidistribution (2022), available at `arXiv:2202.11815`.

مراجع

[1] Aka, M., Einsiedler, M., Li, H., and Mohammadi, A., On effective equidistribution for quotients of $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$, *Israel J. Math.*, **236** (2020), no. 1, 365-391.

[2] Auslander, L., Green, L., and Hahn, F., *Flows on Homogeneous Spaces* (with the assistance of L. Markus and W. Massey, and an appendix by L. Greenberg), Annalsof Mathematics Studies, no. 53, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[3] Benoist, Y., Oh, H., Effective equidistribution of S-integral points on symmetric varieties, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **62** (2012), no. 5, 1889-1942.

[4] Benoist, Y., Oh, H., Geodesic planes in geometrically finite acylindrical 3-manifolds (2018), available at `arXiv:1802.04423`.

[5] Benoist, Y., Quint, J.-F., Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes, *Ann. of Math.*, (2) **174** (2011), no. 2, 1111-1162.

[6] Benoist, Y., Quint, J.-F., Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (II), *J. Amer. Math. Soc.*, **26** (2013), no. 3, 659-734.

[7] Benoist, Y., Quint, J.-F., Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (III), *Ann. of Math.*, (2) **178** (2013), no. 3, 1017-1059.

[8] Bombieri, E., Gubler, W., *Heights in Diophantine Geometry*, New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, 2006.

[9] Borel, A., Prasad, G., Finiteness theorems for discrete subgroups of boundedcovolume in semi-simple groups, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **69** (1989), 119-171.

[10] Bourgain, J., The discretized sum-product and projection theorems, *J. Anal. Math.*, **112** (2010), 193-236.

[11] Bourgain, J., A quantitative Oppenheim theorem for generic diagonal quadratic forms, *Israel J. Math.*, **215** (2016), no. 1, 503-512

[12] Bourgain, J., Furman, A., Lindenstrauss, E., Mozes, S., Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus, *J. Amer. Math. Soc.*, **24** (2011), no. 1, 231-280.

[13] Bourgain, J., Gamburd, A., On the spectral gap for finitely-generated subgroups of $\mathrm{SU}(2)$, *Invent. Math.*, **171** (2008), no. 1, 83-121.

[14] Bourgain, J., Gamburd, A., Uniform expansion bounds for Cayley graphs of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, *Ann. of Math.*, (2) **167** (2008), no. 2, 625-642.

[15] Brownawell, W. D., Local Diophantine Nullstellen inequalities, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), no. 2, 311-322

[16] Burger, M., Horocycle flow on geometrically finite surfaces, *Duke Math. J.*, **61** (1990), no. 3, 779-803.

[17] Burger, M., Sarnak, P., Ramanujan duals, II, *Invent. Math.*, **106** (1991), no. 1, 1-11.

[18] Buterus, P., Götze, F., Hille, T., Margulis, G., Distribution of values of quadratic forms at integral points (2019), available at `arXiv: 1004.5123`.

[19] Clozel, L., Démonstration de la conjecture τ, *Invent. Math.*, **151** (2003), no. 2, 297-328.

[20] Dani, S. G., Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces, *Invent. Math.*, **47** (1978), no. 2, 101-138.

[21] Dani, S. G., Invariant measures and minimal sets of horospherical flows, *Invent. Math.*, **64** (1981), no. 2, 357-385.

[22] Dani, S. G., On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **4** (1984), no. 1, 25-34.

[23] Dani, S. G., On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, II, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6**(1986), no. 2, 167-182.

[24] Dani, S. G., Orbits of horospherical flows, *Duke Math. J.*, **53** (1986), no. 1, 177-188.

[25] Dani, S. G., Margulis, G. A., Values of quadratic forms at primitive integral points, *Invent. Math.*, **98** (1989), no. 2, 405-424.

[26] Dani, S. G., Margulis, G. A., Orbit closures of generic unipotent flows on homogeneous spaces of $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, *Math. Ann.*, **286** (1990), no. 1-3, 101-128.

[27] Dani, S. G., Margulis, G. A., Asymptotic behaviour of trajectories of unipotentflows on homogeneous spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **101** (1991), no. 1, 1-17.

[28] Dani, S. G., Margulis, G. A., Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms, in *I. M. Gelfand Seminar*, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 91-137.

[29] Duke, W., Rudnick, Z., Sarnak, P., Density of integer points on affine homogeneous varieties, *Duke Math. J.*, **71** (1993), no. 1, 143-179.

[30] Einsiedler, M., Katok, A., Lindenstrauss, E., Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture, *Ann. of Math.*, (2) **164** (2006), no. 2, 513-560.

[31] Einsiedler, M., Margulis, G., Mohammadi, A., Venkatesh, A., Effective equidistribution and property (τ), *J. Amer. Math. Soc.*, **33** (2020), no. 1, 223-289.

[32] Einsiedler, M., Margulis, G., Venkatesh, A., Effective equidistribution for closed orbits of semisimple groups on homogeneous spaces, *Invent. Math.*, **177** (2009), no. 1, 137-212.

[33] Einsiedler, M., Mohammadi, A., Effective arguments in unipotent dynamics, in *Dynamics, Geometry, Number Theory: The Impact of Margulis on Modern Mathematics*, The University of Chicago Press, 2022.
[34] Einsiedler, M., Rühr, R., Wirth, P., Distribution of shapes of orthogonal lattices, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **39** (2019), no. 6, 1531-1607
[35] Einsiedler, M., Wirth, P., Effective equidistribution of closed hyperbolic surfaces on congruence quotients of hyperbolic spaces, in *Dynamics, Geometry, Number Theory: The Impact of Margulis on Modern Mathematics*, The University of Chicago Press, 2022.
[36] Ellenberg, J. S., Venkatesh, A., Local-global principles for representations of quadratic forms, *Invent. Math.*, **171** (2008), no. 2, 257-279.
[37] Eskin, A., Margulis, G., Mozes, S., Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of the Oppenheim conjecture, *Ann. of Math.*, (2) **147** (1998), no. 1, 93-141.
[38] Eskin, A., McMullen, C., Mixing, counting, and equidistribution in lie groups, *Duke Math. J.*, **71** (1993), no. 1, 181-209.
[39] Eskin, A., Mirzakhani, M., Invariant and stationary measures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on moduli space, *Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci.*, **127** (2018), 95-324.
[40] Eskin, A., Mirzakhani, M., Mohammadi, A., Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on moduli space, *Ann. of Math.*, (2) **182** (2015), no. 2, 673-721.
[41] Eskin, A., Mirzakhani, M., Mohammadi, A., Effective counting of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces (2021), available at `arXiv:1905.04435`.
[42] Eskin, A., Oh, H., Representations of integers by an invariant polynomial and unipotent flows, *Duke Math. J.*, **135** (2006), no. 3, 481-506.
[43] Fisher, D., Lafont, J.-F., Miller, N., Stover, M., Finiteness of maximal geodesic submanifolds in hyperbolic hybrids (2018), available at `arXiv:1802.04619`.
[44] Flaminio, L., Forni, G., Invariant distributions and time averages for horocycle flows, *Duke Math. J.*, **119** (2003), no. 3, 465-526.
[45] Flaminio, L., Forni, G., Equidistribution of nilflows and applications to theta sums, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26** (2006), no. 2, 409-433.
[46] Furstenberg, H., Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 377-428.
[47] Furstenberg, H., The unique ergodicity of the horocycle flow, in *Recent Advances in Topological Dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn. 1972)*, Lecture Notes in Math., vol. 318, 1973, 95-115.
[48] Gamburd, A., Jakobson, D., Sarnak, P., Spectra of elements in the group ring of $\mathrm{SU}(2)$, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **1** (1999), no. 1, 51-85.
[49] Glasner, E., *Ergodic Theory via Joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
[50] Gorodnik, A., Maucourant, F., Oh, H., Manin's and Peyre's conjectures on rational points and adelic mixing, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, (4) **41** (2008), no. 3, 383-435.
[51] Gorodnik, A., Oh, H., Rational points on homogeneous varieties and equidistribution of adelic periods, *Geom. Funct. Anal.*, **21** (2011), no. 2, 319-392.
[52] Green, B., Tao, T., The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds, *Ann. of Math.*, (2) **175** (2012), no. 2, 465-540
[53] Greenberg, M. J., Rational points in Henselian discrete valuation rings, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (1966), no. 31, 59-64.
[54] Greenberg, M. J., Strictly local solutions of Diophantine equations, *Pacific J. Math.*, **51** (1974), 143-153
[55] Gromov, M., Piatetski-Shapiro, I. I., Non-arithmetic groups in lobachevsky spaces, *Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci.*, **66** (1987), 93-103.

[56] He, W., de Saxcé, N., Linear random walks on the torus (2020), available at `arXiv:1910.13421`.

[57] He, W., Lakrec, T., Lindenstrauss, E., Affine random walks on the torus (2020), available at `arXiv:2003.03743`.

[58] Hedlund, G. A., Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. J.*, **2** (1936), no. 3, 530-542.

[59] Iwaniec, H., On indefinite quadratic forms in four variables, *Acta Arith.*, **33** (1977), no. 3, 209-229.

[60] Käenmäki, A., Orponen, T., Venieri, L., A marstrand-type restricted projection theorem in $\mathbb{R}^3$ (2017), available at `arXiv:1708.04859`.

[61] Katz, A., Quantitative disjointness of nilflows from horospherical flows (2019), available at `arXiv: 1910.04675`.

[62] Kleinbock, D. Y., Margulis, G. A., On effective equidistribution of expanding translates of certain orbits in the space of lattices (2009), available at `arXiv:math/0702433`.

[63] Kleinbock, D. Y., Margulis, G. A., Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces, in *Sinaĭ's Moscow Seminar on Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 171, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 141-172,

[64] Kleinbock, D. Y., Margulis, G. A., Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds, *Ann. of Math.*, (2) **148** (1998), no. 1, 339-360.

[65] Lee, M., Oh, H., Orbit closures of unipotent flows for hyperbolic manifolds with fuchsian ends (2020), available at `arXiv:1902.06621`.

[66] Leibman, A., Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **25** (2005), no. 1, 201-213.

[67] Lindenstrauss, E., Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity, *Ann. of Math.*, (2) **163** (2006), no. 1, 165-219.

[68] Lindenstrauss, E., Margulis, G., Effective estimates on indefinite ternary forms, *Israel J. Math.*, **203** (2014), no. 1, 445-499.

[69] Lindenstrauss, E., Mirzakhani, M., Ergodic Theory of the Space of Measured Laminations, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2008** (2008), rnm126.

[70] Lindenstrauss, E., Mohammadi, A., Polynomial effective density in quotients of $\mathbb{H}^3$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (2021), available at `arXiv:2112.14562`.

[71] Lindenstrauss, E., Mohammadi, A., Margulis, G., Shah, N., Quantitative behavior of unipotent flows and an effective avoidance principle (2019), available at `arXiv:1904.00290`.

[72] Margulis, G., Mohammadi, A., Quantitative version of the Oppenheim conjecture for inhomogeneous quadratic forms, *Duke Math. J.*, **158** (2011), no. 1, 121-160.

[73] Margulis, G. A., The action of unipotent groups in a lattice space, *Mat. Sb. (N.S.)*, **128** (1971), 552-556.

[74] Margulis, G. A., Indefinite quadratic forms and unipotent flows on homogeneous spaces, in *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Banach Center Publ., vol. 23 PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1989, 399-409.

[75] Marklof, J., Pair correlation densities of inhomogeneous quadratic forms, *Ann. of Math.*, (2) **158** (2003), no. 2, 419-471.

[76] Masser, D. W., Wüstholz, G., Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions, *Invent. Math.*, **72** (1983), no. 3, 407-464.

[77] McAdam, T., Almost-prime times in horospherical flows on the space of lattices, *J. Mod. Dyn.*, **15** (2019), 277-327.

[78] McMullen, C. T., Mohammadi, A., Oh, H., Geodesic planes in hyperbolic 3- manifolds, *Invent. Math.*, **209** (2017), no. 2, 425-461.

[79] McMullen, C. T., Mohammadi, A., Oh, H., Geodesic planes in the convex core of an acylindrical 3-manifold (2021), available at `arXiv:1802.03853`.

[80] Mohammadi, A., Golsefidy,, A. S., Thilmany, F., Diameter of homogeneous spaces: an effective account (2018), available at `arXiv:1811.06253`.

[81] Mohammadi, A., Oh, H., Matrix coefficients, counting and primes for orbits of geometrically finite groups, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **17** (2015), no. 4, 837-897.

[82] Mohammadi, A., Oh, H., Isolations of geodesic planes in the frame bundle of a hyperbolic 3-manifold (2020), available at `arXiv:2002.06579`.

[83] Mozes, S., Shah, N., On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15** (1995), no. 1, 149-159.

[84] Parry, W., Dynamical systems on nilmanifolds, *Bull. London Math. Soc.*, **2** (1970), 37-40.

[85] Prasad, G., Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **69** (1989), 91-117.

[86] Raghunathan, M. S., *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, Springer, 1972.

[87] Ratner, M., On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups, *Acta Math.*, **165** (1990), no. 3-4, 229-309.

[88] Ratner, M., On Raghunathan's measure conjecture, *Ann. of Math.*, (2) **134** (1991), no. 3, 545-607.

[89] Ratner, M., Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, *Duke Math. J.*, **63** (1991), no. 1, 235-280.

[90] Sarnak, P., Asymptotic behavior of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34** (1981), no. 6, 719-739.

[91] Sarnak, P., Values at integers of binary quadratic forms, in *Harmonic Analysis and Number Theory (Montreal, PQ, 1996)*, CMS Conf. Proc., 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 181-203.

[92] Sarnak, P., Ubis, A., The horocycle flow at prime times, *J. Math. Pures Appl.*, (9) **103** (2015), no. 2, 575-618.

[93] Schlag, W., On continuum incidence problems related to harmonic analysis, *J. Func. Anal.*, **201** (2003), 480-521.

[94] Strömbergsson, A., On the uniform equidistribution of long closed horocycles, *Duke Math. J.*, **123** (2004), no. 3, 507-547.

[95] Strömbergsson, A., An effective Ratner equidistribution result for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, *Duke Math. J.*, **164** (2015), no. 5, 843-902.

[96] Veech, W. A., Minimality of horospherical flows, *Israel J. Math.*, **21** (1975), no. 2-3, 233-239.

[97] Venkatesh, A., Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity, *Ann. of Math.*, (2) **172** (2010), no. 2, 989-1094.

[98] Wolff, T., Local smoothing type estimates on L^p for large p, *Geom. Funct. Anal.*, **10** (2000), no. 5, 1237-1288.

[99] Zagier, D., Eisenstein series and the Riemann zeta function, in *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic (Bombay, 1979)*, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., 10, Tata Inst. Fundamental Res., Bombay, 1981, 275-301.

کیوان ملّاحی کارای: آلمان، دانشگاه کانستراکتر

رایانامه: `kmallahikarai@constructor.university`

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 265–296
doi: 10.30504/mct.2024.1459.2024

Finitary Analysis in Homogeneous Spaces*

A. Mohammadi
Translated by K. Mallahi Karai[1]

Constructor University, Germany

Abstract. In this paper we give an overview of recent developments pertaining to the quantitative aspects of dynamics of group actions on homogeneous spaces.

Keywords: finitary analysis, homogeneous dynamics, periodic orbit, effective version, equidistribution
Article history: Recieved 18 November 2023; Accepted 25 December 2023
Article type: translation

* Mohammadi, A., Finitary analysis in homogeneous spaces, in *ICM–International Congress of Mathematicians*, vol. V., D. Beliaev, S. Smirnov, eds., EMS Press, Berlin, 2023, 3530-3551.

1. kmallahikarai@constructor.university