فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۳۱۳ تا ۳۴۲

# پیشینهٔ تاریخی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای

جلال پیردایه، آرش رستگار✉

**چکیده.** در این مقاله به بررسی پیشینهٔ تاریخی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای می‌پردازیم. ابتدا نظریهٔ کومر را که از پیشینه‌های جبری نظریهٔ میدان‌های رده‌ای محسوب می‌شود بررسی می‌کنیم. سپس به «رویای جوانی کومر» می‌پردازیم که منجر به مسئلهٔ پیداکردن همهٔ گسترش‌های آبلی میدان‌های عددی شد. در ادامه، قضیه‌های تاکاگی را بیان می‌کنیم و در نهایت مسائل هیلبرت را بررسی می‌کنیم. با بررسی سیر تاریخی این مطالب سعی داریم تصویری بهتر از پیشینهٔ تاریخی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای، که بخشی از پایه‌های ریاضیات معاصر است، ارائه کنیم.

## ۱ مقدمه

نظریهٔ میدان‌های رده‌ای[1] دستاورد اصلی نظریهٔ اعداد در قرن بیستم است [۲۱]. غنا، زیبایی، و قدرت میدان‌های رده‌ای از همان اولین قدم‌های گاوس[2] در این نظریه، نظریهٔ اعداد را تحت تاثیر قرار داد. آندره وی[3] اعتقاد داشت ازآنجاکه نظریهٔ میدان‌های رده‌ای از مبانی پایه‌ای ریاضیات است، هر ریاضی‌دانی باید با آن آشنا باشد همان‌طورکه لازم است نظریهٔ گالوا را بداند [۲۱]. نظریهٔ میدان‌های رده‌ای توصیف گسترش‌های آبلی میدان‌های سرتاسری و میدان‌های موضعی است.

آغاز نظریهٔ میدان‌های رده‌ای با ظهور نظریهٔ کومر[4] همراه بود. نظریهٔ کومر تلاشی کاملاً جبری بود که نظیر آن در نظریهٔ میدان‌های حسابی در ذیل میدان‌های رده‌ای ظاهر شد. نظریهٔ کومر از پیشینه‌های جبری نظریهٔ میدان‌های رده‌ای محسوب می‌شود که در برگیرندهٔ قضیهٔ وجودی زیر است.

عبارات و کلمات کلیدی: میدان‌های رده‌ای، میدان عددی، گسترش گالوا، قانون تقابل، عدد رده‌ای، مسائل هیلبرت
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۳۰

1. class field theory (CFT) 2. Gauss 3. Andre Weil 4. Kummer theory

doi: 10.30504/mct.2023.1414.1993

**قضیه ۱.۱.** اگر $k$ یک میدان، $G_k$ گروه گالوای مطلق[1]، و خارج قسمت ماکسیمال آبلی[2] آن $G_k^{ab} = \frac{G_k}{[G_k, G_k]}$ باشد. همچنین، برای عدد صحیح مثبت $m$ گروه ریشه‌های واحد با مرتبهٔ $m$ را با $\mu_m$ نمایش می‌دهیم. در این صورت برای میدان $k$ که مشخصهٔ آن عدد صحیح $m > ۱$ را عاد نمی‌کند، دنبالهٔ دقیق $G_k$-مدول‌های زیر

$$۱ \to \mu_m \to K^* \xrightarrow{.m} K^* \to ۱$$

وجود دارد که در آن $K$ بستار جبری $k$ است.

دنبالهٔ بالا نگاشت کومر را به دست می‌دهد؛ یعنی

$$\frac{k^*}{k^{*m}} = H^۱(G_k, \mu_m).$$

این یک نظریهٔ $H^۱$ است؛ اگر $\mu_m$ در $k$ باشد، آنگاه $H^۱(G_k, \mu_m) = \mathrm{Hom}(G_k, \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})$ و نگاشت جفت‌کنندهٔ[3] کومر به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{k^*}{k^{*m}} \times \frac{G_k}{[G_k, G_k]G_k^m} \to \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}.$$

از اینجا قضیهٔ دوگانی کومر به‌سادگی به دست می‌آید.

**قضیه ۲.۱.** گسترش‌های آبلی متناهی $k$ از توان $m$ در تناظر یک‌به‌یک با زیرگروه‌های $B$ از $k^*$ با توان $m$ هستند؛ یعنی $B \to k(\sqrt[m]{B})$.

اما این نظریه برای مطالعهٔ میدان‌های حسابی $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}_p$، و گسترش‌های متناهی آن‌ها چندان کارآمد نیست، زیرا ریشه‌های واحد کمی در این میدان‌ها وجود دارد؛ برخلاف میدان‌های توابع روی میدان‌های بستهٔ جبری که چنین نیستند. اگر با $\mathbb{Q}(\mu_m)$ کار کنیم به‌سادگی می‌توان نظریهٔ کومر را برای $m$هایی که عدد اول‌اند بسط داد، زیرا $[\mathbb{Q}(\mu_m) : \mathbb{Q}]$ نسبت به $m$ اول خواهد بود. اما این فکر هم چندان پیش نخواهد رفت.

هدف اصلی مطالعهٔ $G_k$ است. نتایج اولیه در هندسهٔ ناجابه‌جایی[4] نشان می‌دهند که خودریختی‌های پیوستهٔ $G_{\mathbb{Q}}$ درونی هستند. خودریختی‌های پیوستهٔ گروه گالوای مطلق کامل‌سازی‌های غیرارشمیدسی

1. absolute Galois group 2. maximal abelian quotient 3. pairing 4. anabelian geometry

میدان‌های اعداد $k_\nu$ لزوماً درونی نیستند. در حالت میدان‌های اعداد، هنوز چیز زیادی راجع به $G_k$ نمی‌دانیم، برخلاف $G_k^{ab}$ که اطلاعات بیشتری دربارهٔ آن از طریق نظریهٔ میدان‌های رده‌ای داریم. حدس شافارویچ[۱] که $[G_\mathbb{Q}, G_\mathbb{Q}]$ در ردهٔ گروه‌های متناهی‌گرای[۲] آزاد است هنوز حل نشده است. مسئلهٔ اصلی چنین است:

**مسئلهٔ کلیدی و بنیادی.** چگونه به گسترش‌های ماکسیمال جدایی‌پذیر، گسترش‌های ماکسیمال آبلی، و گسترش‌های ماکسیمال پوچ‌توان از ردهٔ پوچ‌توان خاصی از میدان‌های حسابی دسترسی پیدا کنیم و چگونه زیرگسترش‌های متناهی آن‌ها را براساس اشیای ریاضی که به میدان پایه وابسته می‌شوند بیان نماییم؟ و اینکه چه ساختارهایی از میدان‌های حسابی را باید برای این توصیف به کار بریم؟

## ۲ ریشه‌های تاریخی

کرونکر[۳]، حین مطالعهٔ آثار آبل[۴]، متوجه شد که برخی گسترش‌های آبلی میدان عددی درجهٔ دوم موهومی[۵] با اضافه کردن مقادیر خاص توابع خودریخت[۶] که از خم‌های بیضوی به دست می‌آیند تولید می‌شوند. درواقع، اگر $K$ میدان اعداد درجهٔ دوم موهومی و $I = \mathbb{Z}\omega_۱ \oplus \mathbb{Z}\omega_۲$ ایده‌آلی از $K$ باشد که در آن $\mathrm{Im}(\frac{\omega_۱}{\omega_۲}) > ۰$ آنگاه $K(j(\frac{\omega_۱}{\omega_۲}))$ یک گسترش آبلی از $K$ خواهد بود که در آن $j$ تابع پیمانه‌ای[۷] است. کرونکر این سؤال را مطرح کرد که آیا همهٔ گسترش‌های آبلی $K$ به همین روش به‌دست می‌آیند؟ این ایده را رویای جوانی کرونکر[۸] می‌نامند. این رویا منجر به مسئلهٔ یافتن همهٔ گسترش‌های آبلی میدان‌های اعداد شد. حدس کرونکر را وبر[۹] اثبات کرد [۱۹].

**قضیه ۱.۲.** هر گسترش آبلی $\mathbb{Q}$ مشمول در یک گسترش دایره‌بُری[۱۰] از $\mathbb{Q}$ است.

نزد کرونکر و وبر، نظریهٔ میدان‌های رده‌ای به معنای پیداکردن همهٔ گسترش‌های آبلی و نیز تعمیم قضیهٔ دیریکله[۱۱] دربارهٔ اعداد اول در تصاعدهای حسابی بود که در میدان اعداد دلخواه برقرار است.

اثبات کرونکر برای قضیهٔ بالا برای گسترش‌ها با مرتبهٔ توان ۲ ایراد داشت و کرونکر به این مسئله واقف بود [۶]. وبر برای این قضیه اثباتی ارائه کرد که مورد پذیرش جامعهٔ ریاضی قرار

1. Igor R. Shafarevich 2. profinite 3. Kronecker 4. Abel 5. imaginary quadratic field 6. automorphism 7. modular function 8. Kronecker's jugentratum 9. Weber 10. cyclotomic 11. Dirichlet's theorem

گرفت، اما آن اثبات هم برای گسترش‌ها با مرتبهٔ توان ۲ مشکل داشت و حدود ۹۰ سال کسی به این اشکال توجهی نکرد. هیلبرت[۱] در سال ۱۸۹۶ اولین اثبات درست برای این قضیه را ارائه کرد. هیلبرت با یک گسترش آبلی $\frac{L}{\mathbb{Q}}$ شروع می‌کند و با استفاده از نظریهٔ جدید خود در مورد گروه‌های انشعابی مراتب بالاتر نشان می‌دهد $L$ در میدان‌هایی تودرتو به‌شکل $F_n(\zeta_n)$ قرار می‌گیرد که در آن $F_n$ زیرمیدانی از $L$ (و لذا روی $\mathbb{Q}$ آبلی) است و انشعاب[۲] در $\frac{F_n}{\mathbb{Q}}$ را می‌توان در ازای الحاق ریشه‌های مناسب واحد کوچک‌تر کرد. در نهایت $F_n$ یک گسترش آبلی نامنشعب از $\mathbb{Q}$ خواهد بود، پس $\mathbb{Q}$ گسترش‌های نامنشعب سره (آبلی یا غیرآبلی) ندارد، بنابراین $L \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$ و اثبات تمام می‌شود.

قبلاً آبل در سال ۱۸۹۲ گسترش‌های آبلی $\mathbb{Q}(i)$ با مقادیر خاص تابع $\mathrm{sl}(z)$، سینوس پروانه‌ای[۳] که شبکهٔ تناوب آن $\mathbb{Z}(i)$ بود، را ساخته بود. آبل در این کار خود از اندیشه‌های گاوس در کتاب تحقیقات حسابی[۴] پیروی می‌کرد که در آن تقسیم خم پروانه‌ای برنولی مشابه تقسیم دایره توسط ریشه‌های واحد انجام شده بود؛ برای اطلاعاتی در این باره به [۲] نگاه کنید. در نامه‌ای به ددکیند[۵] در سال ۱۸۸۰ کرونکر رویای جوانی خود را این طور توصیف می‌کند که امید داشت هر گسترش آبلی از یک میدان اعداد درجهٔ دوم موهومی در یکی از گسترش‌هایی که یافته بود بنشیند. برای مثال او انتظار داشت هر گسترش آبلی $\mathbb{Q}(i)$ در میدانی به‌شکل $\mathbb{Q}(i, \mathrm{sl}(\frac{\omega}{m}))$ بنشیند که در آن $\omega \equiv z$ مشابه عدد $\pi$ در خم پروانه‌ای به‌شکل علامت بینهایت است؛ معادلهٔ این خم برحسب معادلهٔ کلی $(x^۲ + y^۲) = ۲a^۲(x^۲ - y^۲)$ به دست می‌آید. این مطلب شبیه قضیهٔ کرونکر–وبر است، زیراکه $\mathrm{sl}(\frac{\omega}{m})$ مشابه $\psi_m = e^{۲\pi\frac{i}{m}}$ است.

حالت خاصی از قضیهٔ کرونکر از $j$–تابع استفاده می‌کند: اگر $K$ گسترش درجهٔ دوم موهومی از $\mathbb{Q}$ باشد و $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\tau_۱)$ که در آن $\tau_۱$ در نیم‌صفحهٔ بالایی است، کرونکر نشان داد که $j(\tau_۱)$ یک عدد جبری روی $K$ است و مزدوج‌های آن روی $K$ به‌شکل $j(\tau_۱)$، $\ldots$، $j(\tau_n)$ هستند و مشبکه‌های $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\tau_i)$ ایده‌آل‌های کسری $K$ هستند و رده‌های ایده‌آلی مختلف $K$ را نمایش می‌دهند. کرونکر ثابت کرد که میدان $K(j(\tau_۱))$ گسترش گالوای $K$ است و گروه گالوای آن با گروه رده‌های ایده‌آلی[۶]، که با $\mathrm{Cl}(K)$ نمایش می‌دهیم، یکریخت است. هر ایده‌آل کسری $b$ روی $j(\tau_i)$ با ضرب در گروه رده‌ها عمل می‌کند:

$$b(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\tau_i)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\tau_{i'}).$$

1. Hilbert 2. ramification 3. lemniscatic sine function 4. *Disquisitiones Arithmeticae* 5. Dedekind
6. ideal class group

تعریف کنید

$$\sigma_b(j(\tau_i)) = j(\tau_{i'}).$$

با این عمل، ایده‌آل‌های کسری روی مقادیر $j$ به یک عمل گروه رده‌های ایده‌آلی روی مقادیر $j$ تقلیل می‌یابد.

کرونکر $K(j(\tau))$ را که در آن $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\tau)$، «گونهٔ» وابسته به $K$ نامید و نشان داد گونهٔ وابسته به $K$ به‌جز اینکه دارای گروه گالوای یکریخت با گروه رده‌های ایده‌آلی $K$ است، خواص زیر را نیز دارد.

روی $K$ بدون شاخه است و هر ایده‌آل $K$ در این گونه وابسته به یک ایده‌آل اصلی خواهد بود. هیلبرت، بعدها، این خاصیت را جزئی از خصوصیات میدان رده‌ای خود قرار داد. قضیهٔ کرونکر–وبر در سی سالگی کرونکر و رویای جوانی او در ۵۶ سالگی مطرح شدند.

اما کرونکر در سال ۱۸۸۰ مسیر دیگری را به‌سوی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای گشود که به چگالی اعداد اول و تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها مربوط می‌شد. کرونکر به چندجمله‌ای $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ عدد $n_p$ را نسبت داد که نمایندهٔ تعداد ریشه‌های $f(x)$ به پیمانهٔ $p$ است.

**قضیه ۲.۲** (کرونکر، ۱۸۸۰). اگر $f(x)$ دارای $r$ عامل تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{Z}[x]$ باشد، آنگاه میانگین مقادیر $n_p$ برابر $r$ خواهد بود با

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{\sum_p n_p/p^s}{\sum_p 1/p^s} = r.$$

در این قضیه استفاده از چگالی‌ای برحسب قضیهٔ دیریکله به‌جای عبارت آشنا و معمول‌تر $\lim_{x\to\infty}(\sum_{p\leq x} n_p)/|\{p \leq x\}|$ جای تعجب ندارد زیراکه قضیهٔ اعداد اول تازه شانزده سال بعد از آن اثبات می‌شود.

**نتیجه ۳.۲.** اگر $\frac{K}{\mathbb{Q}}$ گسترش گالوا باشد، مجموعهٔ ایده‌آل‌های اولی که کاملاً در $K$ می‌شکافند دارای چگالی $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$ است.

اثبات. برای یک عدد صحیح جبری $\alpha$ تعریف کنید $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. فرض کنید $f(x) \in \mathbb{Z}(x)$ چندجمله‌ای مینیمال $\alpha$ روی $\mathbb{Q}$ باشد. چون ریشه‌های $f(x)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب $\alpha$ با ضرایب گویا هستند، اگر $f(x)$ به پیمانهٔ $p$ ریشه داشته باشد، به‌جز برای تعدادی متناهی عدد اول $p$، کاملاً

می‌شکافد؛ یعنی اگر $n_p \neq ۰$ آنگاه $n_p = \deg f = [K : \mathbb{Q}]$. اگر $A$ مجموعهٔ اعداد اول $p$ باشد که $n_p = [K : \mathbb{Q}]$ آنگاه از قضیهٔ کرونکر نتیجه می‌شود که

$$\lim_{s \to ۱^+} \frac{\sum_{p \in A} ۱/p^s}{\sum_p ۱/p^s} = \frac{۱}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

پس چگالی دیریکله از $p$هایی که $f(x)$ به پیمانهٔ $p$ کاملاً می‌شکافد برابر $\frac{۱}{[K:\mathbb{Q}]}$ است. ازآنجاکه $f(x)$ به پیمانهٔ $p$ کاملاً می‌شکافد اگر و فقط اگر $p$ در $K$ کاملاً بشکافد، البته به‌جز در حالت‌هایی محدود، اعداد اولی که کاملاً در $K$ می‌شکافند، چگالی $\frac{۱}{[K:\mathbb{Q}]}$ دارند. □

کرونکر از این نتیجه استفاده می‌کند و تحویل‌ناپذیری چندجمله‌ای دایره‌بُری را به روش تحلیلی زیر ثابت می‌کند. اگر $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ یک گسترش گالوا و $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال $\zeta_n$ در $\mathbb{Z}[x]$ باشد، بنابر نتیجهٔ ۳.۲ چگالی اعداد اولی که کاملاً در $K$ می‌شکافند برابر $\frac{۱}{[K:\mathbb{Q}]}$ است. به‌جز تعدادی متناهی $p$ این معادل شکافتن $f(x)$ در $\mathbf{F}_p(x)$ به پیمانهٔ $p$ است، که این نیز برای $p \nmid n$ معادل وجود ریشهٔ $n$ام واحد در $\mathbf{F}_p$ است؛ یعنی $n|p-۱$ یا $p \equiv ۱ (n$ به پیمانهٔ$)$، و بنابر قضیهٔ دیریکله، این اعداد اول چگالی $\frac{۱}{\phi(n)}$ دارند. پس $\deg(f) = \phi(n)$. چون $\zeta_n$ ریشه $n$امین چندجمله‌ای دایره‌بُری $\Phi_n$ است که درجهٔ آن $\phi(n)$ و تکین نیز است، پس $f(x) = \Phi_n(x)$ و درنتیجه $\Phi_n$ تحویل‌ناپذیر است.

مقالهٔ کرونکر دو حدس تاثیرگذار در برداشت: یکی در مورد چگالی اعداد اولی که $f(x)$ به پیمانهٔ $p$ تعداد ریشه‌های معینی دارد. در حالتی که تعداد ریشه‌ها برابر $\deg(f)$ باشد، کرونکر نتیجه‌ای یافته بود. کرونکر حدس زد این چگالی‌ها باید وجود داشته باشند و خواصی از آن‌ها را هم حدس زده بود. اولین بار فروبنیوس[1] در سال ۱۸۹۶ این چگالی‌ها را محاسبه کرد و عنصر فروبنیوس یک ایده‌آل اول را تعریف کرد و قضیهٔ چگالی چبوتاریوف[2] را نیز حدس زد که اهمیت آن را هنگام توصیف نتایج آرتین[3] بیان خواهیم کرد.

حدس دوم کرونکر این بود که گسترش گالوای $\mathbb{Q}$ به مجموعهٔ اعداد اولی که در آن کاملاً می‌شکافند به‌طور یگانه‌ای معین می‌شود. برای مثال، $\mathbb{Q}(i)$ تنها گسترش گالوایی است که برای $p \equiv ۱ (۴$ به پیمانهٔ$)$ اعداد اول در آن می‌شکافند. او این مسئله را یک «مسئلهٔ مقدار مرزی» در حساب تصور می‌کرد، همان‌طورکه قضیهٔ انتگرال کوشی[4] تعداد توابع تحلیلی را در یک نقطهٔ داخلی از

1. Frobenius 2. Chebotarev 3. Artin 4. Cauchy

روی مقادیر آن روی مرز به دست می‌دهد. حدس کرونکر را باوئر[1] در سال ۱۹۰۳ برای گسترش‌های هر میدان عددی ثابت کرد. گسترش‌های $\mathbb{Q}$ توسط خود کرونکر رده‌بندی شده بود. در ادامه فرض کنید $\mathrm{Spl}(L/K)$ مجموعهٔ همهٔ ایده‌آل‌های اول $K$ باشد که به‌طورکامل در گسترش $L$ می‌شکافد.

**قضیه ۴.۲** (باوئر). اگر $L_1$ و $L_2$ گسترش‌های متناهی میدان اعداد $K$ باشند، آنگاه $L_1 \subset L_2$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Spl}(L_2/K) \subset \mathrm{Spl}(L_1/K)$. به‌ویژه، $L_1 = L_2$ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{Spl}(L_1/K) = \mathrm{Spl}(L_2/K).$$

اثبات. اگر $L_1 \subset L_2$، به‌سادگی می‌بینیم $\mathrm{Spl}(L_2/K) \subset \mathrm{Spl}(L_1/K)$. برعکس، اگر $\mathrm{Spl}(L_2/K) \subset \mathrm{Spl}(L_1/K)$، گسترش $L_1L_2/K$ را در نظر بگیرید. این یک گسترش گالوایی است و داریم

$$\mathrm{Spl}(L_1L_2/K) = \mathrm{Spl}(L_1/K) \cap \mathrm{Spl}(L_2/K) = \mathrm{Spl}(L_2/K).$$

چگالی دیریکله را برای دو طرف حساب می‌کنیم، بنابر نتیجهٔ ۳.۲ داریم $\frac{1}{[L_2:K]} = \frac{1}{[L_1L_2:K]}$. پس $L_1L_2 = L_2$ و درنتیجه $L_1 \subset L_2$. □

با برداشتن تعدادی متناهی عدد اول چگالی مجموعهٔ اعداد اول تغییر نمی‌کند، بنابراین قضیهٔ باوئر در حالت شمول و تساوی با تقریب متناهی عدد اول نیز برقرار است. این تقریب وقتی در مورد مفهوم میدان رده‌ای از دیدگاه وبر صحبت می‌کنیم اهمیت پیدا می‌کند. اگرچه قضیهٔ باوئر حاکی است که گسترش گالوایی با $\mathrm{Spl}(L/K)$ مشخص می‌شود، اما روشی برای محاسبهٔ $\mathrm{Spl}(L/K)$ ارائه نمی‌کند. در حالتی که $L/K$ آبلی است، نظریهٔ میدان‌های رده‌ای قانون ساده‌ای برای $\mathrm{Spl}(L/K)$ برحسب هم‌نهشتی‌ها به دست می‌دهد.

وبر در کتاب خود به سال ۱۸۹۱ دربارهٔ توابع بیضوی و اعداد جبری، نام «میدان رده‌ای» را برای گونه‌های کرونکر به کار می‌برد. بنابراین میدان رده‌ای در ابتدا یک گسترش آبلی خاص از میدان اعداد درجهٔ دوم موهومی بود که گروه گالوای آن یکریخت با گروه رده‌های ایده‌آلی آن میدان است. وبر در سال ۱۸۹۷ مفهوم گروه رده‌های ایده‌آلی را گسترش داد: اگر $K$ یک میدان عددی و $\mathfrak{m} \in \mathcal{O}_K$ ایده‌آل ناصفر باشد، $I_\mathfrak{m}$ گروه ایده‌آل‌های کسری در $K$ که نسبت به $\mathfrak{m}$ اول‌اند و $P_\mathfrak{m}^+$ گروه ایده‌آل‌های

1. M. Bauer

کسری $(\frac{\alpha}{\beta})$ که $\alpha$ و $\beta$ ناصفر و در $\mathcal{O}_K$ قرار دارند به‌طوری‌که $(\alpha)$ و $(\beta)$ نسبت به $\mathfrak{m}$ اول‌اند، (به پیمانهٔ $\alpha \equiv \beta(\mathfrak{m}$، و $\frac{\alpha}{\beta}$ کاملاً مثبت است (یعنی برای هر نشاندن $K$ در $\mathbb{R}$ تصویر $\frac{\alpha}{\beta}$ عددی مثبت است)، اندیس $[I_\mathfrak{m} : P_\mathfrak{m}^+]$ متناهی است. گروه میانی $H$ را که $P_\mathfrak{m}^+ \subset H \subset I_\mathfrak{m}$ یک گروه ایده‌آل با پیمانهٔ $\mathfrak{m}$ می‌گویند و خارج‌قسمت $\frac{I_\mathfrak{m}}{H}$ را گروه رده‌های ایده‌آلی تعمیم‌یافته می‌نامند. در حالت $\mathfrak{m} = (۱)$ همان گروه رده‌های ایده‌آلی به دست می‌آید. اگر $K = \mathbb{Q}$ و $\mathfrak{m} = m\mathbb{Z}$ آنگاه $\frac{I_\mathfrak{m}}{P_\mathfrak{m}^+} = (\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^*$.

وبر با در نظر گرفتن $\frac{I_M}{H}$ به عنوان تعمیم $(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^*$ همتای قضیهٔ دیریکله (۱۸۳۷) را که در آن هر ردهٔ هم‌نهشتی در $(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^*$ شامل بی‌نهایت عدد اول است با این مضمون ثابت کرد که هر ردهٔ $\frac{I_M}{H}$ شامل بی‌نهایت ایده‌آل اول است. وبر از $L$ـتابع‌های سرشت‌های $\chi : (\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^* \to \mathbb{C}^*$ استفاده کرد که برای $\mathrm{Re}(s) > ۱$ چنین تعریف می‌شوند

$$L(s,\chi) = \prod_{(p,m)=۱} \frac{۱}{۱-\chi(p)p^{-s}} = \sum_{(n,m)=۱} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

این سری برای $\mathrm{Re}(s) > ۱$ به‌طورمشروط همگرا است به شرط آنکه $\chi$ نابدیهی باشد. جان کلام در استدلال دیریکله اثبات این امر است که برای هر $\chi$ نابدیهی $L(۱,\chi) \neq ۰$. وبر یک $L$ـتابع برای سرشت‌های $\psi : \frac{I_m}{H} \to \mathbb{C}^*$ تعریف کرد که برای $\mathrm{Re}(s) > ۱$ به‌صورت زیر است.

$$L(s,\psi) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{۱}{۱-\psi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s}} = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=۱} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}.$$

وقتی $\psi$ بدیهی است، این همان تابع زتای ددکیند برای میدان اعداد $K$ است. با مطالعهٔ $L(s,\psi)$ وقتی $s \to ۱^+$، برای همهٔ سرشت‌های $\psi$ از $\frac{I_\mathfrak{m}}{H}$، وبر قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

**قضیه ۵.۲** (وبر، ۱۸۹۷). برای ایده‌آل ناصفر $\mathfrak{m}$ از $\mathcal{O}_K$ و گروه ایده‌آلی $H$ با پیمانهٔ $\mathfrak{m}$ فرض کنید گسترش گالوای $\frac{L}{K}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌جز در حالت‌هایی محدود، $\mathrm{Spl}(L/K) \subset H$. در این صورت $[L:K] \leq [I_\mathfrak{m}:H]$. اگر $\mathrm{Spl}(L/K) = H$ به‌جز در حالت‌هایی محدود، آنگاه $[I_\mathfrak{m}:H] = [L:K]$ و در هر هم‌مجموعهٔ $\frac{I_\mathfrak{m}}{H}$ تعدادی نامتناهی ایده‌آل اول وجود دارد.

تعریف زیر نیز برای ادامه کار لازم است.

**تعریف ۶.۲** (وبر، ۱۹۰۸). برای هر ایده‌آل ناصفر $\mathfrak{m}$ در $\mathcal{O}_K$ و گروه ایده‌آلی $H$ با پیمانهٔ $\mathfrak{m}$، میدان رده‌ای روی میدان $K$ برای گروه $H$ گسترش گالوایی $\frac{L}{K}$ است به‌طوری‌که برای ایده‌آل‌های

اول $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ در $K$ داریم

$$\mathfrak{p} \in H \iff \text{در } L \text{ کاملاً شکافته می‌شود } \mathfrak{p}$$

در نظر وبر، میدان رده‌ای روی $K$ یک گسترش از $K$ است که مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول شکافتهٔ آن (به‌جز تعداد محدودی) همان ایده‌آل‌های اول در یک گروه ایده‌آلی $H$ هستند. در اینجا ناچاریم تعداد متناهی استثناء را بپذیریم چون یک گروه ایده‌آلی $H$ ایده‌آل‌های اولی که $\mathfrak{m}$ را عاد می‌کنند در خود ندارد؛ چون آن‌ها متعلق به $I_{\mathfrak{m}}$ نیستند و بعضی از این ایده‌آل‌ها ممکن است در یک گسترش بشکافند. درواقع، قضیهٔ باوئر حاکی از این است که میدان، رده‌ای در صورت وجود یکتا است. وبر به قضیهٔ وجود برای ادامهٔ کار نیاز داشت. او توانست برای گروه‌های ایده‌آلی خاص روی میدان‌های درجهٔ دوم موهومی $K$ وجود میدان رده‌ای را و یکریختی $\frac{I_{\mathfrak{m}}}{H}$ با گروه گالوای آن را اثبات کند. اما در حالت کلی مسئلهٔ وجود حل نشده بود.

دربارهٔ تحقیقات هیلبرت مبسوط‌تر صحبت خواهیم کرد. فقط همین اندازه اشاره کنیم که ایده‌های او دربارهٔ گسترش‌های آبلی میدان‌های اعداد نتیجهٔ مطالعهٔ دقیق سه رده از گسترش‌ها بود: گسترش‌های درجهٔ دوم، گسترش‌های دایره‌بری از میدان‌های اعداد دلخواه، و گسترش‌های کومر از میدان‌های دایره‌بری. یکی از اهداف هیلبرت تعمیم قانون‌های تقابل به میدان‌های اعداد بود. او در سال ۱۸۹۷ قانون تقابل درجهٔ دوم را به‌شکل یک فرمول حاصل‌ضرب درآورد: برای هر $a, b$ در $\mathbb{Q}$ داریم $\prod_\nu (a,b)_\nu = 1$ که در آن $(a,b)_\nu$ نماد $\nu$ای[1] هیلبرت است با تعریف زیر

$$(a,b)_\nu = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a = x^2 - by^2 \text{ جوابی در } \mathbb{Q} \text{ داشته باشد} \\ -1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این قانون معادلِ قانون تقابل درجهٔ دوم گاوس است، اما از دو جهت زیباتر است. یکی اینکه عدد ۲ مشابه اعداد اول دیگر رفتار می‌کند و دیگر اینکه شرایط مثبت بودن یا نسبت به هم اول بودن برای $a, b$ وجود ندارد. در این فرمول‌بندی از قانون تقابل چندین نکته نهفته است: استفاده از نرم به‌جای مربع‌گرفتن، معادلات $p$–ای به‌جای هم‌نهشتی به پیمانهٔ $p$ و جایگاه‌های نامتناهی[2] که هم‌ارز جایگاه‌های متناهی هستند. در نهایت هر سه ایده در نظریهٔ میدان‌های رده‌ای ظاهر می‌شوند و هیچ‌یک هم در کار وبر وجود ندارند.

نماد هیلبرت برای هر میدان عددی قابل تعریف است. پس قانون تقابل هیلبرت حالت کلی را

1. $\nu$-adic 2. infinite places

در بر می‌گیرد. اثبات هیلبرت در حالت میدان‌های اعداد که گسترش درجهٔ دوم بدون شاخه در تمامی اعداد اول را می‌پذیرند متفاوت می‌نمود. در این حالت قضیهٔ مذکور غلط نبود، اما اثبات آن درست در نمی‌آمد. شبیه این حالت هم پیش‌از آن رخ داده بود. قانون تقابل توان $p$ام کومر در $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ که در سال ۱۸۵۹ بیان شده بود فقط برای $p \nmid h(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ برقرار بود، که هیلبرت آن را به‌صورت فرض رد حالتی که $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ یک گسترش آبلی بدون شاخه از درجه $p$ داشته باشد، تعبیر کرده بود. اثبات هیلبرت کارامد بود چون $\mathbb{Q}$ گسترش بدون شاخه ندارد. به‌همین‌دلیل، هیلبرت بیشتر به گسترش‌های بدون شاخه توجه داشت.

هیلبرت با مقایسه حالت میدان‌های توابع با میدان‌های اعداد و تعبیر هندسی شاخه‌داربودن به حدس زیر رسیده یود.

**حدس** (هیلبرت، ۱۸۹۸). برای هر میدان اعداد $K$ گسترش متناهی یکتای $\frac{K'}{K}$ وجود دارد که

(۱) $\frac{K'}{K}$ گالوایی است و $\mathrm{Gal}(\frac{K'}{K}) = \mathrm{Cl}(K)$؛

(۲) $\frac{K'}{K}$ برای همه جایگاه‌ها بدون شاخه است و هر گسترش آبلی بدون شاخه از $K$ در $K'$ می‌نشیند؛

(۳) برای هر ایده‌آل اول $p$ از $K$ درجه میدان مانده‌ها $f_p(\frac{K'}{K})$ برابر مرتبه $p$ در $\mathrm{Cl}(K)$ می‌باشد؛

(۴) هر ایده‌آل $K$ در $K'$ اصلی است.

از شرط (۳) نتیجه می‌شود که یک ایده‌آل اول در $K$ به‌طور کامل در $K'$ می‌شکافد اگر و فقط اگر اصلی باشد. پس $K'$ روی $K$ با تعریف وبر یک میدان رده‌ای است؛ میدان $K'$ را میدان رده‌ای هیلبرت می‌نامند. گونهٔ کرونکر، درواقع، میدان رده‌ای هیلبرت میدان درجهٔ دوم موهومی داده شده است. هیلبرت حدس خود را برای $h(K) = ۲$ اثبات کرد. در سال ۱۹۰۷ فورت‌ونگلر[۱] دو قسمت اول حدس را ثابت کرد و از آن یک قانون تقابل توان $p$ام به دست آورد که در حالت $p = ۲$ همان قانون درجهٔ دوم است؛ برای آگاهی بیشتر [۳] را ببینید. او قسمت (۳) را در ۱۹۱۱ و قسمت (۴) را در سال ۱۹۳۰، بعداز اینکه آرتین حکم را به زبان نظریهٔ گروه‌ها درآورد، ثابت کرد. درواقع، آرتین حکم قسمت (۴) را در قالب حکمی صرفا نظریه‌گروهی دربارهٔ میدان رده‌ای مکرر هیلبرت $K'' = (K')'$ درآورد که یک گسترش گالوا از $K$ اما معمولاً ناآبلی است.

1. Furtwängler

## ۳ قضیه‌های تاکاگی

تاکاگی[1] در سال‌های ۱۸۹۸ تا ۱۹۰۱ شاگرد هیلبرت در گوتینگن بود. در رسالهٔ خود به سال ۱۹۰۳ رویای جوانی کرونکر را برای میدان پایهٔ $\mathbb{Q}(i)$ با کمک مقادیر تابع پروانه‌ای، همان‌طورکه کرونکر حدس زده بود، ثابت کرد. او در این کار از اثبات هیلبرت برای قضیهٔ کرونکر–وبر الگوبرداری کرده بود. فوئتر[2] در ۱۹۱۴ ثابت کرد برای میدان درجهٔ دوم موهومی $K$ گسترش‌های آبلی درجهٔ فرد درون میدان‌هایی که با مقادیر خاص دو تابع تحلیلی $e^{2\pi i z}$ و $j$ تولید می‌شوند قرار می‌گیرند. او همچنین برای گسترش‌های زوج مثال نقض ساخت. تاکاگی آثار فوئتر در این زمینه و فورت‌ونگلر دربارهٔ میدان‌های رده‌ای هیلبرت را مطالعه کرد. بعداز شروع جنگ جهانی اول در ۱۹۱۴ ارتباط علمی بین آلمان و ژاپن قطع شد. آلمان تنها جایی بود که در آنجا نظریهٔ جبری اعداد به‌طور جدی مطالعه می‌شد. تاکاگی در تنهایی سال‌های جنگ جهانی آثار فوئتر و فورت‌ونگلر را ترکیب کرد و موفق شد وجود میدان‌های رده‌ای را تقریباً در حالت کلی اثبات کند. او تعریف جدیدی از میدان رده‌ای به دست داد که اساس آن نرم ایده‌آل‌ها بود و نه قوانین شکافتن. او همچنین جایگاه‌های ارشمیدسی را هم وارد کارکرده بود؛ این‌ها همگی ایده‌های استادش هیلبرت بودند.

**تعریف ۱.۳** (تاکاگی). برای گسترش متناهی $L/K$ و عدد اول $\mathfrak{P}$ از $L$ می‌نویسیم $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$ و نرم را به‌صورت

$$N_{L/K}(\mathfrak{P}) := p^{f(\mathfrak{P}|p)}.$$

تعریف می‌کنیم و آن را به‌صورت ضربی به همهٔ ایده‌آل‌های کسری توسیع می‌دهیم.

این مفهوم نرم، با مفهوم نرم در نظریهٔ حلقه‌ها روی ایده‌آل‌های کسری همخوانی دارد؛ یعنی برای هر $x \in O_L^*$ داریم

$$N_{L/K}(xO_L) = N_{L/K}(x)O_K.$$

بین دیدگاه‌های تاکاگی و وبر می‌توان رابطه‌ای برقرار کرد: اگر $L/K$ گالوایی باشد و $p$ در $L$ بدون شاخه باشد، آن وقت $p$ در $L$ می‌شکافد (به بیان وبر) اگر و فقط اگر $p$ نرم ایده‌آلی در $L$ باشد (به بیان تاکاگی).

**تعریف ۲.۳** (تاکاگی). یک $K$–پیمانه[3] یک ضرب صوری به‌شکل $m = m_f m_{\inf}$ است که در

1. Takagi 2. Fueter 3. modulus

آن $m_f$ قسمت متناهی یک ایده‌آل غیرصفر در $O_K$ است و $m_{\inf}$ یک ضرب صوری نشانندهای حقیقی $K$ است. یک ایده‌آل کسری را نسبت به $m$ اول می‌گوییم اگر نسبت به $m_f$ اول باشد.

$I_m$ گروه ایده‌آل‌های کسری اول نسبت به $m$ و $P_m$ گروه ایده‌آل‌های کسری $(\frac{\alpha}{\beta})$ است که نسبت به $m$ اول‌اند که در آن $(\alpha), (\beta)$ نسبت به $m$ اول‌اند و $\alpha \equiv \beta(m_f)$ و $\nu(\frac{\alpha}{\beta}) > 0$ برای هر جایگاه حقیقی $\nu | m_{\inf}$ برقرار است. یک گروه $P_m \subset H \subset I_m$ را گروه ایده‌آل‌ها به پیمانهٔ $m$ می‌گوییم. برای گسترش متناهی $L/K$ مجموعهٔ $N_m(L/K)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{\mathfrak{a} \in K : \mathfrak{a} = N_{L/K}(\mathfrak{A}) \text{ و } m \text{ اول است و } \mathfrak{a} \text{ حقیقی و نسبت به } \mathfrak{A} \text{ ایده‌آل کسری } \text{ وجود دارد، }\}$$

و

$$H_m(L/K) := P_m N_m(L/K).$$

هدف از این تعریف‌ها این است که یک گروه ایده‌آلی توسط نرم ایده‌آل‌ها درست کنیم، اما توجه کنید $N_m(L/K)$ لزوماً شامل $P_M$ نیست. به‌بیان‌دیگر، زیرگروه $\frac{I_m}{P_m}$ که با هم‌مجموعه‌های $N_m(L/K)$ تولید می‌شود همان $H_m(L/K)$ است. پس این گروه خارج قسمتِ زیرگروه نرمی $\frac{I_m}{P_m}$ است که مورد توجه تاکاگی بود. برای میدان عددی دلخواه $K$ گروه $P_m^+$ تعریف‌شده توسط وبر همان $P_{m_{\inf}}$ تاکاگی است که در آن $\inf$ حاصل‌ضرب تمام جایگاه‌های حقیقی است.

چون میدان درجهٔ دوم موهومی مورد توجه وبر بودند او با هیچ جایگاه حقیقی سروکار نداشت. وقتی $m$ یک $K$-پیمانه و $L/K$ گالوایی باشد، ایده‌آل‌های $K$ که $m$ را عاد نمی‌کنند و در $L$ می‌شکافند در $N_m(L/K) \subset K_m(L/K)$ قرار می‌گیرند. پس به‌جز تعداد متناهی حالت استثناء که $m$ را عاد می‌کنند داریم $\mathrm{spl}(L/K) \subset K_m(L/K)$. بنابراین

$$[I_m : H_m(L/K)] \leq [L : K].$$

**تعریف ۳.۳** (تاکاگی). منظور از یک میدان رده‌ای یک گسترش گالوای $L/K$ است که برای یک $K$-پیمانه $m$ نامساوی بالا به تساوی تبدیل شود. چنین $m$ای را یک پیمانهٔ قابل‌قبول برای $L/K$ می‌گوییم.

بنابراین، وبر برای تعریف میدان رده‌ای یک گروه ایده‌آلی $H$ را فرض می‌گیرد و به دنبال میدان رده‌ای می‌گردد اما تاکاگی یک گسترش $L/K$ را فرض می‌گیرد و به دنبال یک $H$ مناسب می‌گردد که نامساوی بالا را تبدیل به تساوی کند.

**قضیه ۴.۳** (تاکاگی، ۱۹۲۰). اگر $K$ یک میدان عددی باشد، در این صورت داریم:

(۱) (وجود) به هر گروه ایده‌آلی $H$ یک میدان رده‌ای روی $K$ وابسته می‌شود.

(۲) (یکریختی) اگر $H$ گروه ایده‌آلی به پیمانهٔ $m$ و $L/K$ میدان رده‌ای وابسته باشد آنگاه $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \frac{I_m}{H}$.

(۳) (کامل بودن) هر گسترش آبلی $K$ یک میدان رده‌ای است.

(۴) (مقایسه) اگر $H_۱, H_۲$ دوگروه ایده‌آلی و نسبت به یک پیمانه مشترک $m$ دارای میدان‌های رده‌ای $L_۱, L_۲$ باشند که درون بستار جبری $\overline{K}$ قرار بگیرند، آنگاه

$$H_۲ \subset H_۱ \iff L_۱ \subset L_۲.$$

(۵) (هادی) برای هر گسترش متناهی آبلی $L/K$ جایگاه‌هایی از $K$ که در $f_{L/K}$ ظاهر می‌شوند، برای $L/K$ شاخه‌دارند.

(۶) (تجزیه) اگر $H$ گروه ایده‌آلی به پیمانهٔ $m$ و $L/K$ میدان رده‌ای وابسته باشد، آنگاه هر ایده‌آل اول $p \nmid m$ در $L$ بدون شاخه است و درجهٔ میدان مانده‌ها $f_p(L/K)$ برابر مرتبهٔ $p$ در $\frac{I_m}{H}$ می‌باشد.

بعضی از قسمت‌های این قضیه را وبر قبلاً ثابت کرده بود. اثبات وبر نتایجی به دنبال داشت. یکی اثبات جدید برای سه قسمت اول حدس هیلبرت دربارهٔ میدان رده‌ای هیلبرت؛ دوم، تعمیمی از قضیهٔ کرونکر ـ وبر برای میدان عددی دلخواه $K$: برای هر $K$ـ‌پیمانه $m$ یک توسیع آبلی متناهی $K_m$ وجود دارد که هر گسترش آبلی متناهی $K$ای در یک $K_m$ قرار می‌گیرد. می‌توان $K_m$ را میدان رده‌ای روی $K$ وابسته به گروه $P_m$ در نظر گرفت . به میدان‌های $K_m$ میدان‌های رده‌ای شعاعی[1] گفته می‌شود که مشابه گسترش‌های دایره‌بری هستند.

تاکاگی قضیهٔ وجود را با یک استدلال شمارشی اثبات کرد که با حالت دوری شروع می‌شود. او ابتدا تصور می‌کرد که کامل‌بودن برقرار نیست. در نهایت هم یکریختی را با کمک شمارش ثابت کرد و نگاشت مستقیمی ارائه نکرد. این کاری بود که بعدها توسط آرتین انجام شد.

برخلاف روش وبر که از $L$ـ‌تابع‌ها کمک می‌گرفت، تاکاگی از استدلال‌های کاملاً جبری استفاده کرد که به ایده‌های گاوس دربارهٔ صورت‌های درجهٔ دوم مربوط می‌شد. اگر به میدان‌های رده‌ای با پیمانهٔ داده‌شدهٔ $m$ توجه کنیم، قضیهٔ مقایسه تناظر گالوا را به یاد می‌آورد. اگر دو گسترش پیمانهٔ

1. ray class field

مشترکی نداشته باشند، ابتدا باید به دنبال پیمانهٔ مشترکی بگردیم. این شبیه نشاندن درگسترش آبلی گالوایی $\mathbb{Q}$ در یک میدان دایره‌بری مشترک است.

اگر $H, H'$ گروه‌های ایده‌آلی در $K$ باشند که پیمانه‌های $m, m'$ متفاوتی دارند، یعنی $P_m \subset H \subset I_m$ و $P_{m'} \subset H' \subset I_{m'}$ می‌گوییم $H, H'$ هم‌ارزند اگر پیمانهٔ $m''$ وجود داشته باشد که بر $m, m'$ بخش‌پذیر باشد و $I_{m''} \to \frac{I_{m'}}{H'}$ و $I_{m''} \to I_{m'}$ هستهٔ مشترکی داشته باشند، یعنی $H \cap I_{m''} = H' \cap I_{m''}$. اگر دو گروه ایده‌آلی به این معنی هم‌ارز باشند، میدان رده‌ای مشترکی دارند. این مفهوم هم‌ارزی را اولین بار وبر مطرح کرد. بعداً که به مفاهیم گروه ایدل[1] می‌پردازیم به زیرگروه مشترکی از گروه ایدل‌ها می‌رسیم که بیان نظریه میدان‌های رده‌ای را ساده‌تر می‌کند.

از قضیهٔ تجزیه نکتهٔ دیگری هم حاصل می‌شود و آن خاصیتی از گسترش‌های آبلی است: ایده‌آل‌های اولی که می‌شکافند با یک شرط هم‌نهشتی مشخص می‌شوند. درواقع قضیهٔ زیر را داریم.

**قضیه ۵.۳.** اگر $L/K$ گسترش متناهی میدان‌های عددی باشد و فرض کنیم $m$ یک $K$-پیمانه و مجموعهٔ متناهی $S$ از ایده‌آل‌های اول $K$ وجود داشته باشد که شامل تمام $p|m$ باشد و $p \in S$ در $L$ بشکافد و توسط هم‌مجموعهٔ $p$ در $\frac{I_m}{P_m}$ مشخص شده باشد، در این صورت $L/K$ آبلی است.

می‌توان از این قضیه و اثبات آن، نتیجهٔ زیر را ثابت کرد.

**نتیجه ۶.۳.** برای میدان عددی $L/\mathbb{Q}$ و $m \in \mathbb{Z}^+$ شرایط زیر معادل‌اند.

(۱) برای هر عدد اول $p \nmid m$ شکافتن $p$ در $L/\mathbb{Q}$ با یک شرط هم‌نهشتی روی $p$ به پیمانهٔ $m$ داده می‌شود.

(۲) $L \subset \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

وبر و تاکاگی هر دو میدان‌های رده‌ای را به عنوان گسترش‌های گالوا با خواص دیگر تعریف کردند. در ۱۹۲۹ شولتس[2] نشان داد که شرط گالوایی را می‌توان حذف کرد. درواقع، اگر $L/K$ گالوایی باشد، همواره برای هر $K$-پیمانه $m$ داریم $[I_m : H_m(L/K)] < [L : K]$، یعنی $L/K$ نمی‌تواند میدان رده‌ای باشد. تاکاگی در پایان مقاله‌اش رویای جوانی کرونکر را برای میدان درجهٔ دوم موهومی اثبات می‌کند.

## ۴ مسائل هیلبرت

پرسشگری از مهارت‌های مهم هر ریاضی‌دانی است. البته پرسشگری هنری است که همهٔ ریاضی‌دان‌ها

---

۱. idele؛ ترکیبی ساختهٔ شواله از دو واژهٔ ideal و element

2. Scholz

از آن بهره‌مند نیستند. یک پرسشگر خوب می‌داند که چگونه راه را برای شناخت سایر ریاضی‌دان‌ها هموار کند. هیلبرت ریاضی‌دانی است که نزدیک به سی‌صد قضیهٔ به اسم او نام‌گذاری شده است؛ اما همه هیلبرت را به‌دلیل مسائل هیلبرت می‌شناسند. مسائل هیلبرت بر جریان ریاضیات بعداز او بسیار تاثیرگذار بوده است.

از دید هیلبرت نظریهٔ میدان‌های رده‌ای نظریهٔ گسترش‌های آبلی بود. او در سخنرانی معروفش در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس دو سؤال دربارهٔ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای مطرح کرد:

(۱) مسئلهٔ نهم هیلبرت؛ توسعهٔ کلی‌ترین قانون تقابل برای میدان اعداد دلخواه که تعمیمی از قانون درجهٔ دوم گاوس بود. این سؤال برای گسترش‌های آبلی منجر به قانون تقابل آرتین گردید و برای گسترش‌های ناآبلی هنوز پاسخی نیافته است؛ گرچه می‌دانیم که شرایط هم‌نهشتی برای این حالت کافی نیست.

(۲) مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت که تعمیم رویای جوانی کرونکر بود.

## ۱.۴ مسئلهٔ نهم هیلبرت

مسئلهٔ نهم هیلبرت از فهرست ۲۳ مسئلهٔ او به دنبال یافتن کلی‌ترین قانون تقابل برای نامانده‌های مرتبهٔ $k$ در یک میدان عددی دلخواه است که در آن $k$ توانی از یک عدد اول می‌باشد. آرتین در سال‌های ۱۹۲۴، ۱۹۲۷، و ۱۹۳۰ در حالت خاص گسترش‌های آبلی این مسئله را حل کرد. در کنار تحقیقات تاکاگی و هاسه[1]، که قانون تقابل کلی‌تر هاسه را به دست آورد، این پیشرفت‌ها منجر به توسعهٔ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای گردید. بعدها شافاروویچ در سال‌های ۱۹۴۸–۱۹۵۰ چند دستور مربوط به نرم مانده‌ها را پیدا کرد. تعمیم غیرآبلی این نتایج به مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت هم مربوط می‌شود که یکی از قدیمی‌ترین مسائل حل‌نشده نظریهٔ اعداد است و با حل کامل آن بسیار فاصله داریم.

تاریخ قانون‌های تقابل، درواقع، تاریخ نظریهٔ جبری اعداد است. هکه[2] در این مورد گفته است که نظریهٔ مدرن اعداد به اکتشاف قوانین تقابل بر می‌گردد. صورت اولیهٔ این قانون به نظریهٔ اعداد گویا تعلق دارد، اما محتوای آن به فراسوی دامنهٔ اعداد گویا اشاره می‌کند. توسعهٔ نظریهٔ جبری اعداد نشان داده است که محتوای قانون درجهٔ دوم فقط وقتی درک می‌شود که به سوی میدان‌های عددی دلخواه گذر کنیم و اثباتی که طبیعت مسئله را نشان دهد، تنها با استفاده از روش‌های میدان‌های عددی بالاتر به دست می‌آید. هاسه ادعا کرده است که بیش‌از پنجاه اثبات برای قانون درجهٔ دوم

1. Hasse 2. Hecke

می‌دانسته است؛ در این باره به [۱] نگاه کنید.

از نگاه اویلر[۱] قانون‌های تقابل این چنین بودند: مشخصهٔ درجهٔ دوم $a$ به پیمانهٔ $p$ فقط به ماندهٔ $p$ به پیمانهٔ $۴a$ بستگی دارد. نزد لُژاندر[۲]، که اصطلاح «تقابل» نیز از اوست، قانون تقابل به این معنا بود که یک عدد اول فردِ $p$ یک ماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ عدد اول فرد دیگری مثل $q$ است اگر و فقط اگر $q$ ماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ $p$ باشد مگر اینکه $p \equiv q \equiv ۳$ (به پیمانهٔ ۴).

**قضیه ۱.۴** (قانون تقابل درجهٔ دوم). اگر $p, q \in \mathbb{N}$ اعداد اول متمایز باشند، آنگاه

$$(\frac{p}{q}) = (-۱)^{\frac{p-۱}{۲} \cdot \frac{q-۱}{۲}} (\frac{q}{p}).$$

به‌علاوه، داریم

$$(\frac{-۱}{p}) = (-۱)^{\frac{p-۱}{۲}}, \qquad (\frac{۲}{p}) = (-۱)^{\frac{p^۲-۱}{۸}}.$$

این تساوی‌ها را، به ترتیب، قانون‌های تقابل اول و دوم می‌گویند.

داستان یافتن فرمول‌های تقابل از همین‌جا آغاز می‌شود. بهترین اثبات‌های قانون تقابل از طریق نظریهٔ جبری اعداد به دست می‌آیند. گاوس متوجه شد که برای فرمول‌بندی قضیهٔ اساسی مانده‌های درجهٔ چهار نیاز به گسترش حلقهٔ اعداد صحیح به حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$، اعداد صحیح گاوسی، دارد. درواقع، نماد ماندهٔ دومجذوری، $[\frac{\pi}{\lambda}]$، که در آن $\pi, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ اعداد صحیح اول گاوسی‌اند که ۲ را عاد نمی‌کنند، برابر با عضو یکانی $\{۱, -۱, i, -i\}$ است به‌طوری‌که هم‌نهشتی $[\frac{\pi}{\lambda}] \equiv \pi^{\frac{(N\lambda-۱)}{۴}}$ (به پیمانهٔ $\lambda$) برقرار باشد. قانون تقابل گاوس به شکل زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۲.۴** (قانون تقابل درجهٔ دوم). برای $\pi, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ اعداد اول متمایز ابتدایی[۳] با شرط $\pi \equiv \lambda \equiv ۱$ (به پیمانهٔ $۲ + ۲i$) داریم

$$[\frac{\pi}{\lambda}] = (-۱)^{\frac{N\pi-۱}{۴}\frac{N\lambda-۱}{۴}} [\frac{\lambda}{\pi}].$$

توجه کنید که یک قانون تقابل ساده‌تر برای نماد ماندهٔ درجهٔ سوم برای اعداد اول ابتدایی در $\mathbb{Z}[\zeta_۳]$ برقرار است. صورت صحیح قوانین تقابل درجهٔ سوم و دومجذوری[۴] را اولین بار آیزنشتاین[۵] در ۱۸۴۴ ثابت کرد. ژاکوبی[۶] پیش از او اثبات‌هایی در تعمیم این قانون‌ها در ۱۸۳۷ در سخنرانی

1. Euler 2. Legendre 3. primary 4. biquadratic 5. Eisenstein 6. Jacobi

کنیگسبرگ خود ارائه کرده بود که از میدان‌های دایره‌بری استفاده می‌کرد. اما در نهایت به‌دلیل نبود تجزیهٔ یکتا اثبات‌های او به نتیجه نرسیدند. تنها بعد از تعریف ایده‌آل‌ها توسط کومر امکان کارکردن با میدان‌های دایره‌بری میسر شد. آیزنشتاین که قبلاً از مفاهیم صورت‌ها استفاده می‌کرد، برتری روش کومر را پذیرفت و حالت خاص قانون تقابل زیر را به دست داد.

**قضیه ۳.۴** (قانون تقابل درجهٔ دوم آیزنشتاین). اگر $p$ عدد اول فرد و $\alpha \in \mathbb{Z}$ ابتدایی باشد یعنی به پیمانهٔ $(1-\zeta_l)^2$ هم‌نهشت با یک عدد صحیح در $\mathbb{Z}$ باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح $a \in \mathbb{Z}$ که نسبت به $l$ اول باشد داریم

$$(\frac{\alpha}{a})_l = (\frac{a}{\alpha})_l.$$

در اینجا نماد مانده‌های توان $p$ام برای ریشهٔ $l$ام، $(\frac{\alpha}{p})_l$، یکهٔ یکتایی است به‌طوری‌که داشته باشیم $(\frac{\alpha}{p})_l \equiv \alpha^{\frac{(Np-1)}{l}}$ (به پیمانهٔ $p$).

حالت مرتبهٔ پنجم باید منتظر می‌ماند تا کومر نظریهٔ ایده‌آل‌هایش را مطرح کند؛ نظریه‌ای که در طی این مسیر، نظمی به همهٔ قانون تقابلی برای همهٔ گسترش‌های دایره‌بری به دست داد. برای تعریف نماد مانده برای یک ایده‌آل که نسبت به $l$ اول است و $l$ منظم، باید توجه کرد که $a = \alpha O_K$ اصلی است. کومر نشان داد که می‌توان $\alpha$ را ابتدایی در نظر گرفت؛ یعنی برای هر $a, b$ صحیح داریم

$$\alpha\overline{\alpha} \equiv a \ (\text{به پیمانهٔ } l), \qquad \alpha \equiv b \ (\text{به پیمانهٔ } (1-\zeta l)^2).$$

به علاوه، او نشان داد که نماد ماندهٔ $(\frac{\alpha}{b})_l$ وابسته به انتخاب $\alpha$ نیست به‌شرطی‌که $\alpha$ ابتدایی باشد. اگر $(l, h) = 1$ می‌توان نماد $(\frac{a}{b})_l$ را چنین تعریف کرد

$$(\frac{a}{b})_l = (\frac{\alpha}{b})_l.$$

**قضیه ۴.۴** (قانون تقابل کومر). فرض کنید $K = \mathbb{Q}(\zeta_l)$ و $l$ منظم باشد، یعنی $p \nmid h$ که در آن $h$ عدد رده‌ای[1] $K$ است. در این صورت

$$(\frac{a}{b})_l = (\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})$$

که در آن $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ایده‌آل‌هایی اول نسبت به $l$اند.

1. class number

اما هیلبرت به قانون تقابل درجهٔ دوم باز می‌گردد. او متوجه شد در هر میدان عددی با عدد رده‌ای فرد، یک قانون درجهٔ دوم وجود دارد و راهی برای کار با عدد رده‌ای زوج هم به دست داد.

**قضیه ۵.۴** (قانون تقابل هیلبرت). اگر $K$ یک میدان عددی شامل ریشه‌های $m$ام واحد باشد، آنگاه برای $\mu,\nu \in K$ داریم

$$\prod_{\mathfrak{p}}(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}) = ۱$$

که در آن $(\frac{\cdot,\cdot}{\mathfrak{p}})$ نماد ماندهٔ نرم توان $m$ام به پیمانهٔ $\mathfrak{p}$ است و حاصل‌ضرب روی تمام جایگاه‌های اول $\mathfrak{p}$ از $K$ است.

هیلبرت مسئلهٔ نهم خود را چنین فرمول‌بندی کرد:

> اثبات کلی‌ترین قانون تقابل برای یک میدان عددی دلخواه و اثبات کلی‌ترین قانون تقابل برای مانده‌های توان $l$ام که $l$ یک عدد اول فرد است. علاوه بر آن، وقتی $l$ توانی از ۲ یا توانی از یک عدد فرد است، تصور می‌کنم، فرمول‌بندی این قانون و نیز تکنیک‌های لازم برای اثبات آن از طریق تعمیمی مناسب از نظریهٔ میدان ریشه‌های $l$ام واحد که خودم به وجود آورده‌ام و نیز نظریهٔ میدان‌های درجهٔ دوم نسبی میسر می‌باشد.

در اولین جمله از ما خواسته شده است که قانون تقابل کومر را برای گسترش‌های $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ که $l$ منظم است تعمیم دهیم. این کار را فورت‌ونگلر انجام داد و وجود میدان رده‌ای هیلبرت را ثابت کرد و با کمک آن یک قانون تقابلی بسیار کلی به دست آورد. تاکاگی با دیدن نتایج او، چیزی شبیه آنچه امروز نظریهٔ میدان‌های رده‌ای می‌نامیم را فرمول‌بندی کرد و یک قانون تقابل برای توان‌های $l$ام در $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ به دست آورد که نظریهٔ کومر را برای وقتی که $l$ منظم است شامل می‌شد.

بین سال‌های ۱۹۲۳–۱۹۲۶ آرتین و هاسه به دنبال فرمول‌بندی ساده‌تر و کلی‌تری از فرمول‌بندی تاکاگی بودند، تا شاید کلی‌ترین قانون تقابل مورد نظر هیلبرت را به دست آورند. یکی از موفقیت‌های آن‌ها فرمول‌بندی زیر بود.

**قضیه ۶.۴** (قانون تقابل ضعیف هاسه). فرض کنید $l$ عدد اول فرد باشد و $K=\mathbb{Q}(\zeta_m)$. فرض کنید $\alpha,\beta \in K$ در شرط $(\alpha,\beta)=۱$، $\alpha \equiv ۱$ (به پیمانهٔ $l$)، $\beta \equiv ۱$ (به پیمانهٔ $\lambda$) صدق کنند

و Tr نمایانگر تابع اثر روی $K/\mathbb{Q}$ باشد. در این صورت

$$(\frac{\alpha}{\beta})_l(\frac{\beta}{\alpha})_l^{-۱} = \zeta^{\mathrm{Tr}(\frac{\alpha-۱}{l}\cdot\frac{\beta-۱}{l})}.$$

هاسه این نتیجه را تقریبی برای یک تقابل کامل می‌دانست زیرا شرط (به پیمانهٔ $l$)$\alpha \equiv ۱$ را شرطی قوی می‌دانست؛ مثلاً این شرط قانون کومر را نتیجه نمی‌داد. آرتین و هاسه توانستند فرمول‌بندی بهتری پیدا کنند، اما ناچار شدند از لگاریتم $l$ای بهره ببرند. آخرین قدم در این راه را آرتین برداشت و یک قانون تقابل پیدا کرد که قوانین تقابل گاوس، کومر، هیلبرت، و تاکاگی را شامل می‌شد. اگر از گروه ایدل $C_K$ برای میدان اعداد $K$ استفاده کنیم، فرمول‌بندی قانون تقابل آرتین ساده‌تر می‌شود.

**قضیه ۷.۴** (قانون تقابل آرتین). اگر $k$ یک میدان عددی و $K/k$ گسترش متناهی باشد، آنگاه نماد ماندهٔ نرم سرتاسری $\left(\underline{K/k}\right)$ یکریختی

$$\frac{C_k}{N_{K/k}C_K} \equiv \mathrm{Gal}(K/k)^{ab}$$

را القا می‌کند که در آن $G^{ab} = \frac{G}{G'}$ آبلی‌شدهٔ گروه گالوا است.

در این حالت از قانون تقابل آرتین نتیجه می‌شود که نماد ماندهٔ توان $(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}})_m$ فقط وابسته به ردهٔ ماندهٔ $\alpha$ به پیمانهٔ ضریبی از $\mathfrak{p}$ است.

آرتین پس‌از چهار سال، در سال ۱۹۲۷، توانست حدس خود را با کمک روش چبوتاریوف به اثبات برساند. هاسه، بی‌درنگ، در کتاب شرحی بر نظریهٔ اعداد[1] خود اینکه چگونه قوانین تقابل را از قانون تقابل آرتین نتیجه بگیریم گنجاند. به‌علاوه او با این فرمول‌بندی توانست نماد $(\frac{\mu,K/k}{\mathfrak{p}})$ را برای هر گسترش آبلی $K$ از $k$ و نه‌فقط آن‌ها که شامل ریشه‌های مناسب واحدند تعریف کند. علاوه بر آن یک فرمول حاصل‌ضرب، مانند فرمول هیلبرت به دست آورد. در حالتی که $\zeta_m \in k$ و $K = k(\sqrt{m}\nu)$ ثابت کرد $(\frac{\mu,K/k}{\mathfrak{p}}) = (\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}})$.

تحقیقات هاسه به وجود یک نظریهٔ میدان‌های رده‌ای موضعی[2] اشاه می‌کردند که یک نظریهٔ دربارهٔ گسترش‌های آبلی میدان‌های موضعی است. او قانون تقابل موضعی آرتین را از حالت سرتاسری آن نتیجه گرفت.

1. *Zahlbericht* 2. local class field theory

**قضیه ۸.۴** (قانون تقابل آرتین برای میدان‌های موضعی). اگر $k$ یک میدان گسترش متناهی $\mathbb{Q}_p$ و $K/k$ گسترش متناهی روی آن باشد، آنگاه نماد ماندهٔ نرم موضعی، یکریختی

$$\frac{k^*}{N_{K/k}K^*} \simeq \mathrm{Gal}(K/k)^{ab}$$

را القا می‌کند.

هاسه سعی کرد اثبات مستقلی برای حالت موضعی بیابد تا حالت سرتاسری را روی حالت موضعی استوار کند. این هدف را هاسه، اشمیت[1]، و شواله به انجام رساندند. نظریهٔ گروه‌های ایدل را شواله برای توصیف نظریهٔ میدان‌های رده‌ای نامتناهی مطرح کرد. اما به‌زودی معلوم شد ایدل‌ها می‌توانند برای عکس کردن روند معمول و نتیجه‌گیری قانون تقابل سرتاسری از قانون تقابل موضعی به کار روند.

یک انقلاب دیگر در این زمینه، صورت‌بندی تِیت[2] بر حسب گروه‌های کوهومولوژی [همانستگی] بود.

**قضیه ۹.۴** (صورت‌بندی تِیت از قانون تقابل آرتین). اگر $K/k$ یک گسترش نرمال و $\coprod_{K/k} \in H^{۲}(\mathrm{Gal}(K/k, C_K)$ ردهٔ بنیادی $K/k$ باشد، برای هر $q \in \mathbb{Z}$ حاصل‌ضرب ناوی[3] با $\coprod_{K/k}$ یکریختی

$$\coprod_{K/k} : H^q(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}) \to H^{q+۱}(\mathrm{Gal}(K/k), C_K)$$

را القا می‌کند.

برای فهم این طرز بیان نیاز به آشنایی با گروه‌های کوهومولوژی وابسته به گروه‌ها داریم. در حالت خاص $q = -۲$ همان تقابل آرتین به دست می‌آید، چون

$$H^{-۲}(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Gal}(K/k)^{ab}, \quad H^{\circ}(\mathrm{Gal}(K/k), C_K) \simeq \frac{C_K}{N_{K/k}C_K}.$$

با این همه پیشرفت در این زمینه، آندره وی اعتقاد داشت که از زمان گاوس تا آرتین چیز جدیدی به دست نیامده است! به‌نوعی قانون تقابل آرتین این رشتهٔ تحقیقات را خاتمه داد و کاهش توجه به قوانین تقابل نتیجه طبیعی آن بود. اما دو مقالهٔ مهم در تاریخ نظریهٔ اعداد در نیمهٔ دوم قرن

1. Schmidt 2. Tate 3. cup product

بیستم تحت تأثیر قوانین تقابل دومجذوری گاوس نوشته شد. آندره وی می‌گوید که توجه به دو مقالهٔ گاوس، یکی در مورد جواب‌های $aX^۴ - b^۴ = ۱$ در میدان متناهی و ارتباط با مجموع‌های گاوسی و این امر که روش آن دقیقاً با مقالهٔ دیگر در تحقیقات حسابی که به مجموع‌های گاوس از مرتبهٔ ۳ معادلهٔ $aX^۳ - bY^۳ = ۱$ می‌پرداخت یکی است، او را به این فکر انداخت که اصول مشابهی را می‌توان برای معادلات به‌شکل $aX^m + bY^n + cZ^r + \cdots = ۰$ به کار برد و این «فرضیهٔ ریمان» را برای همهٔ خم‌ها به‌شکل $aX^n + bY^n + cZ^n = ۰$ روی میدان‌های متناهی و همچنین «فرضیهٔ ریمان تعمیم‌یافته» را برای چندگوناهای تصویری[۱] با معادلهٔ قطری $\sum a_iX_i = ۱$ به دست می‌دهد؛ این موضوعات به حدسیات او در مورد چندگوناها روی میدان‌های متناهی منتهی شد. از این حدسیات با نام «حدسیات وی» نام برده می‌شود که امروزه قضیه‌های دُلینی[۲] هستند.

اتفاق دیگر، معادلات بیرش[۳] و سوئینرتن–دایر[۴] بود که ضمن مطالعهٔ خم‌های بیضوی $Y^۲ = X^۳ - DX$ به حدس‌هایی دربارهٔ اطلاعات موضعی و سرتاسری خم‌های بیضوی توسط $L$–تابع هاسه–وی رسیدند. اینجا نیز قانون تقابل دومجذوری گاوس برای بررسی حالات خاص حدی بسیار کارگر افتاد. حتی فرمول‌های دقیق[۵] آرتین و هاسه را ایواساوا[۶]، کوتس[۷]، و وایلز[۸] تعمیم دادند تا بتوانند در حل حدس بیرش و سوئینرتن–دایر پیشرفت حاصل کنند.

کرونکر اولین کسی بود که اصطلاح گسترش آبلی را به کار برد. او تحت تأثیر مقالاتی بود که آبل درست قبل‌از مرگش نوشته بود و در آن معادلات جبری را که گروه گالوای آن‌ها آبلی‌اند مورد مطالعه قرار داده بود. تمرکز بر مطالعهٔ گسترش‌های آبلی در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم رایج بود. کرونکر در سال‌های ۱۸۵۳، ۱۸۵۶، ۱۸۷۷، و ۱۸۸۲ و وبر در سال‌های ۱۸۸۶–۱۸۸۷ و ۱۸۹۸–۱۸۹۹ و هیلبرت در سال‌های ۱۹۸۶–۱۹۸۸ مبانی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای را فراهم کرده بودند. امیل آرتین در همین مکتب آلمانی بار آمده بود. او شاگرد هرگلوتس[۹] در لایپزیگ بود و بسیار تحت تأثیر او قرار داشت. آرتین بعداز فارغ‌التحصیلی به گوتینگن رفت و کورانت[۱۰]، هیلبرت، کلاین[۱۱]، و لانداو[۱۲] را ملاقات کرد. در سال‌هایی که آرتین تحت‌نظر هرگلوتس رسالهٔ دکترای خود را می‌نوشت، سال‌های ۱۹۲۰–۱۹۲۳، هرگلوتس به تحقیقات هکه، در سال‌های ۱۹۱۷–۱۹۲۰، دربارهٔ تابع زتا و $L$–تابع‌ها علاقه‌مند شده بود [۱۲]. به‌خصوص، به اثباتی از او برای قانون تقابل درجهٔ دوم در میدان‌های درجهٔ دوم موهومی توسط ضرب مختلط[۱۳] که با کمک $\wp'$ مشتق تابع $\wp$ وایرشتراس[۱۴] مشابه اثبات کلاسیک آیزنشتاین توسط توابع مثلثاتی عرضه کرده بود. مطالعهٔ مقالات

1. projective 2. Deligne 3. Birch 4. Swinnerton-Dyer 5. explicit formulas 6. Iwasawa 7. Coates 8. Wiles 9. Herglotz 10. Courant 11. Klein 12. Landau 13. complex multiplication 14. Weierstrass

هرگلوتس نشان می‌دهد که مسائل مشکل و مهمی را در نظریهٔ اعداد، که با آنالیز مختلط و هندسهٔ جبری اشتراکاتی داشتند، مورد توجه قرار داده است؛ مسائلی که هنوز اهمیت دارند و در حالت کلی حل‌نشده باقی مانده‌اند. موضوع آن‌ها فرمول تحلیلی عدد رده‌ای[1] و خصوصیات بنیادی میدان‌های رده‌ای و تعمیم‌های آنان و ساخت میدان‌های رده‌ای به کمک توابع متعالی است. این مسائل به رسالهٔ آرتین و مقالات او دربارهٔ تابع زتا و $L$ـ‌تابع‌ها که درست بعداز عرضهٔ رساله‌اش نوشته شده‌اند مربوط می‌شوند.

آرتین در رسالهٔ دکترای خود گسترش‌های درجهٔ دوم میدان‌های توابع را مطالعه کرد. او به نظریهٔ هم‌نهشتی‌های مراتب بالای گاوس می‌پردازد که در کانون توجه مطالعات میدان‌های توابع و میدان‌های عددی بود. نظریهٔ میدان‌های توابع توسط نظریهٔ هم‌نهشتی‌های مراتب بالای گاوس شروع شد و به تحقیقات ددکیند و آرتین منتهی شد. گاوس با کمک نظریهٔ میدان‌های دایره‌بری روی میدان متناهی اثبات جدیدی از قانون تقابل درجهٔ دوم به دست آورد که به عنوان اثبات سوم گاوس شناخته می‌شود. ددکیند پس‌از ارجاع به گاوس و گالوا نظریهٔ ایده‌آل‌های کومر را برای حالت میدان توابع بسط می‌دهد. ددکیند اشاره می‌کند که با توجه به شباهت بین میدان‌های عددی و میدان‌های توابع، بدون شک باید برای نظریهٔ قانون تقابل درجهٔ دوم نظیری در میدان‌های توابع وجود داشته باشد. او حتی صورت قضیه را هم بیان می‌کند و اثباتی برای آن ارائه می‌نماید:

$$[\frac{P}{R}][\frac{R}{P}] = (\frac{-۱}{\mathfrak{p}})^{\pi.\mathfrak{p}}$$

که در آن $P, R$ چندجمله‌ای‌های یکال تحویل‌ناپذیر از درجه‌های، به ترتیب، $\pi$ و $\mathfrak{p}$اند و $(\frac{۱}{\mathfrak{p}}) = (-۱)^{\frac{\mathfrak{p}-۱}{۲}}$ همان نماد لژاندر در $\mathbb{Q}$ است. ددکیند در اثبات خود از لم گاوس استفاده می‌کند که شکل زیر را به خود می‌گیرد:

اگر $P$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ $\pi$ در $R = \mathbb{F}_p[X]$ و $A \in R$ نسبت به $p$ اول باشد، آنگاه

$$[\frac{A}{P}] = (-۱)^{\mu}$$

که در آن $\mu$ این چنین به دست می‌آید: همهٔ $p^{\pi} - ۱$ چندجمله‌ای‌ها به پیمانهٔ $P$ را به دو دستهٔ $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ تقسیم کنید که اگر $F \in \mathcal{G}$ آنگاه $-F \in \mathcal{H}$. در این صورت $\mu$ تعداد اعضای $A \cdot \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ خواهد بود.

1. analytic class number formula

رسالهٔ دکترای آرتین مطالعهٔ روشمند گسترش‌های درجهٔ دوم میدان‌های توابع روی میدان متناهی $\mathbb{F}_{p^n}$ برای $p \neq ۲$ بود که مرکز این مطالعات فرمول تحلیلی عدد رده‌ای بود و منجر به تعریف تابع زتا برای میدان توابع و فرمول‌بندی قضیهٔ ریمان برای این میدان‌ها شد.

آرتین، در قسمت اول رساله، به نظریهٔ حساب خم‌های ابربیضوی[1] می‌پردازد و نتایج ددکیند برای $\mathbb{F}_p(t)$ را تعمیم می‌دهد. در پایان این بخش، آرتین قانون تقابل درجهٔ دوم را برای میدان $\mathbb{F}_p(t)$ ثابت می‌کند. فرمول‌بندی آرتین چنین است

$$[\frac{a}{P}] = (\frac{a}{p})^r$$

که در آن $[\ ]$ نماد لژاندر در $\mathbb{F}_p(t)$ و $()$ نماد لژاندر در $\mathbb{Q}$ است. $P$ چندجمله‌ای یکال تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{F}_p[t]$ و $a$ عضو یکه در $\mathbb{F}_p[t]$ است که عددی صحیح است که بر $p$ بخش‌پذیر نیست و $r$ درجهٔ $P$ است. حالت کلی قانون درجهٔ دوم برای $K = \mathbb{F}_p(t)$ به‌شکل زیر است

$$[\frac{P}{Q}][\frac{Q}{P}] = (\frac{-۱}{p})^{\nu\mu}$$

که در آن $Q, P$ یکال تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{F}_p[t]$ از درجه‌های $\nu, \mu$ هستند.

آرتین در قسمت دیگر رساله، از قانون درجهٔ دوم استفاده می‌کند و نشان می‌دهد که تابع زتای $\zeta(s)$ تابع گویایی از $p^{-s}$ است. اشمیت قانون تقابل مرتبهٔ $n$ را برای میدان تابع دلخواه در سال ۱۹۲۶ اثبات کرد.

قسمت دوم رسالهٔ آرتین به مبحث تحلیلی بودن تابع زتا مربوط می‌شود که مقدمه را برای مقالات بعدی آرتین در مورد توابع زتا و $L$ـتابع‌ها در میدان‌های اعداد مهیا می‌کند.

او بعداز پایان رسالهٔ دکترایش به این مسئله می‌پردازد که آیا برای گسترش $K/k$ تابع $\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ تابع تحلیلی تام است؟ حالت گسترش‌های $K = \mathbb{Q}$ توسط ددکیند پاسخ داده شده بود. او از نظریهٔ تاکاگی که در آن هر گسترش آبلی، میدان رده‌ای است و نظریهٔ وبر دربارهٔ $L$ـتابع‌ها نشان داد که

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \prod_{\Xi} L(s, \Xi)$$

و در آن حاصل‌ضرب روی تمام مشخصه‌های وبر متمایز از مشخصهٔ اصلی $\Xi_\circ$ است. این رابطه را وبر برای گسترش‌های آبلی در سال ۱۸۹۷ حدس زده بود و تاکاگی آن را در ۱۹۲۰ ثابت کرده

1. hyperelliptic function field

بود. هکه در ۱۹۱۷ ثابت کرد که $L(s,\Xi)$ برای $\Xi \neq \Xi_\circ$ تابع تام است. مطالعات آرتین بدون شک تحت تاثیر مقالات هرگلوتس قرار داشت. دلیل تغییر توجه آرتین از مسئلهٔ میدان‌های توابع به میدان‌های اعداد بی‌توجهی هیلبرت به رسالهٔ او در سخنرانی‌اش در دانشگاه گوتینگن بود.

در سال ۱۹۲۳ آرتین $\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ را برای گسترش‌های گالوای دلخواه بررسی کرد و به یک $L$ـتابع جدید به نام $L$ـتابع آرتین دست پیدا کرد که از نمایش گروه $\mathrm{Gal}(K/k)$ به دست می‌آمد. $L$ـتابع‌های آرتین با کمک یک ضرب اویلری تعریف می‌شدند. هنوز برای نمایش‌های بُعد بالا نمی‌دانیم که آیا این $L$ـتابع‌ها تحلیلی هستند یا خیر. آراماتا[1] در ۱۹۳۳ و براوئر[2] در سال ۱۹۴۷ برپایهٔ نتایج آرتین ثابت کردند که اگر $K/k$ گالوایی باشد $\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ تحلیلی تام است. براوئر نشان داد $L$ـتابع‌های آرتین برخه‌ریخت هستند. در حالتی که مشخصهٔ $\Xi$ یک‌بُعدی باشد، می‌توان دقیقاً تعیین کرد که چه موقع $L$ـتابع آرتین با $L$ـتابع وبر یکسان هستند. $L$ـتابع وبر برای رده‌های $H$ و مشخصهٔ وبر $\Xi$ مشخص می‌شدند که در آن بنابر نظریهٔ میدان‌های رده‌ای تاکاگی $\mathrm{Gal}(K/k)$ با $\frac{Im}{H}$ یکریخت است. اگر $p$ رده‌ای در $L$ باشد به‌طوری‌که

(۱) ایده‌آل اول $\mathrm{Frob}_p$ در $\mathrm{Gal}(K/k)$ فقط به ردهٔ $C_p$ بستگی داشته باشد؛

(۲) یک یکریختی دقیق از $\alpha : \mathrm{Gal}(\frac{K}{k}) \rightarrow \frac{Im}{H}$ وجود داشته باشد و $\alpha(\mathrm{Frob}_p) = C_p$ (آرتین این شرط را قانون تقابل گسترش‌های آبلی می‌نامد).

در این صورت $K/k$ گسترش دوری با قوانین تقابل کلاسیک هیلبرت روی $k$ است و $n = [K:k]$ که در آن $k$ شامل ریشه‌های $n$ام واحد است. آرتین فقط توانست در حالتی که قوانین تقابل قبلاً اثبات شده بودند، حکم را ثابت کند. او بعداً در سال ۱۹۲۷ به کمک روش‌های چبوتاریوف توانست اثباتی برای حالت کلی بیاورد.

بد نیست بدانیم مقالهٔ اصلی ددکنید در این باره در ۱۹۰۰ نوشته شد و هکه تحقیقاتش را در ۱۹۱۷ انجام داده بود و تاکاگی در ۱۹۲۰ مقاله خود را منتشر کرده بود. آرتین در ۱۹۱۹ در لایپزیگ دانشجوی دکترا بود و در سپتامبر ۱۹۲۱ رسالهٔ دکترای خود را به انجام رساند. او در اکتبر ۱۹۲۱ اقامت یک‌ساله‌اش در گوتینگن را آغاز کرد. او در سال ۱۹۲۳ تابع زتای خودش را تعریف کرد. در اکتبر ۱۹۲۳ به هامبورگ رفت و دستیار بلاشکه[3] شد. در ۱۹۲۳ رسالهٔ استادیش را دربارهٔ قانون تقابل آرتین به صورت یک حدس مطرح کرد و در همان وقت به عنوان مدرس در هامبورگ پذیرفته شد و در سال ۱۹۲۶ به مقام استاد تمامی رسید. در همان سال چبوتاریوف رسالهٔ دکترایش را

1. Aramata 2. Brauer 3. Blaschke

نوشت. در ۱۹۲۷ آرتین قانون تقابل کلی خود را اثبات کرد، او در آن زمان تنها ۲۸ سال داشت. آرتین در همان سال مسئلهٔ هفدهم هیلبرت را نیز حل کرد. هیچ‌کس تا آن زمان موفق به حل دو مسئلهٔ هیلبرت نشده بود. آرتین در سال ۱۹۳۶ از آلمان به آمریکا مهاجرت کرد و یک سال را در نوتردام گذراند و سپس در دانشگاه ایندیانا شغلی پیدا کرد. در سال ۱۹۴۰ مجدداً با کمک شاگردانی که در ایندیانا پیدا کرده بود به دنیای تحقیق بازگشت و در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون با زیگل[1] مراوداتی داشت. همکاری با تِیت که در هاروارد بود و در ضمن داماد او نیز بود تاریخ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای را تکان داد. آرتین در سال‌های ۱۹۵۱–۱۹۵۲ سخنرانی‌هایی دربارهٔ صورت‌بندی کوهومولوژیک نظریهٔ میدان‌های رده‌ای ارائه کرد که در سال ۱۹۶۱ با همکاری تِیت به چاپ رسید. آرتین در سال ۱۹۶۲ در اثر ایست قلبی درگذشت [۲۲].

## ۲.۴ مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت

گرچه نظریهٔ جبری اعداد و نظریهٔ میدان‌های رده‌ای از شاه‌راه‌های ریاضیات محسوب می‌شوند، مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت تقریباً به فراموشی سپرده شده است. کرونکر در ۱۸۷۷ حدس زد که هر گسترش آبلی اعداد گویا می‌تواند با اضافه کردن مقادیر ساده‌ای در تابع توانی $e^{2\pi iz}$ به دست آید. وبر این مطلب را در ۱۸۹۶ ثابت کرد و هیچ‌کس اشتباه اثبات او را تا ۱۹۷۹ متوجه نشده بود. هیلبرت در ۱۸۹۶ برای این حکم اثباتی داده بود. «رویای جوانی کرونکر» در آن زمان یک حدس رام‌نشدنی بود. اصل موضوع این بود که گسترش‌های آبلی میدان‌های درجهٔ دوم موهومی می‌توانستند با مقادیر خاص توابع بیضوی تولید شوند. هیلبرت مسئلهٔ کرونکر را در سطح بالاتری مطرح کرد. او قصد داشت توابعی تحلیلی پیدا کند که همهٔ گسترش‌های متناهی آبلی میدان عددی دلخواه را به دست بدهد. به نظر می‌رسید هر میدان عددی نیاز به راه‌حلی جداگانه داشته باشد. این مطلب نیاز به نظریهٔ صورت‌های خودریخت[2] داشت که به رویه‌های ریمانی و آنالیز مختلط و هندسهٔ جبری مربوط می‌شد. اما هیلبرت اعتقاد داشت «رویای جوانی» با کارهایی بدون مشکلات جدی قابل حصول است. در سال ۱۹۱۴ مشخص شد که صورت مطرح‌شدهٔ از «رویای جوانی» مشکلاتی دارد و حل آن تا زمان بسط تاکاگی برای نظریهٔ میدان‌های رده‌ای (۱۹۲۰) باید منتظر می‌ماند.

توسعهٔ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای زمینه‌هایی از مسئلهٔ دوازدهم را که به جبر و نظریهٔ اعداد مربوط می‌شد در بر گرفت و ارتباطاتی با آنالیز به وجود آورد که در جهت رسیدن به یک راه‌حل حرکت می‌کرد. بعضی ریاضی‌دانان اعتقاد دارند که رودخانه‌ای از ایده‌ها در یک زمینهٔ مشترک می‌تواند به

1. Siegel 2. automorphic forms

حل مسائل هفتم، دوازدهم، بیست و یکم، و بیست و دوم هیلبرت منجر شود. در طی زمان، معمولاً ریاضیات به سوی تکثر اندیشه‌ها حرکت کرده است. هرمان وایل[۱] در این باره می‌نویسد که اگرچه در توسعهٔ فیزیک، از آغاز قرن بیستم، فیزیک در جهت همگرایی بوده است، ریاضیات، مانند دلتای رود نیل، آب رودخانه به جهات مختلفی گرایش پیدا کرده است. در زمانی که هیلبرت مسئلهٔ دوازدهم را مطرح کرد، جریان ایده‌ها در جهت دورشدن از این مسئله بود. صورت‌بندی هیلبرت هم از این مسئله خیلی دقیق نبود. اما دورنمای نظریهٔ جبری اعداد در نگاه هیلبرت درست بود. در اثبات قضیهٔ آخر فرما عددهای رده‌ای و سایر ناورداها مرکزیت پیدا کردند، و این یعنی در آن اثبات از هندسهٔ جبری استفاده شده بود. قضیهٔ پایه هیلبرت و قضیهٔ صفرهای او در قرار دادن هندسهٔ جبری بر پایه‌هایی دقیق و استوار نقش محوری داشت.

حقیقت این است که «رویای جوانی کرونکر» می‌خواهد به‌جای ریشه‌های واحد در قضیهٔ کرونکر–وبر که اعداد مختلطی هستند (مقادیر خاص تابع توانی) مقادیر خاص توابع متعالی دیگری را جایگزین نماید. از طریق نظریهٔ ضرب مختلط این کار را می‌توان برای هر گسترش درجهٔ دوم موهومی انجام داد و از تابع پیمانه‌ای $j$ و تابع بیضوی $\wp$ استفاده کرد. شیمورا[۲] این مطلب را به میدان‌های ضرب مختلط $CM$ توسعه داد. شیمورا و تانیاما[۳] حالت گسترش‌های درجهٔ دوم موهومی از یک میدان کلاً حقیقی[۴] را در نظر گرفتند و سعی کردند به کمک نقاط تاب‌دار[۵] یک چندگونای آبلی گسترش آبلی ماکسیمال تولید کنند. حالت خاص میدان‌های کلاً حقیقی را کاکدی [۶] و داسگوپتا[۷] به‌تازگی به انجام رسانده‌اند که در آن روش‌های موثر ساخت گسترش‌های آبلی ماکسیمال از هر میدان کلاً حقیقی داده شده است [۹]. روش حل این مسئله براساس انتگرال $p$ای است و راه‌حل مذکور طبیعت متفاوتی با راه‌حلی که هیلبرت در ذهن داشت دارد. در حالت خاص گسترش‌های درجهٔ دوم کلاً حقیقی، راه‌حل دیگری را دارمون[۸]، پوتزی[۹]، و وونک[۱۰] پیدا کرده‌اند که آن هم بر روش‌های $p$ای تکیه دارد. کرونکر مباحث مربوط به ضرب مختلط $CM$ را «عزیزترین رویای جوانی»اش[۱۱] می‌خواند.

مسئلهٔ اصلی نظریهٔ جبری اعداد توصیف میدان‌های عددی است. گالوا نشان داد که گسترش‌های میدان‌ها توسط گروه‌های خاصی، موسوم به گروه‌های گالوا، کنترل می‌شوند. ساده‌ترین حالت، که هم‌اکنون در مرز دانسته‌های ما قرار دارد، وقتی است که گروه مورد نظر آبلی باشد. تمام گسترش‌های درجهٔ دوم که با اضافه‌کردن ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجهٔ دو به دست می‌آیند، آبلی‌اند و مطالعهٔ

1. Weyl 2. Shimura 3. Tanyama 4. totally real 5. tosion 6. Kakde 7. Dasgupta 8. Darmon 9. Pozzi 10. Vonk 11. liebster jugendtraum

آن‌ها را گاوس آغاز کرد. نوع دیگری از گسترش‌های درجهٔ دوم در یک گسترش دایره‌بری بزرگ می‌نشینند. قضیهٔ کرونکر–وبر می‌گوید که این امر برای هر گسترش آبلی $\mathbb{Q}$ برقرار است و سؤال کرونکر دربارهٔ گسترش‌های دلخواه غیراز $\mathbb{Q}$ بود. راه‌حل کامل تنها برای میدان‌های درجهٔ دوم موهومی و یا تعمیم آن و میدان‌های ضرب مختلط $CM$ پیدا شده است.

مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت آن‌طورکه هیلبرت آن را بیان کرده بود گمراه‌کننده است. به نظر می‌رسد که او انتظار داشت گسترش‌های میدان‌های درجهٔ دوم موهومی با مقادیر خاص توابع بیضوی به دست آیند، که ادعای درستی نیست. البته ممکن است منظور او تابع بیضوی $\wp$ وایرشتراس یا تابع پیمانه‌ای بیضوی $j$ بوده باشد. اول اینکه در این مورد هم ریشه‌های واحد مورد نیازند و ظاهراً هیلبرت متوجه این نکته بوده است. نظریهٔ ضرب مختلط $CM$ نشان می‌دهد که گسترش‌های آبلی $\mathbb{Q}(\tau)$ که در آن $\tau$ یک ناگویای درجهٔ دوم موهومی است، با اضافه‌کردن مقادیر $\wp(\tau, z)$ و $j(\tau)$ ریشه‌های واحد تولید می‌شود که در آن $z$ یک نقطهٔ تابدار از خم بیضوی وابسته است.

یک راه دیگر برای بررسی مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت جستجو برای توابع مشابه $j, \wp$ یا تابع توانی است که مقادیر خاص آن‌ها $K^{ab}$ را برای میدان عددی دلخواه $K$ تولید کند. توصیفی از $K^{ab}$ توسط نظریهٔ میدان‌های رده‌ای ارائه شده است. اما در این توصیف، ابتدا یک میدان ناآبلی بسیار بزرگ‌تر ساخته می‌شود که از نظریهٔ کومر به دست می‌آید و سپس با بریدن به گسترش‌های آبلی، $K^{ab}$ به دست می‌آید. اما مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت راه‌حل مستقیم‌تری را در نظر دارد.

در سال ۱۹۱۲ هکه در رسالهٔ دکترایش از صورت‌های پیمانه‌ای هیلبرت[1] کمک گرفت. نظریهٔ ضرب مختلط را شیمورا و تانیاما بینان‌گذاری کردند که منجر به رده‌بندی گسترش‌های آبلی میدان $CM$ دلخواه گردید. آن‌ها از مدول تِیت به عنوان نمایش گالوایی بهره بردند. این مدول به عنوان گروه کوهومولوژی $l$ای عمیقاً مورد مطالعه قرار گرفت. لنگلندز[2] در سال ۱۹۷۳ صورت جدیدی از «رویای جوانی» را مطرح کرد که در آن از تابع زتای هاسه–وی استفاده می‌شد [۱۵]. او فرمول‌بندی خود را «برنامهٔ بزرگ»[3] نامید. پیشرفت دیگر در این زمینه حدس استارک[4] بود که به یافتن یکه‌هایی خاص در میدان‌های عددی مربوط می‌شد. تحقیقات کاکدی و داسگوپتا و همچنین دارمون، پوزی، و دونک نیز همین مسیر را طی می‌کرد [۸].

استارک در سال‌های مختلفی از ۱۹۷۱ تا ۱۹۸۰ و پس‌از او تِیت در ۱۹۸۴ حدسی را مطرح کردند که به ضرایب جمله پیشرو در بسط تیلور $L$–تابع آرتین مربوط می‌شود. این حدس، فرمول تحلیلی عدد رده‌ای را تعمیم می‌دهد. این فرمول به ضریب جملهٔ پیشرو تابع زتای ددکیند وابسته به

1. Hilbert modular forms 2. Langlands 3. grandiose program 4. Stark

یک میدان اعداد مربوط می‌شود که آن را به‌شکل حاصل‌ضرب یک عدد گویا با یک تنظیم‌گر[۱] وابسته به $S$ـیکه‌ها نمایش می‌دهد. در حالتی که گسترش $K/k$ آبلی و مرتبهٔ صفرشدن $L$ـتابع در $s = ۰$ برابر یک باشد، استارک صورت بهبودیافته‌ای از این حدس را مطرح کرد که وجود یکه‌هایی به نام یکه‌های استارک را پیش‌بینی می‌کند. روبین[۲] و پوپسکو[۳] این حدس را به صفرهای مراتب بالاتر تعمیم دادند. ریشه‌های یکه‌های استارک گسترش‌های کومر $K$ را که روی $k$ آبلی‌اند تولید می‌کنند. اخیراً الگوریتم‌هایی برای محاسبهٔ گسترش‌های آبلی میدان‌های عددی توسط یکه‌های استارک ارائه شده است. مانین[۴] حدس استارک را به هندسهٔ ناجابه‌جایی کُن[۵] مرتبط ساخت. [۱۶] در حالت میدان توابع هم صورتی از حدس استارک مطرح شده است.

در حالت میدان‌های توابع توسط نقاط تاب‌دار مدول درینفلد[۶] از میدان‌های سرتاسری یک گسترشِ ماکسیمال آبلی تولید می‌شود؛ نتیجه‌ای که درینفلد ثابت کرد. لوبین[۷] و تِیت برای میدان‌های موضعی نشان دادند که گسترش ماکسیمال آبلی با نقاط تاب‌دار گروه فرمال تولید می‌شود. قانون گروه فرمال و مدول درینفلد، هر دو، نظایر خم‌های بیضوی‌اند. در حالت ضرب مختلط به نقاط تاب‌دار یک خم بیضوی یا یک چندگونای آبلی را نیاز داریم و در حالت اعداد گویا ریشه‌های واحد را می‌توان نقاط تاب‌دار گروه ضربی $\mathbb{C}^*$ تصور کرد. بنابراین، در اینجا قانون گروه در هندسهٔ جبری نقش مهمی ایفا می‌کند.

به‌طور خلاصه، تاریخ مسئلهٔ دوازدهم هیلبرت بدین قرار است [۱۱]:

- گسترش‌های دایره‌بری توسط کرونکر، وبر، و هیلبرت بررسی شد.
- تولید میدان‌های با گروه گالوای آبلی با استفاده از خم‌های بیضوی با ضرب مختلط توسط کرونکر، وبر، و تاکاگی انجام شد.
- تولید میدان‌های با گروه گالوای آبلی با استفاده از چندگوناهای آبلی با ضرب مختلط شیمورا انجام پذیرفت.
- حالت مشخصهٔ مثبت توسط هِیز[۸] و درینفلد فقط در حالت میدان‌های توابع انجام شد.
- نظریهٔ موضعی با کمک گروه‌های فرمال به‌وسیلهٔ لوبین و تِیت فقط برای میدان‌های موضعی که میدان مانده‌ای متناهی دارند انجام شد و نظریهٔ آن‌ها برای میدان‌های مانده‌ای نامتناهی کارامد نیست.

1. regulator 2. Rubin 3. Popescu 4. Manin 5. Alain Connes 6. Drinfeld 7. Lubin 8. Hayes

مسئلهٔ «رویای جوانی» در مقایسه با نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بیش از حد به ساختارهایی با جزئیات بسیار نزدیک شد و نتوانست به ساختارهایی کلی که به‌سادگی قابل استفاده باشند تعمیم پیدا کند.

## مراجع

[۱] درفشه، محمدرضا، اثباتی برای قانون مربعی گاوس، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۱** (۱۴۰۱)، ۶۳-۷۲.

[۲] کاکس، دی. اِی.، چرا آیزنشتاین محک آیزنشتاین را اثبات کرد و چرا اصلا شونمان آن را کشف کرد، ترجمهٔ آزاده نیک‌سرشت، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۱** (۱۴۰۱)، ۱۷۳-۱۹۸.

[۳] گودستاین، جی. آر.، اولگا تاوسکی–تاد، ترجمهٔ محبوبه علیزاده صنعتی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۲** (۱۴۰۲)، ۱۹۳-۲۱۲.

[4] Bloch, S., Algebraic K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.*, **114** (1981), no. 2, 229-265.

[5] Cassels, J. W. S., Fröhlich, A., eds., Algebraic Number Theory, Thompson Book Co., Washington, DC, 1967.

[6] Conrad, K., History of class field theory (2001), available at `www. math. uconn. edu/~ kconrad/blurbs/gradnumthy/cfthistory. pdf`

[7] Cornelissen, G., Marcolli, M., Quantum statistical mechanics, L-series and anabelian geometry I: partition functions, in *Trends in Contemporary Mathematics*, Springer, New York, 2014, 47-57.

[8] Darmon, H., Pozzi, A., Vonk, J., Gross-Stark units, Stark-Heegner points, and derivatives of $p$-adic Eisenstein families, 2019 (preprint).

[9] Dasgupta, S., Kakde, M., Brumer-Stark units and Hilbert's 12th problem (2021), available at `arXiv:2103.02516`.

[10] Durov, N.i, New approach to Arakelov geometry (2007), available at `arXiv:0704.2030`.

[11] Fesenko, I., Class field theory, its three main generalisations, and applications, *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, **8** (2021), no. 1, 107-133.

[12] Frei, G., On the history of the Artin reciprocity law in abelian extensions of algebraic number fields: How Artin was led to his reciprocity law, in *The Legacy of Niels Henrik Abel: The Abel Bicentennial, Oslo, 2002*, Springer, New York, 2004, 267-294.

[13] Frenkel, E., Recent advances in the Langlands program, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (2004), no. 2, 151-184.

[14] Kato, K., Kurokawa, N., Saitō, T., Kurihara, M., Number Theory: Introduction to Class Field Theory, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[15] Langlands, R. P., Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum, in *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976, 401-418.

[16] Manin, Y. I., Panchishkin, A. A., *Introduction to Modern Number Theory*, Springer, New York, 2005

[17] Nakamura, H., Tamagawa, A., Mochizuki, Sh., The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves, *Sugaku Expositions*, **14** (2001), no.1, 31-54.

[18] Niibo, H., Ueki, J., Idelic class field theory for 3-manifolds and very admissible links, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **371** (2019), no. 12, 8467-8488.

[19] Shemanske, T. R., An overview of class field theory (2000), avialable at `https://math.dartmouth.edu/ trs/expository-papers/CFT.pdf`.
[20] Toen, B., Vaquie, M., Au-dessous de $Spec\mathbb{Z}$, *J. K-Theory*, **3** (2009), no. 3, 37-500.
[21] Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer, New York, 2013
[22] Yandell, B., *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, CRC Press, New York, 2001.

---

جلال پیردایه: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: jp139188@gmail.com
آرش رستگار: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: rastegar1352@gmail.com

*Mathematical Culture and Thought*
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 313–342
doi: 10.30504/mct.2023.1414.1993

# A History of Class Field Theory

J. Pirdayeh[1], A. Rastegar[2]✉

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

**Abstract.** In this paper, we study the historical background of class field theory. First, we investigate Kummer's theory, which is one of the algebraic backgrounds of class field theory. Then we turn to "Kronecker's jugendtraum" that led to the question of finding all abelian extensions of number fields. After this, we state Takagi's theorems and finally study Hilbert's problems. By examining the historical course of the above, we are trying to present a better picture of the historical background of class field theory, which is a part of the foundations of present mathematics.

*Keywords*: class field, number field, Galois extension, reciprocity law, class number, Hilbert's problems
*Article history*: Recieved 9 August 2023; Accepted 21 November 2023
*Article type*: review

1. jp139188@gmail.com
2. rastegar1352@gmail.com