

رویکردی دیگر به ماتریس نمایی*

دبلیو. ای. هریس، جی. پی. فیلمور، دی. آر. اسمیت

ترجمه فاطمه جاویدپناه، رسول کاظمی ✉، امیرحسین نخودکار

چکیده. فقط با دانستن مقادیر ویژه یک ماتریس و قضیه کیلی-همیلتون می‌توان نما و تجزیه طیفی آن ماتریس را محاسبه کرد. سبک و ظاهر روش‌های این مقاله به قدری ساده است که می‌توان آن را برای دانشجویان درس معادلات دیفرانسیل عادی بیان کرد.

۱ مقدمه

بدون شک تمام کسانی که ویلیام هریس (متولد ۱۸ دسامبر ۱۹۳۰، درگذشته ۱ ژانویه ۱۹۹۸) را می‌شناختند، دلتنگ او هستند. او بارها به‌عنوان محقق مدعو در دانشگاه کالیفرنیا در سندیگو حضور داشت و آخرین بار آن در پاییز ۱۹۹۷ بود. علاقه مشترک اسمیت و هریس به معادلات دیفرانسیل عادی باعث دیدار آن‌ها در سال ۱۹۷۵ شد. فیلمور (که شاخه اصلی‌اش هندسه است) تا پیش از پاییز ۱۹۹۷ آشنایی با هریس نداشت.

هریس علاقه زیادی به معادلات دیفرانسیل عادی داشت و اغلب نکته‌هایی درباره جنبه‌های مختلف این موضوع با همکاران خود رد و بدل می‌کرد. هریس در آخرین ماه حضورش در سندیگو دو سخنرانی کوتاه درباره روشی جالب برای محاسبه تابع نمایی یک ماتریس برای فیلمور و اسمیت

عبارات و کلمات کلیدی: تابع نمایی ماتریس، ماتریس واندرموند، تجزیه طیفی

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۲

*Harris, Jr., W. A., Fillmore, J. P., Smith, D. R., Matrix exponentials—Another approach, *SIAM Rev.*, **43** (2001), 4, 694-706.

ارائه کرد. هریس در آخرین سال عمرش در جاهای دیگری از جمله سیاتل، رالای، و لس آنجلس نیز درباره این روش‌ها سخنرانی و گفت‌وگو کرده بود. ما نیز مانند هریس تصور می‌کنیم که این نکته‌ها ساده و زیبا هستند و برای ارائه در یک درس مقدماتی به دانشجویان دوره کارشناسی مناسب‌اند. با این فکر، آنچه را هریس در مورد محاسبه‌ی نمای یک ماتریس به ما می‌گفت یادداشت می‌کردیم و اکنون آن را ارائه می‌کنیم (برای نوزده روش دیگر [۷] را ملاحظه کنید).

بخش‌های این مقاله به صورت زیر است.

- در بخش اول، شرحی از روش مورد بحث ارائه می‌شود. کار را با این مطلب شروع می‌کنیم که هر مؤلفه $u(t)$ از ماتریس e^{At} در معادله دیفرانسیل $c\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0$ صدق می‌کند، که در آن $c(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه A است. کار را با بیان تمام مطالب لازم، که ساده و کاربردی هستند، ادامه می‌دهیم.
- در بخش دوم، با استفاده از نرم افزار مَتِمَتیکا مثالی ارائه می‌کنیم. مطالب طوری بیان شده‌اند که یک دانشجوی مبتدی بتواند یک سری محاسبات را انجام دهد. چند نتیجه شناخته شده، بدون زحمت زیاد، از آنچه در بخش اول گفته شد، به دست می‌آید.
- در بخش سوم، تجزیه طیفی ماتریس A را برای حالتی که مقادیر ویژه متمایزند به دست می‌دهیم.
- در بخش چهارم، به مواردی که ریشه‌ها تکراری هستند می‌پردازیم. این مطلب که ماتریس واندرموند^۲ تعمیم یافته، یک ماتریس تغییر پایه است که ماتریس همراه^۳ یک چندجمله‌ای مشخصه را به فرم ژوردان در می‌آورد، اگرچه صد سال پیش مطلب شناخته شده‌ای بود، حالا تا حدودی فراموش شده است. در اینجا برای آن یک برهان با استفاده از معادلات دیفرانسیل و یک برهان کاملاً جبری ارائه می‌دهیم (قضاوت در مورد اینکه کدام برهان ساده‌تر است را برعهده خواننده می‌گذاریم).
- در بخش پنجم، مثال دیگری ارائه می‌شود که حساسیت ماتریس نمایی را نسبت به تغییر داده‌ها نشان می‌دهد.
- در بخش ششم، به اظهار نظر در مورد دیگر روش‌های سنتی و همچنین روش‌های اخیر برای محاسبه ماتریس نمایی می‌پردازیم.

۲ ماتریس نمایی

ماتریس e^{At} را به عنوان جواب ماتریسی مسئله مقدار اولیه

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = I \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. هدف محاسبه e^{At} است.

اغلب از نماد $D = \frac{d}{dt}$ برای نمایش مشتق نسبت به متغیر مستقل t استفاده می‌شود. با توجه

به (۱)، برای هر عدد صحیح نامنفی k ماتریس e^{At} در رابطه

$$D^k e^{At} = A^k e^{At}$$

صدق می‌کند. همچنین، از خطی بودن مشتق نتیجه می‌شود که برای هر چندجمله‌ای مانند p داریم

$$p(D)e^{At} = p(A)e^{At}. \quad (2)$$

مشابه (۱)، عملگرهای چندجمله‌ای روی یک ماتریس، مؤلفه به مؤلفه عمل می‌کنند.

فرض کنیم c چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد؛ یعنی

$$c(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - \dots - c_n \quad (3)$$

که در آن $c_1 = \text{tr}(A)$ ، \dots ، $c_n = (-1)^n \det(A)$. بنابر قضیه کیلی-هیلتون،

$$c(A) = 0. \quad (4)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن $p(\lambda) = c(\lambda)$ در (۲)، داریم $c(D)e^{At} = 0$. پس هر درایه $u(t)$ از

ماتریس e^{At} یک جواب از معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n با ضرایب ثابت

$$c(D)u(t) = 0 \quad (5)$$

است. نظیر n تابع هموار مختلط مقدار y_1, \dots, y_n با متغیر حقیقی t ، ماتریس ورونسکی $W[y; t]$

یک ماتریس $n \times n$ به صورت

$$W[y; t] := \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

است. اگر هریک از توابع z_1, \dots, z_n به صورت یک ترکیب خطی از y_1, \dots, y_n با ضرایب ثابت باشد، آنگاه تساوی

$$[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n] = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] C \quad (7)$$

برقرار است که در آن C یک ماتریس ثابت مختلط $n \times n$ (مستقل از زمان) است. با مشتق‌گیری مکرر از (7)، داریم

$$W[z; t] = W[y; t] C. \quad (8)$$

حال فرض کنیم $y_1(t), \dots, y_n(t)$ و $z_1(t), \dots, z_n(t)$ پایه‌هایی برای فضای جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n (5) باشند. در این صورت ماتریس‌های ورونسکی معکوس‌پذیرند (بخش ۸.۱۲ از [۱] را ملاحظه کنید) و محاسبه رابطه (8) برای مقدار $t = 0$ ماتریس ثابت $C = W[y; 0]^{-1} W[z; 0]$ را مشخص می‌کند. بنابراین از (8) نتیجه می‌شود که

$$W[z; t] W[z; 0]^{-1} = W[y; t] W[y; 0]^{-1}. \quad (9)$$

ماتریس ظاهر شده در تساوی (9) را ماتریس ورونسکی

$$W[\varphi; t] = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

نظیر جواب‌های اصلی $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ می‌نامند که منظور از جواب‌های اصلی، جواب‌های خاصی از معادله (5) هستند که در شرایط اولیه

$$W[\varphi; 0] = \begin{bmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \dots & \varphi_n(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \dots & \varphi_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(0) & \varphi_2^{(n-1)}(0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

صدق می‌کنند. با توجه به (9)، جواب‌های اصلی یکتای معادله (5) را می‌توان به صورت

$$[\varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_n(t)] = [y_1(t) \ \dots \ y_n(t)] W[y; 0]^{-1} \quad (10)$$

برحسب جواب‌های اساسی دلخواه $y_1(t), \dots, y_n(t)$ به دست آورد.

هر مؤلفه e^{At} یک جواب از معادله دیفرانسیل مرتبه n ام (۵) و به صورت یک ترکیب خطی یکتا (با ضرایب ثابت) از n جواب اساسی $y_1(t), \dots, y_n(t)$ است. در نتیجه، ماتریس e^{At} را می‌توان به صورت

$$e^{At} = y_1(t)F_1 + \dots + y_n(t)F_n = [y_1(t) \ \dots \ y_n(t)] \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

برای ماتریس‌های ثابت یکتای $F_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) نوشت. عبارت

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix},$$

در سمت راست (۱۱)، یک ماتریس بلوکی $n \times n$ نیست، بلکه یک ماتریس $n \times 1$ با مؤلفه i ام F_i (برای $i = 1, 2, \dots, n$) است. با محاسبه مشتق‌های مکرر (۱۱) در $t = 0$ ، برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$ نتیجه می‌شود

$$y_1^{(i)}(0)F_1 + \dots + y_n^{(i)}(0)F_n = A^i$$

که می‌توان آن را به صورت معادله ماتریسی

$$\begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

یا برحسب ماتریس ورونسکی به شکل

$$W[y; 0] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

نوشت. بنابراین،

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = W[y; 0]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

ماتریس‌های F_i در (۱۱)، چندجمله‌ای‌هایی برحسب A از درجه $n - 1$ هستند که می‌توان آن‌ها را از (۱۴) به دست آورد. با جای‌گذاری (۱۴) در (۱۱) فرمولی برای e^{At} به صورت

$$e^{At} = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_n(t)] W[y; \circ]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

یا به شکل ساده‌تر برحسب جواب‌های اصلی (۱۰) به صورت

$$e^{At} = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \cdots \quad \varphi_n(t)] \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

به دست می‌آید.

ملاحظه ۱.۲. به این ترتیب، دو نمایش برای e^{At} داریم: $a(bc)$ از روابط (۱۱) و (۱۴) و $(ab)c$ از رابطه (۱۶) که توسط abc از رابطه (۱۵) به هم مرتبط می‌شوند. پس لازم است که ماتریس $W^{-1}[y; \circ]$ را که یک ماتریس ثابت $n \times n$ است حساب کنیم. نمایش $a(bc)$ از انتخاب n جواب اساسی دلخواه $y_j(t)$ و نمایش $(ab)c$ از n جواب اصلی یکتای $\varphi_j(t)$ تعیین شده توسط معادله دیفرانسیل

$$c(D)\varphi_j(t) = \circ \quad (17)$$

با شرط اولیه $I = W[\varphi; \circ]$ استفاده می‌کند.

ملاحظه ۲.۲. جواب‌های اصلی $\varphi_j(t)$ ، صرف‌نظر از شرایط اولیه‌شان، تنها به چندجمله‌ای مشخصه $c(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ بستگی دارند و بنابراین برای تمامی ماتریس‌های A با $c(\lambda)$ یکسان، معتبرند.

ملاحظه ۳.۲. معادله دیفرانسیل (۲) را، که با آن e^{At} را تعریف کردیم، می‌توان با سری مک‌لورن $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ جایگزین کرد. در این صورت، این مطلب که (۱۶) شامل جواب اساسی (۱۰) برای (۵) است به‌طور مستقیم از قضیه کیلی-همیلتون (روابط (۳) و (۴)) نتیجه می‌شود، که براساس

آن، A^n به صورت یک ترکیب خطی از A, I, \dots, A^{n-1} است. در این حالت، سری مکولون (همگرا) به طور مستقیم نتیجه می‌دهد که توابع مختلط مقدار $x_1(t), \dots, x_n(t)$ موجودند به قسمی که

$$\begin{aligned} e^{At} &= x_1(t)I + x_2(t)A + \dots + x_n(t)A^{n-1} \\ &= [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)] \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

توجه شود که سری مکولون و هریک از مشتق‌هایش همگرا هستند و بنابراین به ازای هر $i, j = 1, 2, \dots, n$ داریم $x_j^{(i-1)}(0) = \delta_{ij}$. به طور مشابه، سری مکولون دلالت بر آن دارد که e^{At} در معادله دیفرانسیل (۲) صدق می‌کند، که با (۴) و (۷) نتیجه می‌دهد که برای هر $j = 1, 2, \dots, n$

$$c(D)x_j(t) = 0.$$

از (۶) و قضیه یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل نتیجه می‌شود که توابع $x_j(t)$ در (۱۸) با جواب‌های اصلی قبلی $\varphi_j(t)$ یکسان هستند. به عنوان یک نتیجه جانبی، می‌بینیم که برخی مراجع (به عنوان مثال، فصل ۱۴ از [۳]) یک توان مناسب از t را از جواب‌های اصلی فاکتور می‌گیرند و (۱۸) را به شکل

$$e^{At} = \alpha_1(t)I + t\alpha_2(t)A + \dots + t^{n-1}\alpha_n(t)A^{n-1}$$

با $x_j(t) = t^{j-1}\alpha_j(t)$ بازنویسی می‌کنند. در این حالت، $\alpha_j(t)$ ها جواب‌های اساسی نیستند.

۳ یک مثال

برای ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{bmatrix} \quad (19)$$

روش بالا را با استفاده از نرم‌افزار مَتَمَتیکا توضیح می‌دهیم. در مَتَمَتیکا ماتریس A و ماتریس همانی به صورت

```
A:={0,1,0},{0,0,1},{12,-16,7};
id:=IdentityMatrix[3];
```

وارد می‌شوند. پاسخ مَتَمَتیکا به دستور

MatrixForm[A]

به شکل

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{pmatrix}$$

است. مقادیر ویژه A با دستور

Eigenvalues[A]

به صورت

{3,2,2}

حاصل می‌شود. بنابراین، چندجمله‌ای مشخصه A برابر است با

$$c(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12.$$

در این حالت، جواب‌های اساسی معادله دیفرانسیل مشخصه

$$c(D)y = (D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

آن قدر ساده‌اند که می‌توان آن‌ها را دستی به مَتَمَتیکا داد

y[t_] := {Exp[2*t], t*Exp[2*t], Exp[3*t]};

ماتریس ورونسکی از روی $y[t]$ و مشتق‌هایش طبق (۶) محاسبه می‌شود

w[t_] := {y[t], D[y[t], {t, 1}], D[y[t], {t, 2}]};

دستور

MatrixForm[w[t]];

نتیجه می‌دهد

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{2t} + 2e^{2t}t & 3e^{3t} \\ 4e^{2t} & 4e^{2t} + 4e^{2t}t & 9e^{3t} \end{pmatrix} \quad (20)$$

جواب‌های اصلی معادله دیفرانسیل $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$ طبق (۱۰) با دستور

`temp1=y[t].Inverse[W[t]/.{t->0}]`

حاصل می‌شوند. «بردار سطری» جواب‌های اصلی، به `temp1` اختصاص داده شده است

$$\{-3e^{2t} + 4e^{3t} - 6e^{2t}t, 4e^{2t} - 4e^{3t} + 5e^{2t}t, -e^{2t} + e^{3t} - e^{2t}t\}.$$

با توجه به (۱۶)، یک «بردار ستونی» با مؤلفه‌های I, A و A^2 ، ایجاد می‌کنیم.

`ee[u_ , x_] := {u,x,x.x};`

`temp2 = ee[id,A]`

خروجی ممتییکا به صورت زیر است و بنابراین `temp2` به صورت ۹ سطر ۳ تایی متشکل از

$$\{\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}, \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{12, -16, 7\}\}, \{\{0, 0, 1\}, \{12, -16, 7\}, \{84, -100, 33\}\}\},$$

نوشته می‌شود. در نهایت، ماتریس نمایی e^{At} را با استفاده از (۱۶) به دست می‌آوریم

`MatrixForm [Simplify [temp1.temp2]]`

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(-3 + 4e^t - 6t) & e^{2t}(4 - 4e^t + 5t) & e^{2t}(-1 + e^t - t) \\ 12e^{2t}(-1 + e^t - t) & e^{2t}(13 - 12e^t + 10t) & e^{2t}(-3 + 3e^t - 2t) \\ 12e^{2t}(-3 + 3e^t - 2t) & 4e^{2t}(9 - 9e^t + 5t) & e^{2t}(-8 + 9e^t - 4t) \end{pmatrix}$$

ممتییکا خود دارای دستوری برای محاسبه ماتریس نمایی است که توسط هر یک از دو دستور

`Simplify[MatrixForm[MatrixExp[A*t]]]`

`MatrixForm[Simplify[MatrixExp[A*t]]]`

فراخوانده می‌شود. این دستورها همان جواب بالا را نمایش می‌دهد.

۴ تجزیه طیفی

به‌عنوان یک نتیجه جانبی از رویکرد اخیر، یک بسط مقدماتی از تجزیه طیفی A به دست می‌آید.

این رهیافت به قدری ساده است که می‌توان آن را به دانشجویان کارشناسی درس داد. این روش را

برای حالت نیم‌ساده که A قطری‌شدنی با مقادیر ویژه متمایز است، توضیح می‌دهیم. چندجمله‌ای

مشخصه (۳) به

$$c(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad (21)$$

با $\lambda_i \neq \lambda_j$ برای $i \neq j$ تجزیه می‌شود که متغیر λ در (۳) را با متغیر x جایگزین کرده‌ایم. برای توابع $j = 1, 2, \dots, n$

$$e^{\lambda_j t} \quad (22)$$

n جواب اساسی برای (۵) فراهم می‌کنند. این توابع می‌توانند به‌عنوان $y_j(t)$ ها در (۱۱) استفاده شوند تا داشته باشیم

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} E_1 + e^{\lambda_2 t} E_2 + \dots + e^{\lambda_n t} E_n, \quad (23)$$

که در این حالت خاص، E_j نقش ماتریس ثابت F_j را ایفا می‌کند. حال (۱۲) به‌صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

درمی‌آید که در اینجا ماتریس ورونسکی یک ماتریس واندرموند است. با حل (۲۴) همانند (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$E_j = e_j(A), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

که در آن $e_j(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x از درجه $n - 1$ است. قانون کرامر نشان می‌دهد که جواب دستگاه معادلات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

به‌شکل

$$e_j(x) = \frac{(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{j-1})(x - \lambda_{j+1}) \dots (x - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_n)} \quad (27)$$

است. رابطه (۲۵) با (۲۷) یک نمایش برای وابستگی E_j به A است که با استفاده از جواب‌های اساسی (۲۲) در رابطه (۱۱) به دست می‌آید. توجه شود که از سطر اول (۲۶) تساوی زیر را داریم

$$e_1(x) + e_2(x) + \dots + e_n(x) = 1. \quad (28)$$

روابط (۲۱) و (۲۷) نشان می‌دهند که چندجمله‌ای مشخصه $c(x)$ ، حاصل ضرب $e_j(x)e_i(x)$ را برای $i \neq j$ عادی می‌کند. بنابراین از (۲۵) و قضیه کیلی-همیلتون، (۴) نتیجه می‌شود که در $\mathbb{C}^{n \times n}$ برای $i \neq j$ داریم

$$E_i E_j = 0. \quad (29)$$

مشابه (۲۸) (با قرار دادن $t = 0$ در (۲۳)) در $\mathbb{C}^{n \times n}$ داریم

$$I = E_1 + E_2 + \dots + E_n \quad (30)$$

که از آن (با ضرب دو طرف (۳۰) در E_j و استفاده از (۲۹)) برای $j = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌شود که

$$E_j^2 = E_j.$$

بنابراین، هر E_j در (۲۳) یک افکنش است. علاوه بر این، با استفاده از (۲۷)، $c(x)$ چندجمله‌ای $(x - \lambda_j)e_j(x)$ را عادی می‌کند. پس دوباره با استفاده از (۲۵) و قضیه کیلی-همیلتون داریم $(A - \lambda_j I)E_j = 0$. بنابراین، $AE_j = \lambda_j E_j$ ، یا به طور معادل، برای هر $\nu \in \mathbb{C}^{n \times 1}$

$$A(E_j \nu) = \lambda_j (E_j \nu).$$

پس برای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، (۳۰) منجر به تجزیه طیفی

$$A = AE_1 + AE_2 + \dots + AE_n = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n,$$

می‌شود که $E_j = e_j(A)$ یک افکنش به روی فضای ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ_j است.

۵ ملاحظات برای حالت ریشه‌های تکراری

در این بخش چند نکته در مورد مقادیر ویژه تکراری ذکر می‌کنیم. فرض کنیم

$$c(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_r)^{n_r},$$

چندجمله‌ای مشخصه نظیر یک ماتریس یا معادله دیفرانسیل خطی عادی باشد؛ یعنی برای هر

رویکردی دیگر به.../هریس، فیلمور، اسمیت

$\rho = 1, 2, \dots, r$ ریشه λ_ρ از چندجمله‌ای مشخصه دارای تکرار جبری n_ρ باشد. درجه چندجمله‌ای برابر با $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ است.

یک پایه از جواب‌های $c(D)u = 0$ توسط توابع $\frac{t^j}{j!} e^{\lambda_\rho t}$ برای $0 \leq j \leq n_\rho - 1$ و $\rho = 1, 2, \dots, r$ ساخته می‌شود. ماتریس ورونسکی در $t = 0$ منجر به ماتریس واندرموند تعمیم‌یافته می‌شود.

ماتریس واندرموند تعمیم‌یافته T شامل r بلوک است که هر بلوک به شکل (با حذف اندیس ρ فرض کرده‌ایم $\lambda = \lambda_\rho$ و $n = n_\rho$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \binom{n-1}{2}\lambda^{n-3} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{bmatrix}$$

با مولفه $\lambda^{\mu-\nu}$ $\binom{\mu-1}{\nu-1}$ است. روشن است که این ماتریس T ، ماتریس تغییر پایه است که ماتریس همراه (به (۳) رجوع شود)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

را به فرم ژوردان J می‌برد؛ یعنی

$$AT = TJ. \quad (32)$$

این مطلب زیبا را می‌توان (بدون اثبات) در [۸، ص ۶۰] یافت. یک اثبات کوتاه جبری در پایان این بخش آمده است، اما در اینجا با توجه به موضوع مورد بحث، برهانی با استفاده از مشتق‌گیری می‌آوریم.

فرض کنیم φ یک ماتریس اصلی $(n_1 + n_2 + \dots + n_r) \times 1$ باشد (که آن را برحسب r بلوک $1 \times n_\rho$ ، برای $\rho = 1, 2, \dots, r$ می‌نویسیم و به دلیل کمبود جا، تنها بلوک اول نمایش

داده می‌شود؛

$$\varphi = \left[e^{\lambda_1 t} \quad te^{\lambda_1 t} \quad \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} \quad \dots \quad \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{\lambda_1 t} \quad \text{بلوک دیگر} \quad (r-1) \right].$$

مشتق‌گیری مؤلفه‌به‌مؤلفه از ماتریس $\varphi(t)$ به

$$D\varphi(t) = \varphi(t) \begin{bmatrix} J_1 & \dots & \circ \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ \circ & \dots & J_r \end{bmatrix}$$

با بلوک‌های ژوردان مقدماتی

$$J_\rho = \begin{bmatrix} \lambda_\rho & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \lambda_\rho & 1 & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \lambda_\rho & \dots & \circ \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \lambda_\rho \end{bmatrix}, \quad \rho = 1, 2, \dots, r$$

منجر می‌شود؛ یعنی $D\varphi(t) = \varphi(t)J$ ، که ماتریس ثابت J در سمت راست یک فرم ژوردان

است. حال با مشتق‌گیری مکرر از $D\varphi(t) = \varphi(t)J$

$$D \begin{bmatrix} \varphi \\ D\varphi \\ D^2\varphi \\ \vdots \\ D^{n-1}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ D\varphi \\ D^2\varphi \\ \vdots \\ D^{n-1}\varphi \end{bmatrix} J$$

حاصل می‌شود که برحسب ماتریس ورونسکی به صورت $DW[\varphi; t] = W[\varphi; t]J$ است. با

مشتق‌گیری مجدد از ماتریس $W[\varphi; t]$ و بازنویسی متفاوت نتیجه به صورت ضرب یک ماتریس

ثابت مناسب از طرف چپ آن، داریم

$$D \begin{bmatrix} \varphi \\ D\varphi \\ D^2\varphi \\ \vdots \\ D^{n-2}\varphi \\ D^{n-1}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \dots & \circ \\ & & & & \ddots & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & 1 \\ * & \dots & \dots & \dots & * & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ D\varphi \\ D^2\varphi \\ \vdots \\ D^{n-2}\varphi \\ D^{n-1}\varphi \end{bmatrix}.$$

حالا می‌خواهیم $D^n \varphi(t)$ را برای مؤلفه آخر به دست آوریم. از آنجاکه هر مؤلفه φ و در نتیجه $W[\varphi; t]$ یک جواب از معادله دیفرانسیل $c(D)u = 0$ است داریم

$$(D^n - c_1 D^{n-1} - c_2 D^{n-2} - \dots - c_n)u = 0.$$

بنابراین $D^n u = (c_1 D^{n-1} + c_2 D^{n-2} + \dots + c_n)u$. از این رو می‌توانیم سطر آخر ماتریس ثابت در سمت راست را با $[c_n, c_{n-1}, \dots, c_2, c_1]$ پر کنیم. از اینجا و (۳۱) داریم

$$DW[\varphi; t] = AW[\varphi; t]. \quad (33)$$

بنابراین از $DW[\varphi; t] = W[\varphi; t]J$ و (۳۳)، ماتریس همراه A نظیر $c(x)$ با فرم ژوردان J توسط $AW[\varphi; t] = W[\varphi; t]J$ مرتبط است. اما توجه شود که ماتریس A و اندرموند تعمیم‌یافته T همان $W[\varphi; 0]$ است. بنابراین با قراردادن $t = 0$ در معادله قبلی، نتیجه (۳۲) به صورت $AT = TJ$ به دست می‌آید که نشان می‌دهد T ماتریس تغییر پایه است که ماتریس همراه را به فرم ژوردان J در می‌آورد.

برای ماتریس همراه (۱۹) و ماتریس ورونسکی (۲۰) که قبلاً بحث شد، می‌توان بررسی کرد و

دید که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} & 3e^{3t} \\ 4e^{2t} & (4+4t)e^{2t} & 9e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} & 3e^{3t} \\ 4e^{2t} & (4+4t)e^{2t} & 9e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

که با $AW[\varphi; t] = W[\varphi; t]J$ سازگار است.

این ویژگی تغییر پایه ماتریس A و اندرموند را می‌توان به صورت جبری با روش زیر اثبات کرد.

مانند قبل، فرض می‌کنیم A ماتریس همراه $c(x)$ در (۳۱) باشد. به طور مکرر از تساوی

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \end{bmatrix} - c(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $x = \lambda_\rho$. x (مشتق‌های مرتبه بالاتر $c(x)$ در λ_ρ صفر می‌شوند، زیرا ریشه‌ها تکراری‌اند). بنابراین بلوک $n \times n_\rho$ ماتریس A و اندرموند تعمیم‌یافته ایجاد می‌شود. این اثبات جبری به‌مثابه مشتق گرفتن از جواب‌های معادلات دیفرانسیل نسبت به λ_ρ است. چنین روشی را می‌توان برای حالت ریشه‌های تکراری نیز بیان کرد.

۶ مثالی دیگر

از اوایل دهه ۱۹۶۰ با کار پیشگامانه ویلکینسن (رجوع شود به [۹]) معلوم شد که مسائل مختلف مربوط به ریشه‌ها یا مقادیر ویژه تکراری (چندگانه) در حالت کلی بدقواره‌اند. در چنین مواردی ماتریس نمایی می‌تواند تا حد زیادی به تغییرات بسیار کوچک در داده‌ها حساس باشد. برای نشان دادن چنین پدیده‌ای، به‌طور خلاصه صورت کمی تغییر یافته از محاسبه ماتریکا در بخش ۳، برای ماتریس 3×3 ارائه شده در (۱۹) را بررسی می‌کنیم. اکنون درایه (۱، ۳) را با تغییر اندک $1/0000$ ، از ۱۲ به ۱۱۹۹۹ کاهش می‌دهیم. بنابراین، ماتریس (۱۹) با ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 11999 & -16 & 7 \end{bmatrix} \quad (34)$$

جایگزین می‌شود و مقادیر ویژه قبلی $\{2, 2, 3\}$ نیز با مقادیر ویژه (تقریبی)

$$\{29999, 2/03214, 196886\}$$

جایگزین می‌شوند که مقادیر ویژه متمایزند. محاسبات ماتریکا در بخش ۳ براساس الگوریتم بخش ۲ به راحتی برای e^{Bt} به‌طور تقریبی نتایج زیر را برای e^{Bt} به دست می‌دهد که برای اجتناب از درهم‌ریختگی با مؤلفه‌های فهرست شده توسط ستون‌های جداگانه ارائه می‌شود

$$\begin{aligned} \text{Column 1}(e^{Bt}) &\approx \begin{bmatrix} 934829e^{196886t} - 965e^{2/03214t} + 4/01709e^{29999t} \\ 184055e^{196886t} - 196102e^{2/03214t} + 12/0472e^{29999t} \\ 362378e^{196886t} - 398507e^{2/03214t} + 361297e^{29999t} \end{bmatrix}, \\ \text{Column 2}(e^{Bt}) &\approx \begin{bmatrix} -771735e^{196886t} + 811906e^{2/03214t} - 4/01709e^{29999t} \\ -151844e^{196886t} + 164991e^{2/03214t} - 12/0472e^{29999t} \\ -299156e^{196886t} + 335285e^{2/03214t} - 361297e^{29999t} \end{bmatrix}, \\ \text{Column 3}(e^{Bt}) &\approx \begin{bmatrix} 153392e^{196886t} - 163432e^{2/03214t} + 1/00402e^{29999t} \\ 3/02006e^{196886t} - 332117e^{2/03214t} + 3/01106e^{29999t} \\ 594608e^{196886t} - 67491e^{2/03214t} + 9/03015e^{29999t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

در این حالت ماتریس e^{Bt} را می‌توان با روش استاندارد براساس قطری کردن ماتریس نیز محاسبه کرد و نتیجه با جواب به دست آمده در (۳۵) مطابقت دارد. با توجه به (۳۵) مشاهده می‌شود که یک تغییر کوچک در داده‌ها از (۱۹) به (۳۴) منجر به تغییرات بزرگی برای نمای ماتریس در مقایسه با نتایج بخش ۳ می‌شود. مثال (۳۴) - (۳۵) نقطه خوبی است که با بحث غنی جبرخطی عددی ارتباط پیدا می‌کنیم. هدف مقاله حاضر یک درک مفهومی از الگوریتم شرح داده شده در بخش ۲

است. قصد نداریم یک «الگوریتم نهایی» برای محاسبه ماتریس نمایی ارائه دهیم و بهتر است این کار به متخصصان آنالیز عددی واگذار شود چراکه آن‌ها به ظرافت‌های جبرخطی عددی به خوبی وارد هستند. اغلب در این مباحث می‌توان مثال‌هایی ساخت که نشان دهند یک الگوریتم در محاسبات با دقت محدود به دلیل حساسیت شدید به تغییرات داده‌ها، مناسب نیست.

۷ ملاحظات پایانی

در مقاله کلاسیک [۷] نوزده روش برای محاسبه نمای یک ماتریس ارائه شده است. همچنین الگوریتم پوتسِر (به بخش ۹.۱۲ از [۱] رجوع شود) می‌تواند برای محاسبه نمای یک ماتریس فقط با استفاده از مقادیر ویژه A ، اما بدون ظرافت و سادگی روش مطرح‌شده در اینجا، استفاده شود. این سادگی را دانشجویان مبتدی معادلات دیفرانسیل می‌توانند درک کنند. افراد دیگری ([۴، ۶، ۵، ۱۰]) به روش گفته‌شده در این مقاله اشاره کرده‌اند، اما شرح آن‌ها سادگی بیان هریس را ندارند.

مراجع

- [1] Apostol, T. M., *Linear Algebra—A First Course, with Applications to Differential Equations*, Wiley, New York, 1997.
- [2] Broida, J. G., Williamson, S. G., *Comprehensive Introduction to Linear Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [3] Bronson, R., *2500 Solved Problems in Differential Equations*, 2nd. ed., Schaum's Solved Problems Series, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [4] Elaydi, S. N., Harris, Jr., W. A., On the computation of A^n , *SIAM Rev.*, **40** (1998), 965-971.
- [5] Fulmer, E. P., Computation of the matrix exponential, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), 156-159.
- [6] Leonard, I. E., The matrix exponential, *SIAM Rev.*, **38** (1996), 507-512.
- [7] Moler, C., Van Loan, C., Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Rev.*, **20** (1978), 801-836.
- [8] Turnbull, H. W., Aitken, A. C., *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Dover, New York, 1961.
- [9] Wilkinson, J. H., Reinsch, C., *Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [10] Ziebur, A. D., On determining the structure of A by analyzing e^{At} , *SIAM Rev.*, **12** (1970), 98-102.

فاطمه جاویدپناه: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رایانامه: javidpanahfateme@gmail.com

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir

امیرحسین نخودکار: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رایانامه: a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

Maix Exponential—Another Approach*

W. A. Harris, Jr., J. P. Fillmore, D. R. Smith

Translated by F. Javidnia¹, R. Kazemi²✉, A. H. Nokhodkar³

^{1,2,3}Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Iran

Abstract. The exponential of a matrix and the spectral decomposition of a matrix can be computed knowing nothing more than the eigenvalues of the matrix and the Cayley-Hamilton theorem. The arrangement of the ideas in this paper is simple enough to be taught to beginning students of ODEs.

Keywords: matrix exponential, Vandermonde matrix, spectral decomposition

Article history: Received 20 January 2024; Accepted 22 January 2024

Article type: translation

* Harris, Jr., W. A., Fillmore, J. P., Smith, D. R., Matrix exponentials—Another approach, *SIAM Rev.*, **43** (2001), 4, 694-706

1. javidpanahfateme@gmail.com

2. r.kazemi@kashanu.ac.ir

3. a.nokhodkar@kashanu.ac.ir