فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۵، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۵)، صص ۱۶۹ تا ۱۹۱

تحقیقی دربارهٔ آموزش و یادگیری احتمال (بخش دوم)*

سی. باتانرو، ای. جِی. چرنوف، جی. اِنگل، اچ. اس. لی، ای. سانچس
ترجمهٔ مهدی شمس

چکیده. این مقاله بخش دوم ترجمهٔ کتابچه‌ای است که در آن خلاصهٔ برخی از مهم‌ترین و جدیدترین پژوهش‌ها در آموزش احتمال عرضه شده است. مطالبی که به آن‌ها اشاره می‌شود عبارت‌اند از احتمال در برنامه‌های درسی، دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری در احتمال، فنّاوری و منابع آموزشی در آموزش و یادگیری احتمال، آموزش معلمان برای تدریس احتمال. ــ و.

۳.۲ احتمال در برنامه‌های درسی

نیاز به فهم پدیده‌های تصادفی و تصمیم‌گیری مناسب هنگام مواجهه با عدم قطعیت را بسیاری از مراجع آموزشی تأیید کرده‌اند. بنابراین آموزش احتمال در برنامهٔ درسی بسیاری از کشورها در آموزش ابتدایی یا متوسطه گنجانده شده است. یکی از حوزه‌های مهم پژوهشی در آموزش احتمال تحلیل شیوه‌نامه‌های برنامه‌های درسی و محتویات آموزشی مانند کتاب‌های درسی است. در ادامه به توضیح این موارد خواهیم پرداخت.

۱.۳.۲ آموزش احتمال در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی

در آغاز این قرن، شورای ملی معلمان ریاضیات [۷۴] در ایالات متحدهٔ آمریکا پیشنهادهای زیر را

عبارات و کلمات کلیدی: احتمال، برنامه‌های آموزشی، منابع آموزشی، آموزش معلمان، فنّاوری
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۲۹

*Batanero, C., Chernoff, Egan J., Engel, J., Lee, Hollylynne S., Sánchez, E., *Research on Teaching and Learning Probability*, Springer Open, New York, 2016, 13-33.

بخش اول قبلاً در همین مجله ([۱]) منتشر شده است.

© ۱۴۰۵(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2023.1393.1981

در پایه‌های تحصیلی ۳ تا ۵ گنجاندند که به فهم و به‌کارگیری مفهوم‌های پایه‌ای احتمال برای کودکان مرتبط هستند:

- پیشامدها را به‌صورت محتمل یا نامحتمل توصیف کنید و درجهٔ احتمال را با استفاده از واژه‌هایی همچون قطعی، با احتمال برابر، و ناممکن مورد بحث و بررسی قرار دهید؛
- احتمال برآمدهای آزمایش‌های ساده را پیش‌بینی کنید و پیش‌بینی‌ها را آزمون کنید؛
- نتیجه بگیرید که اندازهٔ احتمال یک پیشامد را می‌توان با عددی بین ۰ تا ۱ نشان داد.

پیشنهادهای آن‌ها در شیوه‌نامه‌های آموزشی دیگر برای دورهٔ تحصیلیِ ابتدایی چاپ شده است. برای مثال در اسپانیا اصطلاح احتمال و تفاوت بین «قطعی[1]»، «ناممکن[2]» و «ممکن[3]» در پایه‌های تحصیلی ۱ تا ۲ معرفی می‌شوند [۶۷]؛ در پایه‌های تحصیلی ۳ تا ۴ پیشنهاد این بود که بچه‌ها تشویق شوند آزمایش‌های ساده را انجام دهند و نتایج خود را ارزیابی کنند؛ در پایه‌های تحصیلی ۵ تا ۶، از فراگیران انتظار می‌رود که احتمال پیشامدهای مختلف را مقایسه کنند و احتمال موقعیت‌های ساده را تخمین بزنند.

امروزه مفهوم احتمال در برنامهٔ درسی برخی دوره‌های تحصیلی مقاطع اول یا دوم ابتدایی آمده است (برای مثال، [۴، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳])، درحالی که در شیوه‌نامه‌های آموزشی دیگر، آموزش احتمال تا مقطع تحصیلی ۶ یا مقطع دبیرستان به تعویق می‌افتد (برای مثال، [۲۳، ۸۹]).

به‌عنوان نمونه در مکزیک، با این استدلال که معلمان مقاطع ابتدایی در فهم احتمال، مشکلات بسیاری دارند و ازاین‌رو برای آموزش آن به‌خوبی آماده نیستند، موضوع احتمال به مقطع دبیرستان موکول می‌شود.

پیشنهادهای برخی محققان آموزش آمار مبنی‌بر آموزش استنباط آماری به روش غیررسمی، یکی از دلایل موکول کردن آموزش احتمال به مقاطع بعدی است. بااین‌حال، این تغییر ارتباط آموزش استدلال احتمالاتی در خردسالان را که فیشباین [۲۹] تأکید کرده بود در نظر نمی‌گیرد، یا همان‌طور که در [۳۵] برای مقاطع قبل از دوازدهم بیان شده، ارتباط‌های متعدد بین احتمال و دیگر حوزه‌های ریاضیات را در نظر نمی‌گیرد: «احتمال بخش مهمی از آموزش ریاضیات است که از طریق تعامل خود با دیگر کاربردهای ریاضیات، باعث گسترش موضوع احتمال به‌صورت کلی می‌شود» [۳۵].

۲.۳.۲ آموزش احتمال در مقاطع راهنمایی و دبیرستان

سنت دیرینهٔ آموزش احتمال در دوران تحصیلی راهنمایی و دبیرستان وجود داشته است که موضوعات

1. certain 2. impossible 3. possible

تدریس‌شده در آن‌ها شامل آزمایش‌های مرکب و احتمال شرطی است. برای مثال شورای ملی معلمان ریاضیات [۷۴] مقرر کرد که دانش‌آموزان در مقاطع ۶ تا ۸ باید

- اصطلاح‌های مربوط را درک کرده و از آن‌ها برای توصیف متمم پیشامدها و پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار استفاده کنند؛
- برای انجام و آزمون برآوردها دربارهٔ نتایج آزمایش‌ها و شبیه‌سازی‌ها از تناسب و مفهوم پایه‌ای احتمال استفاده کنند؛
- احتمال حالت‌های سادهٔ پیشامدهای مرکب را با استفاده از روش‌هایی مانند جدول، نمودارهای درختی، و نمودارهای دایره‌ای محاسبه کنند.

دانش‌آموزان در مقاطع ۹ تا ۱۲ باید

- مفاهیم فضای نمونه و توزیع احتمال را بفهمند و فضاهای نمونه و توزیع‌ها را در موارد ساده پیدا کنند؛
- از شبیه‌سازی‌ها برای ایجاد توزیع‌های احتمال تجربی استفاده کنند؛
- مقدار مورد انتظار متغیرهای تصادفی در موارد ساده را محاسبه و تفسیر کنند؛
- مفاهیم احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل را فرا گیرند؛
- نحوهٔ محاسبهٔ احتمال یک پیشامد مرکب را فرا گیرند.

محتوای مشابهی در دیگر شیوه‌نامه‌های آموزشی دیگر مانند [۴، ۵۷، ۵۸، ۶۸، ۶۹، ۷۱، ۸۹] گنجانده و حتی تقویت شده است. برای مثال در مقطع تحصیلی متوسطهٔ دوم در کشورهای اسپانیا و استرالیای جنوبی، برای دانش‌آموزان علوم اجتماعی مباحثی نظیر توزیع‌های دوجمله‌ای و نرمال و مقدمه‌ای بر استنباط آماری (توزیع‌های نمونه‌گیری، آزمون فرض‌ها، و بازه‌های اطمینان) اضافه شده است [۶۹، ۷۱، ۸۸]. در مکزیک، رشته‌های دبیرستانی مختلفی وجود دارد که در بیشتر آن‌ها دورهٔ اجباری احتمال و آمار گنجانده شده است. در فرانسه، محتوای عمدهٔ آماری در سال آخر دبیرستان (پایان دبیرستان، یعنی ۱۷ سالگی)، شامل مفاهیم استنباط آماری، نظیر بازه‌های اطمینان، مقدمه‌ای شهودی بر آزمون فرض‌های آماری است [۸۷]. همچنین در [۲۳] توصیه شده است در سال آخر دبیرستان ، دانش‌آموزان آمریکایی از داده‌های نمونه و مدل‌های شبیه‌سازی برای برآورد میانگین یا نسبت جامعه استفاده کنند و حاشیهٔ خطا را ایجاد و از داده‌های آزمایش‌های تصادفی برای مقایسهٔ دو تیمار استفاده کنند و تصمیم بگیرند که آیا تفاوت‌های بین پارامترها معنی‌دار هستند یا خیر.

۳.۳.۲ مفاهیم اصلی احتمالاتی

نکتهٔ کلیدی در آموزش احتمال تأمل دربارهٔ محتوای اصلی است که باید در مقاطع آموزشی مختلف گنجانده شود. هیتلی [۴۴] فهرستی از مفهوم‌های اصلی احتمالاتی را پیشنهاد داده است که نقش مهمی در تاریخچهٔ احتمال بازی می‌کنند و مبانی نظریهٔ مدرن آمار هستند. درعین‌حال، افراد اغلب در غیاب آموزشْ درک نادرستی درخصوص معنی یا کاربرد آن‌ها دارند. این فهرست مفاهیم آزمایش‌های تصادفی و فضای نمونه، قانون جمع و ضرب، استقلال و احتمال شرطی، متغیرها و توزیع تصادفی، ترکیب‌ها و جایگشت‌ها، همگرایی، نمونه‌گیری، و شبیه‌سازی را در بر می‌گیرد. در زیر برخی از این مفاهیم را به‌طور مختصر توضیح می‌دهیم [۹، ۱۰].

- تصادفی‌بودن. اگرچه تصادفی‌بودن مفهومی پایه‌ای در احتمال (تغییرات تصادفی، فرایند، یا آزمایش تصادفی) است، امّا مفهوم «فازی[1]» درکتاب‌های درسی تعریف نمی‌شود. تحقیقات انجام‌شده وجود هم‌زمان تفاسیر مختلف و همچنین تصور نادرست دانش‌آموزان و نیاز به تقویت درک موضوع تصادفی‌بودن را در دانش‌آموزان نشان می‌دهد [۷].
- پیشامدها و فضای نمونه. برخی فراگیران تنها بر یک پیشامد تک‌وضعیتی تمرکز می‌کنند، زیرا طرز تفکر آن‌ها جبرگرایانه است [۶۰]. لذا لازم است که درک کنند برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد در نظر گرفتن تمام برآمدهای ممکن مختلف در آن آزمایش نیاز است.
- شمردن و شمارش ترکیبیاتی. ریاضیات ترکیبیاتی در مشخص‌کردن تمام پیشامدها در فضای نمونه یا در شمارش (بدون فهرست‌بندی) تمام مؤلفه‌های آن استفاده می‌شود. اگرچه در رویکرد فراوانی‌گرا برای برآورد مقدار احتمال به ریاضیات ترکیبیاتی نیاز نداریم، با وجود این، به استدلال ترکیبیاتی در موقعیت‌های دیگر نظیر درک نحوهٔ شکل‌گیری پیشامدها در آزمایش مرکب یا درک چگونگی انتخاب نمونه‌های مختلف با اندازهٔ یکسان از یک جمعیت نیاز است. استدلال ترکیبیاتی موضوعی سخت است، بااین‌حال، می‌توان از ابزارهایی مانند نمودارهای درختی استفاده کرد تا به دانش‌آموزان کمک شود این نوعِ خاص از استدلال را تقویت کنند.
- استقلال و احتمال شرطی. مفهوم استقلال برای درک شبیه‌سازی‌ها و برآوردهای تجربی احتمال با استفاده از فراوانی مهم است، زیرا هنگام تکرار آزمایش‌ها، به استقلال آزمایش‌ها نیاز داریم. محاسبهٔ احتمال‌ها در آزمایش‌های مرکب به شخصی احتیاج دارد که تحلیل کند

1. Fuzzy

که آیا آزمایش‌ها مستقل هستند یا خیر. در نهایت برای فهم بسیاری از مفهوم‌ها در احتمال و آمار مانند بازه‌های اطمینان و آزمون فرض‌ها، ایدهٔ احتمال شرطی لازم است.

- توزیع احتمال و مقدار مورد انتظار. اگرچه تحقیقات فراوانی مرتبط با توزیع‌ها انجام شده است، امّا اکثر آن‌ها بر توزیع داده‌ها یا توزیع نمونه‌گیری متمرکز هستند. نوع دیگری از توزیع که یک ایدهٔ قدرتمند در احتمال است به متغیر تصادفی و همچنین مقدار مورد انتظار مرتبط است. برخی از مدل‌های توزیع که کاربرد گسترده‌ای دارند عبارت‌اند از توزیع‌های دوجمله‌ای، یکنواخت و نرمال.
- همگرایی و قوانین اعداد بزرگ. قرن‌ها است که ثبات تدریجی فراوانی نسبی یک برآمد معین در تعداد آزمایش زیاد مشاهده شده است؛ برنولی اولین صورت از قانون اعداد بزرگ را ثابت کرد که تعریف فراوانی‌گرای احتمال را توجیه می‌کند [۱۲]. امروزه رویکرد فراوانی‌گرا که در آن احتمال برآوردی از فراوانی نسبی یک نتیجه در دنباله‌های طولانی از آزمایش‌هاست، در آموزش احتمال رایج شده است. لازم است دانش‌آموزان بدانند که برآمدها غیرقابل‌پیش‌بینی هستند و آن نظم و ترتیب تنها در طولانی‌مدت حاصل می‌شود. درعین‌حال، دانش‌آموزانِ بزرگ‌تر باید قادر باشند که بین برآورد فراوانی (مقداری که متغیر است) و احتمال (که همیشه یک مقدار نظری است) تمایز قائل شوند [۱۵].
- نمونه‌گیری و توزیع نمونه‌گیری. با توجه به اینکه به‌ندرت قادر به مطالعهٔ کل جمعیت هستیم، دانشِ ما از یک جمعیت براساس نمونه‌هاست. لازم است که دانش‌آموزان ایدهٔ نماینده‌بودن نمونه و تغییرپذیری نمونه‌گیری را فرا گیرند. توزیع‌های نمونه‌گیری، تغییر یک معیار خلاصه (مانند میانگین‌های نمونه) را به‌همراه نمونه‌های مختلف از جمعیتی یکسان توصیف می‌کنند. امروزه آموزش، به‌جای استفاده از توزیع نمونه‌گیری دقیق (برای مثال منحنی نرمال)، استفاده از شبیه‌سازی یا بازنمونه‌گیری را برای یافتن یک توزیع نمونه‌گیری تجربی ترجیح می‌دهد. این مورد، یک راهبرد آموزشی مناسب است، امّا معلمان باید آگاه باشند که مانند هر برآوردی، توزیع نمونه‌گیری تجربی فقط توزیع نمونه‌گیری نظری را تقریب می‌زند.
- مدل‌سازی و شبیه‌سازی. امروزه شاهد افزایش توصیه‌هایی برای رویکرد آموزش احتمال از دیدگاه مدل‌سازی هستیم [۱۵، ۲۶، ۸۶]. شبیه‌سازی امکان بررسی مفاهیم احتمال و ویژگی‌های آن را فراهم می‌کند و در رویکردهای غیررسمی برای استنباط استفاده می‌شود. شبیه‌سازی به‌عنوان یک گام میانی بین واقعیت و مدل ریاضی عمل می‌کند و به‌عنوان

یک ابزار آموزشی می‌تواند برای تقویت فهم احتمالاتی دانش‌آموزان و کسب تجربه در کار مدل‌سازی استفاده شود و به آن‌ها در تمایز بین مدل و واقعیت کمک کند.

۴.۲ دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری احتمال

در آموزش احتمال موضوع مهم این است که قبل از آموزش برداشت و تصورات شخصی کودکان و بزرگسالان دربارهٔ احتمال و شانس را در نظر بگیریم. این تصورات در گسترهٔ وسیعی از تحقیقاتی که موضوع آن‌ها دریافت‌های شهودی احتمال، برداشت‌های شخصی در مورد احتمال، و مشکلات یادگیری ناشی از آن بوده است بیان شده‌اند. در طی تحقیقات ۶۰ سال گذشته که دربارهٔ تفکر احتمالاتی بوده‌اند موضوعات مرتبط با یادگیری و آموزش احتمال مانند دریافت شهودی، برداشت‌های شخصی راجع به احتمال، شناخت، تصورات نادرست، روش‌های اکتشافی، دانش، یادگیری، استدلال، آموزش، تفکر و فهم رشد پیدا کرده است [۲۰].

اکنون دوباره به ملزومات تفکر احتمالاتی و مشکلات یادگیری احتمال برمی‌گردیم. برای اینکه چارچوب بحث تاریخی ما معلوم باشد، تقسیم‌بندی گفته‌شده در [۴۷] «مرور تاریخی بر تحقیقات یادگیری و آموزش احتمال» را که اخیراً در [۲۱] بسط داده شده است در نظر می‌گیریم.

۱.۴.۲ دوره‌های پیاژه‌ای و پساپیاژه‌ای

تحقیقات اولیه دربارهٔ شناخت احتمال در طول دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ را پیاژه[1] و اینهلدر[2] [۷۹] و روان‌شناسانی با گرایش‌های نظری مختلف انجام داده‌اند [۴۷]. تحقیقات غالب در این دوره[3]، کارهای پیاژه و اینهلدر [۷۹] بودند که به‌طور گسترده‌ای «رشد تکاملی و ساختار تفکر احتمالاتی افراد» را بررسی می‌کردند. معلوم شده است که بچه‌ها در مراحل خاصی تمایل به درک ذهنی دارند [۷۹]. به عبارت دیگر، تحقیقات راجع به دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری متمرکز بر تحقیقات اولیهٔ دربارهٔ تفکر احتمالاتی بودند و تا دورهٔ (تاریخی) بعدیِ تحقیقات ادامه یافتند. دورهٔ بعدی تحقیقات، یعنی دورهٔ «پساپیاژه‌ای»، از یک‌سو تحت سلطهٔ فیشباین [۲۹] و از سوی دیگر تحت نفوذ دنیل کانمن و آموس تورسکی [۴۷] بود. اثر [۲۹] ادامهٔ کار [۷۹] (یعنی ادامهٔ تمرکز بر دریافت‌های شهودی احتمالاتی) بود، امّا این پژوهش تفاوت بین آنچه را که او دریافت‌های شهود اولیه و ثانویه نامیده بود مشخص می‌کرد. به‌طور دقیق‌تر، نظریهٔ فیشباین [۲۹] دربارهٔ «دریافت‌های

۳. تاحدی که در [۴۷]، از این دورهٔ تحقیقاتی به عنوان «دورهٔ پیاژه‌ای» یاد می‌شود.

1. Piaget 2. Inhelder

شهودی اولیه»[۱] (که ربطی به آموزش رسمی ندارد) ادامهٔ کار پیاژه و اینهلدر [۷۹] بود، امّا او در این دوره با بررسی «دریافت‌های شهودی ثانویه»[۲] (که مرتبط به آموزش رسمی است) و علاوه‌بر آن، با بررسی اینکه دریافت‌های شهودی اولیه لزوماً نه‌تنها غالب نمی‌شوند بلکه جای خود را به دریافت‌های شهودی ثانویه می‌دهند کار خود را از آن‌ها متمایز کرد.

۲.۴.۲ برنامهٔ روش‌های اکتشافی و سوگیری‌ها

همان‌طور که ذکر شد، در این دوره تحقیقات روان‌شناسی دیگری در زمینهٔ دریافت شهودی انجام می‌گرفت که از اصطلاحات دیگری استفاده می‌کردند[۳] [۶]. برنامهٔ روش‌های اکتشافی‌ها و سوگیری‌های[۴] کانمن و تورسکی (برای مثال، [۵۱])، که بسیار معروف شد (برای مثال، [۵۰]) و ۲۰ سال بعد در آن ها تجدیدنظر شد [۳۷])، اساساً تحقیق عمیقی درخصوص انواع دریافت‌های شهودی (و مشکلات یادگیری) بود.

برنامهٔ تحقیقیاتی کانمن و تورسکی [۵۰، ۵۱، ۵۲]، راهبردهایی را بررسی کرد که افراد برای محاسبهٔ احتمالات (روش‌های اکتشافی) و خطاهای نظام‌مند حاصل (سوگیری‌ها) استفاده می‌کردند. تحقیقات آن‌ها روش‌های اکتشافی متعدد (برای مثال، نماینده‌بودن[۵]، دسترس‌پذیری[۶]، سازگاری[۷] و پشتوانه‌سازی[۸]) و سوگیری‌های ناشی از آن را آشکار کرد. سال‌ها بعد از تعمیم مفهوم روش‌های اکتشافی [۵۲]، کانمن [۵۰] به ماهیت فرایندهای اکتشافی ذاتی توجه کرد: «هنگام مواجهه با یک سؤال دشوار معمولاً بدون توجه به اینکه جایگزینی انجام شده است، اغلب به‌جای آن، سؤال آسان‌تر را جواب می‌دهیم» [۵۲]. این برنامهٔ تحقیقاتی نقش مهمی در شکل‌گیری بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی دیگر (برای مثال اقتصاد رفتاری) داشت.

در زمینهٔ آموزش ریاضیاتْ شونِسی [۹۰، ۹۱] نه‌تنها ایده‌های نظریهٔ کانمن و تورسکی [۵۰، ۵۱، ۵۲]، بلکه درواقع تحقیق دربارهٔ دریافت‌های شهودی احتمالاتی و مشکلات یادگیری را مطرح کرد. اگرچه بعضی آثار صراحتاً عنوان دریافت‌های شهودی و مشکلات آن‌ها را نداشتند، شمار متعددی از محققانْ تحقیقاتی در این حوزهٔ کلی تحقیقی انجام داده‌اند.

ازجمله فالک در [۲۷] مشکلات مربوط به یادگیری احتمال و کونولد در [۵۰، ۵۴] مفاهیم

---

۳. ساختارهای نظری اتخاذشده توسط دنیل کانمن و آموس تورسکی با ساختارهای نظری فیشباین و همکارانش (برای مثال [۳۲]) و پیاژه و اینهلدر فرق داشت.

1. primary intuitions 2. secondary intuitions 4. heuristics and biases 5. representativeness 6. availability 7. adjustment 8. anchoring

غیررسمی احتمال (به‌خصوص «رویکرد برآمدی»)[1] را بررسی کردند. همان‌طور که دورهٔ پساپیاژه‌ای به پایان نزدیک می‌شد، حوزهٔ آموزش ریاضیات شاهد حجم روزافزون تحقیقات دربارهٔ دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری (برای مثال [۳۰، ۳۹، ۴۰، ۴۱]) بود که به‌خوبی در فصل مفصلِ «تحقیقات دربارهٔ احتمال و آموزش آمار» در [۹۲] خلاصه شده است. با گذر از یک دوره به دورهٔ بعدی، تحقیقات دربارهٔ دریافت‌های شهودی احتمالاتی و مشکلات یادگیری جای خود را باز می‌کند که آن را جونز [۴۷]، «دورهٔ سوم: تحقیقات معاصر» نامیده است.

۳.۴.۲ تحقیقات معاصر

در طول این مرحلهٔ جدید، توجه‌ها به بررسی برنامهٔ درسی و امر آموزش جلب شد، و تحقیقات دربارهٔ دریافت‌های شهودی احتمال و مشکلات یادگیری را گروهی خاص از محققان پیش می‌بردند. شایان ذکر است که محققان آموزش ریاضی در این مرحله مانند مواردی نظیر [۵۳، ۵۴] و [۲۷] در مرحلهٔ قبلی، برای پاسخ به امور مختلفی که با احتمالات مرتبط بود شروع به ابداع نظریه‌ها، چارچوب‌ها، و مدل‌های خود کردند.

این نظریه‌ها، چارچوب‌ها، و مدل‌ها در حین تحقیقاتی ابداع شد که موضوعات مختلفی در احتمال را مورد مطالعه قرار می‌دادند ازجمله مشکلات مربوط به تصادفی‌بودن [۸، ۱۱، ۲۸، ۸۰]، فضای نمونه [۴۸، ۴۹، ۷۸]، و استدلال احتمالاتی [۳۱، ۳۳، ۵۶، ۶۵]. شایان ذکر است که عبارت «تصور نادرست»[2] که سال‌ها اصطلاحی رایج بود، اخیراً به شکل «تصورات قبلی»[3] و یا گونه‌های دیگری در آمده است که شاید با سایر نظریه‌ها در زمینهٔ آموزش ریاضیات هم‌سوتر باشد. همچون جریان‌های بالا، این تحقیقاتی که نظریه‌ها، مدل‌ها، و چارچوب‌های مرتبط با دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری می‌پروراندند، وارد مرحلهٔ بعدی تحقیقات شد که چرنوف و سریرامن [۲۰] (عجولانه) آن را «دورهٔ ادغام»[4] نامیده‌اند.

در واقع رشتهٔ آموزش ریاضی، پس از ۵۰ سال تحقیقات در مورد دریافت‌های شهودی احتمال و مشکلات مربوط به یادگیری احتمال، جای خود را باز کرد، موضوعی که نوع تحقیقات انجام شده و نحوهٔ ارائهٔ نتایج گواه آن است. روزگاری که محققان آموزش ریاضی تلاش می‌کردند تا تحقیقات انجام‌شده در زمینه‌های مختلف مانند روان‌شناسی را تقلید کنند گذشته است [۹۰، ۹۲]. با این حال، محققان می‌کوشند نظریه‌ها، مدل‌ها، و چارچوب‌ها را از حوزه‌های دیگر وارد تحقیقات خود کنند؛ گرچه محققان رشتهٔ آموزش ریاضی سعی دارند از نتایجی که ناشی از ماهیت ذاتی و مشکلات

1. outcome approach 2. misconception 3. preconceptions 4. assimilation period

مربوط به تفکر احتمال و یادگیری و آموزش احتمال است تفسیرهای خود را داشته باشند. نظریه‌ها، مدل‌ها، و چارچوب‌هایی مانند «تشبیه غیرعمدی»[1] [۲، ۳]، «افرازهای فضای نمونه»[2] [۱۶، ۱۷، ۱۸] و غیره نشان می‌دهند که تحقیقات دربارهٔ دریافت‌های شهودی و مشکلات در زمینهٔ آموزش ریاضی ادامه دارد.

به‌هرحال این بدین معنی نیست که این حوزه به تحقیقات حوزه‌های دیگر توجهی ندارد. برای مثال تحقیقات اخیر [۱۷، ۱۸] به ریشه‌های قدیمی خود بازگشته‌اند و سعی دارند پیشرفت‌های اخیر در روش‌های اکتشافی و سوگیری‌ها را وارد تحقیقات در خصوص «گسترش متوقف‌شدهٔ الگوهای روش‌های اکتشافی در زمینهٔ آموزش ریاضیات» کنند [۱۷]. تحقیقات مشابه که شامل تحقیقاتی از زمینه‌های دیگر هستند، دری به روی دیدگاه‌های جایگزین روش‌های اکتشافی، دریافت‌های شهودی، و مشکلات یادگیری گشوده است، مانند گروه رفتار و شناخت تطبیقی در «مؤسسهٔ ماکس‌پلانک برای پیشرفت بشر واقع در برلین» [۳۶].

براساس این پیشرفت‌ها، رشتهٔ آموزش ریاضی نیز در حال شروع توسعهٔ تحقیقاتی ویژه است که جنبه‌های خاصی از دریافت‌های شهودی احتمال و مشکلات یادگیری را ایجاد می‌کند و آن‌ها را به چالش می‌کشد. برای مثال چرنوف در رشته‌ای از مطالعات اخیر خود مانند [۱۷، ۱۸، ۲۲] ادعا می‌کند شاید دلیل پاسخ‌های نادرست به انواعی از مسائل احتمالاتی نه روش‌های اکتشافی یا استدلال‌های شخصی، بلکه بیشتر استفادهٔ افراد از سفسطهٔ منطقی باشد.

با در نظر گرفتن نحوهٔ استدلال دانش‌آموزان دربارهٔ احتمال، همان‌طور که در بخش بعد خواهد آمد، پیشرفت‌ها در فنّاوری و سایر منابع زمینهٔ مهم دیگری از تحقیقات را فراهم کرده‌اند.

۵.۲ فنّاوری و منابع آموزشی

برای کمک به آموزش احتمال از بسیاری از منابع آموزشی استفاده شده است. برخی از متداول‌ترین منابع ازجمله ابزارهای فیزیکی مانند تاس، سکه، گردونه، تیله، و تختهٔ گالتون به ایجاد موقعیت‌های بازی‌گونه که شانس در آن‌ها نقش دارد کمک می‌کنند [۷۷]. این ابزارها با بررسی شیء و ایجاد فرضیاتی درخصوص تقارن که اکثراً منجر به برآمدهای هم‌شانس برای یک تک‌آزمایش می‌شود، اغلب برای تأیید روش کلاسیک احتمال برای محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد پیشین به کار گرفته می‌شوند. وقتی این ابزارها با هم استفاده شوند (برای مثال دو سکه، یک تاس، و یک گردونهٔ چهاروجهی) می‌توانند برای بررسی پیشامدهای مرکب و احتمال‌های شرطی استفاده شوند [۶۶].

1. inadvertent metonymy 2. sample space partitions

ابزارهای دسته‌بندی مانند جدول‌های ۲ × ۲ و نمودارهای درختی نیز در شمارش فضاهای نمونه [۷۸] و محاسبهٔ احتمال‌ها کمک می‌کنند و می‌توان از آن‌ها به‌عنوان ابزارهای آموزشی مهم برای دانش‌آموزان استفاده کرد.

از آنجا که می‌توان روی ابزارهای فیزیکی اَعمالی انجام داد، منابع آموزشی و معلمان اغلب با استفاده از نمونه‌ها با اندازهٔ کوچک و ثبت فراوانی پیشامدها با این ابزارها (مثلاً با غلتاندن، چرخاندن، انتخاب یا انداختن یک تیله) پیشامدهای شانسی را ایجاد می‌کنند. از این فراوانی‌ها و فراوانی‌های نسبی به‌عنوان برآوردی از احتمال در دیدگاه فراوانی‌گرا استفاده می‌شود، سپس با احتمال محاسبه‌شدهٔ قبلی مبتنی بر بررسی مستقیم خود شیء مقایسه می‌شوند. برای مثال تحقیقات انجام‌شده در [۷۵، ۷۶] کلیاتی دربارهٔ نحوهٔ تفکر دانش‌آموزان هنگام انجام آزمایش با چنین ابزارهای فیزیکی به دست می‌دهد. بسته به نظر معلمان یا دانش‌آموزان، در این آزمایش‌ها برآوردی از احتمال ممکن است بر روش دیگر یا مسائل مربوط به اندازهٔ نمونه و قانون اعداد بزرگ ترجیح داده شود، یا تفاوت بین فراوانی و احتمال مورد بحث قرار بگیرد یا نه [۹۳].

اخیراً بسیاری از محققان (برای مثال [۱۵، ۲۶، ۶۴، ۸۱، ۸۲، ۸۶]) و برخی برنامه‌های درسی (برای مثال [۲۳، ۸۷]) تأکید کرده‌اند که احتمال را به‌جای صرفاً یک اندازه‌گیری انتزاعی یک چیز مشاهده‌نشدنی در مورد یک شیء فیزیکی واقعی، به‌عنوان روشی برای مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی آموزش داده شود (به‌عنوان مثال سنجش احتمال شیرآمدن هنگام پرتاب یک سکه). این دیدگاه را پرات [۸۱] این گونه بیان کرده است:

> البته که اگر در برنامهٔ درسی بر جنبهٔ احتمال به عنوان روشی برای مدل‌سازی تأکید می‌شد، این موضوع پیش می‌آمد که آیا تأکید بر سکه‌ها، گردونه‌ها، تاس‌ها و تیله‌ها دیگر سودی دارد یا نه. شاید در گذشته که بچه‌ها با تخته و صفحه بازی می‌کردند، تناسب طبیعی بین این‌ها وجود داشت، امّا حالا که بازی‌ها به‌صورت درلحظه روی صفحهٔ کامپیوتر و وسایل دیگر انجام می‌گیرند، احتمالْ استفادهٔ بیشتری به‌عنوان ابزاری برای مدل‌سازی کارهای مبتنی بر رایانه و شبیه‌سازی پیشامدها و پدیده‌های دنیای واقعی دارد.

یک راه کمک به دانش‌آموزان برای استفاده از احتمال برای مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی این است که هنگام استفاده از یک فنّاوری ضرورت معلوم کردن یک مدل در آن را الزام کنیم. در [۱۳] در مورد اینکه چگونه فنّاوری باید در آموزش احتمال استفاده شود، چندین روش پیشنهاد شده است

که فنّاوری می‌تواند یادگیری و آموزش احتمال را ارتقا دهد. نمونه‌گیری، ذخیره‌سازی، سازمان‌دهی و تحلیل داده‌های تولیدشده از مدل‌های احتمالاتی توسط فنّاوری به میزان زیادی تسهیل می‌شوند. این پیشنهادها را بسیاری از محققان داده‌اند و اخیراً در [۶۴] برای معلمان و در [۸۲، ۸۳، ۸۴] برای محققان شفاف‌سازی شده‌اند.

ازاین‌رو، ما هنوز در بررسی چگونگی یادگیری دانش‌آموزان دربارهٔ مدل‌های احتمالاتی از طریق ابزارهای فنّاوری نیاز به پیشرفت‌های اساسی داریم و در تعیین چارچوب مابقی بحث و بررسی‌های ما در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۵.۲ تکرار آزمایش‌ها و ذخیره‌سازی داده‌ها

سهم بزرگ فنّاوری در مطالعهٔ احتمالْ توانایی تولید سریع نمونه‌های بزرگ از داده‌ها، ذخیره‌سازی داده‌ها به‌شکل اولیه (خام) به‌صورت دنباله‌ای از خروجی‌ها یا جدول‌های منظم از فراوانی‌ها، و تجمیع داده‌ها در شکل‌های نمایشی مختلف است. بعضی اوقات، به دلیل هدف آموزشی مورد نظر تعداد آزمایش‌هایی که باید انجام شود را معلم/محقق تعیین می‌کند؛ بااین‌حال، بعضی اوقات هم، انتخاب تعداد آزمایش‌ها به خود دانش‌آموزان محول می‌شود.

بعضی از محققان دربارهٔ اندازهٔ نمونه از دید دانش‌آموزان، به‌ویژه وقتی برای آن‌ها امکان بررسی تأثیرش روی توزیع داده‌ها باشد (به‌عنوان مثال [۶۱، ۶۳، ۸۰]) مطالعه کرده‌اند. ابزارهای فنّاوری مانند Probability Explorer یا Fathom برای ذخیرهٔ فهرستی بلندبالا از رشته‌ای از داده‌ها نیز می‌توانند فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم کنند تا سابقهٔ برآمدها به ترتیبی که رخ داده‌اند و همچنین در جدول یا نمودارهای فراوانی یا فراوانی نسبی برای راحتی تجمیع شده‌اند را بررسی کنند.

۲.۵.۲ نمایش و تحلیل داده‌ها

ابزارهای فنّاوری با فراهم‌کردن امکان تولید سریع حجم زیادی از داده، ایجاد نمایش‌های جدولی و نموداری، و انجام آسان محاسبات روی داده‌ها برای دانش‌آموزان، قدرت واقعی را به کلاس‌های درس می‌آورند. بنابراین دانش‌آموزان می‌توانند زمان بیشتری را صرف تمرکز روی درک داده‌ها در شکل‌های مختلف کنند. نمایش داده‌ها به‌شکل انبوه می‌تواند دیدگاه‌های مختلفی را در یک مسئله باعث شود. علاوه بر این، فنّاوریْ تولید سریع، ذخیره‌سازی، و مقایسهٔ نمونه‌های مختلف را که هریک به تعداد دلخواه آزمایش دارند، تسهیل می‌کند. به‌جای اینکه در کلاس هر دانش‌آموز حجم کوچکی از داده‌ها را جمع‌آوری کند و سپس داده‌ها را برای ایجاد یک دادهٔ انبوه کلاسی ترکیب کند،

دانش‌آموزان (یا گروه‌های کوچک) می‌توانند از داده‌ها نمونه‌های فردی، کوچک و بزرگ، تولید کنند، و درخصوص داده‌های خودشان دلیل بیاورند و همچنین در بحث‌های کلاسی که نتایج بین نمونه‌ها را بررسی می‌کنند سهیم باشند [۹۴].

فنّاوری همچنین می‌تواند برای دانش‌آموزان فرصت درک رابطهٔ تغییر توزیع تجربی با جمع‌آوری داده‌ها را فراهم می‌کند. این دیدگاه ناایستا دربارهٔ توزیع می‌تواند به دانش‌آموزان در بررسی رابطهٔ بین مدل احتمالاتی و توزیع تجربی حاصل و چگونگی تأثیر اندازهٔ نمونه بر انواع مشاهدات کمک کند [۲۴، ۸۳، ۸۴]. این دیدگاه بر شهود ما از قوانین اعداد بزرگ تکیه دارد؛ چنین برداشت‌هایی می‌توانند با مشاهدهٔ تثبیت توزیع‌های فراوانی نسبی تقویت شوند، زیرا آزمایش‌ها در زمان واقعی شبیه‌سازی و نمایش داده می‌شوند. این نوع کارها فعالیت‌ها امیدوارکننده و ابزارهای فناورانه و همچنین جهت‌گیری‌های آینده را در اختیار ما می‌گذارد تا ببینیم چگونه می‌توانیم این کار را برای درک بهتر استدلال دانش‌آموزان از طریق چنین وسایلی انجام دهیم.

۳.۵.۲ مدل‌های احتمال مبتنی‌بر فنّاوری

لازم است فرصت‌هایی را بررسی کنیم که فنّاوری برای معلمان و دانش‌آموزان فراهم می‌کند تا دربارهٔ مفروضات لازم برای ساختن مدل‌هایی برای توصیف وضعیت‌های دنیای واقعی از طریق شبیه‌سازی بحث و بررسی کنند. فرایند ساخت مدل باید شامل بحث و بررسی ویژگی‌های موقعیت موردنظر و در همان حال ساده‌سازی واقعیت نیز باشد [۱۵، ۲۶]. در مراحل بعدی که دانش‌آموز یک مدل ریاضی می‌سازد و با آن کار می‌کند، باید با استفاده از «احتمال‌سازهای»[1] عینی، فرایندهای تصادفی را، در صورت امکان، مدل‌سازی کند و با استفاده از ابزارهای فنّاورانه یک مدل شبیه‌سازی را بسازد و با آن کار کند، و از این طریق راه‌هایی برای تقسیم‌بندی پیشامدها طوری پیدا کند که احتمال‌ها به‌راحتی قابل‌شناسایی باشند. چنین مراحلی برای دانش‌آموزان این فرصت را فراهم می‌کنند تا فهمشان از موقعیت، مدل، و بسیاری از مفاهیم مرتبط با احتمال را ارتقا دهند. استفاده از ابزارهای متعدد فنّاورانه (برای مثال، ماشین‌حساب‌های گرافیکی، صفحهٔ گسترده[2]، یا نرم‌افزارهایی مانند Fathom یا TinkerPlot) برای درست کردن شبیه‌سازی‌های یک موقعیت یکسان، می‌تواند دانش‌آموزان را متوجه این نکته کند که چگونه دستورات مختلف در یک ابزار می‌توانند با دقت برای ایجاد یک مدل استفاده شوند. در ضمن این موضوع می‌تواند فرصت‌هایی فراهم کند برای بحث و بررسی این مطلب که چرا دو روش مختلف مدل‌سازی برای یک موقعیت می‌توانند مشابه یا متفاوت باشد و همچنین تمایز بین مدل و واقعیت چگونه است.

1. chance maker 2. spreadsheet

کار مدل‌سازی می‌تواند به این «سادگی» باشد که دانش‌آموزان فقط یک توزیع احتمال گسسته را طراحی کنند که مدلی باشد برای یک گردونهٔ واقعی با سه بخش غیریکسان [۹۴] یا طراحی یک مدل کارآمد برای بررسی اینکه آیا خانواده‌های پرجمعیت تمایل دارند به‌جای داشتن تعداد یکسانی دختر و پسر، دختر بیشتر داشته باشند یا پسر بیشتر [۶۴]. همچنین مدل‌سازی می‌تواند به اندازهٔ تفسیر اطلاعات پزشکی با استفاده از احتمال‌های مبتنی‌بر وقایع زندگی واقعی پیچیده باشد، مانند بهبود یا عوارض ناشی از جراحی کمر برای کمک به بیمار در تصمیم‌گیری سرنوشت‌ساز در این مورد [۸۳، ۸۴].

فعالیت‌ها و ابزارهای متعددی که در [۸۲، ۸۶] بررسی شده‌اند اهمیت توانایی تنظیم پارامترها در ساخت مدل و فرایند برازش مدل را نشان می‌دهند. امکان تنظیم آسان پارامترها در مدل می‌تواند فرصت‌هایی را برای دانش‌آموزان فراهم کند تا نتیجهٔ «چه می‌شود اگر» را ببینند. از اینجا امکان توسعهٔ مدل، تولید و تحلیل داده‌ها، و تنظیم مدل فراهم می‌آید. برای مثال در [۵۵] توضیح داده شده است که این امکان به دانش‌آموزان کمک کرده است که براساس رفتار یک مدل در شبیه‌سازی بتوانند مدل‌ها را بسازند یا اصلاح کنند.

۴.۵.۲ مخفی‌سازی یک مدل

سروکار داشتن با مدل‌های احتمال و داده‌های تولیدشده از چنین مدل‌هایی می‌تواند پایهٔ خیلی مهمی برای نحوهٔ استفادهٔ احتمال در آمار، به‌ویژه در انجام استنباط درخصوص جمعیت‌ها و آزمون فرض‌ها، فراهم کند. در موارد بالا، مدل‌های استفاده‌شده در شبیه‌سازی معمولاً توسط دانش‌آموزان یا معلم ساخته می‌شوند، امّا دانش‌آموزان می‌توانند آن‌ها را مشاهده و وارسی کنند. بااین‌حال، ابزارهای فنّاوری توانایی مخفی‌سازی مدل از دید کاربر را به ما داده است، به‌طوری که توزیع‌های احتمال که شبیه‌سازی را کنترل می‌کنند ناشناخته بمانند. این نوع شبیه‌سازی‌های دارای «جعبهٔ سیاه»[1] می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا دربارهٔ احتمال از دیدگاه ذهنی یا فراوانی‌گرا فکر کنند؛ در این موارد آن‌ها فقط می‌توانند از داده‌های تولیدشده از شبیه‌سازی برای برآورد احتمالاتی برای استنباط یا مواقع تصمیم‌گیری استفاده کنند. یک مثال از چنین استنباط‌هایی یا موقعیت‌های تصمیم‌گیری را می‌توانید در [۶۱] بیابید. در آنجا کودکان ۱۱–۱۲ ساله بررسی می‌کنند که آیا یک شرکت تولیدکنندهٔ تاسْ تاس‌های سالمی تولید می‌کند تا شخص بتواند تصمیم بگیرد که از این شرکت برای بازی رومیزی تاس بخرد یا خیر.

1. black-box

خلاصه اینکه فنّاوری فرصت بزرگی برای آموزش احتمال فراهم می‌کند، امّا باعث ایجاد چالش‌هایی نیز می‌شود. یکی از این چالش‌ها آموزش معلمان برای آموزش عمومی احتمال و به‌ویژه استفاده از فنّاوری در آموزش احتمال به آن‌ها است. به این مشکل خاص در آخرین بخش این نوشته می‌پردازیم.

۶.۲ آموزش معلمان

پیامد بحث‌های فلسفی حول معنای احتمال، ویژگی‌های خاص استدلال احتمالاتی، مشکلات و تصورات نادرست دانش‌آموزان و افزایش تنوع منابع فنّاوری، ازجمله دلایلی هستند که معلمان نیاز به آمادگی ویژه‌ای برای آموزش احتمال دارند. اگرچه برخی کتاب‌های درسی، مثال‌ها و منابع آموزشی را عرضه می‌کنند، امّا برخی متون دیدگاه بسیار محدود یا تنها یک رویکرد از مفاهیم احتمال را ارائه می‌دهند. کاربردهای احتمال در کتاب‌های درسی ممکن است به بازی‌های شانسی محدود شوند یا ممکن است تعریف‌های مفاهیم احتمال نادرست یا ناکامل باشند [۱۴].

تحقیقات در این حوزه انگشت‌شمار است و تحقیقات بیشتر بر ارزیابی دانشِ معلمان آینده از احتمال متمرکز شده است (برای مثال [۸، ۱۹]). با اینکه هنوز به تحقیقات بیشتر درخصوص دانشِ معلمان آینده و دانشجویان دورهٔ معلمی در مورد احتمال نیاز است، تحلیل مؤلفه‌های دانشِ معلمان و طراحی محتواهای مناسب و فعالیت‌های مؤثر برای آموزش معلمان دو حوزهٔ مهم و غایب در تحقیقات آموزش احتمال است.

۱.۶.۲ مؤلفه‌های دانش معلمان

مدل‌های موجود از دانشِ موردنیاز معلمان در آموزش ریاضی، مانند دانشِ ریاضی برای تدریس، نشان می‌دهند که معلمان نیاز به انواع مختلفی از محتوا و دانشِ تعلیمی دارند [۶]. بااین‌حال، همان‌طور که در [۳۸، ۴۲] گفته شده است، در مورد خاص دانش آماری برای آموزش، مهم است بدانیم که معلمان برای انجام امر آموزش به دانشِ محتوای خاص احتیاج دارند. این موضوع به این معنی است که هر بحث و بررسی در مورد دانشِ احتمال برای تدریس باید مبتنی‌بر ویژگی‌های خاص موضوع احتمال باشد.

اولین مؤلفه این است که معلمان به دانشِ احتمالاتی مناسبی احتیاج دارند. اما حتی اگر معلمان آینده دارای مدرک ریاضی باشند، آن‌ها فقط احتمال نظری را خوانده‌اند و تجربهٔ کمی در زمینهٔ طراحی آزمایش و شبیه‌سازی برای کار با دانش‌آموزان دارند [۵۹، ۹۳]. آموزش معلمان

ابتدایی حتی چالش‌برانگیزتر است، زیرا تعداد کمی از آن‌ها دارای آموزش مناسب در زمینهٔ احتمال نظری یا عملی بوده‌اند [۳۴]. علاوه‌بر این، تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که بسیاری از معلمان آینده سوگیری‌های متداول در استدلال احتمالاتی را به دانش‌آموزان خود منتقل می‌کنند [۸، ۸۵].

دومین مؤلفه، دانشِ تعلیمی مورد نیاز برای آموزش احتمال است که در آن اصول کلی معتبر برای آموزش دیگر حوزه‌های ریاضیات همیشه هم مناسب نیستند [۸]. برای مثال در حسابان و هندسه می‌توان اَعمال پایه را معکوس کرد و این معکوس‌پذیری را می‌توان با مثال‌های عینی نشان داد، و از آن برای نظم‌دهی به تجربیاتی استفاده کرد که کودکان به‌تدریج ساختار پشت هر موقعیت دنیای واقعی را تجرید می‌کنند. عدم معکوس‌پذیری در تجربیات تصادفی درک ویژگی‌های اصلی تصادفی‌بودن را برای کودکان دشوار می‌کند، که همین موضوع می‌تواند علت اینکه آن‌ها بدون آموزش مشخص همیشه شهود احتمالاتی درستی ندارند.

علاوه‌بر موارد بالا، آموزش احتمال دشوار است، چون معلم نه‌تنها باید مفاهیم احتمالاتی مختلف و کاربرد آن‌ها را عرضه کند، بلکه باید از معانی مختلف احتمال و بحث‌های فلسفی حول آن‌ها آگاه باشد [۸]. بالاخره، معلمان باید با نتایج تحقیقاتی که طرز استدلال و باورهای کودکان در موقعیت‌های ناتعیینی را توضیح می‌دهند و همچنین با مواد تعلیمی که به دانش‌آموزانشان کمک می‌کند تا درک درستی در این زمینه پیدا کنند آشنا باشند.

استفادهٔ فعلی از فنّاوری ملاحظات خاصی را در آموزش معلمان طلب می‌کند که باید تجزیه و تحلیل شوند. لی و هولبراندز [۶۲]، چارچوبی را معرفی کردند که آنچه را آن‌ها دانشِ آماری آموزشی مبتنی‌بر فنّاوری می‌نامند همراه با مثال‌هایی از مؤلفه‌های این دانش توصیف می‌کند. ارزیابی و ارتقای این مؤلفه‌ها در این چارچوب در مورد خاص احتمال یک حوزهٔ تحقیقاتی امیدوارکننده است.

۲.۶.۲ روش‌های مؤثر در آموزش معلمان

حوزهٔ دیگری از تحقیقاتْ عبارت است از طراحی و ارزیابی فعالیت‌های مناسب و مؤثر که به افزایش دانشِ احتمالاتی و آموزشی معلمان کمک می‌کند. برخی از محققان تجربیات متفاوتی را در جهت دستیابی به این هدف بیان کرده‌اند.

معلمان باید با شبیه‌سازی‌های و تحقیقات مربوط به احتمال سروکار داشته و آن‌ها را بررسی کنند. هنگام کار با دانش‌آموزان استفاده از شبیه‌سازی و آزمایش‌ها توصیه می‌شود. معلمان برای اینکه بتوانند از نتایج تحقیقات در کلاس‌هایشان استفاده کنند لازم است توانایی‌هایی در این روش

تدریس کسب کنند. اگر زمان موجود برای آموزش معلمان کم است، یک راه ساده برای این کار این است که اول به آن‌ها یک تحقیق داده شود تا به آن بپردازند و پس از اتمام آن، پروژه را از لحاظ تعلیمی بررسی کنند. این نوع تجزیه و تحلیل می‌تواند به افزایش هم‌زمان دانشِ تعلیمی و ریاضیاتی معلمان کمک کند [۸].

معلمان باید در بحث‌ها و بررسی‌های موردی شرکت داشته باشند. گروث و ژو [۴۳]، از بحث و بررسی موردی در میان گروهی از معلمان به‌عنوان یک راهبرد مفید برای آموزش معلمان استفاده کردند. آن‌ها اشاره می‌کنند که در آموزش علم احتمال، معلم‌ها بین دو لایهٔ عدم قطعیت در رفت و آمدند. از یک سو، عدم قطعیتْ بخشی از دانشِ احتمال است، از سوی دیگر، در هر کلاسی عدم قطعیت به‌صورت نتیجه‌ای از تعاملات پویای بین معلم، دانش‌آموزان، و موضوع تدریس‌شده پدیدار می‌شود. مباحثهٔ بین معلمان می‌تواند به آن‌ها کمک کند تا دانشِ خود را افزایش دهند، زیرا تجربیات مربوط به تعلیم و تربیت، دانش ریاضی، و روش آموزش موضوعات خاص می‌توانند طرح و بررسی شوند.

در ضمن معلمان به تجربیاتی دربارهٔ نحوی برنامه‌ریزی و تحلیل درس احتیاج دارند. وقتی معلمان درسی را که برای تدریس برخی مطالب طراحی شده است برنامه‌ریزی و تحلیل می‌کنند، آن‌ها می‌توانند دانشِ احتمالاتی و حرفه‌ای خود را ارتقا دهند. معلمان باید موضوع احتمال را که به دانش‌آموزانشان تدریس می‌کنند بفهمند. یک راهبرد در این زمینه داشتن معلم‌هایی است که نقش یک یادگیرنده را بازی می‌کنند و سپس چیزی که یادگرفته‌اند را تحلیل کنند. اگر آن‌ها این فرصت را داشته باشند که درس را در مقام یک یادگیرنده تمرین کنند و درعین‌حال از دید یک معلم نگاه کنند، آن‌گاه می‌توانند بهتر بفهمند که بعدها درس چگونه در کلاس پیش خواهد رفت.

معلمان باید تجربیات گسترده‌ای در زمینهٔ کار با فنّاوری داشته باشند. همچنین می‌توانیم از فنّاوری به‌عنوان یک ابزارساز برای معلمان استفاده کنیم تا از مفاهیم احتمالاتی یک درک مفهومی پیدا کنند. لی و هولبراندز [۶۲] طریقی را که با آن فنّاوری می‌تواند هم به‌عنوان تقویت‌کننده و هم به‌عنوان نظم‌دهندهٔ دانشِ معلمان عمل کند بیان کرده‌اند. آن‌ها همچنین دربارهٔ اینکه چگونه فنّاوری می‌تواند تجربیات دست‌اولی برای معلمان ارائه دهد و این ابزارها در ارتقای دانش و تفکر احتمال آن‌ها مؤثر باشد نکاتی گفته‌اند. در نمونه تحقیقات دیگر از تجربیات و دوره‌های آموزشی صحبت شده است که خاص تربیت معلمان برای تدریس احتمال است یا پیشنهادهایی در مورد چگونگی این دوره‌ها داده شده است (برای مثال [۹، ۱۰، ۲۵، ۵۹، ۹۳]).

تحقیقات و ابداعات در زمینهٔ آموزش معلمان برای تدریس احتمال هنوز هم نادر است و نیاز است که بیشتر شوند.

۳ خلاصه و نگاهی به آینده

در بخش‌های قبل این عناوین را بررسی کردیم: چندوجهی بودن مفهوم احتمال، موضوعات احتمالاتی در برنامه‌های درسی، تحقیقاتی مرتبط با دریافت‌های شهودی و تصورات نادرست، نقش فنّاوری، و آموزش معلمان. در پایان نکاتی را پیشنهاد می‌کنیم که نیاز به تحقیقات جدید دارند.

دیدگاه‌های مختلف دربارهٔ احتمال همان‌طور که در بخش ۱.۲ بحث شد[۱]، دیدگاه‌های مختلف احتمال با بحث‌های فلسفی مرتبط هستند و گاهی اوقات برنامه‌های درسی تنها بر یک دیدگاه از احتمال قویاً تأکید داشته‌اند. از آنجا که دیدگاه‌های مختلف احتمال ، مکمل هم هستند [۴۵]، آموزشِ منحصر به یک روشْ باعث بروز برخی مشکلات یادگیری می‌شود، زیرا دانش‌آموزان ممکن است فقط یک تعبیر را در موقعیت‌هایی که نامناسب است، در نظر گرفته یا به کار ببرند. برخی سؤالات تحقیقاتی دربارهٔ این موضوع شامل موارد زیر است: (الف) تحلیلی از دیدگاه‌های خاص احتمال که در برنامه‌های آموزشی و کتاب‌های درسی برای مقاطع تحصیلی مختلف وجود دارد؛ (ب) بررسی و توصیه‌هایی در مورد بهترین سنی که در آن یک دیدگاه مشخص از احتمال باید به دانش‌آموزان معرفی شود و بهترین مراحل برای معرفی رویکردهای مختلف احتمال؛ (ج) طراحی و ارزیابی شیوه‌نامه‌های برنامهٔ آموزشی برای سنین مختلف که در آن دیدگاه‌های خاص احتمال لحاظ شده باشد؛ (د) تحلیل نیازهای آموزشی معلمان در ارتباط با دیدگاه‌های مختلف احتمال.

تفکر و استدلال احتمالاتی تحلیل‌های ما در بخش ۲.۲ از نشان می‌دهند که استدلال احتمالاتی مکمل استدلال منطقی، علّی، و آماری است. در نتیجه آموزش تفکر احتمالاتی در نوع خود امری مهم و موجه است و صرفاً ابزاری برای هموار کردن روش‌های استنباط آماری نیست. مشکلات تحقیقاتی مهم در این زمینه عبارت‌اند از (الف) مشخص کردن روشی که در آن تفکر احتمالاتی می‌تواند به ارتقای توانایی‌های ریاضیاتی دانش‌آموزان کمک کند؛ (ب) تحلیل و بررسی اینکه چگونه می‌توان مدل‌های مختلف احتمال و کاربردهای آن‌ها را به دانش‌آموزان ارائه داد؛ (ج) پیدا کردن روش‌هایی که در آن‌ها دانش‌آموزان با سؤالاتی مربوط به چگونگی دستیابی به دانش از طریق داده‌ها و علت مناسب‌بودن یک مدل احتمال؛ (د) چگونه به دانش‌آموزان کمک کنیم تا شهود درستی در این زمینه کسب کنند.

---

۱. منظور قسمت اول مقاله است که در [۱] آمده است. ــ و.

احتمال در برنامه‌های درسی یکی دیگر از حوزه‌های مهم تحقیقاتی بررسی چگونگی بازتاب ایده‌های اساسی احتمال در برنامه‌های درسی در مقاطع مختلف و در کشورهای مختلف است. ارائهٔ این ایده‌ها در کتاب‌های درسی برای مقاطع آموزشی مختلف نیز باید در نظر گرفته شوند (پیرو تحقیقات قبلی، مثل [۵، ۴۶]). همچنین باید سطوح مختلف صوری‌سازی مفاهیم را برای آموزش آن‌ها بسته به سن و دانشِ قبلی دانش‌آموزان بیابیم. در نتیجه تأمل روی مفاهیم اصلی که دانش‌آموزان باید در سنین مختلف کسب کنند، روش‌های مناسب آموزش و موقعیت‌های آموزشی مناسب، امری مهم و ضروری است.

دریافت‌های شهودی و مشکلات یادگیری دانش‌آموزان همان‌طور که تحقیقات قبلی نشان داده‌اند، دریافت‌های شهودی احتمال و مشکلات یادگیری آن، اگرچه به انحای مختلفی بیان شده‌اند، موضوع اصلی تحقیقات در روان‌شناسی و آموزش ریاضیات است. علاوه‌بر این، با تنوع یافتن این حوزه موجه است که انتظار داشته باشیم این رشتهٔ خاص تحقیقاتی نه تنها ادامه خواهد یافت بلکه رشد خواهد کرد. سؤالات تحقیقاتی مهم در این زمینه عبارت‌اند از (الف) شرح تصورات قبلی و دریافت‌های شهودی کودکان دبستانی از مطالب جدید آموزشی احتمال در برنامهٔ درسی؛ (ب) تحلیل تغییرات در دریافت‌های شهودی دانش‌آموزان از مفاهیم مختلف احتمال بعد گذراندن دوره‌های آموزشی خاص؛ (ج) یافتن «بهترین» دلایل برای تصورات قبلی در دانش‌اموزان و مشکلات موجود.

فنّاوری و آموزش معلمان تغییرات سریع در پیشرفت‌های فنّاوری نشان می‌دهد باید تحقیقات جدیدی در مورد استفادهٔ دانش‌آموزان از فنّاوری برای حل مسائل واقعیِ مبتنی‌بر مدل‌های احتمال انجام شود. نیاز است در مورد چگونگی ساخت مدل‌ها توسط دانش‌آموزان و نحوهٔ استدلال آن‌ها دربارهٔ داده‌های تولیدشده از چنین مدل‌هایی بیشتر بدانیم. درضمن ارزیابی تأثیر فنّاوری بربرنامه‌های آموزشی فعلی و آموزش معلمان امری مهم است. همچنین به تحقیقات اصولی بیشتری دربارهٔ نحوهٔ استفاده معلمان و دانش‌آموزان از فنّاوری در کلاس‌های درسی نیاز است. همچنین لازم است بدانیم که ارزیابی در مقیاس‌های بزرگ چه تغییراتی در قبال معانی جدید احتمال که ممکن است دانش‌آموزان از طریق کار با فنّاوری روی احتمال کسب کنند نیاز دارد.

درنتیجه، در این مرور مختصر، تلاش کردیم که تحقیقات گسترده در آموزش احتمال را خلاصه کنیم. درعین‌حال، در نظر داشتیم تا خواننده را متقاعد کنیم که به تحقیقات جدید و ایده‌های مختلف بسیاری نیاز است که هنوز باید بررسی شوند. امیدواریم که به این اهداف دست یافته باشیم و مشتاقانه منتظر تحقیقات جدید دربارهٔ آموزش احتمال هستیم.

مراجع

[۱] باتانرو، ک. و ای. جِی. چرنوف و همکاران، تحقیقی دربارهٔ آموزش و یادگیری احتمال (بخش اول)، ترجمهٔ مهدی شمس و سید علی محمدیه، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۲۳۷-۲۵۳.

[2] Abrahamson, D., Bridging theory: Activities designed to support the grounding of outcome-based combinatorial analysis in event-based intuitive judgment-A case study, in *Proc. Topic Study Group 13 at the 11th Int. Conf. Math. Educ. (ICME)*, M. Borovcnik, D. Pratt, eds., Monterrey, Mexico, 2008.

[3] Abrahamson, D., Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning: the case of anticipating experimental outcomes of a quasi-binomial random generator, *Cogn. Instr.*, **27** (2009), no. 3, 175–224.

[4] Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA), *The Australian Curriculum: Mathematics*, Author, Sydney, NSW, 2010.

[5] Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., Serradó, S., Randomness in textbooks: the influence of deterministic thinking, in *Proc. Fourth Conf. Eur. Soc. Res. Math. Educ.*, M. Bosch, ed., ERME, Sant Feliu de Guixols, Spain, 2006.

[6] Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G., Content knowledge for teaching, *J. Teach. Educ.*, **59** (2008), no. 5, 389–407.

[7] Batanero, C., Understanding randomness: Challenges for research and teaching, plenary lecture in *Ninth Eur. Conf. Math. Educ.*, Prague, Czech Republic, 2015.

[8] Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L., Ruiz, B., Prospective primary school teachers' perception of randomness, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, 345–366.

[9] Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J., Vogel, M., Using simulation to bridge teachers' content and pedagogical knowledge in probability, paper presented at the fifteenth ICMI Study Conf.: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Aguas de Lindoia, Brazil, 2005.

[10] Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B., The nature of chance and probability, in *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*, G. A. Jones, ed., Springer, New York, 2005, 15–37.

[11] Batanero, C., Serrano, L., The meaning of randomness for secondary school students, *J. Res. Math. Educ.*, **30** (1999), no. 5, 558–567.

[12] Bernoulli, J., *Ars Conjectandi*, IREM, Rouen, 1987; original work published in 1713.

[13] Biehler, R., Computers in probability education, in *Chance Encounters: Probability in Education*, R. Kapadia, M. Borovcnik, eds., Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991, 169–211.

[14] Canizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L., Probabilistic language in Spanish textbooks, in *ICOTS-6 Papers for School Teachers*, B. Phillips, ed., Int. Assoc. Stat. Educ., Cape Town, 2002, 207–211.

[15] Chaput, B., Girard, J. C., Henry, M., Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer, New York, 2011, 85–95.

[16] Chernoff, E. J., Sample space partitions: An investigative lens, *J. Math. Behav.*, **28** (2009), no. 1, 19–29.

[17] Chernoff, E. J., Logically fallacious relative likelihood comparisons: the fallacy of composition, *Exp. Educ.*, **40** (2012), no. 4, 77–84.

[18] Chernoff, E. J., Recognizing revisitation of the representativeness heuristic: an analysis of answer key attributes, *ZDM - Int. J. Math. Educ.*, **44** (2012), no. 7, 941–952.

[19] Chernoff, E. J., Russell, G. L., The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers' use of logical fallacies, *Can. J. Sci. Math. Technol. Educ.*, **12** (2012), no. 3, 259–271.

[20] Chernoff, E. J., Sriraman, B., Introduction, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, xv–xviii.

[21] Chernoff, E. J., Sriraman, B., Commentary on probabilistic thinking: presenting plural perspectives, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, 721–728.

[22] Chernoff, E. J., Zazkis, R., From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space, *Educ. Stud. Math.*, **77** (2011), no. 1, 15–33.

[23] Common Core State Standards Initiative (CCSSI), *Common Core State Standards for Mathematics*, National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, Washington, DC, 2010, available at http://www.corestandards.org/Math/.

[24] Drier, H. S., Children's meaning-making activity with dynamic multiple representations in a probability microworld, in *Proc. Twenty-second Annu. Meet. North Amer. Chapter Int. Group Psychol. Math. Educ.*, Vol. 2, M. Fernandez, ed., Tucson, AZ, 2000, 691–696.

[25] Dugdale, S., Pre-service teachers' use of computer simulation to explore probability, *Comput. Sch.*, **17** (2001), no. 1–2, 173–182.

[26] Eichler, A., Vogel, M., Three approaches for modelling situations with randomness, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, 75–99.

[27] Falk, R., The perception of randomness, in *Proc. Fifth Conf. Int. Group Psychol. Math. Educ.*, University of Grenoble, Grenoble, France, 1981, 222–229.

[28] Falk, R., Konold, C., Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgement, *Psychol. Rev.*, **104** (1997), no. 2, 310–318.

[29] Fischbein, E., *The Intuitive Source of Probability Thinking in Children*, Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1975.

[30] Fischbein, E., Gazit, A., Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?, *Educ. Stud. Math.*, **15** (1984), 1–24.

[31] Fischbein, E., Nello, M. S., Marino, M. S., Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educ. Stud. Math.*, **22** (1991), 523–549.

[32] Fischbein, E., Pampu, I., Minzat, I., Comparison of ratios and the chance concept in children, *Child Dev.*, **41** (1970), 377–389.

[33] Fischbein, E., Schnarch, D., The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *J. Res. Math. Educ.*, **28** (1997), 96–105.

[34] Franklin, C., Mewborn, D., The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility, in *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance*, G. Burrill, ed., National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2006, 335–344.

[35] Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al., *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*, American Statistical Association, Alexandria, VA, 2007.

[36] Gigerenzer, G., Hertwig, R., Pachur, T., *Heuristics: The Foundations of Adaptive Behavior*, Oxford University Press, Oxford, MA, 2011.

[37] Gilovich, T., Griffin, D., Kahneman, D., *Heuristics and Biases: The Psychology of Intuitive Judgment*, Cambridge University Press, New York, 2002.

[38] Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R., Wilhelmi, M. R., Models for statistical pedagogical knowledge, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer, New York, 2011, 271–282.

[39] Green, D., The chance and probability concepts project, *Teach. Stat.*, **1** (1979), no. 3, 66–71.

[40] Green, D., School pupils' probability concepts, *Teach. Stat.*, **5** (1983), no. 2, 34–42.

[41] Green, D. R., Schools students' understanding of randomness, in *Studies in Mathematics Education: The Teaching of Statistics*, Vol. 7, R. Morris, ed., UNESCO, Paris, 1989, 27–39.

[42] Groth, R. E., Bergner, J. S., Mapping the structure of knowledge for teaching nominal categorical data analysis, *Educ. Stud. Math.*, **83** (2013), 247–265.

[43] Groth, R. E., Xu, S., Preparing teachers through case analyses, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer, New York, 2011, 371–382.

[44] Heitele, D., An epistemological view on fundamental stochastic ideas, *Educ. Stud. Math.*, **6** (1975), 187–205.

[45] Henry, M., Evolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilities [Evolution of French secondary teaching in statistics and probability], *Stat. Enseign.*, **1** (2010), no. 1, 35–45.

[46] Jones, J. L., Tarr, J. E., An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grade mathematics textbooks, *Stat. Educ. Res. J.*, **6** (2007), no. 2, 4–27.

[47] Jones, G. A., Thornton, C. A., An overview of research into the learning and teaching of probability, in *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*, G. A. Jones, ed., Springer, New York, 2005, pp. 65–92.

[48] Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mogill, A. T., A framework for assessing and nurturing young children's thinking in instruction, *Educ. Stud. Math.*, **32** (1997), 101–125.

[49] Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mogill, A. T., Students' probabilistic thinking in instruction, *J. Res. Math. Educ.*, **30** (1999), 487–519.

[50] Kahneman, D., *Thinking Fast and Slow*, MacMillan, New York, 2011.

[51] Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A., *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Cambridge University Press, New York, 1982.

[52] Kahneman, D., Frederick, S., Representativeness revisited: attribute substitution in intuitive judgement, in *Heuristics and Biases: The Psychology of Intuitive Judgment*, T. Gilovich, D. Griffin, D. Kahneman, eds., Cambridge University Press, New York, 2002, 49–81.

[53] Konold, C., Informal conceptions of probability, *Cogn. Instr.*, **6** (1989), 59–98.

[54] Konold, C., Understanding students' beliefs about probability, in *Radical Constructivism in Mathematics Education*, E. Von Glasersfeld, ed., Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991, 139–156.

[55] Konold, C., Kazak, S., Reconnecting data and chance, *Technol. Innov. Stat. Educ.*, **2** (2008), no. 1.

[56] Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., Lipson, A., Inconsistencies in students' reasoning about probability, *J. Res. Math. Educ.*, **24** (1993), no. 5, 392–414.

[57] Kultus minister konferenz (KMK), *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss [Educational standards in mathematics for middle school]*, Author, Berlin, 2004.

[58] Kultus minister konferenz (KMK), *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife [Educational standards in mathematics for the general higher education]*, Author, Berlin, 2012.

[59] Kvatinsky, T., Even, R., Framework for teacher knowledge and understanding of probability, in *Proc. Sixth Int. Conf. Teach. Stat.*, B. Phillips, ed., Int. Stat. Inst., Voorburg, The Netherlands, 2002.

[60] Langrall, C. W., Mooney, E. S., Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning, in *Exploring Probability in School*, G. Jones, ed., Springer, New York, 2005, pp. 95–119.

[61] Lee, H. S., Angotti, R. L., Tarr, J. E., Making comparisons between observed data and expected outcomes: Students' informal hypothesis testing with probability simulation tools, *Stat. Educ. Res. J.*, **9** (2010), no. 1, 68–96.

[62] Lee, H. S., Hollebrands, K. F., Characterising and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching*

and Teacher Education, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer, Netherlands, 2011, pp. 359–369.

[63] Lee, H. S., Lee, J. T., Reasoning about probabilistic phenomena: Lessons learned and applied in software design, *Technol. Innov. Stat. Educ.*, **3** (2009), no. 2.

[64] Lee, H. S., Lee, J. T., Simulations as a path for making sense of probability, in *Focus in High School Mathematics on Reasoning and Sense Making with Technology*, K. Hollebrands, T. Dick, eds., National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2011, 69–88.

[65] Lecoutre, M., Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations, *Educ. Stud. Math.*, **23** (1992), 557–568.

[66] Martignon, L., Krauss, S., Hands on activities with fourth-graders: a tool box of heuristics for decision making and reckoning with risk, *Int. Electron. J. Math. Educ.*, **4** (2009), 117–148.

[67] Ministerio de Educación y Ciencia, MEC, *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria [Royal Decree establishing the minimum content for Primary Education]*, Author, Madrid, 2006.

[68] Ministerio de Educación y Ciencia, MEC, *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria [Royal Decree establishing the minimum content for Compulsory Secondary Education]*, Author, Madrid, 2007.

[69] Ministerio de Educación y Ciencia, MEC, *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas [Royal Decree establishing the structure and minimum content for High School]*, Author, Madrid, 2007b.

[70] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree establishing the minimum content for Primary Education]*, Author, Madrid, 2014.

[71] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato [Royal Decree establishing the minimum content for Compulsory Secondary Education and High School]*, Author, Madrid, 2015.

[72] Ministerio de Educación Pública, MEP, *Programas de Estudio de Matemáticas [Study programs for mathematics]*, Author, San José, Costa Rica, 2012.

[73] Ministry of Education, ME, *The New Zealand Curriculum*, Learning Media, Wellington, New Zealand, 2007.

[74] National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*, Author, Reston, VA, 2000.

[75] Nilsson, P., Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game, *Educ. Stud. Math.*, **66** (2007), 293–315.

[76] Nilsson, P., Conceptual variation and coordination in probability reasoning, *J. Math. Behav.*, **28** (2009), no. 4, 247–261.

[77] Nilsson, P., Experimentation in probability teaching and learning, in *Probabilistic Thinking: Presenting Multiple Perspectives*, E. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, 509–532.

[78] Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L., Terlektsi, M. E., The cognitive demands of understanding the sample space, *ZDM - Int. J. Math. Educ.*, **46** (2014), no. 3, 437–448.

[79] Piaget, J., Inhelder, B., *The Origin of the Idea of Chance in Children*, Norton, New York, 1975.

[80] Pratt, D., Making sense of the total of two dice, *J. Res. Math. Educ.*, **31** (2000), no. 5, 602–625.

[81] Pratt, D., Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching, paper presented at 58th ISI World Statistics Congress, Dublin, Ireland, 2011.

[82] Pratt, D., Ainley, J., Chance re-encounters: Computers in probability education revisited, in *Mit Werkzeugen mathematik und stochastik lernen–using tools for learning mathematics and statistics*, T. Wassong, ed., Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2014, pp. 165–177.

[83] Pratt, D., Ainley, J., Kent, P., Levinson, R., Yogui, C., Kapadia, R., Role of context in risk-based reasoning, *Math. Think. Learn.*, **13** (2011a), no. 4, 322–345.

[84] Pratt, D., Davies, N., Connor, D., The role of technology in teaching and learning statistics, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer, New York, 2011, pp. 97–107.

[85] Prodromou, T., Connecting experimental probability and theoretical probability, *ZDM - Int. J. Math. Educ.*, **44** (2012), no. 7, 855–868.

[86] Prodromou, T., Developing a modelling approach to probability Using computer-based simulations, in *Probabilistic Thinking: Presenting Multiple Perspectives*, E. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer, New York, 2014, 417–439.

[87] Raoult, J. P., La statistique dans l'enseignement secondaire en France [Statistics in secondary teaching in France], *Stat. Enseign.*, **4** (2013), no. 1, 55–69.

[88] Senior Secondary Board of South Australia (SSBSA), *Mathematical Studies Curriculum Statement*, SSBSA, Adelaide, Australia, 2002.

[89] SEP, *Plan de Estudios, Educación Básica*, Secretaría de Educación Pública, México, 2011.

[90] Shaughnessy, J. M., Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level, *Educ. Stud. Math.*, **8** (1977), 285–316.

[91] Shaughnessy, J. M., Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions, in *Teaching Statistics and Probability: Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, A. Schulte, ed., National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1981, 90–100.

[92] Shaughnessy, J. M., Research in probability and statistics: Reflections and directions, in *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D. A. Grouws, ed., Macmillan, New York, 1992, 465–494.

[93] Stohl, H., Probability in teacher education and development, in *Exploring Probability in Schools: Challenges for Teaching and Learning*, G. Jones, ed., Springer, New York, 2005, 345–366.

[94] Stohl, H., Tarr, J. E., Developing notions of inference with probability simulation tools, *J. Math. Behav.*, **21** (2002), no. 3, 319–337.

مهدی شمس: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 45, Number 1, Spring/Summer 2026, Pages 169–191
doi: 10.30504/mct.2023.1393.1981

Research on Teaching and Learning Probability (II)*

C. Batanero, Egan J. Chernoff, J. Engel, Hollylynne S. Lee, E. Sánchez
Translated by M. Shams[1]

Department of Statistics, University of Kashan, Iran

Abstract. This is the second part of a translation of a booklet whose purpose is to update readers on recent developments in mathematics education. This book summarizes the vast amount of research related to teaching and learning probability that has been conducted for more than 50 years in a variety of disciplines. It begins with a synthesis of the most important probability interpretations throughout history: intuitive, classical, frequentist, subjective, logical propensity and axiomatic views. It discusses their possible applications, philosophical problems, as well as their potential and the level of interest they enjoy at different educational levels. Next, the book describes the main features of probabilistic thinking and reasoning, including the contrast to classical logic, probability language features, the role of intuitions, as well as paradoxes and the relevance of modeling.

Keywords: probability, curriculum, education of teachers, educational resources, technology tools
Article history: Received 3 June 2023 ; Accepted 19 June 2023
Article type: translation

⋆ Batanero, C., Chernoff, Egan J., Engel, J., Lee, Hollylynne S., Sánchez, E., *Research on Teaching and Learning Probability*, Springer Open, New York, 2016, 13-33.

1. mehdishams@kashanu.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license