فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۴)، صص ۲۷ تا ۳۵

دو معادل توپولوژیک برای اصل انتخاب

حسین حسینی گیو

چکیده. در این مقاله پس از مروری کوتاه بر کاربردها و چالش‌های اصل انتخاب، دو معادل توپولوژیک جدید برای این اصل مهم اثبات می‌کنیم. درک این معادل‌ها تنها به آشنایی با اصل انتخاب، مقدماتی از نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها، و مفاهیم ابتدایی توپولوژی عمومی نیازمند است. به همین دلیل، این معادل‌ها می‌توانند به عنوان نمونه‌ای قابل دسترسی برای آغاز پژوهش توسط دانشجویان کارشناسی ریاضی محسوب شوند.

۱ مقدمه: تفکر اصل موضوعی و اصل انتخاب

استفاده از روش اصل موضوعی یکی از روش‌های رایج برای گسترش اصولی نظریه‌های پایه‌ای ریاضی است. یکی از هدف‌های مهم این روشْ بازنگری یک نظریهٔ موجود در ریاضی برای رفع هرگونه اشکال منطقی یا تناقض از آن است. همان‌گونه که از نامِ روش اصل موضوعی بر می‌آید، اساس این روش گزاره‌هایی به نام اصل یا اصل موضوع[۱] هستند که درستی آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم. چنین گزاره‌هایی در مراحل بعدی برای اثبات درستی گزاره‌های جدید مورد استفاده قرار می‌گیرند. اقلیدس نخستین کسی بود که به شکلی نظام‌مند از روش اصل موضوعی در ریاضیات استفاده کرد. او توانست با پذیرفتن تنها پنج اصل، ۴۶۵ قضیهٔ هندسه را اثبات کند و به‌این‌ترتیب دانش هندسی را که تا آن روز موجود بود به‌صورتی اصولی و دقیق گردآوری کند. کتاب [۲] جزئیات

عبارات و کلمات کلیدی: اصل انتخاب، توپولوژی، نقطهٔ درونی، نقطهٔ حدی
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۲۶

1. axiom

doi: 10.30504/mct.2025.1530.2071

مربوط به کار ارزشمند اقلیدس را، به همراه مراحل استفاده از روش اصل موضوعی در حالت کلّی، به‌خوبی شرح داده است.

یک نکتهٔ مهم در گسترش نظریه‌های اصل موضوعی آن است که استفاده از یک یا چند اصل خاص ممکن است مورد قبول همگان واقع نشود. به عنوان مثال، اصل پنجم اقلیدس، که به اصل توازی معروف است، برای قرن‌ها زمینه‌ساز بحث‌های چالشی در جامعهٔ ریاضی‌دانان بود. درحقیقت، همان‌گونه که در [۲] شرح داده شده است، برخی ریاضی‌دانان پس از اقلیدس بر این باور بودند که اصل توازی از چهار اصل دیگر نتیجه می‌شود. سرانجام در سال ۱۸۶۸، استقلال این اصل از سایر اصول توسط ائوجینو بلترامی[۱] ریاضی‌دان ایتالیایی به اثبات رسید. ازسوی‌دیگر، تلاش‌های فراوان برای جایگزینی اصل توازی با یک اصل مشابه، در نهایت به گسترش هندسه‌های نااقلیدسی منتهی شد.

با این مقدمه، اکنون زمینهٔ ذهنی لازم برای ورود به بحث اصلی مقالهٔ حاضر را داریم. اصل انتخاب[۲] یکی از اصل‌های مهم در ریاضیات است که در سال ۱۹۰۴ ارنست تسرملو[۳]، ریاضی‌دان آلمانی، آن را برای اثبات تعمیمی از اصل خوش‌ترتیبی در [۱۷] مطرح کرد. تسرملو یکی از پیشگامان رویکرد اصل موضوعی به نظریهٔ مجموعه‌ها بود.

نظریهٔ مجموعه‌ها در اواخر قرن نوزدهم میلادی به دست گئورگ کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، پایه‌گذاری شد، اما بروز چالش‌های نظری مانند پارادوکس راسل، ریاضی‌دانان را به بازنگری اساسی این نظریه جهت رفع هرگونه اشکال منطقی و تناقض ترغیب نمود. سرانجام، یکی از بهترین رویکردهای اصل موضوعی به نظریه مجموعه‌ها توسط ارنست تسرملو و آبراهام فرانکل[۴] ارائه گردید، که امروزه به دستگاه اصل موضوعی تسرملو–فرانکل (ZF) معروف است. جزئیات مربوط به این رویکرد اصل موضوعی را می‌توانید در [۶، ۱۱، ۱۵] مشاهده کنید. همچنین، برای مشاهدهٔ توصیف مناسبی از پارادوکس راسل، می‌توانید به [۳] مراجعه کنید.

البته، اصل انتخاب یکی از اصول ZF نیست، و همان‌گونه که پیش از این نیز اشاره شد، به دلیل دیگری ارائه گردید. در حال حاضر، جامع‌ترین رویکرد اصل موضوعی به نظریهٔ مجموعه‌ها، که پایه‌ای برای ریاضیات محض نیز محسوب می‌شود، از الحاق اصل انتخاب به دستگاه اصل موضوعی ZF حاصل شده است، که نتیجهٔ آن دستگاه اصل موضوعی ZFC است. در اینجا، C نشان دهندهٔ choice به معنی انتخاب است. توجه به این نکته ضروری است که الحاق اصل انتخاب به ZF یک

1. Eugenio Beltrami 2. the axiom of choice 3. Ernst Zermelo 4. Abraham Fraenkel

دستگاه اصل موضوعی جدید ارائه می‌کند، زیرا پُل کوهن[1]، ریاضی‌دان آمریکایی، در سال ۱۹۶۳ اثبات کرد که اصل انتخاب از سایر اصول ZF مستقل است.

اصل انتخاب را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

اصل انتخاب اگر Γ مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه تابعی مانند f از Γ به اجتماع تمام اعضاء Γ موجود است که $f(A)$، برای هر $A \in \Gamma$، عضوی از A است.

کتاب [۱۰] منبع جامعی برای مطالعه در زمینهٔ اصل انتخاب است. تابع f را یک «تابع انتخاب» می‌نامیم، زیرا با توجه به شرط $f(A) \in A$، تابع f، عضو $f(A)$ را از A انتخاب می‌کند. در واقع، اصل انتخاب بیان می‌کند که اگر یک مجموعه از مجموعه‌های ناتهی داشته باشیم، می‌توانیم از هریک از این مجموعه‌ها عضوی انتخاب کنیم. بنابراین، آنچه اصل انتخاب بیان می‌کند، بسیار طبیعی و قابل‌قبول به نظر می‌رسد.

اگر Γ مجموعه‌ای متناهی باشد، نیازی به استفاده از اصل انتخاب نداریم. در واقع، در حالتی که تعداد مجموعه‌ها نامتناهی است فرآیند انتخاب به یک قانون، یعنی یک تابع، نیاز دارد. ساده‌ترین نمونهٔ غیربدیهی از تابع انتخابْ تابعی است که به هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{N}$، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی، کوچک‌ترین عضو آن را نظیر می‌کند. به عنوان مثال، از مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، عدد ۲، و از مجموعهٔ $\{۱۳, ۱۹, ۲۸\}$، عدد ۱۳ انتخاب می‌شود.

با وجود ظاهر منطقی و قابل‌قبول این اصل، پذیرفتن آن با چالش‌هایی همراه است. در حقیقت، یافتن نمونه‌های ملموسی از تابع انتخاب، حتی در برخی از ساده‌ترین مجموعه‌های مورد بحث، چندان آسان نیست و گاهی غیرممکن به نظر می‌رسد. به عنوان مثال، به یافتن یک تابع انتخاب بر مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) فکر کنید. این ویژگی به ما اجازه می‌دهد که از اصل انتخاب برای ارائهٔ اثبات‌های غیرساختی استفاده کنیم، یعنی اثبات‌هایی که در آن‌ها وجود یک شیء ریاضی بدون یافتن یا ساختن آن به‌طور صریح، اثبات می‌شود. به همین دلیل، استفادهٔ تسرملو از اصل انتخاب باعث ایجاد اختلاف‌نظر در جامعهٔ ریاضی شد.

همچنین، از اصل انتخاب می‌توان به برخی نتایج ناسازگار با دیدگاه‌های شهودی رسید. در ادامه، به دو نمونه از چنین نتایجی اشاره می‌کنیم.

- در سال ۱۹۰۵، جوزپّه ویتالی[2]، ریاضی‌دان ایتالیایی، از اصل انتخاب برای ساختن یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر از اعداد حقیقی استفاده کرد. در واقع، او وجود مجموعه‌ای را اثبات

1. Paul Cohen 2. Giuseppe Vitali

کرد که هیچ تعمیم مناسبی از مفهوم طول برای آن قابل استفاده نیست. برای جزئیات بیشتر در مورد این مجموعه می‌توانید به صفحات اول کتاب [۷] مراجعه کنید.

- در مقالهٔ [۵]، منتشرشده در سال ۱۹۲۴، ریاضی‌دانان لهستانی استفان باناخ و آلفرد تارسکی با استفاده از اصل انتخاب به نتیجه‌ای رسیدند که با دیدگاه‌های شهودی هندسی ناسازگار بود و به پارادوکس باناخ–تارسکی معروف شد: هر گوی در فضایِ سه‌بُعدی را می‌توان به تعدادی متناهی زیرمجموعهٔ مجزا تجزیه کرد که با کنار هم قرار دادن آن‌ها به روشی متفاوت، دو نسخهٔ یکسان از گویِ اصلی به دست آیند. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این پارادوکس می‌توانید به [۱۶] یا [۱] مراجعه کنید.

اما با همهٔ این چالش‌ها مشخص شد که اصل انتخاب و برخی از گزاره‌های معادل آن مانند لم تسورن[1]، اصل ماکسیمال هاوسدورف[2]، قضیهٔ خوش‌ترتیبی و (حالت کلّی) قضیهٔ تیخونوف ابزارهایی ضروری برای گسترش حوزه‌های گوناگونی از ریاضیات مانند جبرخطی، توپولوژی، و آنالیز تابعی هستند.

اهمیت این اصلِ موضوع منبع الهام بسیاری از ریاضی‌دانان برای یافتن گزاره‌های منطقی معادل با آن بوده است. کتاب‌های [۹] و [۱۳] دو منبع عالی در زمینهٔ معادل‌ها و نتیجه‌های اصل انتخاب هستند. چند نمونه از معادل‌های جدیدتر اصل انتخاب را می‌توان در [۱۲، ۱۴، ۸] مشاهده کرد.

هدف این مقاله، معرفی و اثبات دو معادل جدید برای اصل انتخاب است. این معادل‌ها به دو مفهوم سادهٔ توپولوژیک، یعنی نقطهٔ درونی و نقطهٔ حدی، مربوط هستند. برای مطالعه در مورد پیش‌نیازهای توپولوژیک می‌توانید به کتاب [۴] مراجعه کنید.

در ادامه لمی بیان و اثبات می‌شود که در اثبات قضیهٔ اصلی این مقاله استفاده خواهد شد.

لم ۱.۱ ([۱۳]). گزارهٔ زیر با اصل انتخاب معادل است.

- اگر Γ مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی دوبه‌دو مجزا باشد، آنگاه یک تابع انتخاب بر Γ وجود دارد.

اثبات. واضح است که گزارهٔ داده شده از اصل انتخاب نتیجه می‌شود. حال فرض کنید که گزارهٔ داده شده درست باشد، و مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی مانند Δ را در نظر بگیرید. در این صورت،

$$\Gamma := \{A \times \{A\} : A \in \Delta\}$$

1. Zorn's lemma 2. Hausdorff's maximal principle

مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی و دوبه‌دو مجزا است. با توجه به فرض، یک تابع انتخاب مانند f بر Γ وجود دارد. اکنون، اگر فرض کنیم که $f(A\times\{A\})=(x_A, A)$، تابع تعریف شده بر Δ به‌صورت $g(A):=x_A$ یک تابع انتخاب بر Δ است. $\square$

اگر A یک مجموعه از اعداد طبیعی باشد، کوچک‌ترین عضو A را با $\min(A)$ نمایش می‌دهیم. نماد $\mathbb{N}$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی است. اگر A زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژیک باشد، مجموعه‌های تمام نقاط درونی و نقاط حدی A را، به ترتیب، با $\operatorname{int}(A)$ و A' نشان می‌دهیم.

۲ معادل‌های توپولوژیک اصل انتخاب

قضیهٔ زیر دو معادل توپولوژیک برای اصل انتخاب ارائه می‌کند که، تا آنجا که اطلاع داریم، جدیدند.

قضیه ۱.۲. گزاره‌های زیر با اصل انتخاب معادل‌اند.

(۱) فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و Γ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی و دوبه‌دو مجزای X باشد که اجتماع آن‌ها زیرمجموعه‌ای سره از X است. در این صورت یک توپولوژی روی X موجود است که نسبت به آن، درون هر عضو Γ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است.

(۲) فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و Γ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای X باشد که هریک حداقل دو عضو دارند و اجتماع آن‌ها، زیرمجموعه‌ای سره از X است. در این صورت یک توپولوژی روی X موجود است که نسبت به آن، هر عضو Γ یک مجموعهٔ بسته با تنها یک نقطهٔ حدی است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (اصل انتخاب). تعریف کنید $G:=X-\bigcup_{A\in\Gamma}A$. با توجه به فرض، G ناتهی است. فرض کنید f یک تابع انتخاب بر $\Gamma\cup\{G\}$ باشد. حالا $f(G)$ را با β نمایش دهید و برای هر $A\in\Gamma$ تعریف کنید $\alpha_A:=f(A)$ و $B_A:=\{\{\alpha_A\},(A-\{\alpha_A\})\cup\{\beta\}\}$. سرانجام، تعریف کنید

$$\mathfrak{B}:=\left(\bigcup_{A\in\Gamma}B_A\right)\cup\{\{\beta\},G\}.$$

در این صورت، $\mathfrak{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر X است. در واقع،

- اجتماع تمام اعضاء $\mathfrak{B}$ برابر X است؛
- اگر دو عضو متمایز $\mathfrak{B}$ با هم اشتراک داشته باشند، این اشتراک تنها می‌تواند برابر $\{\beta\}$ باشد، که خود عضوی از $\mathfrak{B}$ است.

اکنون اگر $A \in \Gamma$ دلخواه باشد، آنگاه به این دلیل که $\{\alpha_A\} \in \mathfrak{B}$، نتیجه می‌گیریم که $\alpha_A \in \text{int}(A)$. اگر $x \in A - \{\alpha_A\}$، هر همسایگی x شامل مجموعهٔ $(A - \{\alpha_A\}) \cup \{\beta\}$ و در نتیجه β است. پس هیچ همسایگی x به‌طور کامل زیرمجموعه‌ای از A نیست. پس $x \notin \text{int}(A)$. بنابراین، $\text{int(A)} = \{\alpha_A\}$.

(اصل انتخاب) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی و دوبه‌دو مجزا باشد. عضو دلخواهی از $\mathcal{F}$ را ثابت در نظر بگیرید و آن را G بنامید. اگر $\mathcal{F}$ همین یک عضو را داشته باشد، یافتن یک تابع انتخاب بر $\mathcal{F}$ امری بدیهی است. در غیر این صورت، تعریف کنید

$$\Gamma := \mathcal{F} - \{G\}.$$

با توجه به قسمت (۱)، یک توپولوژی بر

$$X := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \qquad (۱.۲)$$

موجود است که نسبت به آن، درون هر عضو Γ، مجموعه‌ای تک‌عضوی است. اکنون، تابعی که به G عضوی دلخواه از آن، و به هر عضو Γ نقطهٔ درونی یکتای آن را نظیر می‌کند، یک تابع انتخاب بر $\mathcal{F}$ است.

(۲) $\Leftarrow$ (اصل انتخاب). تعریف کنید $G := X - \bigcup_{A \in \Gamma} A$. با توجه به فرض، G ناتهی است. عضو دلخواه β از G را ثابت در نظر بگیرید. با استفاده از اصل انتخاب، از هر عضو A از Γ، دو عضو متمایز α_A و γ_A را انتخاب کنید. برای هر $A \in \Gamma$ تعریف کنید

$$B_A := \{\{\alpha_A, \gamma_A\}, \{\gamma_A, \beta\}, \{\gamma_A\}\} \cup \{\{x, \beta\} : \ x \in A - \{\alpha_A, \gamma_A\}\}.$$

حالا

$$\mathfrak{B} := \left(\bigcup_{A \in \Gamma} B_A \right) \cup \{\{\beta\}, G\}$$

پایه‌ای برای یک توپولوژی بر X است، زیرا

- اجتماع تمام اعضاء $\mathfrak{B}$ برابر X است؛
- اگر دو عضو متمایز $\mathfrak{B}$ با هم اشتراک داشته باشند، این اشتراک تنها می‌تواند برابر $\{\beta\}$، یا $\{\gamma_A\}$ برای عضوی از Γ مانند A باشد، که در هر حالت عضوی از $\mathfrak{B}$ است.

اکنون فرض کنید $A \in \Gamma$ دلخواه باشد. هر همسایگی α_A شامل γ_A نیز هست. پس α_A یک نقطهٔ حدی A است. اگر x عضو دلخواهی از $X - \{\alpha_A\}$ باشد، نشان می‌دهیم که x یک نقطهٔ

حدی A نیست. برای این منظور، دو حالت در نظر می‌گیریم.

- $x \in G$. در این حالت بنویسید $D := G$.
- x به یکی از اعضاء Γ مانند C تعلق دارد. در این حالت، اگر $x = \alpha_C$ تعریف کنید $D := \{x, \gamma_C\}$ و در غیر این صورت $D := \{x, \beta\}$.

در هر حالت، D یک همسایگی از x است که اشتراک آن با $A - \{x\}$ تهی است. این نشان می‌دهد که A' برابر $\{\alpha_A\}$ است، پس A یک مجموعهٔ بسته نیز هست.

(اصل انتخاب) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی و دوبه‌دو مجزا باشد. عضو دلخواهی از $\mathcal{F}$ را ثابت در نظر بگیرید و آن را G بنامید. تعریف کنید

$$\Gamma := \mathcal{F} - (O \cup \{G\}),$$

که در آن O مجموعهٔ تمام اعضاء تک‌عضوی $\mathcal{F}$ است. دقت کنید که اگر Γ تهی باشد، یافتن یک تابع انتخاب بر $\mathcal{F}$ بسیار آسان است. در واقع، در این حالت کافی است عضوی دلخواه از G و از هر عضو O، تنها عضو آن را انتخاب کنیم. اگر Γ تهی نباشد، مجموعهٔ X را مطابق (۱.۲) تعریف کنید. با توجه به قسمت (۲)، یک توپولوژی بر X موجود است که نسبت به آن هر عضو Γ یک مجموعهٔ بسته با تنها یک نقطهٔ حدی است. اکنون، تابعی که به G عضوی دلخواه از آن، به هر عضو O تنها عضو آن، و به هر عضو Γ تنها نقطهٔ حدی آن را نظیر می‌کند، یک تابع انتخاب بر $\mathcal{F}$ است. $\square$

در پایان، فرآیند نتیجه گرفتن گزاره‌های (۱) و (۲) از اصل انتخاب را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۲.۲. فرض کنید $X = \mathbb{N}$ و $\Gamma = \{A_n : n \in \mathbb{N} - \{۱\}\}$، که در آن $A_n := \{۳n - ۲, ۳n - ۱, ۳n\}$. در این صورت، Γ در فرض‌های (۱) و (۲) قضیهٔ بالا صدق می‌کند. همچنین،

$$G := X - \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{۱\}} A_n = \{۱, ۲, ۳\}.$$

- فرض کنید تابع انتخاب f بر $\Gamma \cup \{G\}$ به‌صورت $f(A) = \min(A)$ تعریف شده باشد. در این صورت، عناصر پایهٔ $\mathfrak{B}$ که در اثبات استلزام (۱) $\Leftarrow$ (اصل انتخاب) شرح داده شد، عبارت‌اند از

$$\{۴\}, \{۷\}, \{۱۰\}, \ldots; \{۱, ۵, ۶\}, \{۱, ۸, ۹\}, \{۱, ۱۱, ۱۲\}, \ldots; \{۱\}, \{۱, ۲, ۳\}.$$

- اگر فرآیند انتخاب را مشابه قسمت قبل در نظر بگیریم، عناصر پایهٔ $\mathfrak{B}$ که در اثبات استلزام (۲) $\Rightarrow$ (اصل انتخاب) شرح داده شد، عبارت‌اند از

$$\{۴, ۵\}, \{۷, ۸\}, \{۱۰, ۱۱\}, \ldots; \{۱, ۵\}, \{۱, ۸\}, \{۱, ۱۱\}, \ldots;$$

$$\{۵\}, \{۸\}, \{۱۱\}, \ldots; \{۱, ۶\}, \{۱, ۹\}, \{۱, ۱۲\}, \ldots; \{۱\}, \{۱, ۲, ۳\}.$$

مراجع

[۱] امیری، حبیب، پارادوکس باناخ–تارسکی و اثبات آن، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۳** (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۲۳۹–۲۵۸.

[۲] گرینبرگ، ماروین جی.، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۹.

[۳] لین، شوو ینگ تی.؛ لین، یو–فنگ، نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن، ترجمهٔ عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۸.

[۴] مانکرز، جمیز ر.، توپولوژی، نخستین درس، ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لالی، و نادر وکیل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۶.

[5] Banach, S., Tarski, A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.*, **6** (1924), 244-277.

[6] Bernays, P., *Axiomatic Set Theory*, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1968.

[7] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1999.

[8] Hosseini Giv, H., The axiom of choice, well-ordering, and well-classification, *Amer. Math. Monthly*, **122** (2015), 56-59.

[9] Howard, P., Rubin, J. E., *Consequences of the Axiom of Choice*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1998.

[10] Jech, T. J., *The Axiom of Choice*, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1973.

[11] Jech, T. J., *Set Theory: The Third Millennium Edition*, revised and expanded, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[12] McCartan, S. D., Topological equivalents of the axiom of choice, *Bull. Irish Math. Soc.*, **21** (1988), 45-48.

[13] Rubin, H., Rubin, J. E., *Equivalents of the Axiom of Choice*, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1970.

[14] Schechter, E., Two topological equivalents of the axiom of choice, *Math. Logic Quarterly*, **38** (1992), 555-557.

[15] Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1960.

[16] Wagon, S.. *The Banach–Tarski Paradox*, Cambridge University Press. 1985.

[17] Zermelo, E., Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Annalen*, **59** (1904), 514-516.

حسین حسینی گیو: دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی
رایانامه: giv@math.usb.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 2, Autumn/Winter 2025, Pages 27–35
doi: 10.30504/mct.2025.1530.2071

Two Topological Equivalents of the Axiom of Choice

H. Hosseini Giv

Department of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

Abstract. In this article, after presenting a brief review of the axiom of choice, its applications and challenges, we prove two new topological equivalents of this important axiom. Understanding these equivalents only requires familiarity with the axiom of choice, some preliminaries of naive set theory, and the basics of general topology. For this reason, these equivalents can serve as an accessible sample for undergraduate students of mathematics to begin research activities.

Keywords: axiom of choice, interior point, limit point
Article history: Received 18 October 2025; Accepted 1 December 2025
Article type: original

1. giv@math.usb.ac.ir