فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۵، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۵)، صص ۴۱ تا ۶۲

شناسایی گروه‌های متناهی از روی مجموع مرتبهٔ عناصر گروه

حبیب امیری، سید مجید جعفریان امیری✉

چکیده. یکی از اصلی‌ترین مفاهیم در نظریهٔ گروه‌های متناهی مفهوم مرتبهٔ عناصر گروه است. اخیراً به نقش مهمی که این عدد در تعیین ساختار گروه دارد توجه زیادی شده است. در این مقاله مروری می‌کنیم بر مهم‌ترین نتایج به دست آمده دربارهٔ توابع مرتبط با مرتبهٔ عناصر یک گروه و نقش آن در شناسایی گروه‌های متناهی.

۱ مقدمه و آغاز داستان

اینکه مرتبهٔ یک عنصر یکی از کمیت‌های مهم در نظریهٔ گروه‌های متناهی است کاملاً واضح است، اما اینکه تا چه اندازه این کمیت و توابع مرتبط با آن در تعیین ساختار گروه مؤثرند تا همین اواخر مغفول مانده بود. در سال ۱۳۸۸ یکی از نویسندگان حاضر از دیگری که متخصص نظریهٔ گروه‌ها بود پرسید: آیا تابع مجموع مرتبهٔ عناصر روی گروه‌های متناهی به عنوان یک ابزار برای شناسایی گروه‌های متناهی تاکنون به کار برده شده است؟ مثلاً روی گروه‌های هم‌مرتبهْ این تابع در چه گروه یا گروه‌هایی بیشترین مقدار را دارد؟ پاسخ به این سؤال را دو نویسندهٔ اول مقالهٔ [۱] در یک مقالهٔ پانزده صفحه‌ای که شامل اثبات‌های طولانی و محاسبات طاقت‌فرسا بود تهیه و برای چاپ ارسال کردند. سردبیر وقت مجله پس از مدتی با ارسال نامه به نویسندگان اطلاع داد که می‌خواهد یک کار غیر مرسوم انجام دهد و آن این است که می‌خواهد هویّت داور مقاله را برای نویسندگان مقاله فاش کند و در ادامه نوشته بود که داور مارتین آیزاکس[1] است و او به موضوع و مسئله علاقه‌مند شده و

عبارات و کلمات کلیدی: گروه متناهی، مرتبه عنصر، مجموع مرتبه عناصر، گروه حل‌پذیر
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۶/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۱۰

1. Martin Isaacs

© ۱۴۰۵(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2025.1570.2105

اثبات نتیجهٔ اصلی مقاله را در سه‌صفحه ارائه داده است و تمایل دارد نامش نیز به عنوان همکار به نویسندگان اضافه شود. پس از آن، دو نویسندهٔ اول مقاله با خرسندی از این درخواست استقبال کردند و این مقاله به چاپ رسید. بدون شک روحیهٔ همکاری و اشتیاق آیزاکس به نشر این موضوع و اثبات زیبای مسئله بود که باعث شد شهرت و اعتبار علمی خود را نادیده بگیرد و از سردبیر مجله چنین درخواست غیرمرسومی کند. گفتنی است که موضوع مقاله به نظر آیزاکس گویا چنان بکر بود که ارجاع به هیچ مرجعی را برای آن مقاله لازم ندید.

اکنون شرح مسئله. اصطلاحات و نمادهای به کار رفته در سراسر این نوشته در نظریهٔ گروه‌ها متداول است: G همواره یک گروه متناهی است و مرتبهٔ عضو $g \in G$ را با $o(g)$ و مرکزی‌ساز g در G را با $C_G(g)$ نمایش می‌دهیم. یکی از مهم‌ترین توابع این مقاله این است.

تعریف ۱.۱ ([۱]). برای گروه متناهی G تعریف کنید

$$\psi(G) = \sum_{g \in G} o(g).$$

ازجمله نتایج اولیه دربارهٔ این تابع می‌توان به احکام زیر اشاره کرد.

لم ۲.۱. فرض کنید G و H دو گروه باشند. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند.

(۱) $\psi(G)$ همواره عددی فرد است و داریم $\psi(G) \geq ۱ + ۲(|G| - ۱)$. همچنین تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی باشد.

(۲) $\psi(G \times H) \leq \psi(G)\psi(H)$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر داشته باشیم $\gcd(|G|, |H|) = ۱$. به عبارت دیگر، تابع ψ ضربی است.

(۳) اگر C_{p^r} گروه دوری از مرتبهٔ p^r باشد که در آن p یک عدد اول است و $r \geq ۰$، آنگاه $\psi(C_{p^r}) = \frac{p^{۲r+۱}+۱}{p+۱}$.

قصد ما در این مقاله شناسایی گروه متناهی G با استفاده از تابع $\psi(G)$ درکنار برخی اطلاعات دیگر است. یکی از این اطلاعات می‌تواند تعداد اعضای گروه، $|G|$، باشد. هرچند در حالت کلی دستیابی به ساختار G با دانستن $\psi(G)$ و $|G|$ امکان‌پذیر نیست. مثلاً در [۱] فهرستی از اعداد طبیعی $n \leq ۱۰۰$ آمده است که در آن گروه‌های نایکریخت $G_۱$ و $G_۲$ از مرتبهٔ n وجود دارند به‌طوری که $\psi(G_۱) = \psi(G_۲)$. اما گروه‌های دوری توسط مرتبه و مجموع مرتبهٔ عناصرشان قابل شناسایی هستند؛ این حکم تنها نتیجهٔ اصلی [۱] است که آن را در زیر می‌آوریم.

قضیه ۳.۱. فرض کنید G گروه غیردوری از مرتبهٔ n باشد. در این صورت $\psi(G) < \psi(C_n)$ که در آن C_n گروه دوری از مرتبهٔ n است.

قضیهٔ بالا می‌گوید که در میان گروه‌های متناهی هم‌مرتبه گروه دوری بزرگ‌ترین مجموع مرتبهٔ عناصر را دارد. البته می‌توان گروه‌هایی را یافت که تنها توسط مجموع مرتبهٔ عناصرش قابل شناسایی باشد. مثلاً اگر $\psi(G) = ۲۱۱$ آنگاه $G \cong A_۵$، که در آن $A_۵$ گروه متناوب از درجهٔ ۵ است.

اکنون سؤال‌های بسیاری را می‌توان با توجه به قضیهٔ ۳.۱ مطرح کرد: در میان گروه‌های هم‌مرتبه کدام گروه یا گروه‌ها دارای کمترین مجموع مرتبهٔ عناصرند و یا درمیان گروه‌های غیردوری هم‌مرتبه کدام گروه یا گروه‌ها دارای بزرگ‌ترین مجموع مرتبهٔ عناصرند؟ یا چه توابع دیگری مرتبط با مرتبهٔ عناصر می‌توانند به شناسایی گروه کمک کنند؟ به این سؤال‌ها در بخش‌های بعدی مقاله پاسخ می‌دهیم و مقاله را با مختصری از شرح زندگی مارتین آیزاکس، که از متخصصان برجستهٔ معاصر نظریهٔ گروه‌ها بود، و نقش بارز او در نظریهٔ گروه‌ها به پایان می‌بریم.

۲ ماکسیمم و مینیمم تابع $\psi(G)$

۱.۲ کوچک‌ترین مجموع مرتبهٔ عناصر گروه‌های هم‌مرتبه

این بخش را با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. عدد طبیعی n را پوچ‌توان گویند اگر هر گروه از مرتبهٔ n پوچ‌توان باشد.

فرض کنید $n > ۱$ عدد طبیعی باشد به‌طوری که $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ که در آن p_iها اعداد اول متمایزند. بنابر قضیهٔ ۲ از [۵۴] عدد n پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $p_i \nmid p_j^{\beta_j} - ۱$ برای هر $i \neq j$ و هر $۱ \leq \beta_j \leq \alpha_j$. در قضیهٔ زیر اطلاعاتی از ساختار گروه‌هایی می‌دهیم که کمترین مجموع مرتبهٔ عناصر را درمیان گروه‌های هم‌مرتبه دارند [۲].

قضیه ۲.۲. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یکی از احکام زیر برقرار است.

(۱) فرض کنید n پوچ‌توان و G یک گروه از مرتبهٔ n باشد. در این صورت $\psi(G) \leq \psi(H)$ برای هر گروه H از مرتبهٔ n برقرار است اگر و تنها اگر نمای[1] هر زیرگروه سیلوی G اول باشد.

(۲) فرض کنید n پوچ‌توان نباشد و K گروهی از مرتبهٔ n باشد در این صورت K غیرپوچ‌توان است اگر G گروهی از مرتبهٔ n است : $\psi(K) = \min\{\psi(G)$.

1. exponent

طبعاً جالب است بدانیم که برای مرتبه‌هایی که شامل گروه یا گروه‌هایی سادهٔ ناآبلی هستند، کمترین مجموع مرتبهٔ عناصر در کدام گروه یا گروه‌ها اتفاق می‌افتد. با استفاده از نرم‌افزار GAP می‌توان بررسی کرد که برای بعضی گروه‌های ساده حدس زیر که در [۲] مطرح شده معتبر است.

حدس ۳.۲. اگر S یک گروه سادهٔ ناآبلی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه برای هر گروه غیرسادهٔ G از مرتبهٔ n داریم $\psi(G) > \psi(S)$.

البته حدس فوق برای گروه‌های A_5 و $\mathrm{PSL}(2,7)$ در [۳۹] تأیید شده است. همچنین در سال ۲۰۱۹ این حدس در [۱۱] برای گروه‌های $\mathrm{PSL}(2,p)$ با $p \in \{11, 13, 19, 23, 29, 37, 61\}$ هم اثبات شد. ولی در [۵۰] مثال نقض برای حدس فوق ارائه شده است. درحقیقت نویسندگان نشان دادند که برای گروه سادهٔ $\mathrm{PSL}(2,64)$ داریم $|C_3^2 \times \mathrm{Sz}(8)| = |\mathrm{PSL}(2,64)|$، ولی

$$\psi(C_3^2 \times \mathrm{Sz}(8)) = 54827745 < \psi(\mathrm{PSL}(2,64)) = 121066875.$$

توجه کنید که گروه $C_3^2 \times \mathrm{Sz}(8)$ غیرحل‌پذیر است و لذا حدس فوق به‌صورت زیر در [۲۸] اصلاح شده است.

حدس ۴.۲. اگر S یک گروه ساده و G یک گروه حل‌پذیر باشد به‌طوری که $|G| = |S|$ آنگاه $\psi(S) < \psi(G)$.

برای این حدس هم در [۳۸] مثال نقض $S = \mathrm{PSL}(2,64)$ و $G = H \times K$ ارائه شد: گروه‌های H و K در نرم افزار Magma به صورت زیرند

$$H = C_{65} \rtimes (C_{12} \times C_2) = \mathrm{SmallGroup}(1560, 150),$$

$$K = (C_2^3 \rtimes C_7) \rtimes C_3 = \mathrm{SmallGroup}(168, 43).$$

می‌توان بررسی کرد که $\psi(G) < \psi(S)$.

پیتر کمرون و همکارش در [۱۳] با الهام از نتایجی که با استفاده از تابع ψ و توابع دیگر به دست آمده است و با هدف ارائه رویکردی واحد به مطالعهٔ آن توابع دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر یک گروه متناهی G از مرتبهٔ n را با $os(G) = (o(g_1), o(g_2), \ldots, o(g_n))$ تعریف کرد که در آن $o(g_i) \leq o(g_{i+1})$ برای $1 \leq i \leq n-1$. بنابر [۱۳] برای دو گروه متناهی G و H از مرتبهٔ n، گوییم $os(G)$ بر $os(H)$ مسلط است و می‌نویسیم $os(H) \leq os(G)$ هرگاه $o(h_i) \leq o(g_i)$

برای هر $1 \leq i \leq n$. این رابطه فقط یک ترتیب جزئی است. درواقع، گروه‌های متناهی هستند که دنبالهٔ مرتبه‌های آن‌ها با هم مقایسه‌پذیر نیستند.

در [۴۹] حدس رد شدهٔ ۴.۲ به‌صورت حدس زیر ترمیم شده است. در آنجا گفته شده است که با استفاده از GAP در تمامی حالات بالا که گروه سادهٔ S کمترین مجموع مرتبهٔ عناصر را در بین گروه‌های هم مرتبه دارد، دنبالهٔ مرتبه‌های عناصر گروه ساده در بین مجموعهٔ دنباله‌های مرتبه‌های عناصر گروه‌های هم‌مرتبه نیز با ترتیب جزئی یادشده عضو مینیمال است، اما در مورد مثال نقض $C_2^2 \times S_z(8)$ که برای آن $\psi(C_2^2 \times S_z(8)) < \psi(\mathrm{PSL}(2,64))$ نشان داده شده است که دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر این دو گروه با هم مقایسه‌پذیر نیستند. بررسی ما نیز نشان می‌دهد که دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر گروه G تعریف‌شده در [۳۸]، که مثال نقضی برای حدس ۴.۲ است، نیز با دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر گروه سادهٔ $\mathrm{PSL}(2,64)$ مقایسه‌پذیر نیست. با توجه به این مطالب در [۴۹] سؤال زیر مطرح شده است.

مسئله ۵.۲. فرض کنید که n به‌گونه‌ای باشد که یک گروه سادهٔ S از مرتبهٔ n موجود است. آیا $os(S)$ بین تمام $os(G)$ که G با S هم‌مرتبه است مینیمال است؟

اگر بخواهیم حدس بالا را با مفهوم دنبالهٔ مرتبه‌ها گره بزنیم و آن را ترمیم کنیم به‌صورت زیر در می‌آید.

حدس ۶.۲. مثال نقضی برای حدس ۳.۲ وجود ندارد که S گروهی ساده، G گروهی هم‌مرتبه با S و $os(G)$ با $os(S)$ مقایسه شود ولی $\psi(G) < \psi(S)$. به بیان دیگر، دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر گروه‌های ساده بین مجموعهٔ دنبالهٔ مرتبهٔ عناصر گروه‌های هم‌مرتبه مینیمال است.

با توجه به قضیه‌های ۳.۱ و ۲.۲ طبیعی است که ساختار گروه‌هایی را بررسی کنیم که دارای دومین بیشینه مجموع مرتبهٔ عناصر در میان گروه‌های هم‌مرتبه باشند.

۲.۲ دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر گروه‌های هم‌مرتبه

برخلاف ماکسیمم و مینیمم مجموع مرتبهٔ عناصر در میان گروه‌های هم‌مرتبهْ یافتن ساختار گروه‌هایی که دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر در میان گروه‌های هم‌مرتبهٔ n را دارند به تجزیهٔ n به عوامل اول و توان‌های آن‌ها وابسته است. در سال ۲۰۱۳ اولین نتیجه در این زمینه در [۴۰] روی برخی گروه‌های پوچ‌توان از مرتبهٔ n به صورت زیر به دست آمد.

قضیه ۷.۲. فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ که در آن $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ اعداد اول‌اند و $\alpha_i \geq 1$ برای هر i. بنویسید $s = \min\{1, 2, \cdots, k\}$ اگر $\alpha_s > 1$. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان غیردوری از مرتبهٔ n باشد. در این صورت

(۱) اگر $p_1^{\alpha_1} \neq 8$ آنگاه $\psi(G) \leq \psi(C_{\frac{n}{p_s}} \times C_{p_s})$.

(۲) اگر $p_1^{\alpha_1} = 8$ آنگاه $\psi(G) \leq \psi(C_{\frac{n}{8}} \times Q_8)$ که در آن Q_8 گروه چهارگان از مرتبهٔ ۸ است.

همچنین حدس زیر نیز در [۴۰] مطرح شده است.

حدس ۸.۲. فرض کنید n در مفروضات قضیهٔ ۷.۲ صدق کند. اگر به‌ازای هر i داشته باشیم $\alpha_i > 1$ آنگاه دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر در میان گروه‌های از مرتبهٔ n در یک گروه پوچ‌توان اتفاق می‌افتد.

در سال ۲۰۱۴ قضیهٔ ۷.۲ با شرط $\alpha_1 > 1$ به همهٔ گروه‌ها از مرتبهٔ n (اعم از پوچ‌توان و غیرپوچ‌توان) تعمیم داده شد (قضیهٔ ۲.۱ از [۴۲]) و لذا با این تعمیم حدس فوق هم تأیید شد. البته در [۵۳] بدون اطلاع از نتایج [۴۲] همان نتایج به دست آمده است. به نظر می‌رسد حالت $\alpha_1 = 1$ وضعیت بسیار پیچیده‌ای دارد؛ جدول زیر را ملاحظه کنید.

دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر به‌ازای $\alpha_1 = 1$

n	ساختار گروه با دومین مقدار ماکسیمم ψ	پوچ‌توان بودن
۱۵۰	$C_{25} \times S_3$	خیر
۶۰۵	$C_{55} \times C_{11}$	بله
۳۵۴۹	$C_{169} \times (C_7 : C_3)$	خیر
۱۴۴۱۵	$C_5 \times (C_{961} : C_3)$	خیر

یکی از حالت‌های خاص برای $\alpha_1 = 1$ آن است که تمامی α_iها برای $1 \leq i \leq k$ برابر ۱ باشند. به عبارت دیگر، n خالی از مربع باشد. در این حالت خاص نیز ساختار گروه‌ها با دومین مقدار ماکسیمم در [۴۵] تعیین شده است. به‌علاوه، هرتسوگ، لانگوباردی و مای در [۲۵] ساختار گروه‌های با دومین مقدار ماکسیمم را به‌ازای $n = 2m$ به شرطی که m فرد باشد تعیین کرده‌اند. در [۲۵] نویسندگان با کمی تحلیل بیشتر از گروه‌ها از مرتبهٔ $2m$ که m عددی فرد است نامساوی قضیهٔ ۳.۱ را بهبود بخشیده‌اند. آن‌ها ثابت کرده‌اند که اگر G گروهی غیردوری از مرتبهٔ $n = 2m$

باشد که در آن m عددی فرد است، آنگاه $\psi(G) \leq \frac{۱۳}{۲۱}\psi(C_n)$. به‌علاوه $\psi(G) = \frac{۱۳}{۲۱}\psi(C_n)$ اگر و فقط اگر $G = S_۳ \times C_{\frac{n}{۶}}$ که $n = ۶m_۱$ و $\gcd(m_۱, ۶) = ۱$. آن‌ها همچنین ثابت کرده‌اند اگر $n = ۲m$ که در آن m عددی فرد است و $m = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_t^{\alpha_t}$ و : $\ell = \min\{p_i^{\alpha_i}$ $i = ۱, ۲, \dots, t\}$، در این صورت برای هر گروه غیردوری G از مرتبهٔ n داریم $\psi(G) \leq \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۲\ell}{۳\psi(C_\ell)}\right)\psi(C_n)$. همچنین تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = D_{۲\ell} \times C_{\frac{n}{۲\ell}}$ که در آن D_k گروه دو وجهی از مرتبهٔ k است. سرانجام آن‌ها در سال ۲۰۲۱ حالت باقی مانده، یعنی برای $\alpha_۱ = ۱$ و n فرد، نیز وضعیت دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر را مشخص و کار را در این زمینه تکمیل کردند [۳۰].

البته از دیدگاهی دیگر نیز می‌توان دومین مقدار ماکسیمم مجموع مرتبهٔ عناصر را بررسی کرد: آیا نامساوی مطرح‌شده در قضیهٔ ۳.۱ را می‌توان بهبود بخشید؟ به عبارت دیگر، تعیین بزرگ‌ترین مقدار $۰ < c < ۱$ به‌طوری که $\psi(G) \leq c\psi(C_n)$ برای گروه‌های غیردوری G از مرتبهٔ n برقرار باشد و همچنین تعیین بهترین ثابت c.

۳.۲ کران‌هایی برای تابع $\psi(G)$

در ادامه این بخش، G همواره یک گروه غیردوری از مرتبهٔ n را نشان می‌دهد. با نگاه به قضیهٔ ۳.۱ این سؤال به ذهن می‌رسد که بهترین کران بالا برای $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)}$ چیست.

درسال ۲۰۱۸، هرتسوگ و همکارانش [۲۳] نشان دادند که برای یک گروه غیردوری از مرتبهٔ n، $\psi(G) \leq \frac{۷}{۱۱}\psi(C_n)$. همچنین در [۲۷] نشان دادند که تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $n = ۴k$ و $G \cong C_۲ \times C_۲ \times C_k$ که در آن k عددی فرد است.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که بهترین ثابت c برای n فرد چیست؟ برای این سؤال نیز هرتسوگ و همکارانش ابتدا ثابت کردند که $\psi(G) < \frac{۱}{q-۱}\psi(C_n)$ که در آن q کوچک‌ترین عامل اول n است و نتیجه گرفتند که اگر n فرد باشد، آنگاه $\psi(G) < \frac{۱}{۲}\psi(C_n)$. سرانجام آن‌ها توانستند [۲۷] بهترین کران بالا را در حالت کلی به دست آورند. درحقیقت آن‌ها نشان دادند که اگر q کوچک‌ترین عامل اول n باشد، آنگاه

$$\psi(G) \leq \frac{((q^۲ - ۱)q + ۱)(q + ۱)}{q^۵ + ۱}\psi(C_n)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $n = q^۲k$ و $G \cong C_q \times C_q \times C_k$ که در آن $\gcd(q, k) = ۱$. اگر $q = ۲$ همان کران قبلی $\frac{۷}{۱۱}$ به دست می‌آید. با استفاده از نتایج اصلی [۴۲، ۲۵، ۲۳] کران

قضیهٔ ۳.۱ را می‌توان در حالتی که n زوج باشد به‌صورت زیر خلاصه کرد [۳۰].

قضیه ۹.۲. فرض کنید $n = ۲^{\alpha}m$ که در آن $\alpha \geq ۱$ و m یک عدد فرد است. در این صورت

(۱) اگر $\alpha = ۱$، آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{۱۳}{۲۱} = \frac{\psi(S_۳)}{\psi(C_۶)}$.

(۲) اگر $\alpha = ۲$، آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{۷}{۱۱} = \frac{\psi(C_۲ \times C_۲)}{\psi(C_۴)}$.

(۳) اگر $\alpha = ۳$، آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{۲۷}{۴۳} = \frac{\psi(Q_۸)}{\psi(C_۸)}$.

(۴) اگر $\alpha \geq ۴$، آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{۲^{\alpha+۳}+۷}{۷(۲^{\alpha+۱}+۱)} = \frac{\psi(G_۱)}{\psi(C_{۲\times ۲^{\alpha}})}$ که در آن

$$G_۱ = \langle a, b : a^{۲^{\alpha}} = b^{۳} = ۱,\ b^{a} = b^{-۱} \rangle.$$

نتایج به دست آمده در [۳۴] درخصوص مقایسهٔ $\psi(G)$ با $\psi(C_n)$ را وقتی که G غیردوری و از مرتبهٔ فرد است در قضیهٔ زیر می‌بینیم.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید G گروهی متناهی و غیردوری از مرتبهٔ $n = qm$ باشد که در آن n عددی فرد و q کوچک‌ترین شمارندهٔ m است و $(m, q) = ۱$. در این‌صورت

(۱) اگر $q = ۳$ آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{۸۵}{۳۰۱}$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $n = ۳ \times ۷ \times m_۱$ که در آن $(m_۱, ۴۲) = ۱$ و $G = (C_۷ \rtimes C_۳) \times C_{m_۱}$ و $C_۷ \rtimes C_۳$ غیرآبلی است.

(۲) اگر $q > ۳$، آنگاه $\frac{\psi(G)}{\psi(C_n)} \leq \frac{p^{۴}+p^{۳}-p^{۲}-۱}{p^{۵}+۱}$ که در آن p کوچک‌ترین عامل اول بزرگ‌تر از q برای n است. در این حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $n = qp^{۲}m_۱$ که در آن $(m_۱, p!) = ۱$ و $G = C_q \times C_p \times C_p \times C_{m_۱}$.

در [۱۲] یک کران بالای دقیق برای $\psi(G)$ به‌شرطی که G گروهی غیرآبلی از مرتبهٔ فرد است به دست آمده است. با کمی تحلیل بیشتر آن‌ها توانسته‌اند ثابت کنند که اگر q عددی اول و فرد و G گروهی ناآبلی باشد که در آن q کوچک‌ترین شمارندهٔ مرتبه آن است، در این صورت $\psi(G) \leq \frac{q^{۶}+q^{۳}-q^{۲}+۱}{q^{۷}+۱}\psi(C_n)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G حاصل‌ضرب مستقیم $M_{q^{۳}}$ و یک گروه دوری با مرتبهٔ اول نسبت به q است و

$$M_{q^{۳}} = \langle a, b : a^{q^{۲}} = b^{q} = ۱, a^{b} = a^{۱+q} \rangle.$$

۳ محک‌های حل‌پذیری و پوچ‌توانی برحسب $\psi(G)$

در نظریهٔ گروه اینکه تحت چه شرایط یا اطلاعاتی (از نظر کیفی یا کمی) روی زیرگروه‌ها یا عناصر گروه G حل‌پذیری G نتیجه می‌شود از اهمیت خاصی برخوردار است. هدف از این بخش ارائهٔ کرانی

برای $\psi(G)$ برحسب $|G|$ است که حل‌پذیر یا پوچ‌توانی G را نتیجه دهد. در سال ۲۰۱۸، ابتدا هرتسوگ و دو همکار همیشگی ایتالیایی‌اش به نام‌های لانگوباردی و مای در [۲۴] نتیجه زیر را به دست آوردند.

قضیه ۱.۳. فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ n باشد به شرطی که $\psi(G) \geq \frac{۱}{۶۴۸}\psi(C_n)$. در این صورت G حل‌پذیر است.

توجه کنید که $A_۵$ (از مرتبهٔ ۶۰) کوچک‌ترین گروه غیرحل‌پذیر است و

$$\psi(A_۵) = \frac{۲۱۱}{۱۶۱۷}\psi(C_{۶۰}) < \frac{۱}{۶۴۸}\psi(C_{۶۰}).$$

با الهام از این اطلاعات در [۲۴] حدس زیر مطرح شد.

حدس ۲.۳. فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ n با شرط $\psi(G) > \frac{۲۱۱}{۱۶۱۷}\psi(C_n)$ باشد. در این صورت G حل‌پذیر است و کران پایین داده شده بهترین مقدار ممکن است.

حدس فوق را در همان سال خسروی و همکارش [۸] اثبات کردند. اکنون با توجه به بهینه‌بودن کران پایین در حدس بالا این سؤال مطرح است که در مورد گروه غیرحل‌پذیر G با شرط $\psi(G) = \frac{۲۱۱}{۱۶۱۷}\psi(C_n)$ چه می‌توان گفت؟ پاسخ به این سؤال و صورت اصلاح‌شدهٔ حدس بالا در [۹] آورده شده است. در آنجا ثابت شده است که اگر G گروهی غیرحل‌پذیر از مرتبهٔ n و $\psi(G) = \frac{۲۱۱}{۱۶۱۷}\psi(C_n)$ آنگاه $n = ۶۰m$ که در آن $\gcd(۳۰, m) = ۱$ و G یکریخت با $A_۵ \times C_m$ است.

محک دیگری در خصوص حل‌پذیری را هرتسوگ و همکارانش [۲۳] به صورت زیر به دست آورده‌اند.

قضیه ۳.۳. (۱) فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ n و عدد اول q کوچک‌ترین شمارندهٔ n باشد. اگر $\psi(G) \geq \frac{۱}{۲(q-۱)}\psi(C_n)$ آنگاه G حل‌پذیر است.

(۲) فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ n باشد و $\psi(G) \geq \frac{۳}{۵}n\varphi(n)$ که در آن φ تابع فی اویلر است. در این صورت G حل‌پذیر است و $G'' \leq Z(G)$.

(۳) فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ n باشد. به‌علاوه فرض کنید q و p به‌ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین شمارنده‌های اول n باشد با شرط $\psi(G) \geq \frac{۱}{q}n\varphi(n)$. در این صورت یا p-زیرگروه سیلوی G دوری و نرمال است یا G حل‌پذیر با زیرگروه بیشین دوری از شاخص p یا $p+۱$ است.

در سال ۲۰۱۹ تارناسینو [۵۸] یک محک پوچ‌توانی به‌صورت زیر ارائه داد.

قضیه ۴.۳. اگر G یک گروه از مرتبهٔ n باشد و $\psi(G) > \frac{۱۳}{۲۱}\psi(C_n)$، آنگاه G پوچ‌توان است. به‌علاوه $\psi(G) = \frac{۱۳}{۲۱}\psi(C_n)$ اگر و تنها اگر $G \cong S_۳ \times C_m$ به شرطی که $\gcd(m, ۶) = ۱$.

همچنین در سال ۲۰۲۰ تارناسینو [۶۱] به ترتیب محک‌های زیر را برای دوری، آبلی، پوچ‌توانی، ابرحل‌پذیری، و حل‌پذیر بودن یک گروه به‌صورت زیر اثبات کرد.

قضیه ۵.۳. فرض کنید G یک گروه از مرتبهٔ n باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(۱) اگر $\psi(G) > \frac{۷}{۱۶}n^۲$ آنگاه G دوری است.

(۲) اگر $\psi(G) > \frac{۲۷}{۶۴}n^۲$ آنگاه G آبلی است.

(۳) اگر $\psi(G) > \frac{۱۳}{۳۶}n^۲$ آنگاه G پوچ‌توان است.

(۴) اگر $\psi(G) > \frac{۳۱}{۱۴۴}n^۲$ آنگاه G ابرحل‌پذیر است.

(۵) اگر $\psi(G) > \frac{۲۱۱}{۳۶۰۰}n^۲$ آنگاه G حل‌پذیر است.

در [۶۱] این سؤال مطرح شده است که آیا گروه G را که برای آن $\psi(G)$ دقیقاً برابر کران‌های پایین قضیهٔ بالا است می‌توان شناسایی کرد یا به بیان دیگر این گروه‌ها چه گروه‌هایی هستند؟ جوابی جزئی به این سؤال در [۱۰] به صورت زیر آمده است.

قضیه ۶.۳. اگر G یک گروه متناهی از مرتبهٔ n باشد آنگاه احکام زیر برقرار است.

(۱) اگر G دوری نباشد و $\psi(G) = \frac{۷}{۱۶}n^۲$ آنگاه $n = ۴$ و $G = C_۲ \times C_۲$.

(۲) اگر G دوری نباشد و $\psi(G) = \frac{۲۷}{۶۴}n^۲$ آنگاه $n = ۸$ و $G = Q_۸$.

(۳) اگر G دوری نباشد و $\psi(G) = \frac{۱۳}{۳۶}n^۲$ آنگاه $n = ۶$ و $G = S_۳$.

(۴) اگر G ابرحل‌پذیر نباشد و $\psi(G) = \frac{۳۱}{۱۴۴}n^۲$ آنگاه $n = ۱۲$ و $G = A_۴$.

(۵) اگر G حل‌پذیر نباشد و $\psi(G) = \frac{۲۱۱}{۳۶۰۰}n^۲$ آنگاه $n = ۶۰$ و $G = A_۵$.

و نتیجهٔ دیگری از [۱۰] به شرح زیر است.

قضیه ۷.۳. اگر $p > ۵$ عددی اول و G گروهی غیر p-پوچ‌توان باشد آنگاه

$$\frac{\psi(G)}{|G|^۲} \leq \frac{p^۲ + p + ۱}{۴p^۲} = \frac{\psi(D_{۲p})}{۴p^۲}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $|G| = ۲p$ و $G = D_{۲p}$.

خسروی و همکارش نشان دادند [۷] که اگر G گروهی از مرتبهٔ n و $\psi(G) > \frac{p^۲+p+۱}{۴p^۲}n^۲$

باشد که در آن p عددی اول است، آنگاه G دارای p–زیرگروه سیلوی دوری مرکزی است. به‌علاوه G ابرحل‌پذیر است و $G'' \leq Z(G)$.

۴ شناسایی گروه‌ها توسط $\psi(G)$ و $|G|$

واضح است که اگر G و H دو گروه متناهی باشند و $G \cong H$ آن وقت داریم $\psi(G) = \psi(H)$. ولی با توجه به مطالب گفته‌شده بعد از لم ۲.۱ می‌دانیم گروه‌هایی هم‌مرتبه با مجموع مرتبهٔ عناصر برابر وجود دارند که یکریخت نیستند. لذا این سؤال جالب مطرح می‌شود که برای چه گروه‌های G و Hای از شرط $\psi(G) = \psi(H)$ (یا حتی شرط اضافهٔ $|G| = |H|$) می‌توان نتیجه گرفت $G \cong H$.

بنا به قضیهٔ ۳.۱، گروه دوری توسط مجموع مرتبهٔ عناصر و مرتبهٔ خود گروه کاملاً مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، اگر G یک گروه از مرتبهٔ n باشد و $\psi(G) = \psi(C_n)$ آنگاه $G \cong C_n$. در [۵۷] نتیجه زیر اثبات شده است.

قضیه ۱.۴. فرض کنید G و H دو p–گروه آبلی و p عددی اول باشد. اگر داشته باشیم $\psi(G) = \psi(H)$ و $|G| = |H|$ آنگاه $G \cong H$.

در آن مقاله حدس زیر مطرح شده است که به‌تازگی در [۴] درستی آن اثبات شده است.

حدس ۲.۴. فرض کنید G و H دو گروه آبلی باشند با این شرط که $\psi(G) = \psi(H)$ و $|G| = |H|$. در این صورت $G \cong H$.

در سال ۲۰۱۹ در [۱۱] نشان دادند که اگر G گروهی با شرط $\psi(G) = \psi(\mathrm{PSL}(2,p))$، $|G| = |\mathrm{PSL}(2,p)|$ و $p \in \{11, 13, 19, 23, 29, 37, 61\}$ باشد آنگاه $G \cong \mathrm{PSL}(2,p)$.

شناسایی برخی گروه‌ها از دیدگاه دیگری نیز توسط تابع ψ مورد توجه قرار گرفته است. این سؤال که برای یک گروه مفروض کدام زیرگروه یا زیرگروه‌های سره دارای بزرگ‌ترین مجموع مرتبهٔ عناصر است کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد. طبعاً چنین زیرگروه‌هایی را باید در میان زیرگروه‌های بیشین جستجو کرد. البته توجه کنید که اگر H و K دو زیرگروه بیشین گروه G باشند به‌طوری که $|H| < |K|$، آنگاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $\psi(H) < \psi(K)$. به عنوان مثال، فرض بگیرید

$$G = C_3 \times C_3 \times C_4, \quad H = \{0\} \times C_3 \times C_4, \quad K = C_3 \times C_3 \times T$$

که در آن $T < C_۴$ با شرط $|T| = ۲$. در این صورت $\psi(K) = ۷۵ < \psi(H) = ۷۷$.

در [۳] ثابت شده است که در میان زیرگروه‌های سره گروه متقارن S_n به‌ازای $n > ۱$، گروه متناوب A_n دارای بیشترین مجموع مرتبهٔ عناصر است. به عبارت دیگر، اگر $K < S_n$ و برای هر زیرگروه $H < S_n$ با شرط $H \neq K$ داشته باشیم $\psi(H) < \psi(K)$ آنگاه $K = A_n$. بدین ترتیب گروه متناوب A_n کاملاً توسط مجموع مرتبهٔ عناصرش در بین همهٔ زیرگروه‌های سره S_n قابل شناسایی است. البته در [۳] حدس زیر هم مطرح شده است که همچنان حل نشده است.

حدس ۳.۴. فرض کنید $n \geq ۴$ و B_n مجموعهٔ جایگشت‌های فرد در S_n باشد. در این صورت $\psi(A_n) < \psi(B_n)$.

در [۲۲] نیز به بررسی تابع ψ روی S_n پرداخته و ثابت شده است که $\psi(S_n) < (n!)^{\frac{\ln ۳}{\ln ۲}}$ به علاوه $\frac{\ln ۳}{\ln ۲}$ کوچک‌ترین عدد Cای است که در نامساوی $\psi(S_n) < (n!)^C$ صدق می‌کند.

به طور مشابه در [۴۱] ثابت شده است که در میان زیرگروه‌های سرهٔ گروه $\mathrm{PGL}(۲, q)$ گروه خطی عام تصویری از بُعد ۲ روی میدان q عضوی، با شرط فرد بودن q، زیرگروه $\mathrm{PSL}(۲, q)$، گروه خطی خاص تصویری، دارای بیشترین مجموع مرتبهٔ عناصر است. همچنین برای حالتی که q زوج باشد نیز زیرگروه با بیشترین مجموع مرتبهٔ عناصر را در بین زیرگروه سرهٔ $\mathrm{PGL}(۲, q)$ شناسایی کرده است. البته یادآوری می‌کنیم که اگر q زوج باشد، $\mathrm{PGL}(۲, q) \cong \mathrm{PSL}(۲, q)$.

۵ نتایج دیگر دربارهٔ $\psi(G)$

۱.۵ ψ-تقسیم‌پذیری

گروه متناهی G را ψ-تقسیم‌پذیر گویند هرگاه برای هر زیرگروه H از G داشته باشیم $\psi(H)|\psi(G)$. این تعریف اولین‌بار در سال ۲۰۱۴ در [۲۱] مطرح شد و نشان داده شد که یک گروه آبلی ψ-تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر دوری از مرتبهٔ خالی از مربع باشد. همچنین حدس زده شد که گروه ناآبلی ψ-تقسیم‌پذیر وجود ندارد. در سال ۲۰۱۲ نتیجهٔ گفته‌شده برای یک گروه متناهی که همهٔ زیرگروه‌هایش ψ-تقسیم‌پذیرند به دست آمد [۴۸] و به‌علاوه با الهام از این تعریف، مفهوم ψ-نرمال تقسیم‌پذیری مطرح شد با این تفاوت که به‌جای همهٔ زیرگروه‌ها فقط زیرگروه‌های نرمال به کار برده شد. در [۴۸] ثابت شده است که اگر S یک گروه سادهٔ ناآبلی و p عددی اول باشد با شرط $\gcd(|S|, p) = ۱$ آنگاه $S \times C_p$ یک گروه ψ-نرمال تقسیم‌پذیر است.

۲.۵ چگالی

واضح است که برای هر گروه متناهی G عدد $\frac{\psi(G)}{|G|^2}$ مقداری در $[0,1)$ است. همچنین به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای هر گروه متناهی داریم $|G|^2 \leq \psi(G) \leq |G|^3$. اکنون می‌توان پرسید که آیا گروه‌های متناهی نابدیهی وجود دارند که $\psi(G)$ به هر اندازه دلخواه به مرز این نامساوی نزدیک باشد. قضیهٔ زیر به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهد.

قضیه ۱.۵ ([۲۲]). برای هر $\epsilon > 0$ نامتناهی گروه متناهی G هم از نوع آبلی و هم از نوع ناآبلی وجود دارد که در نامساوی‌های $\psi(G) < |G|^{1+\epsilon}$ و $\psi(G) > |G|^{2-\epsilon}$ صدق کنند.

در سال ۲۰۲۰ در [۶۰]، علاوه بر نتایج دیگر، نشان داده شد که مجموعهٔ مقادیر $\frac{\psi(G)}{|G|}$ برای گروه‌های متناهی G یک مجموعهٔ چگال در $[0,1]$ است.

۶ توابع وابسته به ψ

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم توابع دیگری نیز روی گروه‌های متناهی با الهام از ψ تعریف شده‌اند.

۱.۶ مجموع توان kام مرتبهٔ عناصر یک گروه متناهی

در سال ۲۰۱۴ تابع ψ به‌صورت زیر در [۴۳] تعمیم داده شد.

تعریف ۱.۶. فرض کنید G یک گروه متناهی و k عددی طبیعی باشد. تعریف کنید

$$\psi_k(G) = \sum_{g \in G} o(g)^k.$$

اگر $k = 1$ داریم $\psi_1(G) = \psi(G)$. توجه کنید که عدد طبیعی $k > 1$ و گروه‌های G_1 و G_2 وجود دارند به‌طوری که $\psi(G_1) > \psi(G_2)$ ولی $\psi_k(G_1) < \psi_k(G_2)$ (صفحهٔ ۲ از [۱۸] را ببینید). بنابراین با مقایسهٔ مقدار ψ دو گروه نمی‌توان دربارهٔ مقایسه مقدار ψ_k آن دو گروه اظهار نظر کرد. با این حال قضیهٔ ۳.۱ برای تابع ψ_k به‌ازای هر عدد طبیعی k نیز معتبر است.

قضیه ۲.۶. اگر G یک گروه غیردوری از مرتبهٔ n باشد آنگاه به‌ازای هر عدد طبیعی k داریم $\psi_k(G) < \psi_k(C_n)$.

حتی در مورد کمترین مقدار ψ_k در میان گروه‌های پوچ‌توان هم‌مرتبه نیز قضیهٔ ۲.۲ معتبر است [۶۳]. از بخش ۳ یادآوری می‌کنیم که هرتسوگ و همکارانش [۲۳] نشان دادند اگر G یک گروه

غیردوری از مرتبهٔ n باشد، $\psi(G) \leq \frac{۷}{۱۱}\psi(C_n)$. در سال ۲۰۲۴ این نتیجه برای ψ_k به‌صورت زیر تعمیم داده شد [۱۸] .

قضیه ۳.۶. فرض کنید G یک گروه غیردوری از مرتبهٔ n و k عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\psi_k(G) \leq \frac{۱ + ۲ \times ۳^k}{۱ + ۲^k + ۲ \times ۴^k}\psi_k(C_n).$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به‌ازای $k = ۱$ همان کران بالای $\frac{۷}{۱۱}$ به‌دست می‌آید. البته در مثال ۵.۱ از [۱۸] مشاهده می‌شود که کران بالای قضیهٔ فوق بهترین کران بالاست. همچنین در [۱۷] یک محک حل‌پذیری با استفاده از ψ_k ارائه شده است.

۲.۶ میانگین مرتبهٔ عناصر یک گروه متناهی

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. میانگین مرتبهٔ عناصر G به‌صورت

$$o(G) = \frac{\sum_{g \in G} o(g)}{|G|} = \frac{\psi(G)}{|G|}$$

تعریف می‌شود. در ۲۰۱۱ اولین‌بار این تابع در [۴۷] مطالعه و بررسی شد. البته لازم است بگوییم که نتایج اصلی در آنجا متمرکز به تعیین کران‌هایی برای $k(G)$، تعداد رده‌های تزویجی G، بود. مثلاً در آن مقاله ثابت شده است که $o(Z(G)) \leq o(G) \leq k(G)$ که در آن $Z(G)$ مرکز گروه G است. همچنین در [۴۷] این سؤال مطرح شده است که اگر G یک $(p-)$گروه متناهی و N یک زیرگروه نرمال (آبلی) از آن باشد، آیا $o(G) \geq (o(N))^{\frac{۱}{۲}}$؟ ده سال بعد در [۵۲] پاسخی منفی به این سؤال داده می‌شود و حدس زده می‌شود که اگر برای گروه متناهی G داشته باشیم $o(G) < o(A_۵)$، آنگاه G حل‌پذیر است. این حدس در [۳۲] تأیید می‌شود و به‌علاوه آن‌ها نشان می‌دهند که اگر $o(G) \leq o(A_۵)$ آنگاه یا G حل‌پذیر است یا $G \cong A_۵$. در [۳۱] ثابت شده است که $o(G) = o(A_۵)$ اگر و تنها اگر $G \cong A_۵$. البته قبلاً در [۶۲] نشان داده شده بود که اگر $o(G) < o(A_۴)$ آنگاه G ابرحل‌پذیر است و به‌علاوه $o(G) = o(A_۴)$ اگر و تنها اگر $G \cong A_۴$.

در ۲۰۲۴ خسروی و همکارانش [۵] علاوه بر نتایج جالب دیگر نشان دادند که $o(G) = o(S_۴)$ اگر و تنها اگر $G \cong S_۴$. هرتسوگ و همکاران همیشگی‌اش در [۳۲] ثابت کرده بودند که $o(G) = o(S_۳)$ اگر و تنها اگر $G \cong S_۳$. در [۵۹] نشان داده شده است که هرگاه برای گروه متناهی G داشته باشیم $o(G) < \frac{۱۳}{۶} = o(S_۳)$ یا $o(G) < \frac{۱}{۴} = o(C_۴)$، آنگاه به‌ترتیب G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی یا حل‌پذیر خواهد بود.

۳.۶ حاصل‌ضرب مرتبهٔ عناصر یک گروه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و تعریف کنید $\rho(G) = \prod_{g\in G} o(g)$. این تابع اولین‌بار در سال ۲۰۱۳ در [۶۴] تعریف شد و برخلاف تابع ψ (حدس ۲.۴)، نویسندگان ثابت کردند که برای گروه‌های آبلی هم‌مرتبهٔ G و H داریم $\rho(G) = \rho(H)$ اگر و تنها اگر $G \cong H$. نویسندگان در [۱۹] نشان دادند که قضیهٔ ۳.۱ برای این تابع نیز معتبر است. همچنین در [۱۵] کران بالا برای ρ روی گروه‌های غیردوری را بهبود بخشیدند. خسروی و همکارانش در[۱۶] توانستند برخی گروه‌های خطی را توسط این تابع شناسایی کنند و در همان مقاله آن‌ها تابع دیگری با ضابطهٔ $l(G) = \frac{\rho(G)^{\frac{1}{|G|}}}{|G|}$ تعریف کردند و محک‌هایی را با استفاده از این تابع برای دوری، آبلی، پوچ‌توان، ابرحل‌پذیر، و حل‌پذیر بودن به دست آورند.

۴.۶ دیگر توابع وابسته

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$. در [۵۶] تابع زیر که تعمیمی از $\psi(G)$ است به‌صورت $\psi_H(G) = \sum_{g\in G} o_H(g)$ تعریف شده است که در آن $o_H(g)$ کوچک‌ترین عدد طبیعی m است با این شرط که $g^m \in H$. اگر $H = G$، $\psi_H(G) = \psi(G)$. قضیهٔ ۳.۱ به‌صورت زیر روی گروه‌های پوچ‌توان تعمیم داده می‌شود.

قضیه ۴.۶ ([۵۶]). فرض کنید G گروه پوچ‌توان از مرتبهٔ n و H زیرگروهی از مرتبهٔ m از G باشد. در این صورت $\psi_H(G) \leq \psi_{H_m}(C_n)$ که در آن H_m تنها زیرگروه از مرتبهٔ m گروه C_n است.

فرض کنید r و s دو عدد حقیقی باشند و تعریف کنید $R_G(r,s) = \sum_{g\in G} \frac{o(g)^s}{\varphi(o(g))^r}$. این تابع را گارونزی و پاتاسینی [۱۹] در سال ۲۰۱۷ تعریف کردند. توجه کنید که $R_G(0,1) = \psi(G)$ و $R_G(0,k) = \psi_k(G)$. آن‌ها ثابت کردند:

قضیه ۵.۶. فرض کنید $r < 0$ عددی حقیقی و G گروه متناهی از مرتبهٔ n باشد. در این صورت $R_G(r,r) \geq R_{C_n}(r,r)$ و تساوی وقتی و فقط وقتی اتفاق می‌افتد G پوچ‌توان باشد.

در سال ۲۰۲۳ خسروی و همکارانش [۶] این تابع را برای حالت $R_G(0,-1)$ مطالعه کردند. درواقع، آن‌ها تعریف کردند $m(G) = \sum_{g\in G} \frac{1}{o(g)}$ و توانستند با استفاده از $m(G)$ محک‌هایی را برای دوری، آبلی، پوچ‌توان، ابرحل‌پذیر، و حل‌پذیر بودن G ارائه دهند.

۷ مختصری دربارهٔ مارتین آیزاکس از زبان دوستانش

مقاله را با نگاهی اجمالی به زندگی و فعالیت‌های علمی اِروینگ مارتین آیزاکس به پایان می‌بریم؛ این مطالب برداشتی آزاد از نوشتهٔ دان پاسمن در یاد بود او [۵۵] است.

روز دوشنبه ۱۷ فوریهٔ ۲۰۲۵ (۲۹ بهمن ۱۴۰۳) گروه ریاضی دانشگاه ویسکانسین پژوهشگری برجسته را از دست داد که دارای جوایز متعدد در زمینهٔ آموزش بود. استاد بازنشسته آی. مارتین آیزاکس در برابر نارسایی کلیه از پای در آمد. او ۸۴ سال داشت و تا زمان بازنشستگی‌اش در برکلیِ کالیفرنیا زندگی می‌کرد.



اروینگ مارتین آیزاکس (۱۹۴۰-۲۰۲۴)

مارتی آیزاکس در ۱۴ آوریل ۱۹۴۰ (۲۵ فروردین ۱۳۱۹) چشم به جهان گشود و در برانکس[1] نیویورک بزرگ شد. او در دبیرستان علومِ برانکس درس خواند و عضو تیم ریاضی مدرسه بود. حساب دیفرانسیل و انتگرال را از رئیس بخش ریاضی انستیتوی پلی‌تکنیک بروکلین یاد گرفت آن هم در ساعت‌های غیرمجاز مؤسسه. مارتی در آن سال در یک مسابقه، علی‌رغم نداشتن شرایط سنی، برندهٔ جایزهٔ پاتنام[2] مدرسه شد و به صفت ممتاز مرد پاتنام نائل گردید که جزو بالاترین ردهٔ برندگان انفرادی قرار می‌گرفت. این امتیاز باعث پذیرش او در دانشگاه هاروارد با کمک‌هزینهٔ تحصیلی شد.

مارتی فارغ‌التحصیل دانشگاه هاروارد (۱۹۶۰-۱۹۶۴) بود. او در آنجا تحت راهنمایی ریچارد براوئر[3]، که بعدها مدال ملی علوم را دریافت کرد، تحقیق می‌کرد. پایان‌نامه‌اش دربارهٔ گروه‌های خطی و مسئله‌ای از بلیکفلت[4] بود. او در ژوئن ۱۹۶۴ مدرک دکترای خود را دریافت کرد. قرار بود در آن تابستان با گردش و رانندگی در سراسر اروپا جشن بگیرد. متأسفانه تصادفی خطرناک در فرانسه منجر به معلولیت او شد و آسیب‌های غیرقابل برگشتی به ظاهر او وارد کرد. قبل از آنکه به ایالات متحده برگردانده شود، ماه‌های متعددی را در بیمارستان کوشن[5] گذراند (بیمارستانی که در آن گالوا فوت کرد). او تمام آن سال را در بخش سوختگی بیمارستان پرسبیتری[6] کلمبیا در نیویورک

1. Bronx 2. Putnam 3. Richard Brauer 4. Blichfeldt 5. Cochin 6. Presbyterian

سپری کرد. شاید چنین تصادفی آیندهٔ فردی ضعیف را به تیرگی بکشاند؛ اما مارتی بیمارستان را ترک کرد، کنترل زندگی‌اش را به دست گرفت و هرگز اسیر گذشته‌اش نشد.

اولین سِمت دانشگاهی مارتی سمتِ مربی در دانشگاه شیکاگو به مدت سه سال بود. او در سال ۱۹۶۹ با حکم دانشیار گروه ریاضی به دانشگاه ویسکانسین واقع در مَدیسون آمد و در سال ۱۹۷۱ موفق به کسب پژوهانهٔ پژوهشی شد. او در همان سال و در ۳۱ سالگی به رتبهٔ استاد تمامی ارتقا یافت و تا زمانی بازنشستگی‌اش در سال ۲۰۱۱ در آنجا بود.

علاقه‌مندی اصلی مارتی به نظریهٔ گروه‌های متناهی بود، گرچه در دیگر شاخه‌های جبر نیز تحقیق می‌کرد. بی‌شک او متخصص برجستهٔ جهانی در نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی بود. علاوه بر موضوعات دیگر، او به‌خاطر تناظر گلاوبرمن[1]–آیزاکس و اثباتش برای حدسی دربارهٔ گروه‌های مرکزی معروف است.

علاوه بر این‌ها، مطالعه دربارهٔ درجهٔ سرشت‌ها را مارتی آغاز کرد. او در آنچه که به حدس آیزاکس–سِیتس[2] معروف است کارهای اساسی انجام داد. او و پِرسی دیاکونیس نظریهٔ ابرسرشت‌ها و تعمیم π–نظریه سرشت براوئر روی گروه‌های حل‌پذیر را آغاز کردند. همچنین او قضایای اساسی روی M–گروه‌ها دارد و نتایجش دربارهٔ سرشت‌ها و ردهٔ تزویجی گروه ماتریس‌های بالامثلثی باعث مطالعهٔ کلی‌تری روی گروه‌های وابسته به جبرها شد.

در سال‌های بعد، مارتی به سراغ مطالعهٔ حدس مک‌کی[3] رفت. قبل‌تر در سال ۱۹۷۳، اولین پیشرفت‌های اساسی در اثبات این حدس را به وجود آورد. در بیشتر کارهای اخیرش با گابریل ناوارّو[4]، برای درک بهتر حدس، فرمول‌بندی دوباره‌ای ارائه دادند. سپس با مشارکت ناوارّو و گانترمیل، حدس را به گروه‌های ساده تقلیل دادند که بعدها کابانس [5]، اشپِت [6]، و دیگران آن را حل‌وفصل کردند و سرانجام حدس اثبات شد.

مارتی در دوران فعالیت علمی بیش از ۲۰۰ مقاله نوشت. او یکی از اعضای برجستهٔ مؤسس انجمن ریاضی آمریکا بود. سال ۲۰۰۹ کنفرانسی در بزرگداشت او در والنسیای اسپانیا برگزار شد. مارتی همیشه در باب آموزش و تدریس پر حرارت و لبریز از احساسات بود. او بهترین معلم در ساختمان ریاضی دانشگاه ویسکانسین بود و تعداد زیادی جوایز آموزشی دریافت کرد. او جایزهٔ معلم برگزیده در دانشگاه ویسکانسین در سال ۱۹۸۵، جایزهٔ تاو بتا پای[7] در سال ۱۹۸۸، جایزهٔ آموزشی بخش جامعهٔ ریاضی آمریکا در ویسکانسین در سال ۱۹۹۳، و سخنران برگزیدهٔ پولیای جامعهٔ ریاضی آمریکا در ۲۰۰۳–۲۰۰۵ را دریافت کرد. در تمام این سال‌ها مارتی ۲۹ دانشجوی

1. Glauberman 2. Seitz 3. McKay 4. Gabriel Navarro 5. Cabanes 6. Spath 7. Tau Beta Pi

دکترا را راهنمایی کرد و کتاب‌هایی دربارهٔ نظریهٔ سرشت، نظریهٔ سرشت گروه‌های حل‌پذیر، نظریهٔ گروه‌های متناهی، جبر برای دانشجویان سال اول، و حتی هندسه برای دانشجویان دانشگاه نوشت. اخیراً او جایزهٔ آی. مارتی آیزاکس را برای بهترین نوشتهٔ ریاضی اعطا می‌کرد که آن را انجمن ریاضی آمریکا برگزار می‌کرد. به مدت ۳۱ سال عهده‌دار بخش استعدادیابی ریاضی بود که مسائل چالش‌برانگیز ریاضی را برای دانش‌آموزان مقطع متوسطه و دبیرستان در سراسر ایالات متحده و درواقع جهان پیشنهاد می‌داد.

بازماندگان مارتی، همراه قدیمی او، دِبورا فینچ[1]، خواهرش روزالی آیزاکس، برادر ناتنی‌اش آلِن بروس، فرزندخوانده‌اش باربارا پاسمن برونس‌ورد[2]، دیگر افراد خانوادهٔ پاسمن به نام‌های ماری، دان، و جان و دوستان کثیرش و ارادتمندانش در جامعهٔ ریاضی ازجمله پرسی دیاکونیس، جرج گلابرمن، رابرت گرالنیک، مارک لوییس، گابریل ناوارّو و البته دانشجویان دکترایش هستند.

در ادامه نیز مطالبی از [۵۱] به قلم گابریل ناوارّو در مقاله‌ای که در توصیف آیزاکس نوشته است نقل می‌کنیم و مقاله را به پایان می‌بریم.

در انتهای سال تحصیلی ۱۹۸۷ جرأت کردم به پرفسور آیزاکس دربارهٔ بعضی ایده‌هایی که داشتم چیزی بنویسم. ما با ایمیل با هم در ارتباط بودیم. در این بحث‌ها به جایی رسیدیم که حدس زدیم تناظر گلاوبرمن–آیزاکس را می‌توان با تحدید و استقرا به سرشت‌ها تحویل کرد. مارتی اثباتش را برای حالتی که $|G|$ فرد بود برایم فرستاد. خوش‌شانس بودم و در سال ۱۹۸۸ توانستم حالت باقی‌مانده از حدس را اثبات کنم. در فوریهٔ ۱۹۸۹ به برکلی مسافرت کردم. در آنجا آیزاکس استاد مدعو در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی بود و ما اولین مقالهٔ مشترکمان [۳۶] را نوشتیم. در میان ۱۸ مقاله‌ای که با همکاری هم نوشتیم، آخرین آن‌ها [۳۷] تنها مقاله‌ای بود که از ابتدا تا انتهایش را خودم نوشتم (همکاران آیزاکس می‌دانند که مارتی همیشه نسخهٔ نهایی هر مقاله‌ای را باید خودش می‌نوشت).

مارتی برای اولین‌بار در سال ۱۹۹۱ به والنسیا آمد و فوراً عاشق این شهر و رستوران‌هایش شد. او در سال‌های ۱۹۹۲، ۱۹۹۶، ۲۰۰۳، ۲۰۰۴ و . . . هم به آنجا آمد (او در سال ۲۰۰۳ هم با دعوت مورتو[3] و سانگرونیز[4] از شهر بیلبائو دیدن کرد). مارتی و دبورا علاقه‌مند بودند تا با اجارهٔ ماشین اطراف اسپانیا را با رانندگی بگردند. گفتن ندارد که تا اینکه به من اطلاع نداده بود صحیح‌وسالم به ایالات متحده برگشته است دلواپس بودم. در ژوئن ۲۰۰۹، کنفرانسی در والنسیا به افتخارش ترتیب دادیم. بسیاری از متخصصان نظریهٔ گروه‌ها شرکت کردند که بیشتر آن‌ها اولین‌بار

1. Debora Finch 2. Barbara Passman Brownsword 3. Moreto 4. Sangroniz



آیزاکس (سمت چپ) و ناوارّو (سمت راست)

بود که به اسپانیا می‌آمدند، افرادی مانند ای. سی. دادِ[1]، جی. گلاوبرمن، آر. گرالنیک، بی. جی. هوپرت، جِی. جی. تامپسون، . . . و دوستش دیاکونیس.

استادان زیادی از گروه ریاضی والنسیا مدتی را در دانشگاه ویسکانسین در مَدیسون گذراندند مانند ال. سائوس و جِی. تَنِت و از همه برجسته‌تر آلکس مورتو که با مارتی پنج مقاله مشترک دارد (اولین آن‌ها مقاله‌ای بود که آلکس هنوز در بیلبائو بود که یکی از پراستنادترین آن‌هاست [۳۵]).

آخرین بار مارتی را در آوریل ۲۰۱۸ در مؤسسهٔ MSRI در برکلی ملاقات کردم. آن وقت یک نیمسال تحصیلی را در یک اتاق مشترک گذراندیم (البته دو نیمسال دیگر نیز در سال‌های ۱۹۹۰ و ۲۰۰۸ را در آنجا گذراندیم). سپس همه‌گیری کرونا از راه رسید و سلامتی‌اش به‌تدریج رو به وخامت گذاشت. ما تا ژوئن ۲۰۲۴ با هم نامه‌نگاری می‌کردیم. از آن به بعد من فقط از دبورا جویای احوالش بودم. در ۱۸ فوریهٔ ۲۰۲۵ دبورا نامه‌ای برایم نوشت و در آن خبر فوت مارتی را به من داد.

سپاسگزاری از دکتر سعید مقصودی بابت ویرایش دقیق متن سپاسگزاریم.

مراجع

[1] Amiri, H., Jafarian Amir, S. M., Isaacs, I. M., Sums of element orders in finite groups, *Comm. Algebra*, **37**(9) (2009), 2978-2980.

[2] Amiri, H., Jafarian Amiri, S. M., Sum of element orders on finite groups of the same order, *J. Algebra Appl.*, **10**(02) (2011), 187–190.

[3] Amiri, H., Jafarian Amiri, S. M., Sum of element orders of maximal subgroups of the symmetric group, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 770-778.

[4] Amiri, M., On the sum of element orders in finite abelian groups, *J. Algebr. Comb.*, **63** (2026), Article No. 65.

[5] Akhlaghi, Z., Khosravi, B., ZareZadeh, A., Characterizing some finite groups by the average order, *Quaest. Math.*, **47** (2024), 2259–2270.

[6] Baniasad Azada, M., Khosravia, B., Rashidi, H., On the sum of the inverses of the element orders in finite groups, *Comm. Algebra*, **51**(2) (2023), 694–698.

1. Dade

[7] Baniasad Azad, M., Khosravi, B., A criterion for p-nilpotency and p-closedness by the sum of element orders, *Comm. Algebra*, **48**(12) (2020), 5391–5395.

[8] Baniasad Azad, M., Khosravi, B., A criterion for solvability of a finite group by the sum of element orders, *J. Algebra*, **516** (2018), 115–124.

[9] Bahri, A., Khosravi, B., Akhlaghi, Z., A result on the sum of element orders of a finite group., *Arch. Math.*, **114** (2020), 3-12.

[10] Baniasad Azad, M., Khosravi, B., Jafarpour, M., An answer to a conjecture on the sum of element orders, *J. Algebra Appl.* **21** (2022), 2250067.

[11] Baniasad Azad, M., Khosravi, B., On the sum of element orders of $\mathrm{PSL}(2,p)$ for some p, *Ital. J. Pure Appl. Math*, **42** (2019), 18–24.

[12] Buturlakin, A. A., Tereshchenko, A. F., The sum of orders of elements in nonabelian groups of odd order, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, **18** (2021), 1698–1704

[13] Cameron, Peter J., Dey, Hiranya Kishore, On the order sequence of a group, *Electron. J. Combin.*, Volume **32**, Issue 2 (2025)

[14] Das, A., Nath, R. K., Pournaki, M. R., A survey on the estimation of commutativity in finite groups, *Southeast Asian Bull. Math.*, **37** (2013), 161–-180.

[15] Domenico, E. D., Monetta, C., Noce, M., Upper bounds for the product of element orders of finite groups, *J. Algebr. Comb.*, (2023) **57**, 1033–1043.

[16] Khosravi, B., Baniasad Azad, M., Recognition by the product element orders, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **43** (2020), 1183–1193.

[17] Dey, H. K., The solvability of a finite group by the sum of powers of element orders, available at `arXiv:2212.07748`.

[18] Dey, H. K., Mondal, A., An exact upper bound for the sum of powers of element orders in non-cyclic finite groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **228** (6) (2024), 107580.

[19] Garonzi, M., Patassini, M., Inequalities detecting structural properties of a finite group, *Comm. Algebra*, **45**(2) (2017), 677–687.

[20] Garonzi, M., Kappe, L.-C., Swartz, E. On integers that are covering numbers of groups, *Experimental Mathematics*, to appear.

[21] Harrington, J., Jones, L., Lamarche, A., Characterizing finite groups using the sum of the orders of the elements, *Int. J. Comb.*, **2014**, 835125.

[22] Harrington, J., Jones, L., Lamarche, A., Characterizing finite groups using the sum of the orders of the elements, *Int. J. Comb.*, **2014**, 835125.

[23] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., An exact upper bound for sums of element orders in non-cyclic finite groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **222** (2018), 1628–1642.

[24] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Two new criteria for solvability of finite groups in finite groups, *J. Algebra*, **511** (2018), 215–226

[25] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Sums of element orders in groups of order $2m$ with m odd, *Comm. Algebra*, **47** (2019), 2035–2048

[26] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., On a criterion for solvability of a finite groups. *Comm. Algebra* **49** (2021) 2234–2240.

[27] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., The second maximal groups with respect to the sum of element orders, *J. Pure Appl. Algebra*, **225**:3 (2021).

[28] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Properties of finite and periodic groups determined by their elements orders (a survey), in *Group Theory and Computation*, Indian Statistical Institute Series, 2018, 59–90.

[29] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., New criteria for solvability, nilpotency and other properties of finite groups in terms of the order elements or subgroups. *Int. J. Group Theory* **12**(3) (2023) 35–44.

[30] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Sums of element orders in groups of odd order, *Internat. J. Algebra Comput.* (2021).

[31] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., On groups with average element orders equal to the average element order of the alternating group of degree, *Glasnik matematički*, (2023),

[32] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Another criterion for solvability of finite groups, *J. Algebra* **597** (2022), 1-23.

[33] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Properties of finite and periodic groups determined by their element orders (a survey), in *Indian Statistical Institute Series* 59-90.

[34] Herzog, M., Longobardi, P., Maj, M., Sums of element orders in groups of odd order, *Internat. J. Algebra Comput.*, **31** (2021), 1049–1063.

[35] Isaacs, I. M., Loukaki, M., Moret´o, A., The average degree of an irreducible character of a finite group.,*Israel J. Math.*, (2013) **197**, 55-67.

[36] Isaacs, I. M., Navarro, G., Character correspondences and irreducible induction and restriction, *J. Algebra*, **140** (1991), no. 1, 131-140.

[37] Isaacs, I. M., Navarro, G., Primes and conductors of characters, *J. Algebra*, **653** (2024), 42-53.

[38] Jahani, M., Marefat, Y., Refaghat, H., Vakili Fasaghandisi, B., The minimum sum of element orders of finite groups, *Inter. J. Group Theory*, **10** (2021), 55-60.

[39] Jafarian Amiri, S. M., Characterization of A_5 and $(\mathrm{P})\mathrm{SL}(2;7)$ by sum of element orders, *Int. J. Group Theory*, **2** (2013), 35–39.

[40] Jafarian Amiri, S. M., Second maximum sum of element orders on finite nilpotent groups, *Comm. Algebra*, **41** (2013), 2055–2059.

[41] Jafarian Amiri, S. M., Maximum sum element orders of all proper subgroups of $\mathrm{PGL}(2,q)$, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **39** (2013), 501-505.

[42] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Second maximum sum of element orders on finite groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **218** (2014), 531–539.

[43] Jafarian Amiri, S. M. and Amiri, M., Sum of the products of the orders of two distinct elements in finite groups, *Comm. Algebra*, **42** (2014) 5319–5328.

[44] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Characterization of p-groups by sum of the element orders, *Publ. Math. Debrecen*, **86** (2015), 31–37.

[45] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Sum of the element orders in groups with the square-free orders, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **40** (2017), 1025–1034.

[46] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Characterization of finite groups by a bijection with a divisible property on the element orders. *Comm. Algebra*, **45**(8) (2017), 3396–3401.

[47] Jaikin-Zapirain, A., On the number of conjugacy classes of finite nilpotent groups, *Adv. Math.*, **227** (2011), 1129-1143.

[48] Lazorec, M., On a divisibility property involving the sum of element orders, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **44** (2) (2021), 941-951.

[49] Lazorec, M. S. On two problems about order sequences of finite groups. *J. Algebr. Comb.* **62**, 29 (2025).

[50] Marefat, Y., Iranmanesh, A., Tehranian, A., On the sum of element orders of finite simple groups, *J. Algebra Appl.*, **12** (2013), 135–138.

[51] Navarro, G., I. M. Isaacs, available at `https://www.uv.es/gabriel/static/I.M.Isaacs.English.pdf`.

[52] Khukhro, E. I., Moret´o, A., Zarrin, M., The average element order and the number of conjugacy classes of finite groups, *J. Algebra*, **569** (1) (2021), 1-11.

[53] Shen, R., Chen, G., Wu, C., On groups with the second largest value of the sum of element orders, *Comm. Algebra*, **43** (2015) 2618–2631.

[54] Pakianathan, J., Shankar, K., Nilpotent numbers, *Amer. Math. Monthly*, **107**(7) (2000), 631–634.

[55] Passman, D., Memorial resolution for Marty Isaacs, available at https://math.wisc.edu/documents/isaacs-memorial-by-passman.
[56] Tarnauceanu, M., A generalization of a result on the sum of element orders of a finite group, *Math. Slovaca*, **71** (000000), 627-630.
[57] Tarnauceanu, M. and Fodor, D. G., On the sum of element orders of finite abelian groups, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.*, **60** (2014), 1–8.
[58] Tarnauceanu, M., A criterion for nilpotency of a finite group by the sum of element orders, *Comm. Alg.*, **49** (4), 1571-1577.
[59] Lazorec, M. S., Tarnauceanu, M. M., On the average order of a finite group, *J. Pure Appl. Algebra*, **227** (4) (2023), 107276.
[60] Lazorec, M., Tarnauceanu, M., A density result on the sum of element orders of a finite group, *Arch. Math.*, **114** (6) (2020), 601-607.
[61] Tarnauceanu, M., Detecting structural properties of finite groups by the sum of element orders, *Israel J. Math.*, 2020.
[62] Tarnauceanu, M., Another criterion for supersolvability of finite groups, *J. Algebra*, **604** (2022), 682-693.
[63] Vieira Marques, A., Sobre a soma das ordens de elementos de um grupo finito (2020), available at http://repositorio2.unb.br/jspui/handle/10482/39669.
[64] Tarnauceanu, M., A note on the product of element orders of finite Abelian groups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **36**(4) (2013), 1123–1126.

حبیب امیری: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: h.amiri@znu.ac.ir
سید مجید جعفریان امیری: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: sm_jafarian@znu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 45, Number 1, Spring/Summer 2026, Pages 41–62
doi: 10.30504/mct.2025.1570.2105

Characterization of Finite Groups by Sum of the Element Orders

H. Amiri[1], S. M. Jafarian Amiri[2]✉

[1,2]Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran

Abstract. One of the principal conceptions in finite group theory is the element orders. Currently, the important role of this number in determining of the group structure has been attended. In this paper, we are going to review to the most important obtained results about some functions connected to element orders of a group and the role of it in characterizing of finite groups.

Keywords: finite group, element order, sum of the element orders, solvable group
Article history: Received 6 September 2025; Accepted 2025 November 2025
Article type: review

1. h.amiri@znu.ac.ir
2. sm_jafarian@znu.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license