

نظریه‌های همانستگی و تغییر وزن نمایش‌های گالوا

علی پرتوفرد✉، سیدمحمدهادی هدایت‌زاده رضوی

چکیده. در این مقاله ابتدا نظریه‌های همانستگی‌های مختلف و ارتباط آن‌ها با نمایش‌های گروه گالوا را معرفی و سپس روشی ارائه می‌کنیم که به طور طبیعی به بعضی نمایش‌های گروه گالوا با وزن هادج-تیت بزرگ‌تر از یک، نمایش‌هایی با وزن کمتر، و وزن صفر و یک (تحت شرایطی) نظیر می‌کند. دقیق‌تر اینکه ثابت می‌کنیم یک تابعون تماماً صادق از نمایش‌های مدرج $\mathbb{T}_k$ منظم با تحویل منشوری خوب از گروه گالوا به نمایش‌های مدرج با تحویل منشوری خوب با وزن‌های صفر و یک وجود دارد.

۱ مقدمه

در این مقاله قصد داریم داستان دو موضوع به هم مرتبط را بازگو کنیم. موضوع اول از نظریه اعداد نشأت می‌گیرد؛ یعنی، نمایش‌های گروه گالوای $\mathbb{Q}$. اگر $\mathbb{Q}$ بستار جبری $\mathbb{Q}$ باشد، گروه گالوای $\mathbb{Q}$ گروه همه خودریختی‌های میدان $\mathbb{Q}$ است. ساختار گروه گالوا ارتباط نزدیکی با خواص نظریه اعدادی میدان‌های عددی دارد و بنابراین شناخت این ساختارها در نظریه اعداد اهمیت زیادی دارد. به طور کلی یکی از بهترین راه‌ها برای شناخت ساختار یک گروه شناخت نمایش‌های آن است. فرض کنید K میدان اعداد مختلط یا میدان اعداد ℓ ی باشد، یک نمایش از گروه گالوا یک همریختی گروهی است از گروه گالوا به $GL_n(K)$. گاهی اوقات ممکن است به نمایش‌های پیوسته توجه داشته باشیم. مطالعه نمایش‌های یک بعدی گروه گالوا یا همان سرشت‌ها^۱ نظریه میدان‌های رده‌ای^۲ نام دارد که

عبارات و کلمات کلیدی: همانستگی‌های منشوری، نمایش‌های گروه گالوا، عرضه، بن‌مایه، نظریه p ای هاج، چندگونای شیمورا

نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۷/۱۹

از گذشته‌ها شاخه مهمی از نظریه جبری اعداد بوده است؛ اطلاعات مختصری در [۱] آمده است. در دهه شصت میلادی، وی^۱، لنگلندز^۲، شیمورا^۳، سر^۴، و دیگران دریافتند که مطالعه نمایش‌های گروه گالوا در ابعاد بالاتر هم می‌تواند نتایج مهمی در نظریه جبری و تحلیلی اعداد داشته باشد. مثلاً اثبات وایلز برای قضیه آخر فرما نتیجه‌ای از گزاره‌ای بود که وایلز راجع به دسته خاصی از نمایش‌های دوبعدی گروه گالوا اثبات کرد، یا اثبات حدس لنگلندز در حالت کلی می‌تواند حدس آرتین درباره گسترش تحلیلی L -تابع‌ها را نتیجه دهد، که خود این‌ها نتایج مهمی در نظریه تحلیلی اعداد دارند. از طرف دیگر، گروه‌های همانستگی ناورداهای مهمی از اشیای هندسی هستند؛ اطلاعات مختصری در [۲] آمده است. این گروه‌ها به طرق مختلفی تعریف می‌شوند اما جالب این است که همه این روش‌های به ظاهر متفاوت، نتایجی دارند که به هم مرتبط و قابل مقایسه هستند. هرچند این روش‌های متفاوت تعریف به گروه‌های همانستگی ساختارهای جالب و متفاوتی نسبت می‌دهند، مثلاً ساختار هادج خود را در همانستگی دُرام^۵ نشان می‌دهد.

یک ساختار هادج از وزن n روی فضای برداری V عبارت است از یک تجزیه $V = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ به‌طوری که $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$. تحت شرایط خاصی، گروه‌های همانستگی از یک شیء هندسی یک نمایش از گروه گالوا به دست خواهند داد. این موضوع پلی بین هندسه و نظریه اعداد به وجود می‌آورد. نکته مهم این است که این نمایش‌ها به‌طور طبیعی با ضرایب $\mathbb{Q}_l$ تعریف می‌شوند و بنابراین حداقل در ظاهر به انتخاب عدد اول l وابسته‌اند.

چندگونا‌های شیمورا دسته مهمی از اشیای هندسی هستند که همانستگی آن‌ها نمایش‌های مهمی از گروه گالوا به دست می‌دهند. این چندگونا‌ها در حالت کلی فضای مدولی ساختارهای هادج هستند، در حالتی که ساختار هادج تنها درجه‌های $(0, 1)$ را $(1, 0)$ را داشته باشد، یعنی فضای مدولی چندگونا‌های آبلی، احکام قوی‌تری را می‌توان درباره همانستگی چندگونا‌های شیمورا و بنابراین نمایش‌های گالوای متناظر اثبات کرد. به این دسته خاص از چندگونا‌های شیمورا، که فضای مدولی چندگونا‌های آبلی با ساختارهای بیشتری هستند، چندگونا‌های شیمورای هادج می‌گویند. بسیاری از قضیه‌های مهم تنها در حالتی که وزن‌های هادج برابر صفر و یک باشند اثبات شده‌اند و خارج از این فضا به عنوان حدس مانده‌اند.

یک گام مهم در راستای شناخت نمایش‌های گروه گالوای $\mathbb{Q}$ شناخت نمایش‌های گروه گالوای میدان‌های موضعی است. این مطالعه دو بخش دارد: زمانی که نمایش‌های گروه گالوای $\mathbb{Q}_l$ را در $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ برای $p \neq l$ مطالعه می‌کنیم، به خاطر غیرقابل انطباق بودن توپولوژی l ی و

p می‌توان قضایای قدرتمندی همچون قضیه همان‌گشتی گروتندیک^۱ را ثابت کرد که ساختار این نمایش‌ها را تا حد خوبی برای ما مشخص می‌کنند. از طرفی اگر خود را به مطالعه نمایش‌های گروه گالوای $\mathbb{Q}_p$ در فضاهاى برداری روی $\mathbb{Q}_p$ محدود کنیم، می‌توان به یک نمایش گروه گالوا وزن‌هایی نسبت داد که با وزن‌های هادج یک شیء هندسی مرتبط هستند. نمایش‌هایی از گروه گالوا که وزن‌های آنها صفر و یک است را نمایش‌های منظم^۲ می‌نامند. همانند حالت هندسی برخی از قضیه‌ها تنها برای نمایش‌های منظم ثابت شده‌اند.

به‌طور معمول هر نظریه همانستگی جدید یا هر ابزار جدید در مطالعه همانستگی به سرعت در مطالعه نمایش‌های گروه گالوا کاربرد پیدا خواهد کرد. جدیدترین نظریه همانستگی موجود، همانستگی منشوری^۳ است که آن را بات^۴ و شولتسه^۵ تعریف کردند و تا به امروز نتایج مهمی در نظریه اعداد، هندسه، و جبر جابه‌جایی داشته است. به کمک این نظریه همانستگی بات و شولتسه موفق شدند دسته مهمی از نمایش‌های گروه گالوای موضعی، و از آن کلی‌تر نمایش‌های گروه بنیادی، را با موجوداتی بسیار ساده‌تر از جنس جبر (شبه-)خطی متناظر کنند.

در مقاله [۱۲] به کمک این ابزار و ایده‌ای از بویتل^۶ [۸] برخی از احکامی را که قبلاً تنها در مورد چندگونا‌های شیمورای هادج ثابت شده بود برای دسته‌ای از چندگونا‌های شیمورا که از نوع هادج نیستند ثابت کرده‌ایم. احکامی از این جنس تا به حال در مورد هیچ نوع چندگونای شیمورایی که از نوع هادج نباشند ثابت نشده بود. فکر اصلی این بود که وزن‌های هادج را به‌گونه‌ای تغییر دهیم که هیچ داده‌ای از دست نرود و مسئله به حالت چندگونای شیمورای هادج تقلیل پیدا کند.

در این مقاله قصد داریم تابعگون تماماً صادقی بین برخی نمایش‌های گروه گالوا که منظم نیستند و نمایش‌های منظم به دست دهیم. اهمیت این موضوع در این است که همانند حالت هندسی قضیه‌های بسیاری در مورد نمایش‌های منظم ثابت شده‌اند که شاید بتوان با استفاده از این تابعگون آنها را برای برخی نمایش‌هایی که منظم نیستند تعمیم داد. در واقع قاعده‌ای باید بتوان تابعگون را روی دستگاه موضعی روی هر طرح دلخواه تعریف کرد و بنابراین این مقاله اولین گام در راستای تعمیم ایده بویتل از همانستگی منشوری به دنیای طرح‌ها است.

مطالب این مقاله از این قرار است: در بخش ۲ مروری اجمالی بر نظریه‌های مختلف همانستگی و ایده بن‌مایه^۷ گروتندیک خواهیم کرد. در بخش ۳ همانستگی کریستالی^۸ را یادآوری و مفهوم کریستال را تعریف می‌کنیم. در بخش ۴ به رابطه بین نظریه‌های همانستگی با ضرایب p ی مختلف

1. Grothendieck monodromy 2. regular 3. prismatic 4. Bhargav Bhatt(1983-) 5. Peter Scholze(1987-)

6. Bültel 7. motive 8. crystalline cohomology

خواهیم پرداخت. در بخش ۵ نظریه همانستگی منشوری شولتسه و بات را مرور خواهیم کرد. در بخش ۶ و ۷ عرضه‌های عادی و منشوری^۲ را تعریف خواهیم کرد که ابزار اصلی ما برای اثبات قضیه اصلی این مقاله است. این هفت فصل در واقع نقش معرفی مفاهیم و زبان مورد استفاده در بخش اصلی مقاله را دارند. در بخش ۸ روش تغییر وزن یک عرضه منشوری را بیان خواهیم کرد و در بخش ۹ با استفاده از تناظر بین عرضه‌های منشوری و نمایش‌های گروه گالوا به اثبات قضیه اصلی خواهیم پرداخت.

۲ نظریه‌های همانستگی و مفهوم بن‌مایه

فرض کنید X یک خمینه باشد، نظریه‌های همانستگی‌های مختلفی می‌توان به X نظیر کرد: همانستگی تکین^۳ با ضرایب در یک حلقه دلخواه که بر اساس نگاشت‌های پیوسته از مجموعه سادک‌ها به X تعریف می‌شود؛ همانستگی دُرام با ضرایب در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ که به کمک فرم‌های دیفرانسیل تعریف می‌شود؛ همانستگی چنچ^۴ با ضرایب روی یک حلقه دلخواه که بر اساس رفتار ترکیباتی پوشش‌های X با مجموعه بازهای انقباض‌پذیر تعریف می‌شود؛ و همانستگی بافه‌ای یک بافه^۵ ثابت که با تابعگون مشتق‌شده^۶ مقطع سرتاسری^۷ از رسته بافه‌ها به رسته گروه‌های آبلی به دست می‌آید. نکته جالب این است که مقدار تمام این نظریه‌های همانستگی که به ظاهر به دنیا‌های متفاوتی تعلق دارند بعد از تغییر پایه مناسب با هم یکرخت خواهند شد.

همانستگی دِرام یک خمینه کِلر^۸ ساختار اضافه بسیار سودمندی دارد که به نام ساختار هادج. این ساختار تجزیه‌ای از همانستگی دِرام یک خمینه بر اساس همانستگی بافه‌ای بافه فرم‌های دیفرانسیل به دست می‌دهد؛ در حالت خاص ناوردهای عددی ظریف‌تری می‌توان به این خمینه‌ها نسبت داد: $h^{p,q} = \dim H^p(X, \Omega^q)$ که اعداد هادج این خمینه نام دارند.

همه این ساختارها برای خمینه‌های روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ تعریف می‌شوند، آیا می‌توان ساختارهای مشابهی روی اشیای هندسی تعریف‌شده روی میدان‌های دیگر تعریف کرد؟ پاسخ به این سؤال نقش مهمی در پیشرفت شاخه‌های مختلفی از ریاضی از جمله نظریه اعداد و جبر جابه‌جایی و حتی نظریه هوموتوپي داشته است. از نتایج این سؤال می‌توان به اثبات حدس وی درباره تعداد جواب‌های یک معادله دیوفانتی به پیمانه یک عدد اول، اثبات حدس جمعونند مستقیم [۳] در جبر جابه‌جایی و رد حدس تلسکوپ در نظریه هوموتوپي [۱۰] نام برد.

1. display 2. prismatic 3. singular cohomology 4. Čech cohomology 5. sheaf 6. derived functor
7. global section 8. Kähler

مطلب مهمی که الکساندر گروتندیک دریافت این بود که اگر X ساختار یک چندگونای جبری را دارا باشد، باید بتوان همانستگی X را به صورت کاملاً جبری و بدون توسل به توپولوژی اقلیدسی تعریف کرد. در واقع، فرض کنید $f_1, f_2, \dots, f_m$ چندجمله‌ای‌هایی n متغیری باشند که ضرایب آن‌ها اعدادی جبری روی $\mathbb{Q}$ باشند. فرض کنید $X \subset \mathbb{C}^n$ توسط معادلات $f_1, f_2, \dots, f_m$ بریده شده باشد. همچنین فرض کنید σ گسترش عضوی از گروه گالوا $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ به یک خودریختی میدانی از $\mathbb{C}$ باشد. توجه کنید در حالت کلی σ در تمام نقاط ناپیوسته است.

حال X^σ را خمینه‌ای بگیرید که با معادله‌های $\sigma(f_1), \sigma(f_2), \dots, \sigma(f_m)$ بریده می‌شود. تابع $\sigma: X \rightarrow X^\sigma$ که نقطه $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را به نقطه $(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n))$ می‌فرستد در همه نقاط ناپیوسته است و در حالت کلی هیچ هم‌ریختی پیوسته‌ای بین این دو خمینه وجود ندارد، بنابراین انتظار نمی‌رود ارتباطی بین همانستگی‌های X و X^σ وجود داشته باشد. اما می‌توان دید که این همانستگی‌ها هم‌بعد هستند، بنابراین باید حقیقتی جبری پشت این موضوع وجود داشته باشد.

گروتندیک با این فکر همانستگی اتال^۱ چندگوناهای جبری را تعریف کرد، ضرایب این همانستگی می‌تواند هر میدان متناهی یا میدان اعداد l -ای باشد و نه تنها برای چندگوناهای جبری روی $\mathbb{C}$ بلکه برای هر طرح^۲ دلخواه قابل تعریف است. اگر مشخصه میدان صفر باشد، برای چندگوناهای هموار^۳ سره مقادیر این همانستگی با مقادیر همانستگی تکین یکریخت است، به طور کلی‌تر برای یک چندگونای هموار مقدار همانستگی اتال با تکیه گاه فشرده با مقادیر همانستگی تکین با تکیه گاه فشرده برابر است. از آنجا که این همانستگی به صورت جبری تعریف می‌شود تابع σ ، که در بالا تعریف شد، یک یکریختی بین همانستگی‌های X, X^σ القا می‌کند. اگر، به طور اتفاقی، ضرایب f_i ها اعدادی گویا باشد، به عبارت دیگر، اگر چندگونای X روی $\mathbb{Q}$ قابل تعریف باشد، داریم $X = X^\sigma$ ؛ بنابراین گروه گالوا روی همانستگی X عمل می‌کند. بنابراین هر چندگونا روی $\mathbb{Q}$ یک نمایش از گروه گالوای $\mathbb{Q}$ به ما خواهد داد. این تقریباً تنها روشی است که با آن می‌توانیم نمایش‌های نابديهی از گروه گالوا تولید کنیم. از آنجا که شناخت ساختار گروه گالوا نتایج مهم و بسیاری در جبر و نظریه اعداد دارد، مطالعه نمایش‌های گروه گالوا و به ویژه نمایش‌های گروه گالوا، که در هندسه ظاهر می‌شوند، ابزار مهمی در هندسه جبری و نظریه اعداد است.

گروتندیک همچنین توانست صورتی جبری از همانستگی درام تعریف کند. اگر چندگونای X

روی حلقه R تعریف شده باشد، مقدار این همانستگی مدولی روی R خواهد بود. در حالتی که R برابر $\mathbb{C}$ و X هموار باشد این همانستگی با همانستگی درام عادی برابر خواهد بود.

همه این نظریه‌های کوهمولوژی حالت‌های خاصی از مفهومی هستند که همانستگی وی نام دارد.

تعریف ۱.۲. یک نظریه همانستگی وی تابعگونی پادوردا^۱ چون $H^* = \bigoplus H^i$ از چندگونای هموار تصویری به جبرهای مدرج^۲ روی یک میدان k است که در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) برای هر X فضاهاى برداری $H^i(X)$ متناهی بُعد هستند.

(۲) اگر X از بُعد n باشد، برای هر $i > 2n$ داریم $H^i(X) = 0$.

(۳) یک یکرختی بین $H^{\vee n}(X)$ و k موجود است.

(۴) یک نگاشت جفت‌کننده^۳ تام $H^i(X) \times H^{\vee n-i}(X) \rightarrow H^{\vee n}(X)$ موجود است که دوگانی پوانکاره نام دارد.

(۵) یک یکرختی $H^*(X) \otimes H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y)$ موجود است که یکرختی کونث^۴ نام دارد.

(۶) برای هر r ، یک نگاشت دوری^۵ از زیرچندگوناهاى بسته با هم بُعد^۶ r از X به $H^{\vee r}(X)$ موجود است که در خواص مطلوب صدق می‌کند.

(۷) اگر W اشتراک X با یک ابرصفحه در فضای تصویری باشد، نگاشت $H^i(X) \rightarrow H^i(W)$ برای $i \leq n - 2$ یک یکرختی و برای $i = n - 1$ یک به یک است.

(۸) اگر w تصویر W تحت نگاشت دوری باشد برای هر $i \leq n$ ، ضرب کردن در w^i یک یکرختی بین $H^{n-i}(X)$ و $H^{n+i}(X)$ به دست می‌دهد.

اگر یک چندگونای جبری X روی یک میدان با مشخصه p تعریف شود، همانستگی اتال با ضرایب در $\mathbb{Q}_p$ دیگر خوش‌رفتار نخواهد بود، بدین معنی که دیگر یک نظریه همانستگی وی به دست نخواهد داد. البته همچنان همانستگی‌هایی با ضرایب $\mathbb{Q}_l$ برای $l \neq p$ به خوبی رفتار می‌کنند. همچنین همانستگی درام جبری هم برای این چندگوناها خوش‌رفتار خواهد بود. با این حال، گروتندیک به نکته‌ای پی برد: فرض کنید X یک چندگونای جبری هموار روی F_p باشد و $\tilde{X}$ یک فراکشی^۷ هموار از X به $\mathbb{Z}_p$ باشد (مثلاً فرض کنید X با معادلاتی با ضرایب در F_p بریده شده است و ما ضرایب این معادلات را به طور تقریباً دلخواه به $\mathbb{Z}_p$ فرابکشیم). می‌توان مشاهده کرد که همانستگی درام جبری $\tilde{X}$ با درام جبری هر فراکشی هموار دیگری از X برابر است.

بنابراین می‌توان این همانستگی را به عنوان ناوردایی از X در نظر گرفت. گروتندیک موفق شد تعریفی برای این ناوردا ارائه دهد که نیازی به فراکشیدن X به $\mathbb{Z}_p$ نداشته باشد، این نظریه همانستگی وی، همانستگی کریستالی نام دارد که در واقع صورت همانستگی درام با مشخصه p است و می‌توان آن را برای هر چندگونای جبری روی هر میدان با مشخصه p یا حتی برای یک حلقه p ای دلخواه تعریف کرد.

از دیدگاه گروتندیک، باید یک نظریه عام همانستگی وجود داشته باشد که همه این نظریه‌های مختلف سایه‌هایی از آن باشند. در حالت کلی برای چندگوناها روی یک میدان دلخواه، به راحتی می‌توان نشان داد هیچ نظریه همانستگی با ضرایب گویا وجود ندارد. بنابراین به مفهوم دیگری از یک نظریه همانستگی عام نیاز داریم. بدین منظور گروتندیک یک رسته تعریف کرد به نام رسته طرح‌ها و یک تابعگون از رسته چندگونا‌های جبری تصویری هموار روی یک میدان بسته جبری به این رسته تعریف کرد و نشان داد که اگر تعدادی از حدس‌های متداول درست باشند، تابعگون همانستگی برای هر نظریه همانستگی وی عاملی از این تابعگون است.

یک رسته تاناکای رسته‌ای است مشابه رسته نمایش‌های یک گروه. در حالت خاص، این رسته باید یک رسته آبلی باشد که روی آن اعمالی مثل تانسور و دوگان‌گیری با خواص آشنا وجود داشته باشد. حدس زده می‌شود که رسته بن‌مایه‌ها یک رسته تناکایی^۱ باشد. اگر حدس‌های متداول مورد اشاره درست باشند، رسته بن‌مایه‌ها یک رسته تناکایی خواهد بود و بیان تمام خواص همانستگی وی برای بن‌مایه‌ها درست خواهد بود. به عبارت دیگر، این خواص در همانستگی‌های مختلف سایه‌ای از بن‌مایه‌ها خواهند بود. هرچند نظریه بن‌مایه‌ها به خودی خود بر تعدادی حدس ثابت نشده استوار است، فلسفه کلی آن و پیش‌بینی‌هایش به صورت‌بندی و اثبات قضیه‌های مهمی در هندسه جبری و نظریه اعداد منجر شده است. برای آشنایی بیشتر با این نظریه می‌توانید [۱۵] را مطالعه کنید. در طول زمان نامزدهای دیگری هم برای رسته طرح‌ها مطرح شدند که از آن جمله می‌توان به نظریه بن‌مایه‌های وی‌وِدسکی^۲ [۱۷] اشاره کرد.

۳ همانستگی کریستالی و کریستال‌ها

در این بخش می‌خواهیم به یادآوری مفهوم همانستگی کریستالی و کریستال‌ها بپردازیم. برای جزئیات بیشتر درباره این نظریه می‌توانید به [۴] و برای مطالعه بیشتر درباره کریستال‌ها می‌توانید به [۱۳] مراجعه کنید.

فرض کنید $W(R)$ حلقه بردارهای ویت^۱ با ضرایب R باشد. تعریف این حلقه کمی پیچیده است، اما حالتی که R یک حلقه با مشخصه p تام^۲ باشد برای مقصود ما کافی است و در این حالت توصیف ساده‌ای از این حلقه وجود دارد. حلقه $W(R)$ برابر است با حلقه سری‌هایی به شکل

$$\sum a_i p^i \quad (a_i \in R)$$

با جمع و ضرب طبیعی. روی حلقه بردارهای ویت یک نگاشت فروبنیوس طبیعی تعریف می‌شود که آن را با σ نشان خواهیم داد. نگاشت فروبنیوس در حالتی که R حلقه‌ای تام و از مشخصه p باشد سری $\sum a_i p^i$ را به سری $\sum a_i^p p^i$ می‌نگارد.

همانستگی کریستالی به این صورت تعریف می‌شود که ابتدا مفهوم جای کریستالی را تعریف می‌کنیم و سپس همانستگی بافه ساختاری را در این جا محاسبه می‌کنیم. یک بازیگر مهم در تعریف جا مفهوم ضخیم‌سازی‌های^۳ R با ساختار توان‌های منقسم^۴ است.

تعریف ۱.۳. یک ساختار توان منقسم روی ایده‌آل I از حلقه R توابع $\gamma_n : I \rightarrow R$ هستند که شبیه تابع $\frac{x^n}{n!}$ رفتار می‌کنند؛ به بیان دقیق‌تر، این توابع باید در اصول موضوع زیر صدق کنند.

$$\bullet \gamma_n(x) \in I, n > 0 \text{ و برای هر } \gamma_0(x) = 1, \gamma_1(x) = x \text{ داریم.}$$

$$\bullet \gamma_n(x+y) = \sum \gamma_i(x) \gamma_{n-i}(x).$$

$$\bullet \gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x).$$

$$\bullet \gamma_n(x) \gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} \gamma_{n+m}(x).$$

$$\bullet \gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!} \gamma_{mn}(x).$$

اکنون تعریف ضخیم‌سازی را می‌آوریم.

تعریف ۲.۳. یک نگاشت حلقه‌ای $f : R \rightarrow R'$ با هسته $I = \text{Ker } f$ را ضخیم‌سازی می‌گوییم هرگاه R نسبت به ایده‌آل I کامل باشد. این نگاشت را یک ضخیم‌سازی با توان‌های منقسم می‌گوییم هرگاه ایده‌آل I ساختار توان‌های منقسم داشته باشد.

همانستگی یک طرح تعریف‌شده روی حلقه R را می‌توان نسبت به هر ضخیم‌سازی R با ساختار توان‌های منقسم محاسبه کرد،

اگر حلقه R نیم‌تام باشد، یعنی نگاشت فروبنیوس آن پوشا باشد، یک انتخاب طبیعی برای

چنین ضخیم‌سازی‌ای حلقه $A_{\text{crys}}(R)$ است. این حلقه ضخیم‌سازی عام R با ساختار توان‌های منقسم است؛ بدین معنا که اگر (R', I, γ) یک ضخیم‌سازی با ساختار توان‌های منقسم باشد، یک نگاشت یکتا از $A_{\text{crys}}(R)$ به R' موجود است که با ساختار توان‌های منقسم سازگار باشد. در حالتی که R یک حلقه تام با مشخصه p باشد، خواهیم داشت $A_{\text{crys}}(R) = W(R)$.

اگر X یک چندگونی آبلی باشد، همانستگی کریستالی X روی R خواص بیشتری نسبت به یک مدول عادی دارد: اولاً همانستگی‌های کریستالی X مدول‌هایی تصویری چون P روی $W(R)$ خواهند بود، دوم اینکه یک نگاشت فروبنیوس خطی $F: P \rightarrow P$ موجود است که بعد از وارون کردن p به یک یکرختی تبدیل می‌شود. این موضوع انگیزه‌ای است تا اشیای زیر را تعریف کنیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنید k یک میدان تام از مشخصه p باشد. یک کریستال روی k ، یک مدول آزاد P روی $W(k)$ است به همراه یک تابع فروبنیوس خطی $F: P \rightarrow P$ که بعد از وارون کردن p به یک یکرختی تبدیل شود.

فروبنیوس خطی بودن نگاشت F بدین معناست که برای هر $a \in R$ و $m \in P$ داریم

$$F(am) = \sigma(a)F(m)$$

با انتخاب یک پایه برای P می‌توان تابع F را با ماتریس A نمایش داد، اگر این پایه را به ماتریس B تغییر دهیم ماتریس A با ماتریس $B^{-1}A\sigma(B)$ جایگزین خواهد شد. بنابراین اگر

$$H(k) = \text{GL}_n(W(k)[\frac{1}{p}]) \cap \text{M}_n(W(k)),$$

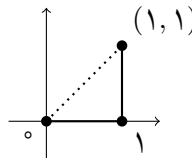
گروه‌واره‌ای که از رسته کریستال‌های n بعدی به دست می‌آید، به‌طور طبیعی با گروه‌واره خارج قسمت $[H(k)/\text{GL}_n(W(k))]$ برابر خواهد بود. گروه‌واره خارج قسمت گروه‌واره‌ای است که اشیای آن اعضای $H(k)$ هستند و برای هر $k \in \text{GL}_n(W(k))$ ، $g \in H(k)$ یک ریختار بین g و $k^{-1}g\sigma(k)$ داریم.

حلقه $W(k)$ یک حلقه ارزه گسسته است که مولد ایده‌آل ماکسیمال آن p است، بنابراین طبق قضیه ساختاری مدول‌ها روی حلقه‌های ارزه گسسته، هر ماتریسی روی این حلقه تجزیه‌ای به صورت $A = B\mu(p)C$ دارد که $A, C \in \text{GL}_n(W(K))$ و $\mu(p)$ ماتریسی قطری با درایه‌های روی قطر $p^{w_1}, p^{w_2}, \dots, p^{w_n}$ است. اعداد $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ وزن‌های هادج این کریستال نام دارند. به خط شکسته محذبی که از متصل کردن نقاط (i, w_i) به یکدیگر به دست می‌آید

چندضلعی هادج این کریستال می‌گویند. قضیه‌ای از مازور^۱ می‌گوید در حالتی که این کریستال از همانستگی یک چندگونای X به دست آمده باشد و $\tilde{X}$ یک فراکشی هموار این چندگونا به $\mathbb{Q}$ باشد، وزن‌های هادج کریستال با وزن‌های هادج خمینه $X_{\mathbb{C}}$ برابر خواهند بود.

ناوردهای عددی مهم دیگری هم می‌توان به یک کریستال نسبت داد؛ برای سادگی کار، این ناوردها را تنها در حالتی که k میدانی متناهی باشد تعریف می‌کنیم. فرض کنید نگاهت فروبنیوس کریستال با ماتریس F داده شده باشد، مقادیر ویژه F تحت رابطه هم‌ارزی بالا خوش‌تعریف نیستند اما به سادگی می‌توان مشاهده کرد که ارزه p ی این مقدار ویژه‌ها خوش‌تعریف‌اند. به این مقادیر وزن‌های نیوتن این کریستال می‌گویند. همانند قبل می‌توان چندضلعی نیوتن را تعریف کرد.

مثال ۴.۳. اگر کریستالی را در نظر بگیریم که از همانستگی اول یک خم بیضوی زبرتکین به دست می‌آید، چندضلعی‌های هادج و نیوتن آن به شکل زیر خواهند بود.



شکل ۱. خط نقطه‌چین چندضلعی نیوتن و خط سیاه‌رنگ چندضلعی هادج را نشان می‌دهد.

اهمیت وزن‌های نیوتن در آن است که از طریق آن می‌توان کریستال‌ها را تا حد تکرایی^۲ به‌طور کامل رده‌بندی کرد.

تعریف ۵.۳. منظور از یک تکرایی بین دو کریستال $(P, F), (P', F')$ یک یکرختی $f: P[\frac{1}{p}] \rightarrow P'[\frac{1}{p}]$ است با شرط $f \circ F = F' \circ f$.

اکنون قضیه‌ای در این باره بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۳ ([۱۳]). دو کریستال با هم تکرزا هستند اگر و فقط اگر وزن‌های نیوتن یکسانی داشته باشند.

وزن‌های نیوتن و هادج یک کریستال بی‌ارتباط به هم نیستند.

قضیه ۷.۳ ([۱۳]). چندضلعی نیوتن همواره بالاتر از چندضلعی هادج قرار دارد و نقطه انتهایی این دو چندضلعی یکسان است.

همان‌طور که بیان شد می‌توان به هر شیء هندسی روی یک میدان یک کریستال نسبت داد. در حالت های خاصی این تابعگون یک هم‌ارزی بین دسته‌هایی خاص از اشیای هندسی و کریستال‌ها، که ماهیتی جبرخطی دارند، القاء می‌کند. این موضوع از این جهت حائز اهمیت است که مطالعه کریستال‌ها از مطالعه اشیای هندسی ساده‌تر است.

گروه‌های p -تقسیم‌پذیر^۱ دسته مهمی از اشیای هندسی هستند که هم خودشان اهمیت زیادی در نظریه اعداد دارند و هم مطالعه فضای مدولی آن‌ها ابزار مهمی در برنامه لنگلندز است. قضیه ۸.۳ ([۱۳]). یک هم‌ارزی بین گروه‌های p -تقسیم‌پذیر روی یک میدان تام و کریستال‌های با وزن هادج صفر و یک روی آن میدان وجود دارد.

۴ نظریه p ای هادج

فرض کنید X یک چندگونای هموارِ سره روی یک میدان موضعی K باشد، برای X سه نظریه همانستگی مهم با ضرایب p ای وجود دارد: همانستگی اتال، X که ساختار یک نمایش گروه گالوای K را دارد، همانستگی هادج-تیت X ، که با

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_X^j)$$

تعریف می‌شود و یک درجه‌بندی طبیعی روی خود دارد، و همانستگی درام X ، که یک پالایش^۲ طبیعی روی خود دارد که از پالایش طبیعی روی همبافت^۳ فرم‌های دیفرانسیل القا می‌شود. همچنین اگر X مدولی هموار روی $\mathcal{O}_K$ همچون $\mathfrak{X}$ داشته باشد، می‌توان همانستگی کریستال $\mathfrak{X}/p$ را هم به X نسبت داد. با توجه به یکرختی بین همانستگی کریستال $\mathfrak{X}/p$ با ضرایب $\mathcal{O}_K$ و همانستگی درام $\mathfrak{X}$ یک پالایش طبیعی روی این همانستگی وجود دارد که طبق قضیه مازور همان پالایشی است که از چندضلعی هادج حاصل می‌شود.

بنابر دیدگاه گروتندیک، انتظار داریم همه این نظریه‌های همانستگی سایه‌هایی از طرح X باشند، و بنابراین نباید بی‌ارتباط به هم باشند. فالتینگز^۴ [۹] ثابت کرد که این نظریه‌ها پس از تغییر پایه مناسب با هم یکرختار خواهند بود.

در واقع، همان‌طور که برای یک خمینه تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ همانستگی درام و تکین با ضرایب روی $\mathbb{Q}$ یا حتی $\overline{\mathbb{Q}}$ با هم یکرخت نبودند اما روی $\mathbb{C}$ و با افزودن عناصر متعالی به میدان، این دو نظریه همانستگی با هم یکرخت می‌شدند، در دنیای p ای هم نیاز به حلقه‌های ضرایب بزرگی هست تا ارتباط بین نظریه‌های همانستگی مختلف خود را نشان دهد.

در نظریه p ای هادج سه حلقه ضرایب B_K^{HT} ، B_K^{DR} ، B_K^{Crys} تعریف می‌شود، که حلقه B_K^{HT} یک حلقه مدرج با عمل گروه گالوا روی آن است، روی حلقه B_K^{DR} یک پالایش وجود دارد، و حلقه B_K^{Crys} علاوه بر این پالایش، مجهز به یک فراکشی فروبنیوس است. یک فراکشی فروبنیوس روی حلقه R نگاشتی مثل $\sigma_R : R \rightarrow R$ است به‌شرطی که نگاشت القایی $\sigma : R/p \rightarrow R/p$ همان نگاشت فروبنیوس باشد. حال می‌توانیم قضیه‌های فالتینگز را تعریف کنیم.

قضیه ۱.۴. برای هر X سره و هموار داریم

$$H_{et}^n(X, K) \otimes gr^\circ B_K^{\text{HT}} \cong gr^\circ (B_K^{\text{HT}} \otimes \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega^q)),$$

$$H_{et}(X, K) \otimes B_K^{\text{DR}} \cong H_{\text{DR}}^n(X/K) \otimes B_K^{\text{DR}}.$$

همچنین اگر X را بتوان به یک طرح هموار سره $\mathfrak{X}$ روی $\mathcal{O}_K$ گسترش داد (به اصطلاح دارای کاهش خوب باشد) آنگاه داریم

$$H_{et}(X, K) \otimes B_K^{\text{Crys}} \cong H_{\text{Crys}}(\mathfrak{X}_k/p) \otimes B_K^{\text{Crys}}.$$

یکریختی اول عمل گروه گالوا روی دو طرف، یکریختی دوم عمل گروه گالوا و پالایش روی دو طرف، و یکریختی سوم عمل گروه گالوا ساختار کریستالی و پالایش دو طرف را حفظ می‌کند.

همان‌طور که گفتیم، همانستگی‌های هر چندگونای تصویری روی K نمایش‌هایی از گروه گالوای K به یک فضای برداری روی $\mathbb{Q}_p$ به دست خواهد داد که در قضیه بالا صدق می‌کند. این موضوع ما را به مطالعه نمایش‌هایی از گروه گالوا راهنمایی می‌کند که صورتی از قضیه بالا برای آن‌ها برقرار باشد؛ از یک طرف این‌ها نمایش‌هایی هستند که می‌توانند از هندسه نشأت گرفته باشند و از طرف دیگر مطالعه نمایش‌هایی با این شرایط اضافه در بخش‌های مختلفی از برنامه لنگلندز، مثلاً در نظریه دگردیسی^۱ نمایش‌های گالوا، دارای اهمیت است.

حال فرض کنید V یک نمایش گالوای دلخواه باشد، این نمایش را هادج-تیت گوئیم هرگاه مدول مدرج $D_{\text{HT}}(V)$ روی K وجود داشته باشد که مشابه یکریختی اول، بعد از تغییر پایه به B_K^{HT} ، با V یکریخت باشد.

تعریف ۲.۴. فرض کنید V یک نمایش هادج-تیت از گروه گالوا باشد. تعریف کنید

$$w_i = \dim_K gr^i D_{HT}(V).$$

به این اعداد وزن‌های هادج-تیت نمایش V می‌گویند.

مشابه بالا، می‌توان نمایش‌های درام و کریستالی را هم تعریف کرد. یک نمایش را از نوع درام می‌گوییم اگر مدول $D_{DR}(V)$ با یک پالایش روی آن وجود داشته باشد که بعد از تغییر پایه به B_K^{DR} ، یکرختی مشابه یکرختی دوم قضیه بین آن و V برقرار باشد. نمایش را کریستالی می‌گوییم هرگاه اگر کریستال $D_{Crys}(V)$ روی $W(k)$ و پالایشی روی $D_{Crys}(V) \otimes K$ وجود داشته باشد که بعد از تغییر پایه به B_K^{Crys} ، یکرختی مشابه یکرختی سوم قضیه با V داشته باشد.

قضیه فالتینگر بیان می‌کند که هر نمایش هندسی گروه گالوا درام است. انتظار داریم عکس این مطلب هم برقرار باشد، به این معنی که هر نمایش درام گروه گالوا در همانستگی یک طرح ظاهر شود. چون هر نمایش کریستالی یک نمایش درام هم هست، بنابراین انتظار داریم در همانستگی یک بن‌مایه X ظاهر شود. کریستالی بودن این نمایش با کاهش خوب داشتن X مرتبط است: اگر X دارای کاهش خوب باشد طبق قضیه فالتینگر نمایش متناظر کریستالی است. عکس این حکم لزوماً درست نیست، اما مثلاً اگر X یک چندگونی آبدی باشد، دارای کاهش خوب است اگر و فقط اگر نمایش گالوای متناظر کریستالی باشد.

۵ همانستگی منشوری

همان‌طور که دیدیم رؤیای گروتندیک این بود که یک نظریه همانستگی عام ارائه دهد که تمام نظریه‌های همانستگی وی را در بر داشته باشد و او به این منظور رسته بن‌مایه‌ها را تعریف کرد. شولتسه و بات [۵] از دیدگاه دیگری به این مسئله پرداختند. آن‌ها یک نظریه عام همانستگی برای چندگوناهای صوری p ای به نام همانستگی منشوری ساختند که تمام نظریه‌های شناخته‌شده همانستگی با ضرایب p ای (از جمله همانستگی کریستالی، درام، اتال، و همانستگی هادج-تیت) را می‌توان با تغییر پایه از روی آن به دست آورد.

ساختاری که روی مقادیر این نظریه وجود دارد شباهت بسیار زیادی به کریستال‌ها دارد. بگذارید ابتدا تعریف منشور را یادآوری کنیم، در بیان این تعریف کمی تسامح به خرج می‌دهیم و کلی‌ترین صورت آن را بیان نمی‌کنیم. برای دیدن تعریف کامل می‌توانید به [۵] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۵. یک ساختار δ روی حلقه R عبارت است از یک فراکشی فروبنیوس $\sigma : R \rightarrow R$

و تابع $\delta : R \rightarrow R$ با شرایط زیر

$$\delta(0) = \delta(1) = 0.$$

$$\delta(xy) = x^p \delta(y) + y^p \delta(x) + p \delta(x) \delta(y).$$

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{p}.$$

ملاحظه ۲.۵. در حالتی که p در R مقسوم‌علیه صفر نباشد، ساختار δ به‌طور یکتا از روی یک فراکشی فروبنیوس $\sigma : R \rightarrow R$ تعیین می‌شود. در حالت کلی ساختار δ اطلاعات بیشتری به دست می‌دهد که در بعضی موارد سودمند است.

تعریف ۳.۵. یک منشور عبارت است از یک حلقه A ، یک ساختار δ روی آن، و و یک ایده‌ال کارتیهِ I به‌طوری که A نسبت به (I, p) کامل باشد و $p \in (I, \sigma(I))$.

مثال ۴.۵. اگر R یک حلقه تام با مشخصه p باشد $(W(R), p)$ یک منشور است. به‌طور کلی‌تر اگر R از تقسیم یک حلقه تام بر یک دنباله منظم به دست آید، حلقه $(A_{\text{crys}}(R), p)$ یک منشور است. به منشورهایی که به شکل (A, p) باشند منشور کریستالی می‌گویند.

اکنون دو مثال دیگر می‌آوریم.

مثال ۵.۵. فرض کنید K یک گسترش متناهی از $\mathbb{Q}_p$ و k میدان باقی‌مانده $\mathcal{O}_K$ باشد. همچنین فرض کنید میدان K روی $W(k)[1/p]$ با ریشه چندجمله‌ای آیزنشتاین $E(u)$ داده شده باشد. در این صورت $(W(k)[[u]], E(u))$ یک منشور، به نام منشور کیسن^۲، است و $\frac{W(k)[[u]]}{E(u)} = \mathcal{O}_K$. مشابه این ساختار را می‌توان برای هر حلقه منظم موضعی دیگری هم انجام داد.

مثال ۶.۵. فرض کنید C کامل ساخت بستر جبری $\mathbb{Q}_p$ و $\mathcal{O}_C$ حلقه اعداد صحیح آن باشد. در نظریه‌ای هادج به حلقه $\mathcal{O}_C$ حلقه تام با مشخصه p ، موسوم به $\mathcal{O}_{C^b}$ ، را نسبت می‌دهند و نگاشت طبیعی و پوشای $\theta : W(\mathcal{O}_{C^b}) \rightarrow \mathcal{O}_C$ وجود دارد. می‌توان دید که $\text{Ker } \theta$ توسط یک عنصر d ، که مقسوم‌علیه صفر نیست، تولید می‌شود. بنابراین زوج $(W(\mathcal{O}_{C^b}), \text{Ker } \theta)$ یک منشور است. می‌توان این ساختار را برای هر حلقه تام‌واره^۳ تکرار کرد.

یک نگاشت بین دو منشور (A, I) و (B, J) نگاشتی مثل $f : A \rightarrow B$ است که حافظ

فروبنیوس است، یعنی $f \circ \sigma_A = \sigma_B \circ f$ ، و $f(I) \subset J$.

شولتسه و بات در [۵] ویژگی مفید زیر را برای منشورها ثابت کردند.

گزاره ۷.۵. اگر $(A, I) \rightarrow (B, J)$ نگاشتی بین دو منشور باشد آنگاه $J = IB$.

حال فرض کنید منشور (A, I) باشد و $X = \text{Spf} R$ یک طرح صوری روی A/I باشد. جای منشوری X نسبت به (A, I) جایی است که اشیای آن منشورهایی هستند که (B, J) یک منشور با نگاشتی از (A, I) و B/J یک جبر روی R باشد. توپولوژی روی این جا را توپولوژی کاملاً اتال^۱ در نظر می‌گیریم.

این جا یک بافه ساختاری دارد که به یک منشور حلقه متناظر را نسبت می‌دهد. یک نگاشت طبیعی که بین این جا و جای اتال X وجود دارد، با گرفتن تصویر مستقیم مشتق^۲ از این بافه ساختاری می‌توان یک همبافت روی جای اتال به دست آورد که زیرهمانستگی آن همانستگی منشوری را به دست می‌دهد. برای نمونه، صورت بعضی از قضیه‌های مقایسه همانستگی منشوری با همانستگی‌های دیگر را می‌آوریم. اگرچه احکام بسیار قوی‌تری از آنچه بیان خواهیم کرد برقرار است، به دلیل پیچیده بودن صورت آن‌ها از ذکر آن‌ها صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۸.۵. اگر (A, p) یک منشور کریستالی و X یک طرح هموار روی A/p باشد، آنگاه

$$\sigma^* H_{\Delta}^i(X, A) = H_{\text{Crys}}^i(X, A).$$

آخرین قضیه این بخش این است.

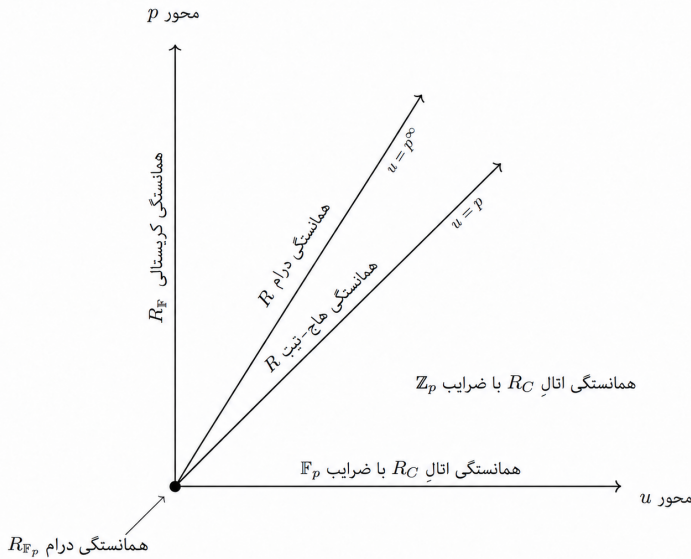
قضیه ۹.۵. اگر $\mathcal{X}$ یک طرح صوری هموار و سره روی $\mathcal{O}_C$ باشد که تار عمومی آن X است. در این صورت بعد از وارون کردن هسته θ یک یکریختی بین همانستگی اتال X و همانستگی منشوری $\mathcal{X}$ نسبت به منشور مثال ۶.۵ وجود دارد.

تصویر زیر اطلاعات این قضیه‌های را درون خود دارد و وجه تسمیه منشور هم از همین جا می‌آید؛ در واقع، یک منشور همانند منشوری است که پرتو نور یک بن‌مایه به آن وارد می‌شود به رنگ‌های مختلف، که در اینجا نظریه‌های همانستگی‌های مختلف هستند، تجزیه می‌شود.

۶ نظریه عرضه‌ها

در بخش ۴ دیدیم که روی یک میدان تام یک تناظر بین گروه‌های p -تقسیم‌پذیر و کریستال‌های با وزن‌های هادج-تیت صفر و یک وجود دارد. این تناظر به حلقه‌های p ای دلخواه تسری پیدا نمی‌کند.

1. (p, I) -completely étale 2. derived direct image



شکل ۲. ارتباط نظریه‌های همانستگی‌های مختلف با همانستگی منشوری

زینک در [۱۸] اشیایی را تعریف می‌کند که روی میدان‌های تام با کریستال‌ها معادل هستند، اما اعداد هادج را به طرز صریح‌تری در دل خود دارند و روی حلقه‌های دلخواه به اشیای غنی‌تری تعمیم می‌یابند. زینک با این تعریف توانست تناظر بالا را به این حلقه‌ها گسترش دهد. برای سادگی بیشتر کار ما این اشیاء را صرفاً روی $W(k)$ تعریف می‌کنیم، در حالت کلی $W(R)$ ساختار پیچیده‌تری دارد که باعث می‌شوند بازیگرهای بیشتری در این تعریف ظاهر شوند.

تعریف ۱.۰۶. یک عرضه روی k عبارت است از یک چهارتایی $(P, (Q_i)_{i=0}^r, F, (F_i)_{i=0}^r)$ که در آن P یک مدول آزاد روی $W(k)$ است و $F: P \rightarrow P$ تابعی فروبنیوس خطی با شرایط زیر است

- $p^i P \subset Q_i \subset P$ ؛
- $F_i: Q_i \rightarrow P$ تابعی فروبنیوس خطی است و $F|_{Q_i} = p^i F_i$ ؛
- یک تجزیه P به مدول‌های آزاد $(L_i)_{i=0}^r$ ها وجود داشته باشد به طوری که

$$Q_i = \bigoplus_{j=0}^i p^{i-j} L_j \oplus \bigoplus_{j=i+1}^r L_j. \quad (۱)$$

این تجزیه را تجزیهٔ نرمال P می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۶. زینک در مقاله اولیه خود تعریف بالا را تنها در حالت $r = ۱$ ارائه داد که متناظر با حالتی است که کریستال تنها وزن صفر و یک داشته باشد.

توجه کنید که اگر بعد Q_i ها را ثابت در نظر بگیریم، تمام اطلاعات یک عرضه را می توان در نگاشت

$$\operatorname{div} F := F_{r|L_r} \oplus F_{r-1|L_{r-1}} \oplus \cdots \oplus F_{0|L_0}.$$

خلاصه کرد.

یک نگاشت بین دو عرضه نگاشتی چون $h : P \rightarrow P'$ است که زیرمدول های Q_i را به درون خود بنگارد و با نگاشت های فروبنیوس جابه جا شود، یعنی $F'_P = h^{-1} \circ F_P \sigma(h)$. بگذارید با یک مثال دوبعدی ببینیم نگاشت خطی h چه شرایطی باید داشته باشد.

مثال ۳.۶. فرض کنید

$$P = W(k)^2, \quad Q_1 = e_1 + pe_2$$

که در آن e_1, e_2 پایه استاندارد برای فضا هستند. در این صورت باید داشته باشیم

$$h(e_1) = a_{11}e_1 + pa_{12}e_2, \quad h(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

بنابراین درایه a_{12} از ماتریس h باید بر p بخش پذیر باشد. نگاشت $\operatorname{div} F$ روی این پایه به شکل زیر عمل خواهد کرد.

$$\operatorname{div} F(h(e_1)) = \sigma(a_{11})\operatorname{div} F(e_1) + \sigma(a_{12})\operatorname{div} F(e_2),$$

$$\operatorname{div} F(h(e_2)) = p\sigma(a_{21})\operatorname{div} F(e_1) + p\sigma(a_{22})\operatorname{div} F(e_2).$$

در حالت کلی فرض کنید $\mu(p)$ ماتریس قطری باشد که روی قطر آن عدد p^r با بستایی برابر با بعد L^r ظاهر شده است. در این صورت نگاشت تغییر پایه عرضه باید دارای خاصیت زیر باشد

$$\mu(p)h\mu(p)^{-1} \in \operatorname{GL}_n(W(k)).$$

زیرگروه ماتریس های این خاصیت را $G^\mu(k)$ می نامیم. با محاسبه ساده ای نتیجه می شود که چنین تغییر پایه ای ماتریس $\operatorname{div} F$ را به ماتریس $(h^{-1}U\sigma(\mu(p)h\mu(p)^{-1}))$ خواهد برد. بنابراین عرضه هایی که بعد تجزیه نرمال آن ها با ماتریس $\mu(p)$ داده شده باشد، با گروه وارده خارج قسمت $[G(W(k))/G^\mu(k)]$ در تناظر خواهند بود.

فرض کنید A یک حلقه و $\sigma : A \rightarrow A$ یک نگاشت باشد. برای رعایت اختصار، از این به بعد برای عضو دلخواه d از این حلقه تعریف می‌کنیم $\Phi_\mu^d(h) := \mu(d)\sigma(h)\mu(d)^{-1}$. گاهی اوقات به گروه‌های p -تقسیم‌پذیری توجه داریم که ساختارهای دیگری داشته باشند. مثلاً گروه‌های p -تقسیم‌پذیری که $W(\mathbb{F}_{p^m})$ روی آن‌ها عمل می‌کند. در این مواقع باید به عرضه‌هایی توجه کنیم که ساختار غنی‌تری دارند. در مثال بالا، برای گروه‌های p -تقسیم‌پذیری که $W(\mathbb{F}_{p^m})$ روی آن‌ها عمل می‌کند، اگر داشته باشیم $W(\mathbb{F}_{p^m}) \subset K$ ، عرضه‌هایی با این ساختار اضافه با عرضه‌هایی متناظرند که یک نوع درجه‌بندی روی آن‌ها وجود دارد. منظور از یک درجه‌بندی روی یک عرضه یک درجه‌بندی $P = \bigoplus_{i=1}^m P_i$ است به‌طوری که Q_i ‌ها زیرمدول‌هایی مدرج باشند و نگاشت فروبنیوس درجه منفی یک داشته باشد، بدین معنی که نگاشت $F_i : P_i \rightarrow P_{i-1}$ را القا کند. توجه کنید که درجه‌بندی دوری است، یعنی $P_{m+1} = P_1$.

به زبان نظریه‌ی گروه‌ها بُعد تجزیه نرمال در ماتریس‌های $\mu_1(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)$ رمزگذاری می‌شود و گروه‌واره چنین عرضه‌هایی برابر با گروه‌واره خارج قسمت $[\mathrm{GL}_n(W(k))^m / G^{\mu^\circ}]$ خواهد بود که در آن $G^{\mu^\circ} = \prod_{i=1}^m G^{\mu_i}$ و روی $\mathrm{GL}_n(W(k))^m$ با فرمول زیر عمل می‌کند

$$(h_i)_{i=1}^m \cdot (U_i)_{i=1}^m = (h_i^{-1} U_i \Phi_{\mu_{i-1}}^p(h_{i-1}))_{i=1}^m.$$

۷ کریستال‌ها و عرضه‌های منشوری

اگر چندگونای X روی A/I تعریف شده باشد می‌توان از همانستگی منشوری X نسبت به A سخن گفت. حاصل کار یک A -مدول خواهد بود که روی آن ساختاری شبیه عرضه قابل تعریف است. این موضوع انگیزه‌ای است که باعث می‌شود عرضه‌های منشوری و کریستال‌های منشوری را تعریف کنیم. ابتدا به تعریف کریستال‌های منشوری روی X می‌پردازیم.

تعریف ۱.۷. فرض کنید X یک طرح صوری باشد، منظور از جای منشوری X جای همه منشورهایی چون (A, I) به همراه نگاشت $\mathrm{Spec} A/I \rightarrow X$ است. این جا را با توپولوژی p ی کاملاً تخت^۱ در نظر خواهیم گرفت.

تعریف ۲.۷. یک کریستال منشوری P روی X عبارت است از یک بافه از کلاف‌های برداری^۲ روی جای منشوری X به همراه یک نگاشت فروبنیوس خطی $F : P \rightarrow P$ به‌طوری که F :

1. p-adically completely flat 2. vector bundle

$P[\mathbb{A}/I] \rightarrow P[\mathbb{A}/I]$ یکریختی باشد و اگر نگاشت $A \rightarrow B$ بین دو منشور در این جا داشته باشیم، آنگاه $P(B) = P(A) \otimes_A B$.

متناظر با هر کریستال منشوری یک دستگاه موضعی^۱ روی X به دست می‌آید که شهوداً کریستالی است. در حالت خاص، به حالتی علاقه‌مندیم که $X = \text{Spec } K$ و K یک میدان موضعی باشد. در این حالت شولتسه و بات قضیه زیر را اثبات کرده‌اند.

قضیه ۳.۷. یک هم‌ارزی رسته‌ای بین نمایش‌های p ای گروه گالوای K و کریستال‌های منشوری روی حلقه $\mathcal{O}_K$ وجود دارد.

دسته خاصی از کریستال‌های منشوری روی K وجود دارند که کار با آن‌ها ساده‌تر است، زیرا تعریف صریح‌تری دارند. فرض کنید (A, d) منشور کیسن یا منشور متناظر با $\mathcal{O}_K$ باشد. در این صورت یک عرضه منشوری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (برای یک منشور دلخواه تعریف عرضه منشوری پیچیده‌تر است، برای دیدن این تعریف می‌توانید به [۱۱] مراجعه کنید).

تعریف ۴.۷. یک عرضه منشوری روی $\mathcal{O}_K$ عبارت است از یک چهارتایی

$$(P, (Q_i)_{i=0}^r, F, (F_i)_{i=0}^r)$$

که در آن P یک مدول آزاد روی A و $F: P \rightarrow P$ تابعی فروبنیوس خطی است با شرایط زیر

$$d^i P \subset Q_i \subset P \quad \bullet$$

$$F|_{Q_i} = d^i F_i \text{ و } F_i: Q_i \rightarrow P \text{ تابعی فروبنیوس خطی است و } F|_{Q_i} = d^i F_i \quad \bullet$$

$$\bullet \text{ یک تجزیه } P \text{ به مدول‌های آزاد } (L_i)_{i=1}^r \text{ ها وجود داشته باشد به طوری که}$$

$$Q_i = \bigoplus_{j=0}^i d^{i-j} L_j \oplus \bigoplus_{j=i+1}^r L_j. \quad (2)$$

به این تجزیه، تجزیه نرمال عرضه می‌گوییم.

مشابه بخش قبل می‌توان عرضه‌های منشوری مدرج را هم تعریف کرد، به تعبیری این‌ها عرضه‌هایی خواهند بود که ساختاری اضافه دارند: حلقه $W(\mathbb{F}_{p^m})$ روی آن‌ها عمل می‌کند.

قضیه ۵.۷. یک تابعگون تماماً صادق از رسته عرضه‌های منشوری روی منشور کیسن به رسته کریستال‌های منشوری وجود دارد.

تعریف ۶.۷. یک نمایش گروه گالوای K را دارای تحویل خوب منشوری^۱ گوئیم هرگاه در تناظر بین نمایش‌های گروه گالوای K و کریستال‌های منشوری، کریستال متناظر ساختار یک عرضه منشوری را داشته باشد.

می‌گوئیم طرح هموار سره X به پیمانه p تحویل خوب دارد اگر مدل هموار و سره‌ای روی $\mathbb{Z}_p$ داشته باشد. می‌توان ثابت کرد اگر یک نمایش گروه گالوا از همانستگی یک طرح X بیاید که X تحویل خوب دارد، نمایش گالوای متناظر حتماً دارای تحویل خوب منشوری است. بنابراین اینکه یک نمایش گروه گالوا تحویل خوب منشوری داشته باشد اطلاعات بیشتری را از کریستالی بودن درباره‌ی اینکه طرح متناظر تحویل خوب دارد یا نه به ما می‌دهد.

۸ تغییر وزن یک عرضه منشوری

در این بخش با دسته خاصی از عرضه‌های مدرج سروکار داریم که آن‌ها را عرضه‌های تُنک خواهیم نامید. فرض کنید یک عرضه منشوری مدرج داریم که ابعاد تجزیه نرمال آن در ماتریس‌های $\mu_1(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)$ رمزگذاری شده باشد و فرض کنید w_i بزرگ‌ترین توان p ظاهر شده در μ_i ‌ها باشند.

به دو تعریف ترکیباتی نیازمندیم. تعریف کنید

$$\Gamma = \left\{ i \in \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} : \mu_i \neq \text{Id} \right\}$$

و فرض کنید یک ترتیب برای عناصر $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ ، و در حالت خاص ترتیب $\gamma_s < \dots < \gamma_2 < \gamma_1$ را روی اعضای Γ در نظر گرفته‌ایم. تعریف کنید $r_{\gamma_i} = \gamma_{i+1} - \gamma_i$. همچنین برای هر $\gamma_i < \gamma_j$ ، γ_{i+1} ، تعریف کنید $d^+(j) = \gamma_{i+1} - \gamma_j$.

یک عرضه منشوری را تنک می‌گوئیم اگر برای هر $\gamma \in \Gamma$ داشته باشیم $w_\gamma > r_\gamma$. یک عرضه منشوری را تنک منظم گوئیم هرگاه مقدار r_γ برای هر $\gamma \in \Gamma$ عددی ثابت و زوج باشد. در ادامه خوب است مثال ساده‌ی زیر از یک جلوه منشوری تنک را در ذهن داشته باشید.

مثال ۱.۸. فرض کنید $\mu_1 = (1, p^2)$ ، $\mu_2 = \mu_3 = \text{Id}$. مدول به صورت

$$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$$

خواهد بود و نگاشت‌های

$$F_1 : P_1 \rightarrow P_2, \quad F_2 : P_2 \rightarrow P_3, \quad F_3 : P_3 \rightarrow P_1$$

را خواهیم داشت.

اجازه دهید پدیده تغییر وزن را در این مثال خاص بررسی کنیم. برای راحتی کار، فعلاً فرض می‌کنیم $d = p$. مدول‌های $\tilde{P}_i$ را در نظر بگیرید با این شرط که

$$\tilde{P}_1 = P_1, \quad \tilde{P}_2 = p^2 P_2 + F_1 P_1, \quad \tilde{P}_3 = p P_3 + F_2 \circ F_1 P_1.$$

توجه کنید که

$$p^2 P_2 \subset F_1 P_1, \quad F_2 P_2 = P_3, \quad F_3 P_3 = P_1$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $p \tilde{P}_i \subset F_{i-1} \tilde{P}_{i-1}$. بنابراین یک کریستال با وزن‌های صفر و یک به دست آورده‌ایم که با کریستال اولیه تکرار است. به‌وضوح تابعگونی که به این صورت تعریف می‌شود تماماً صادق خواهد بود زیرا می‌توان کریستال اصلی را از روی تصویرش بازسازی کرد.

اگر $d \neq p$ چالش بیشتری خواهیم داشت. مشکل این است که $d \neq \sigma(d)$ و بنابراین نگاشت F_2 نگاشتی از $d^2 P_2 + F_1 P_1$ به $d P_3 + F_2 \circ F_1 P_1$ نیست، بلکه نگاشت

$$F_2 : d^2 P_3 + F_1 P_1 \rightarrow \sigma(d) P_3 + F_2 \circ F_1 P_1$$

به دست می‌آید. می‌توانیم تعریف $\tilde{P}_3$ را تغییر دهیم و بنویسیم $\tilde{P}_3 = \sigma(d) P_3 + F_2 \circ F_1 P_1$. در این صورت مشکل جدیدی پیش می‌آید: برای وارون‌پذیر کردن F_1 باید عنصر d را وارون‌پذیر کنیم، اما برای وارون‌پذیر کردن F_2 نیاز به وارون‌پذیر کردن $\sigma(d)$ داریم. بنابراین عرضه یا کریستالی به معنای سنتی به دست نمی‌آوریم.

نویسندگان مقاله حاضر در [۱۲]، در حالتی که منشور متناظر با O_C یا هر حلقه تام‌واره دیگری باشد، راهی برای حل این مشکل یافته‌اند. نکته اصلی استفاده از نظریه اشتوکاها^۱ روی خم فارگ و فونتن^۲ است که شولتسه و واینشتاین^۳ در [۱۶] تعریف کردند. شئی که در بالا به دست آوردیم حالت خاصی از چیزی است که اشتوکا^۴ با چندپا نامیده می‌شود. ما در [۱۲] به کمک قضیه بویل-لسلو^۵ روشی ارائه کردیم که بتوان پاهای یک اشتوکا با چندپا را در هم ادغام کرد و یک اشتوکا با یک‌پا یا همان عرضه منشوری به دست آورد.

ملاحظه ۲.۸. بد نیست توضیح دهیم چگونه یک عرضه منشوری روی یک حلقه تام‌واره R را می‌توان به چشم یک اشتوکای تک‌پا دید. برای دیدن این موضوع توجه کنید با داشتن یک جلوه منشوری، در حالت خاص یک مدول تصویری P روی $A_{\text{inf}}(R)$ و یک تابع $F: \sigma^*P \rightarrow P$ به دست می‌آوریم که بعد از وارون کردن d به یک یکرختی تبدیل می‌شود. حال کافی است این مدول تصویری و تابع را به $Y_R = \text{Spa } A_{\text{inf}}(R)/(p, \pi)$ تحدید کنیم تا یک اشتوکای یک‌پا به دست آید.

اگر در مثال بالا این کار را انجام دهید یک عرضه منشوری با وزن‌های صفر و یک به دست می‌آید.

قضیه ۳.۸. یک تابعگون تماماً صادق از عرضه‌های منشوری مدرج تنک منظم روی منشور متناظر با $\mathcal{O}_C$ به عرضه‌های منشوری با وزن‌های هادج صفر و یک روی منشور کیسن وجود دارد که آن را با Flex نشان می‌دهیم.

برای کاربردی که در این مقاله در نظر داریم نیاز داریم عملیات تغییر وزن را نه روی منشور متناظر با $\mathcal{O}_C$ بلکه روی منشور کیسن انجام دهیم. بدین منظور ابتدا توجه کنید می‌توان یک نگاشت طبیعی بین $W(k)[[u]]$ و $W(\mathcal{O}_{C^b})$ تعریف کرد. برای اثبات این موضوع به لم زیر نیاز داریم.

لم ۴.۸. عنصر ناصفری چون $\alpha \in W(\mathcal{O}_{C^b})$ وجود دارد به‌طوری که $E(\alpha) \in \text{Ker } \theta$.

اثبات. از آنجا که $E(u)$ تکین و C جبری بسته است، معادله $E(u) = 0$ ریشه‌ای چون π در $\mathcal{O}_C$ دارد. نگاشت $\theta: W(\mathcal{O}_{C^b}) \rightarrow \mathcal{O}_C$ پوشاست، بنابراین عنصر α وجود دارد به‌طوری که $\theta(\alpha) = \pi$.

واضح است که $E(\alpha) \in \ker \theta$ از طرفی $E(\alpha) \neq 0$ زیرا $W(C^b)$ یک حلقه ارزّه گسسته است که مولد ایده‌آل ماکسیمال آن p است و یک چندجمله‌ای آیزنشتاین در چنین حلقه‌ای ریشه ندارد. $\square$

اکنون قضیه مورد نظر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۸. یک تابعگون تماماً صادق از عرضه‌های منشوری مدرج تنک منظم روی منشور کیسن به عرضه‌های منشوری با وزن‌های هادج صفر و یک روی منشور کیسن وجود دارد.

اثبات. نگاشت $f : W(k)[u] \rightarrow W(\mathcal{O}_{C^b})$ را در نظر بگیرید که در آن $f(u) = \alpha$. ابتدا دقت کنید که این نگاشت تخت است، زیرا از آن جا که $\alpha \in \sqrt{(\text{Ker } \theta, p)}$. نگاشت بالا به طور یکتا به یک نگاشت پیوسته بین حلقه های $W(k)[[u]]$ با توپولوژی u ای و $W(\mathcal{O}_{C^b})$ با توپولوژی $(\text{Ker } \theta, p)$ ای گسترش داد. ادعا می کنیم این نگاشت تخت است، کافی است نشان دهیم این نگاشت بعد از تغییر پایه به $W(k)[[u]][\frac{1}{u}]$ ، $W(k)$ ، $W(k)[[u]]$ تخت خواهد بود. هر دوی این حلقه ها حلقه ارزّه گسسته p ای هستند و هر دوی $W(\mathcal{O}_C)[\frac{1}{\alpha}]$ ، $W(\mathcal{O}_{C^b})/\alpha$ فاقد عناصر p -تابدارند بنابراین نگاشت مربوط تخت است.

حالا از فرود^۱ نسبت به این نگاشت برای اثبات حکم استفاده می کنیم. فرض کنید D یک جلوه منشوری مدرج تنک منظم روی منشور کیسن باشد. در این صورت با استفاده از گزاره ۳.۸، $f(D)$ یک عرضه مدرج تنک منظم روی منشور متناظر با $\mathcal{O}_C$ خواهد بود که یک داده فرود روی آن خواهیم داشت. حال تابعگون تغییر وزن را روی $f(D)$ اثر می دهیم تا عرضه $\text{Flex}(f(D))$ به دست آید.

فرض کنید $\tau_i : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \hat{\otimes}_{W[k][[u]]} \mathcal{O}_C$ برای $i = 1, 2$ نشاننده های کانونی باشند و $\psi : \tau_1^* f(D) \rightarrow \tau_2^* f(D)$ داده فرود برای $f(D)$ باشد. از آنجا که $\mathcal{O}_C \hat{\otimes}_{W[k][[u]]} \mathcal{O}_C$ یک حلقه تامواره است، تابعگون Flex تماماً صادق است و $\text{Flex}(\psi)$ یک داده فرود برای $\text{Flex}(f(D))$ خواهد بود و بعد از فرود عرضه منشوری $\text{Flex}(D)$ روی منشور کیسن را به دست می آوریم که تغییر وزن عرضه D خواهد بود. همچنین بنابر فرود می توان تماماً صادق بودن را بعد از رفتن به پوشش $\mathcal{O}_C$ بررسی کرد که از قبل می دانیم برقرار است، بنابراین حکم ثابت می شود. $\square$

۹ تغییر وزن نمایش های گروه گالوا

در این بخش به اثبات قضیه اصلی این مقاله خواهیم پرداخت. ابتدا چند تعریف لازم داریم.

تعریف ۱.۹. فرض کنید K یک میدان موضعی باشد و $K \subset W(\mathbb{F}_{p^r})$. یک نمایش گروه گالوای K همچون M را مدرج گویم هرگاه $W(k)$ روی آن عمل کند.

توجه کنید که اگر یک نمایش مدرج کریستالی باشد، کریستال متناظر با آن به معنای بخش های قبلی مدرج خواهد بود.

تعریف ۲.۹. می‌گوییم یک نمایش کریستالی مدرج گروه گالوای K همچون M تنک (تنک منظم) است هرگاه $D_{crys}(M)$ تنک (تنک منظم) باشد.

حال می‌توانیم به بیان قضیه اصلی بپردازیم.

قضیه ۳.۹. یک تابعگون تماماً صادق از نمایش‌های مدرج تنک منظم با تحویل منشوری خوب گروه گالوا به نمایش‌های مدرج با تحویل منشوری خوب با وزن‌های صفر و یک وجود دارد.

اثبات. بنا بر قضیه ۳.۷ یک هم‌ارزی رسته‌ای بین نمایش‌های مدرج تنک منظم با تحویل منشوری خوب گروه گالوای K و عرضه‌های منشوری مدرج تنک منظم روی منشور کیسن وجود دارد. بنابر قضیه ۵.۸ تابعگونی از رسته عرضه‌های منشوری مدرج تنک منظم به رسته عرضه‌های منشوری منظم با وزن‌های صفر و یک وجود دارد. اما خود این رسته با رسته نمایش‌های مدرج با تحویل منشوری خوب و وزن‌های صفر و یک هم‌ارز است. $\square$

ملاحظه ۴.۹. با توجه به این که رسته نمایش‌های کریستالی گروه گالوا با وزن‌های هادج صفر و یک همان رسته گروه‌های p -تقسیم‌پذیر روی O_K است، می‌توانیم به هر نمایش تنک منظم گروه گالوا با تحویل منشوری خوب به‌طور کانونی یک گروه p -تقسیم‌پذیر نسبت دهیم.

انتظار داریم این حکم را بتوان به تمام نمایش‌های کریستالی تنک منظم تعمیم داد. برای این کار به جای‌های منشوری باید از رسته مدول‌های کیسن استفاده کرد.

مراجع

- [۱] بهزادی‌پور، حسین؛ پیردایه، جلال؛ رستگار، آرش، نظریه میدان‌های رده‌ای روی میدان تک عضوی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۴۰۴)، شماره ۲، ۲۱۹-۲۳۴.
- [۲] کاشانی، سید محمدباقر، تقارن آینه‌ای، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۱۷۷-۲۱۰.
- [3] André, Y., La conjecture du facteur direct, *Publ. Math. IHES*, **127** (2018), 71-93.
- [4] Berthelot, P., Ogus, A., *Notes on Crystalline Cohomology*, vol. 21, Princeton University Press, Princeton, 2015.
- [5] Bhatt, B., Scholze, P., Prismatic F -crystals and crystalline Galois representations (2021), available at [arXiv:2106.14735](https://arxiv.org/abs/2106.14735).
- [6] Bhatt, B., Scholze, P., Prisms and prismatic cohomology, *Ann. of Math.*, **196** (2022), 1135-1275.
- [7] Brinon, O., Conrad, B., *Preparatory Notes on p -adic Hodge Theory*, Clay Mathematical Institute Summer School, Honolulu, Hawaii, 2009.
- [8] Bültel, O., PEL moduli spaces without $\mathbb{C}$ -valued points (2008), available at [arXiv:0808.4091](https://arxiv.org/abs/0808.4091).
- [9] Faltings, G., p -adic Hodge theory, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 255-299.

- [10] Hahn, J., Raksit, A., Wilson, D., A motivic filtration on the topological cyclic homology of commutative ring spectra (2022), available at [arXiv:2206.11208](https://arxiv.org/abs/2206.11208).
- [11] Hedayatzadeh, S., Partofard, A., Deformations of prismatic higher (G, μ) -displays over quasi-syntomic rings (2024), available at [arXiv:2402.12879](https://arxiv.org/abs/2402.12879).
- [12] Hedayatzadeh, S., Partofard, A., Embeddings of some exceptional Shimura varieties into Siegel variety (work in progress).
- [13] Katz, N., Slope filtration of F -crystals, *Astérisque*, **63** (1979), 979.
- [14] Kisin, M., Crystalline representations and F -crystals, in *Algebraic Geometry and Number Theory: In Honor of Vladimir Drinfeld's 50th Birthday*, G. David, ed., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 459-496.
- [15] Milne, J. S. , Motives—Grothendieck's dream, in *Open Problems and Surveys of Contemporary Mathematics*, vol. 6, 2013, 325-342.
- [16] Scholze, P., Weinstein, J., *Berkeley Lectures on p -adic Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 2020.
- [17] Voevodsky, V., Triangulated categories of motives over a field, in *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories*, Princeton University Press, Princeton, 2000.
- [18] Zink, T., The display of a formal p -divisible group, *Astérisque*, **278** (2002), 127-248.

علی پرتوفرد: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: alipartofard@ipm.ir

سیدمحمد هادی هدایت‌زاده رضوی: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: hadi@ipm.ir

Cohomology Theories and Changing the Weight of Galois Representations

S. M. H. Hedayatzadeh Razavi¹, A. Partofard²✉

^{1,2}School of Mathematics, IPM, Iran

Abstract. In this paper, we first introduce various cohomology theories and their relationship with Galois group representations. Then, we present a method that naturally associates certain Galois group representations with Hodge-Tate weights greater than one to representations with lower weights, and under certain conditions, to representations with weights zero and one. More precisely, we prove the existence of a fully faithful functor from the category of graded sparse regular representations with good prismatic reduction of the Galois group to the category of graded representations with good prismatic reduction and weights zero and one.

Keywords: prismatic cohomology, Galois group representations, display, motive, p -adic Hodge theory, Shimura varieties

Article history: Received 15 March 2025; Accepted 11 October 2025

Article type: original

1. hadi@ipm.ir

2. partofardali@gmail.com