فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۴)، صص ۸۷ تا ۱۱۲

مروری بر چندجمله‌ای‌های چبیشف

محمد غلامزاده محمودی✉، امیرمحمد کرمی، سید محمدرضا موسوی

چکیده. چندجمله‌ای‌های چبیشف خانواده‌های خاصی از چندجمله‌ای‌ها هستند که به‌طور خارق‌العاده‌ای در زمینه‌های مختلف از ریاضیات، و بعضاً دور از هم، ظاهر می‌شوند. از نخستین تحقیقاتی که به شکل تفصیلی به این چندجمله‌ای‌ها پرداخته است پژوهش‌های پافنوتی چبیشف، دانشمند روس در قرن نوزدهم، است. این تحقیقات که عمدتاً در نظریهٔ تقریب طبقه‌بندی می‌شود، کاربردهای مهمی در ریاضیات و سایر علوم و مهندسی ازجمله در نظریهٔ درون‌یابی و جبر خطی دارد. در این مقاله به معرفی این چندجمله‌ای‌ها و بازبینی پاره‌ای از خواص و کاربردهای آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱ مقدمه: زندگی‌نامهٔ کوتاه چبیشف

یکی از منابع در مورد زندگی‌نامهٔ چبیشف مدخلی است که در یکی از دائره‌المعارف‌ها (به زبان روسی) در مورد نویسندگان و دانشمندان روسی توسط ونگورف[1] تحریر شده است. این مدخل تقریباً به‌صورت کامل در مجموعه چبیشف [۵] به زبان فرانسوی ترجمه شده است. بیشتر مطالب ذیل از زندگی‌نامهٔ چبیشف از همین منبع گرفته شده است.

پافنوتی لوُویچ چبیشف[2]، ریاضی‌دان روس، در سال ۱۸۲۱ در یک خانوادهٔ اصیل قدیمی چشم به جهان گشود. وی تحصیلات ابتدایی خود را در خانه گذراند و در سال ۱۸۳۷ به دانشگاه مسکو وارد شد. خانوادهٔ وی در اواخر تحصیلات دانشگاهی به خاطر قحطی از لحاظ اقتصادی وضعیت نابسامانی پیدا کرد و آن‌ها توان پرداختن کامل مخارج وی را از دست دادند. در این وضعیت،

عبارات و کلمات کلیدی: چندجمله‌ای‌های چبیشف، نظریهٔ تقریب، تعامد، دستگاه خطی
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۵

1. Vengerov 2. Pafnuty Lvovich Chebyshev

doi: 10.30504/mct.2024.1468.2032

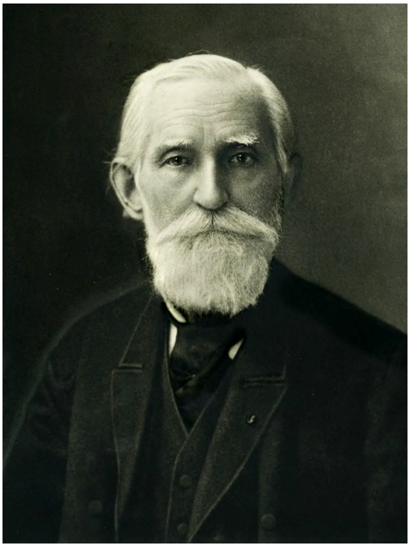
او فرصت‌هایی برای تدریس خصوصی داشت اما علاقهٔ زیادی به استفاده از آن‌ها نداشت، چراکه فکر می‌کرد تدریس او را از مسیر علمی‌اش دور می‌کند. و آن‌چنان‌که از خود او نقل شده است، در تدریس در این دوره به خاطر کم‌حوصلگی چندان موفق نبود. وی در نهایت رسالهٔ کارشناسی خود را در موضوع تحلیل مقدماتی نظریهٔ احتمال ارائه کرد. وی تحصیلات دانشگاهی خود در دانشگاه مسکو را در سال ۱۸۴۱ به اتمام رساند. چبیشف در سال ۱۸۴۷ در سن‌پترزبورگ مستقر شد و رسالهٔ دوم خود را، با موضوع انتگرال‌گیری با استفاده از توابع لگاریتمی، ارائه داد. این رساله باعث شد که بتواند در دانشگاه تدریس کند. او تا سال ۱۸۸۲ منحصراً فقط در همین دانشگاه باقی ماند. دو سال بعد، یعنی در سال ۱۸۴۹، به خاطر رسالهٔ سومش دربارهٔ نظریهٔ هم‌نهشتی‌ها به درجهٔ دکترا رسید. او در دوران حضورش در دانشگاه فردی بادقت و وقت‌شناس بود.

عکسی از چند استاد دانشگاه سن‌پترزبورگ (۱۸۶۸): چبیشف (نفر دوم نشسته از چپ)، دمیتری مندلیف (نفر دوم ایستاده از راست)

هنگام تدریس، بیشترْ گام‌های اصلی اثبات را توضیح می‌داد و اگر اثباتی در کلاس به اتمام نمی‌رسید جلسهٔ بعد دوباره از اولِ اثبات آغاز می‌کرد. او در جلسات دفاع دانشجویان نیز چنین بود و بیشتر در مورد گام‌های اصلی سؤال می‌کرد. وی در ادامه به‌خاطر وضع اقتصادی بد خود و خانواده‌اش زندگی صرفه‌جویانه‌ای را پی گرفت. در تنها چیزی که دست‌ودل‌باز بود خرج کردن برای

اختراعات مکانیکی بود. مثلاً یک ماشین حساب مکانیکی بسیار پیچیده ساخته بود. سفرهای زیادی برای شرکت در گردهمایی‌های ریاضی در کشورهای خارجی می‌کرد. او در نهایت در سال ۱۸۹۵ در سن ۷۴ سالگی چشم از جهان فرو بست.

احکام شناخته‌شدهٔ متعددی در شاخه‌های مختلف ریاضیات توسط چبیشف ثابت شده است؛ ازجمله در نظریهٔ اعداد، اثبات حدس برتران[۳] در مورد وجود اعداد اول بین n و ۲n، اثبات حالت ضعیفی از قضیهٔ اعداد اول، به این مضمون که تعداد اعداد اول کمتر یا مساوی n از مرتبهٔ بزرگی $n/\log(n)$ است، از اوست. در نظریهٔ احتمال، چبیشف از اولین افرادی است که به‌طور اصولی به متغیرهای تصادفی، گشتاورهای آن‌ها، و امید ریاضی پرداخت. صورت‌های بسیار کلی از قانون ضعیف اعداد بزرگ و نامساوی چبیشف ازجمله کارهای او در نظریهٔ احتمال هستند. ازجمله شاگردان او می‌توان از مارکوف و لیاپونف نام برد.



پرترهٔ چبیشف

۲ چبیشف و کشف این چندجمله‌ای‌ها

اصل مقاله‌ای که در آن، این چندجمله‌ای‌ها در مطالعات چبیشف ظاهر می‌شوند در سال ۱۸۵۳ در مجموعهٔ مقالات آکادمی سلطنتی سن‌پترزبورگ تحت عنوان «نظریهٔ مکانیسم‌های شناخته شده تحت عنوان متوازی‌الاضلاع» [۲] به چاپ رسیده است. در این مقاله، چبیشف مسئلهٔ معروف

3. Bertrand's postulate

تقریب چندجمله‌ای‌های از یک درجهٔ داده‌شده با کمترین انحراف از یک تابع مفروض روی یک بازهٔ داده‌شده را مطالعه می‌کند. تا قبل از چبیشف، ریاضی‌دانانی مانند نیوتون، اویلر، لاگرانژ، و برنولی درون‌یابی یک تابع توسط یک چندجمله‌ای را به صورت‌های گوناگون مطالعه کرده بودند؛ به عبارت دیگر، مسئلهٔ یافتن یک چندجمله‌ای $P(x)$ که روی تعداد متناهی نقطهٔ داده شده برابر با یک تابع داده شدهٔ $f(x)$ باشد. اما دغدغهٔ چبیشف، به‌جای برابری $f(x)$ و $P(x)$ در متناهی نقطه، یافتن چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ حداکثر $n-۱$ است که کمترین \انحراف را از $f(x)$ روی یک بازهٔ داده‌شده $[a,b]$ داشته باشند. به زبان امروزی، این انحراف را می‌توان برحسب نرم یکنواخت بیان کرد، به‌عبارت‌دیگر به دنبال چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ حداکثر $n-۱$ هستیم که

$$\|f(x)-P(x)\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)|$$

کمترین مقدار را داشته باشد. چبیشف در آن مقاله مسئلهٔ یادشده را برای رده‌های خاصی از توابع $f(x)$ حل می‌کند؛ مثلاً اگر $f(x)=x^n$ نشان می‌دهد

$$P(x)=x^n-\frac{\left(x+\sqrt{x^۲-۱}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^۲-۱}\right)^n}{۲^n}$$

چندجمله‌ای مورد نظر در بازهٔ $[-۱,۱]$ است. چندجمله‌ای معروف چیبیشف $T_n(x)$ چیزی نیست جز عبارت

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^۲-۱}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^۲-۱}\right)^n}{۲}.$$

او به‌طور کلی‌تر نشان می‌دهد که در حالتی که $f(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_n$، چندجمله‌ای

$$P(x)=f(x)-\frac{a_۰}{۲^{n-۱}}T_n(x)$$

خواستهٔ مسئله را برآورده می‌سازد.

چبیشف به این مسئله از یک چشم‌انداز دیگر در مقاله‌ای که در سال ۱۸۷۳ در مجموعهٔ مقالات آکادمی سلطنتی سن‌پترزبورگ به زبان روسی به چاپ رسیده است باز می‌گردد. این مقاله در سال ۱۸۷۴ در مجلهٔ لیوویل [۴] به زبان فرانسوی با عنوان «در باب توابعی که از تابع صفر کمترین انحراف را دارد» ترجمه شده است. در این مقاله، چبیشف چندجمله‌ای‌های تکین حقیقی

$$x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_n \qquad (۱.۲)$$

را بررسی می‌کند که ماکسیمم قدرمطلق آن‌ها در یک بازهٔ $[a,b]$ کمترین مقدار ممکن باشد. چبیشف، برای سادگی، کرانه‌ای پایین و بالای این بازه را به ترتیب -۱ و ۱ می‌گیرد، چون به هر حال، با یک تغییر متغیر می‌توان مسئله را به این حالت تحویل کرد. او این توابع را با تعمیمی از چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبط می‌کند. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های $P_۰(x), P_۱(x), P_۲(x), \ldots$ هستند که در بسط سری توانی

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-۲tx+t^۲}} = P_۰(x) + P_۱(x)t + P_۲(x)t^۲ + \cdots$$

ظاهر می‌شوند و دارای خاصیت بنیادی

$$\int_{-۱}^{۱} P_n(x)P_m(x)dx = ۰$$

برای $n \neq m$ هستند. چبیشف در تحقیقات قبلی خود [۳] مشاهده کرده بود که در بسط سری توانی

$$\frac{(۱+t+\sqrt{۱-۲tx+t^۲})^{\lambda}(۱-t+\sqrt{۱-۲tx+t^۲})^{\mu}}{\sqrt{۱-۲tx+t^۲}} = \sum_{i=۰}^{\infty} Q_i(x)t^i$$

چندجمله‌ای‌های $Q_۰(x), Q_۱(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$ (که وابسته به پارامترهای λ, μ هستند)، دارای خاصیت زیر هستند

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{Q_n(x)Q_m(x)}{(۱+x)^{\lambda}(۱-x)^{\mu}}dx = ۰ \qquad (n \neq m)$$

البته چندجمله‌ای‌هایی که در خاصیت فوق صدق می‌کنند امروزه به نام چندجمله‌های ژاکوبی معروف هستند (بخش ۳.۴ را ببینید).

همچنین برای هر چندجمله‌ای تکین

$$f(t) = x^n + b_۱x^{n-۱} + \cdots + b_{n-۱}x + b_۰$$

انتگرال

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{f(x)^۲}{(۱+x)^{\lambda}(۱-x)^{\mu}}dx$$

مینیمم خود را در حالتی اتخاذ می‌کند که $f(t)$ مضرب ثابتی از چندجمله‌ای $Q_n(x)$ باشد. او با

استدلال‌های نسبتاً طولانی و با استفاده از تعداد و تکرر ریشه‌های چندجمله‌ای (۱.۲) نشان می‌دهد که این نوع چندجمله‌ای‌ها با λ و μ مناسب مضربی از چندجمله‌ای‌های $Q_n(x)$ فوق هستند (برای دیدن یک استدلال با زبان امروزی به بخش ۵ مراجعه کنید). چبیشف نتیجه می‌گیرد که ماکسیمم قدرمطلق هر چندجمله‌ای به شکل (۱.۲) و یکنوا روی $[-۱, ۱]$ از $\frac{n-۱}{۲n}\pi$ بیشتر است. چندجمله‌ای‌هایی که برای آن‌ها این ماکسیمم قدرمطلق دقیقاً برابر با $\frac{n-۱}{۲n}\pi$ می‌شود، چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند.

۳ تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف

روش‌های گوناگونی برای تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف وجود دارد. برخی از این روش‌ها را در بخش ۴ بررسی خواهیم کرد. در این بخش به معرفی چندجمله‌ای‌ها با روابط مثلثاتی خواهیم پرداخت.

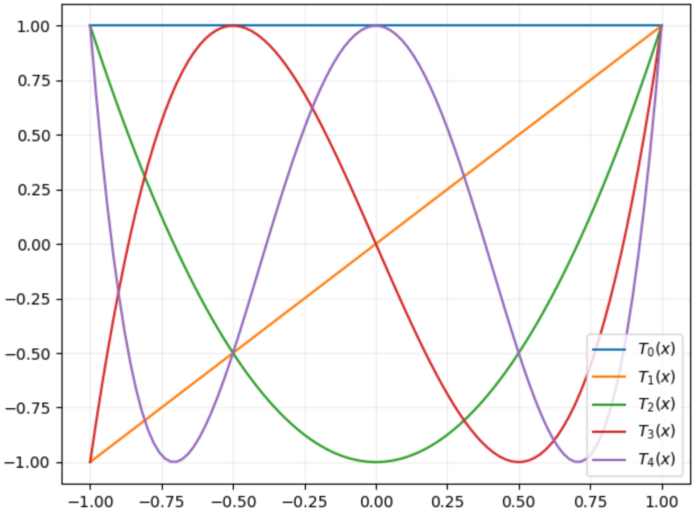
منابع متأخری که به بررسی چندجمله‌ای‌های چبیشف پرداخته‌اند، این چندجمله‌ای‌ها را در چهار خانواده موسوم به چندجمله‌ای‌های مرتبهٔ اول تا چهارم طبقه‌بندی می‌کنند. چندجمله‌ای‌های مرتبهٔ اول چبیشف T_n چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و از درجهٔ n هستند، که برای آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار است

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \tag{۱.۳}$$

این رابطه چندجمله‌ای $T_n(x)$ را به‌طور منحصر به‌فردی مشخص می‌کند. مثلاً $T_۰(x) = ۱$ و $T_۱(x) = x$. همچنین اتحادهای معروف مثلثاتی مانند $\cos(۲\theta) = \cos^۲(\theta) - ۱$ و $\cos(۳\theta) = ۴\cos^۳(\theta) - ۳\cos(\theta)$ نشان می‌دهند $T_۲(x) = ۲x^۲ - ۱$ و $T_۳(x) = ۴x^۳ - ۳x$. از رابطهٔ (۲.۳) نتیجه می‌شود که T_n تابعی از بازهٔ $[-۱, ۱]$ به همین بازه است. (البته در کاربردهای مختلف، از نسخهٔ انتقال‌یافتهٔ این چندجمله‌ای‌ها با دامنه و برد متفاوت استفاده می‌شود). با اعمال قضیهٔ دموآور و استفاده از بسط دوجمله‌ای نتیجه می‌شود که این توابع به‌صورت چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی صریحاً قابل نمایش‌اند، به بیان دقیق‌تر [۱۳]:

$$T_n(x) = \sum_{k=۰}^{\lfloor n/۲ \rfloor} \left((-۱)^k \sum_{j=k}^{\lfloor n/۲ \rfloor} \binom{n}{۲j} \binom{j}{k} \right) x^{n-۲k} \tag{۲.۳}$$

به‌ویژه، از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود برای n زوج چندجمله‌ای چبیشف T_n یک تابع زوج و برای n



تصویر پنج تابع نخست از مرتبهٔ اول

فرد یک تابع فرد است. تعاریف سه خانوادهٔ دیگر از چندجمله‌ای‌های چبیشف با روابط مثلثاتی بر اساس ضوابط زیر است

$$\begin{aligned} U_n(\cos\theta) &= \frac{\sin((n+۱)\theta)}{\sin\theta}, \\ V_n(\cos\theta) &= \frac{\cos((n+\frac{۱}{۲})\theta)}{\cos\frac{\theta}{۲}}, \\ W_n(\cos\theta) &= \frac{\sin((n+\frac{۱}{۲})\theta)}{\sin\frac{\theta}{۲}}. \end{aligned}$$

که به ترتیب چندجمله‌ای‌های مرتبهٔ (نوع) دوم تا چهارم چبیشف نامیده می‌شوند. در نگاه اول ارتباط مشخصی بین چهار نوع یادشده دیده نمی‌شود. برای روشن شدن رابطهٔ این خانواده‌ها، از نگاه دیگری به دنبالهٔ بازگشتی این چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم.

بر اساس خواص تابع کسینوس اتحاد زیر را داریم

$$\cos n\theta + \cos(n-۲)\theta = ۲\cos\theta\cos(n-۱)\theta.$$

با توجه به این رابطه و تعریفی که از چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبهٔ اول ارائه کردیم به‌راحتی دیده

می‌شود که رابطهٔ بازگشتی زیر بین آن‌ها برقرار است.

$$T_n(x) = ۲xT_{n-۱}(x) - T_{n-۲}(x) \qquad (n = ۲, ۳, ۴, \ldots) \tag{۳.۳}$$

تلاش برای یافتن رابطهٔ بازگشتی مشابهی برای سایر چندجمله‌ای‌ها، ما را به رابطهٔ کلی زیر می‌رساند که برای خانواده‌های چهارگانهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف برقرار است

$$P_n(x) = ۲xP_{n-۱}(x) - P_{n-۲}(x) \qquad (n = ۲, ۳, ۴, \ldots). \tag{۴.۳}$$

بدین ترتیب می‌توان مشاهده کرد که چهار نوع خانوادهٔ مذکور از نظر رابطهٔ بازگشتی کاملاً یکسان و منطبق‌اند، و عامل ایجاد تفاوت تنها دو جملهٔ اول دنباله‌هاست. این جملات عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
T_n(\circ) &= ۱, & T_n(۱) &= x;\\
U_n(\circ) &= ۱, & U_n(۱) &= ۲x;\\
V_n(\circ) &= ۱, & V_n(۱) &= ۲x - ۱;\\
W_n(\circ) &= ۱, & W_n(۱) &= ۲x + ۱.
\end{aligned}$$

با داشتن این روابط می‌توان اتحادهای گوناگونی را از ارتباط این چهار خانواده به دست آورد که برخی از آن‌ها در بخش ۴.۴ آمده‌اند.

یک راه دیگر برای معرفی چندجمله‌ای چبیشف T_n استفاده از اتحاد زیر است [۹]:

$$T_n\left(\frac{x + x^{-۱}}{۲}\right) = \frac{x^n + x^{-n}}{۲}. \tag{۵.۳}$$

به‌عبارت‌دیگر، چندجمله‌ای چبیشف T_n یگانه چندجمله‌ای از درجهٔ n است که اتحاد فوق را محقق می‌سازد.

۱.۳ گسترش دامنه

سه رویکرد با مقصود متفاوت برای گسترش دامنهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف بیان می‌کنیم.

بسط انتقالی در این روش سعی می‌شود با اعمال تبدیلات خطی دامنهٔ تعریف را گسترش داد. به عنوان مثال در تابع تبدیل‌یافتهٔ زیر دامنهٔ تعریف را به بازهٔ $[a, b]$ تبدیل می‌کند.

$$T_n^*(\alpha) = T_n\left(\frac{۲\alpha - a - b}{b - a}\right)$$

بسط مختلط روش دیگر بسط دامنه مربوط به مقادیر مختلط است. برای اینکه بتوان ضابطهٔ اولیه را برحسب متغیرهای مختلط محاسبه کرد، ابتدا از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم

$$\cos n\theta = \frac{۱}{۲}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{۱}{۲}(z^n + z^{-n}),$$

که در آن z یک متغیر مختلط است. حال باید سعی کنیم $\cos\theta$ را با این متغیر جدید مرتبط کنیم

$$\cos\theta = \frac{۱}{۲}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{۱}{۲}(z + z^{-۱}).$$

اگر به‌جای $\cos\theta$ از متغیر مختلط w استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$T_n(w) = \frac{۱}{۲}(z^n + z^{-n}),$$

به عبارت دیگر (این تعریف برای تمام اعداد مختلط معتبر است)

$$T_n(w) = \frac{\left(w+\sqrt{w^۲-۱}\right)^n + \left(w-\sqrt{w^۲-۱}\right)^n}{۲}. \qquad (۶.۳)$$

البته باید دقت شود که پس از اعمال بسط دوجمله‌ای، جملات با توان فرد از $\sqrt{w^۲-۱}$ از بین می‌روند، بنابراین عبارت فوق یک چندجمله‌ای برحسب w به دست می‌دهد. عبارت فوق، یک تعریف بدون وارد کردن توابع مثلثاتی برای چندجمله‌ای چبیشف به دست می‌دهد.

به طریق مشابه چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم U_n از طریق فرمول زیر قابل محاسبه است

$$U_n(w) = \frac{\left(w-\sqrt{w^۲-۱}\right)^{n+۱} - \left(w+\sqrt{w^۲-۱}\right)^{n+۱}}{۲\sqrt{w^۲-۱}}.$$

نکتهٔ خیلی جالب دیگر این است که $t = T_n(x)$ و $u = U_n(x)$ در معادلهٔ تابعی پِل-فرما[۴]

$$t^۲ - (x^۲-۱)u^۲ = ۱$$

صدق می‌کنند! و به‌طور کلی‌تر هر معادلهٔ تابعی پِل به شکل

$$P^۲ - DQ^۲ = ۱$$

که در آن D یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم برحسب متغیر x است را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های چبیشف T_n و U_n پارامتری کرد؛ برای جزئیات بیشتر [۱۷] را ببینید.

4. Fermat-Pell’s equation

بسط حقیقی با توجه به اینکه چندجمله‌ای‌ها به‌صورت طبیعی روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند، یک رویکرد برای تعمیم استفاده از مقدار حقیقی چندجمله‌ای است. برای مطالعهٔ این مقادیر هم می‌توان از رابطهٔ (۶.۳) استفاده کرد و هم می‌توان از توابع مثلثاتی هذلولوی کمک گرفت. اگر از ابتدا چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبهٔ اول را با تابع کسینوس هذلولوی به صورت زیر تعریف کنیم، آنگاه دامنهٔ تعریف $[0, \infty)$ خواهد بود

$$T_n(\cosh\theta) = \cosh n\theta. \tag{۷.۳}$$

مشابه روابطی که برای بسط مختلط دیدیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\cosh n\theta &= \frac{1}{2}(e^{n\theta} + e^{-n\theta}) = \frac{1}{2}(t^n + t^{-n}),\\ \cosh\theta &= \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}) = \frac{1}{2}(t + t^{-1}).\end{aligned}$$

این روابط، مشابه روابط به دست آمده برای متغیرهای مختلط است، با این تفاوت که متغیر t در اینجا حقیقی است. به عبارت دیگر، با قرار دادن متغیر $w = \cosh\theta$ به همان رابطهٔ (۶.۳) می‌رسیم. بنابراین مشخص می‌شود که تعریف جدید از چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبهٔ اول به کمک تابع کسینوس هذلولوی، با تعریف اولیه‌ای که به کمک تابع کسینوس انجام شد یکسان است.

۴ ویژگی‌ها

در این بخش خواص و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف را در سه دستهٔ اصلی تقسیم می‌کنیم. در طبقه‌بندی چندجمله‌ای‌ها دو رویکرد می‌توان در نظر داشت: یک رویکرد با محوریت قرار دادن حوزه‌هایی است که چندجمله‌ای‌ها در آن‌ها کاربرد دارند، و دیگری با محوریت خود چندجمله‌ای‌ها و ویژگی‌های ذاتی آن‌هاست. در اینجا به‌دلیل آنکه هدف مطالعهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت عام است، لذا رویکرد دوم انتخاب شده است. البته در هر بخش پس از بیان خواص، به حوزه‌های کاربرد نیز اشاره می‌شود.

۱.۴ خواص نمایشی

این دسته از خواص مربوط روش‌های مختلف بیان و نمایش چندجمله‌ای‌ها و روابط جبری حاکم بر آن‌هاست. علت جمع آوری و کنار هم گذاشتن این خواص، در نگاه اول آن است که امکان استفاده

از دیگر خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف را در حوزه‌های مختلف ریاضی فراهم می‌آورند. در نگاه دیگر، کاربرد آن‌ها در بررسی‌ها و تحلیل‌های کامپیوتری و ارائهٔ الگوریتم‌های بهینه‌یابی مورد توجه است.

(۱) چندجمله‌ای چبیشف به‌صورت یک دترمینان.

$$T_n(x) = \det \begin{bmatrix} ۲x & -۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲x & -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲x & -۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲x & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۲x & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(۲) چندجمله‌ای چبیشف به‌صورت جواب معادلهٔ دیفرانسیل. روش‌های دیفرانسیلی متفاوتی برای معرفی چندجمله‌ای‌های چبیشف وجود دارد. برخی از این روش‌ها، معادلاتی را ارائه می‌کنند که پاسخ آن‌ها چندجمله‌ای‌های چبیشف است، مانند معادلهٔ زیر که به معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف معروف است

$$(۱-x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲} - x\frac{dy}{dx} + n^۲y = ۰.$$

برخی دیگر، بیان مستقیم چندجمله‌ای با عملگرهای دیفرانسیلی است. ضابطهٔ زیر یکی از این موارد است که به فرمول رودریگز شناخته می‌شود

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{(-۱)^n(۲n-۱)(۲n-۳)\cdots ۱}\frac{d^n}{dx^n}(۱-x^۲)^{n-\frac{۱}{۲}}.$$

برای مطالعهٔ بیشتر به [۸] مراجعه کنید.

۲.۴ ریشه‌ها و نقاط فرینه

بنا به تعریف $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ از چندجمله‌ای‌های چبیشف و با استفاده از اتحاد دموآور و بسط دوجمله‌ای، می‌توان دید که $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب x است. همچنین تعداد ریشه‌های آن را می‌توان از روی ریشه‌های معادلهٔ $\cos(n\theta) = ۰$ به دست آورد. این معادله n جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ برای θ دارد. بنابراین نتیجه می‌شود که تعداد ریشه‌های $T_n(x)$ دقیقاً n تاست که از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند

$$x_k = \cos\left(\frac{(k-\frac{۱}{۲})\pi}{n}\right) \qquad (k = ۱,\ldots,n).$$

به‌ویژه، همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف حقیقی هستند.

ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف و قابلیت محاسبه‌پذیری (یا تخمین) آن‌ها، از ویژگی‌های مهم این چندجمله‌ای‌هاست که موجب کاربرد آن‌ها در حوزه‌های مختلف می‌شود. برای مثال در بحث درون‌یابی توابع نشان داده شده است که در رده‌های مشخصی از توابع فرآیند درون‌یابی روی ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف بهینه‌تر از درون‌یابی روی دنباله‌ای از نقاط با فاصلهٔ مساوی است.

فرینه‌های این چندجمله‌ای‌ها، علاوه‌بر نقاط بحرانی، در ابتدا و انتهای دامنهٔ تعریف قرار می‌گیرند. اگر بازهٔ تغییرات θ در ضابطهٔ $\cos(n\theta)$ را $(\circ, \pi)$ در نظر بگیریم، در دو سر دامنهٔ $T_n(x)$، یعنی نقاط ۱ و ۱−، به ترتیب مقدار $\cos(\circ)$ و $\cos(n\pi)$ اتفاق می‌افتد، یعنی برای هر n داریم

$$T_n(۱) = ۱, \qquad T_n(-۱) = \begin{cases} ۱ & n \text{ زوج} \\ -۱ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

نقاط بحرانی این چندجمله‌ای‌ها در بازهٔ $(-۱, ۱)$ در نقاط xای واقع می‌شود که $\frac{d}{dx}T_n(x) = \circ$. در این بازه x به شکل $x = \cos\theta$ قابل بیان است که $\theta \in (\circ, \pi)$. بنابراین با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای به دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta) = -\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\cos n\theta = -n\sin\theta\sin n\theta = \circ.$$

تعداد نقاط θ درون بازهٔ $(\circ, \pi)$ که عبارت فوق را صفر می‌کنند برابر $n - ۱$ است و دقیقاً $\frac{k\pi}{n}$ها به‌ازای، $k = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ هستند. بنابراین xهای بازهٔ $(-۱, ۱)$ که نقطهٔ بحرانی $T_n(x)$ هستند، دقیقاً $\cos\frac{k\pi}{n}$ها به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ هستند. در نهایت، با توجه به اینکه $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای است و رابطهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای فوق، نقاط ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی هستند، پس $n + ۱$ نقطهٔ فرینه چندجمله‌ای T_n را می‌توان با رابطهٔ زیر توصیف کرد

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = \circ, ۱, ۲, \ldots, n). \tag{۱.۴}$$

از این رابطه و ضابطهٔ (۱.۳) دیده می‌شود که مقدار چندجمله‌ای در نقاط فرینه به صورت زیر است

$$T_n(x_k) = \cos k\pi \qquad (k = \circ, ۱, ۲, \ldots, n). \tag{۲.۴}$$

بنابراین قدرمطلق توابع در این نقاط برابر یک است، اما علامت آن به‌صورت متناوب تغییر می‌کند.

این خاصیت تناوبی فرینه ها عامل کاربرد چندجمله‌ای‌های چبیشف در یافتن بهترین تخمین توابع با خاصیت مینیماکس است. قضیهٔ تناوب[5] برای چندجمله‌ای‌ها بیان می‌کند که هر تابع حقیقی پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ دارای یک تخمین چندجمله‌ای یکتا از درجهٔ n با خاصیت مینیماکس است که تابع خطای آن دارای $n+۲$ فرینه با علامت متناوب در همان بازه است (در جریان تخمین، چندجمله‌ای مورد نظر به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تابع خطای آن، چندجمله‌ای چبیشف باشد).

۳.۴ تعامد

برای هر دو تابع «مربعی‌انتگرال‌پذیر» روی بازهٔ $[a,b]$ نظیر $f(x)$ و $g(x)$ حاصل انتگرال زیر را ضرب داخلی دو تابع می‌نامیم و با $\langle f,g\rangle$ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx \tag{۳.۴}$$

که در آن $w(x)$ یک تابع وزن نامنفی و پیوسته است. دو تابع را **متعامد** گویند اگر و فقط اگر ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد.

یکی از خواص پراهمیت چندجمله‌ای‌های چبیشف، تعامد آن‌ها در اندیس‌های متمایز است. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن تابع وزن $w(x)=(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ خواهیم داشت [۱۲]:

$$\langle T_i,T_j\rangle = \int_{-۱}^{۱} T_i(x)T_j(x)\,\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} = ۰ \qquad (i\neq j)$$

همچنین $\langle T_۰,T_۰\rangle=\pi$ و $\langle T_i,T_i\rangle=\frac{\pi}{۲}$ برای $i>۰$. به‌صورت کلی، دنباله‌های تابعی که اعضای متمایز آن با تابع وزنی به شکل

$$w(x)=(۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}$$

متعامد باشند، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی نام دارند. بنابراین چندجمله‌ای‌های چبیشف حالت‌های خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند.

یکی از کاربردهای خاصیت تعامد در مسئلهٔ بهترین تقریب چندجمله‌ای مربعی‌انتگرال‌پذیر از درجهٔ n برای توابع است. می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای آنکه تقریب $p_n(x)$ از تابع f بهترین تقریب با خواص مذکور باشد، آن است که تابع خطای آن، یعنی $f-p_n$، بر تمام

5. alternation theorem

چندجمله‌ای‌های از درجهٔ n متعامد باشد. با توجه به اینکه تمام چندجمله‌ای‌های از درجهٔ n را می‌توان به‌صورت جمع وزنی چندجمله‌ای‌های چبیشف درآورد، یافتن بهترین تقریب با کمک گرفتن از این چندجمله‌ای‌ها ممکن می‌شود.

نوع دیگری از تعامد نیز برای چندجمله‌ای‌های چبیشف برقرار است که تعامد گسسته نامیده می‌شود. اگر $\{x_k\}$ دنبالهٔ ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای $T_n(x)$ باشد و $i, j < n$ آنگاه داریم [۱۲]:

$$\sum_{k=۱}^{n} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ N & i = j > ۰ \\ \frac{N}{۲} & i = j = ۰ \end{cases}$$

۴.۴ سایر خواص

ویژگی‌های که در ادامه می‌آیند خواص پراکنده‌ای هستند که ساختار مناسبی برای طبقه‌بندی نیافتند.

(۱) ارتباط خانواده‌های چهارگانه [۱۲].

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-۱}(x),$$
$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-۱}(x),$$
$$V_n(x) + V_{n-۱}(x) = ۲T_n(x),$$
$$W_n(x) - W_{n-۱}(x) = ۲T_n(x),$$
$$T_n(x) = x\,U_{n-۱}(x) - U_{n-۲}(x).$$

(۲) اتحادهای از نوع کَسینی[۶]. اتحاد معروف کسینی، بیان‌کنندهٔ رابطهٔ

$$F_{n-۱}F_{n+۱} - F_n^۲ = (-۱)^n$$

بین جملات دنبالهٔ فیبوناچی است. اتحادهای متناظر زیر برای جملات چندجمله‌ای‌های چبیشف وجود دارد

$$T_{n-۱}T_{n+۱} - T_n^۲ = x^۲ - ۱, \qquad U_{n-۱}U_{n+۱} - U_n^۲ = -۱,$$
$$V_{n-۱}V_{n+۱} - V_n^۲ = -۲x - ۲, \qquad W_{n-۱}W_{n+۱} - W_n^۲ = ۲x - ۲.$$

6. G. D. Cassini

برای جزئیات بیشتر به [۱۵] مراجعه کنید.

(۳) خاصیت نیم‌گروهی جابه‌جایی. با در نظر گرفتن این ویژگی، مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف تحت عمل ترکیب توابع، تشکیل یک نیم‌گروه (با خاصیت جابه‌جایی) می‌دهند.

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x) = T_m(T_n(x)), \qquad x = \cos\theta.$$

مثال دیگر چندجمله‌ای‌های x^n و x^m هستند که تحت ترکیب با هم جابه‌جا می‌شوند. سؤالی که می‌تواند مطرح کرد این است که به‌جز چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(x)$ و چندجمله‌ای‌های x^n، آیا خانوادهٔ دیگری از چندجمله‌ای‌ها وجود دارند که تحت ترکیب توابع با هم جابه‌جا شوند؟ واضح است که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای داده شده باشد و $f_m(x)$ ترکیب f به اندازهٔ m بار با خودش باشد آنگاه $f_m \circ f_n = f_n \circ f_m$. حال اگر این مثال بدیهی f_nها را کنار بگذاریم، آنگاه حکم زیر از ژولیا[7] و ریت[8] واقعیت بسیار بدیعی در مورد چندجمله‌ای‌های جابه‌جا شونده و ارتباط آن‌ها با چندجمله‌ای‌های چبیشف بیان می‌کند

قضیه ۱.۴ ([۱۳]). اگر دو چندجمله‌ای p و q با ضرایب حقیقی یا مختلط از درجهٔ بزرگ‌تر از یک، تحت ترکیب با هم جابه‌جا شوند و هیچ ترکیبی از p با خودش با هیچ ترکیبی از q با خودش برابر نباشد، آنگاه زوج (p,q) یا با زوج چبیشف (T_n, T_m) متشابه است یا با زوج (x^n, x^m).

یادآور می‌شویم اگر دو چندجمله‌ای p و q با عمل ترکیب با هم جابه‌جا شوند آنگاه به‌ازای هر چندجمله‌ای خطی $\lambda(x) = ax + b$ دو چندجمله‌ای $p' = \lambda^{-1} \circ p \circ \lambda$ و $q' = \lambda^{-1} \circ q \circ \lambda$ هم با هم جابه‌جا می‌شوند (در اینجا $\lambda^{-1}(x)$ معکوس چندجمله‌ای $\lambda(x) = ax + b$ است، یعنی $\lambda^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$). در این صورت (p,q) یک زوج متشابه با (p', q') نامیده می‌شود.

(۴) بعضی روابط بین چندجمله‌ای‌های چبیشف.

گزاره ۲.۴. برای اندیس‌های نامنفی m, n داریم

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)}{2}.$$

اثبات. متغیر x را با برحسب θ به‌صورت $x = \cos\theta$ بازنویسی می‌کنیم. سپس طبق تعریف

7. G. Julia 8. J. F. Ritt

مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف خواهیم داشت (فرض می‌گیریم $m \geq n$)

$$\begin{aligned} T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x) &= \cos{(m+n)\theta} + \cos{(|m-n|)\theta} \\ &= (\cos m\theta \cos n\theta - \sin m\theta \sin m\theta) \\ &\quad + (\cos m\theta \cos n\theta + \sin m\theta \sin m\theta) \\ &= ۲ \cos m\theta \cos n\theta \\ &= ۲T_m(x)T_n(x) \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین معادلهٔ بالا بر ۲ حکم گزاره به دست می‌آید. □

اگر در حکم فوق قرار دهیم $m = n + ۱$ به حکم زیر می‌رسیم.

نتیجه ۳.۴. برای هر n داریم $T_{۲n+۱}(x) = ۲T_{n+۱}(x)T_n(x) - x$.

ملاحظه ۴.۴. نتیجهٔ فوق، به همراه رابطهٔ $T_{۲n}(x) = T_۲(T_n(x))$ محاسبهٔ چندجمله‌ای چبیشف از یک مرتبهٔ داده شده را به محاسبهٔ حداکثر دو چندجمله‌ای چبیشف از مرتبهٔ تقریباً نصف کاهش می‌دهد و بنابراین یک راه نسبتاً موثر برای محاسبهٔ چندجمله‌ای چبیشف در نرم‌افزارهای کامپیوتری می‌دهد. برای جزئیات بیشتر [۱۰، ۶] را ببینید.

گزاره ۵.۴. کسر $\frac{m}{n}$ عددی صحیح و فرد است، اگر و فقط اگر $T_n(x) \mid T_m(x)$.

اثبات. می‌دانیم

$$T_n(۰) = T_n(\cos\frac{\pi}{۲}) = \cos\frac{n\pi}{۲}$$

که برای مقادیر فرد n نتیجه می‌دهد $T_n(۰) = ۰$. بنابراین تابع $T_{۲k+۱}(x)$ یک چندجمله‌ای با جملهٔ ثابت صفر است. پس $x \mid T_{۲k+۱}(x)$، حالا با جایگذاری x با چندجمله‌ای دلخواه $g(x)$ نتیجه می‌شود $g(x) \mid T_{۲k+۱}(g(x))$. به‌صورت مشابه، برای تابع $T_{۲k}(x)$ ازآنجاکه $T_{۲k}(۰) = ۱$ پس خواهیم داشت $x \mid T_{۲k}(x) - ۱$، نتیجتاً برای هر چندجمله‌ای $g(x)$ داریم $g(x) \mid T_{۲k}(g(x)) - ۱$.

فرض کنید $\frac{m}{n}$ عددی فرد باشد. طبق خاصیت نیم‌گروهی چندجمله‌ای چبیشف

$$T_m(x) = T_{m/n}(T_n(x)).$$

این رابطه با در نظر گرفتن ملاحظهٔ پیشین نتیجه می‌دهد $T_n(x) \mid T_m(x)$.

حال عکس حکم را ثابت می‌کنیم، یعنی با فرض $T_n(x) \mid T_m(x)$ می‌خواهیم ثابت کنیم m/n یک عدد فرد صحیح است. نخست توجه کنید $T_n(x) \mid T_m(x)$ که نتیجه می‌دهد $m \geq n$. با استفاده از الگوریتم تقسیم اعداد صحیح $k \geq 1$ و r با شرط $0 \leq r < n$ موجود هستند به‌طوری‌که $m = kn + r$. با استقراء قوی روی k ثابت می‌کنیم که اگر $T_n(x) \mid T_m(x)$ آنگاه $r = 0$. اگر $k = 1$ آنگاه $m = n + r$. در این حالت که پایهٔ استقراء است، طبق گزارهٔ قبل خواهیم داشت

$$2T_n(x)T_r(x) = T_{n+r}(x) + T_{|n-r|}(x).$$

با جابه‌جایی جملات به دست می‌آید

$$2T_n(x)T_r(x) - T_{n+r}(x) = T_{|n-r|}(x).$$

طبق معادلهٔ بالا، اگر $T_n(x) \mid T_{n+r}(x)$، آنگاه $T_n(x) \mid T_{|n-r|}(x)$ که نتیجه می‌دهد درجهٔ $T_{|n-r|}(x)$ حداقل برابر درجهٔ $T_n(x)$، یعنی n است. بنابراین باید داشته باشیم $r = 0$.

اکنون گام استقراء را بررسی می‌کنیم. فرض کنید برای مقادیر مثبت کوچک‌تر از k، حکم مطلوب برقرار باشد. برای k، بر اساس گزارهٔ پیشین داریم

$$2T_{kn}(x)T_r(x) = T_{kn+r}(x) + T_{|kn-r|}(x),$$

که نتیجه می‌دهد

$$2T_{kn}(x)T_r(x) - T_{kn+r}(x) = T_{|kn-r|}(x).$$

با فرض $T_n(x) \mid T_{kn+r}(x)$، طبق رابطهٔ فوق خواهیم داشت $T_n(x) \mid T_{|kn-r|}(x)$؛ به عبارت دیگر $T_n(x) \mid T_{|(k-1)n-(n-r)|}(x)$. اگر $r \neq 0$ در این صورت طبق فرض استقراء خواهیم داشت $n - r = 0$ که با فرض $0 \leq r < n$ در تناقض است.

بدین ترتیب $m = kn$ پس $k = m/n$ یک عدد صحیح است. از طرفی، اگر m/n زوج باشد طبق آنچه ثابت شد $T_n(x) | T_{\frac{m}{n}}(T_n(x)) - 1$، نتیجتاً $T_n(x) \mid T_m(x) - 1$ که تناقض است. پس m/n فرد است و دو طرف حکم گزاره ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۶.۴. اگر n توانی از ۲ نباشد آنگاه $T_n(x)$ به عنوان یک چندجمله‌ای در $\mathbb{Q}[x]$ تجزیه می‌شود.

(۵) تابع مولد سری چندجمله‌ای‌های چبیشف ([۱۳]).

$$\frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, z^n.$$

مشابه چنین اتحادی، برای چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم هم وجود دارد

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, z^n.$$

(۶) خاصیت کوچک‌ترین مربع. طبق معادلهٔ (۲.۳) می‌توان دید که ضریب جملهٔ پیشرو در $T_n(x)$ برابر 2^{n-1} است. چندجمله‌ای چبیشف نرمال‌شده (از مرتبهٔ اول) را به‌صورت $\widetilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n$ تعریف می‌کنیم. برای هر چندجمله‌ای p_n با ضرایب حقیقی و از درجهٔ n که ضریب جملهٔ پیشرو آن یک باشد، نامساوی زیر برقرار است [۱۳]:

$$\langle \widetilde{T}_n, \widetilde{T}_n \rangle \leq \langle p_n, p_n \rangle,$$

که در آن $\langle f, g \rangle$ همان تعریف رابطهٔ (۳.۴) با تابع وزن مذکور را دارد.

۵ خواص فرینال چندجمله‌ای‌های چبیشف

همان‌طورکه قبلاً اشاره شد، یکی از جالب‌ترین خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف از درجهٔ n این است که در بین همهٔ چندجمله‌ای‌های از درجهٔ n که ماکسیمم قدرمطلق آن‌ها در بازهٔ $[-1, 1]$ حداکثر ۱ است، دارای بزرگ‌ترین جملهٔ پیشرو هستند، به عبارت دقیق‌تر

قضیه ۱.۵. در بین همهٔ چندجمله‌ای‌های تکین از درجهٔ n روی بازهٔ $[-1, 1]$ چندجمله‌ای چبیشف نرمال‌شده، یعنی $\widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ یگانه چندجمله‌ای است که ماکسیمم قدرمطلقش کمترین مقدار است.

اثبات حکم بدون یگانگی. ماکسیمم قدرمطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ $[-1, 1]$ را با نماد $\|f\|$ نشان می‌دهیم. اگر از اثبات یگانگی صرف‌نظر کنیم، در واقع حکم بیان می‌کند که هیچ چندجمله‌ای تکین $p_n(x)$ از درجهٔ n وجود ندارد به‌طوری‌که $\|p_n\| < \|\widetilde{T}_n\|$. برای دیدن اثبات یگانگی $T_n(x)$ به [۱۳] مراجعه کنید. در واقع، اگر چنین چندجمله‌ای $p_n(x)$ وجود داشته باشد، چندجمله‌ای $q(x) = p_n(x) - \widetilde{T}_n(x)$ از درجهٔ حداکثر $n-1$ است. در بخش ۲.۴ دیدیم که فرینه‌های تابع

$T_n(x)$ (و به‌طور مشابه تابع $\widetilde{T}_n$) در $n+۱$ نقطه روی بازهٔ $[-۱,۱]$ واقع می‌شوند. فرض کنید $\{x_k\}$ دنبالهٔ این نقاط باشد. همچنین طبق آنچه بررسی کردیم به دست می‌آید

$$|\widetilde{T}_n(x_k)| = \|\widetilde{T}_n\|, \qquad \widetilde{T}_n(x_k) = -\widetilde{T}_n(x_{k+۱}).$$

حال با توجه به اینکه $\|\widetilde{T}_n\| < \|p_n\|$ علامت $q(x)$ روی نقاط $\{x_k\}$ به‌صورت متناوب تغییر می‌کند. بنابراین با استفاده از قضیهٔ مقدار بینی، حداقل n ریشه برای چندجمله‌ای $q(x)$ به دست می‌آید؛ درحالی‌که نشان دادیم که این چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ $n-۱$ است و نمی‌تواند بیش از $n-۱$ ریشه داشته باشد. پس باید داشته باشیم $q(x)=۰$ که نتیجه می‌دهد $p_n = \widetilde{T}_n$، این با فرض $\|\widetilde{T}_n\| < \|p_n\|$ در تناقض است. $\square$

این ویژگی چندجمله‌ای‌های چبیشف نرمال‌شده، خاصیت مینیماکس نیز نام دارد، زیرا شرط مینیمم مقدار برای ماکسیمم تابع را در میان چندجمله‌ای‌های تکین هم‌درجه برقرار می‌کند.

به عنوان کاربردی از این خاصیت، فرض کنید می‌خواهیم چندجمله‌ای q_n از درجهٔ n را روی بازهٔ $[-۱,۱]$ توسط یک چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر از n تخمین بزنیم. چندجمله‌ای p^B را بهترین تقریب برای این منظور در نظر بگیرید؛ به این معنی که برای هر چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر از n مانند p داشته باشیم

$$\|q_n - p^B\| \leq \|q_n - p\|.$$

اگر ضریب جملهٔ پیشرو در چندجمله‌ای q_n را با c_n نشان دهیم، آنگاه رابطهٔ بالا معادل است با

$$\|\frac{q_n}{c_n} - \frac{p^B}{c_n}\| \leq \|\frac{q_n}{c_n} - \frac{p}{c_n}\|.$$

در دو طرف رابطهٔ بالا چندجمله‌ای‌هایی تکین از درجهٔ n قرار دارند. اگر بدانیم چندجمله‌ای سمت چپ همان $\widetilde{T}_n$ است، درستی رابطهٔ بالا برای هر انتخاب ممکن p توسط قضیهٔ ۱.۵ تضمین می‌شود. بنابراین باید p^B را به گونه‌ای انتخاب کنیم که داشته باشیم

$$\frac{q_n}{c_n} - \frac{p^B}{c_n} = \widetilde{T}_n$$

که نتیجه می‌دهد

$$p^B(x) = q_n(x) - c_n\widetilde{T}_n(x). \qquad (۱.۵)$$

در اینجا مناسبت دارد به قضیهٔ زیر که یک خاصیتفرینال دیگر از چندجمله‌ای چبیشف است اشاره کنیم (که در اصل توسط اردُش[۹] در سال ۱۹۳۹ به عنوان یک حدس بیان شده بود و توسط کریستیانسن[۱۰] در سال ۱۹۷۹ و بویانُف[۱۱] در سال ۱۹۸۲ ثابت شد).

قضیه ۲.۵ ([۱]). از بین همهٔ چندجمله‌ای‌های حقیقی $f(x)$ از درجهٔ n با شرط $|f(x)| \leq ۱$ در $[-۱, ۱]$ چندجمله‌ای چبیشف $T_n(x)$ بیشترین طول منحنی را دارد.

۶ کاربرد در حل معادلات خطی در جبرخطی

فرض کنید بخواهیم یک معادلهٔ خطی به‌صورت

$$Ax = b \tag{۱.۶}$$

را که در آن A یک ماتریس حقیقی (عموماً مربعی)، b یک بردار ستونی، و x یک بردار ستونی مجهول است به‌طور تقریبی حل کنیم. روش‌های تکراری[۱۲] یک دنباله از بردارها به‌صورت $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ ارائه می‌دهند که در حالت ایده‌آل به جواب دقیق x از معادلهٔ (۱.۶) همگرا می‌شود. بردار $e_n = x_n - x$، خطای محاسبهٔ مرحلهٔ nام نامیده می‌شود.

یکی از فنون کلی در روش‌های تکراری استفاده از یک دنبالهٔ بازگشتی به‌صورت

$$x_{n+۱} = x_n - s_n(Ax_n - b) \tag{۲.۶}$$

است که در آن s_n یک پارامتر حقیقی مناسب است. از رابطهٔ (۲.۶) بر می‌آید که اگر s_n کراندار باشد و $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا شود، حد آن لاجرم جواب دقیق (۱.۶) است. با کم کردن x از دو طرف رابطهٔ (۲.۶) به رابطهٔ $e_{n+۱} = e_n - s_n(Ax_n - b)$ یا معادلاً $e_{n+۱} = e_n - s_nAe_n$ می‌رسیم. رابطهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت

$$e_{n+۱} = (I - s_nA)e_n \tag{۳.۶}$$

بازنویسی کرد. اگر در معادلهٔ (۳.۶) از $n = ۰$ آغاز کنیم و به‌طور استقرائی عمل کنیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$e_{n+۱} = \prod_{i=۰}^{n}(۱ - s_iA)e_۰. \tag{۴.۶}$$

9. P. Erdös 10. G. K. Kristiansen 11. B. D. Bojanov 12. iterative methods

اگر چندجمله‌ای

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(1 - s_i x) \tag{۵.۶}$$

را در نظر بگیریم، آنگاه رابطهٔ (۴.۶) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$e_{n+1} = p_{n+1}(A)e_0. \tag{۶.۶}$$

برای اینکه جملهٔ خطای e_{n+1} به صفر میل کند کافی است نرم $p_{n+1}(A)$ کوچک باشد.

در بیشتر موقعیت‌ها، تمرکز را روی ماتریس‌های حقیقی A معطوف می‌کنیم که همهٔ مقادیر ویژهٔ آن‌ها مثبت هستند. اگر α و β به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژهٔ A باشند آنگاه کمیت $\kappa(A) = \frac{\beta}{\alpha}$ عدد حالت A نامیده می‌شود. روش تکراری چبیشف برای حل معادلهٔ (۱.۶) یک روش بسیار جالب است که به دانستن دقیق α و β نیاز ندارد، فقط دانستن تخمینی از آن‌ها کافی است، و معمولاً برای اعداد حالت بزرگ، سریع‌تر همگرا می‌شود.

فرض کنید α, β در بازهٔ باز (m, M) (با ابتدا و انتهای مثبت) قرار بگیرند، در این صورت عدد حالت A از $\frac{M}{m}$ کمتر است. اگر نرم $\|A\|$ از یک ماتریس حقیقی A را ماکسیمم نرم بردارهای $|Ax|$ بگیریم که x روی بردارهای از طول یک تغییر می‌کند، در این صورت یک قضیهٔ شناخته شده بیان می‌کند که در حالتی که A متقارن باشد، $\|A\|$ برابر با ماکسیمم قدرمطلق مقادیر ویژهٔ A است.

با گرفتن نرم از طرفین رابطهٔ (۶.۶) به دست می‌آید

$$|e_{n+1}| \leq \|p_{n+1}(A)\||e_0|. \tag{۷.۶}$$

از طرفی با توجه به اینکه مقادیر ویژهٔ $p_{n+1}(A)$ به‌صورت $p_{n+1}(\lambda)$ هستند که λ یک مقدار ویژهٔ A است، بنابراین به دست می‌آید

$$\|p_{n+1}(A)\| \leq |\max_{m \leq a \leq M} p_{n+1}(a)|. \tag{۸.۶}$$

بنابراین کافی است s_nها طوری انتخاب شوند تا چندجمله‌ای‌های $p_{n+1}(x)$ روی بازهٔ $[m, M]$ تا حد امکان کوچک باشد. البته با توجه به ضابطهٔ تعریف $p_{n+1}(x)$، شرط اضافهٔ $p_{n+1}(0) = 1$ هم برقرار است. دیده می‌شود که وقتی $m < \alpha < \beta < M$ از بین همهٔ چندجمله‌ای‌های

که کوچک‌ترین مینیمم را روی بازهٔ $[m, M]$ اختیار می‌کنند و در نقطهٔ ۰ برابر با ۱ هستند، چندجمله‌ای‌های تغییر مقیاس‌داده شدهٔ چبیشف به صورت زیر هستند

$$p_{n+1}(x) = \frac{T_{n+1}\left(\frac{M+m-2x}{M-m}\right)}{T_{n+1}\left(\frac{M+m}{M-m}\right)}. \tag{۹.۶}$$

اگر رابطهٔ (۶.۶) را با جایگزینی $e_{n+1} = x_{n+1} - x$ و $e_0 = x_0 - x$ بازنویسی کنیم به دست می‌آید $x_{n+1} - x = p_{n+1}(A)(x_0 - x)$. حال اگر بنویسیم $p_{n+1}(x) = xq_{n+1}(x) + 1$ به دست می‌آید $x_{n+1} - x = q_{n+1}(A)A(x_0 - x) + (x_0 - x)$. به عبارت دیگر،

$$x_{n+1} = q_{n+1}(A)Ax_0 - q_{n+1}(A)b + x_0.$$

پس

$$x_{n+1} = p_{n+1}(A)x_0 - q_{n+1}(A)b. \tag{۱۰.۶}$$

رابطهٔ فوق اساسِ روش تکراری چبیشف برای حل تقریبی معادلات خطی است.

البته آنچه اینجا بیان شد، بیان بی‌پیرایهٔ این الگوریتم بود. بیان‌های صیقل‌یافته‌تری از این الگوریتم وجود دارند که حتی به تقریب اولیه برای m و M نیاز ندارند، و به خاطر استفاده از یک رابطهٔ بازگشتی با استفاده از یک جملهٔ بیشتر، یعنی دخیل کردن جملهٔ x_{n-1} در (۲.۶) از سرعت همگرایی بالاتری برخوردار هستند؛ برای مطالعهٔ بیشتر به [۱۱] مراجعه کنید.

در ادامه بررسی می‌کنیم که چگونه با استفاده از الگوریتم بالا می‌توان روش تکراری مشابهی را برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس به دست آورد. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر الگوریتم رجوع شود به [۱۴].

مشابه آنچه پیشتر گفتیم، فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ متقارن با مقادیر ویژهٔ مثبت باشد. جواب معادلهٔ ماتریسی زیر وارون ماتریس A یا همان A^{-1} است

$$AX = I. \tag{۱۱.۶}$$

اگر ستون kام ماتریس X را با بردار $x^{(k)}$ و ستون kام ماتریس همانی I (که پایه‌های استاندارد فضای برداری $\mathbb{R}^n$ هستند) را با e_n نشان دهیم، معادلهٔ بالا را می‌توان به n معادله به فرم زیر تبدیل

کرد

$$Ax^{(k)} = e_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{۱۲.۶}$$

حال روشی را که برای حل معادلات خطی در رابطهٔ (۱۰.۶) به دست آوردیم، روی هرکدام از این معادلات پیاده می‌کنیم:

$$x^{(k)}_{n+1} = p_{n+1}(A)x^{(k)}_0 - q_{n+1}(A)e_1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{۱۳.۶}$$

اگر ماتریس تشکیل‌شده توسط بردارهای $x^{(k)}_0$ (به عنوان ستون‌های ماتریس) را با X_0 نشان دهیم، آنگاه می‌توان n معادله‌ای را که به شکل رابطهٔ (۱۳.۶) هستند به بیان ماتریسی زیر درآورد

$$X_{n+1} = p_{n+1}(A)X_0 - q_{n+1}(A)I, \tag{۱۴.۶}$$

که در آن X_{n+1} تخمین مرحلهٔ $n+1$ برای جواب معادلهٔ (۱۱.۶)، به عبارت دیگر، در حالت همگرایی، که $\|p_n(A)\| \to 0$ دنبالهٔ ماتریسی $\{X_n\}$ به وارون A همگرا می‌شود. در اینجا X_0 همان تخمین اولیه است. بنابراین در حالت همگرایی داریم

$$\lim_{n\to\infty} -q_{n+1}(A) = A^{-1}. \tag{۱۵.۶}$$

۷ چند نمونه از کاربردهای چندجمله‌ای‌های چبیشف در حل مسائل مقدماتی

مسئله ۱.۷. نشان دهید برای n نقطهٔ $A_1, \dots, A_n$ در صفحه، روی هر پاره‌خط به طول ℓ داده شده یک نقطهٔ M وجود دارد به‌طوری‌که $\prod_{i=1}^n |MA_i| \geq \frac{\ell^n}{2^{2n-1}}$.

راه‌حل ([۷]). با یک انجام تشابه و دوران در صفحه، بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد $[-1, 1]$ پاره‌خط مزبور است و $\ell = 2$. نقاط A_i را با z_i نشان می‌دهیم. پس یافتن z در بازهٔ $[-1, 1]$ به‌طوری‌که $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i) \in \mathbb{C}[z]$ دارای قدرمطلق حداقل $\frac{1}{2^{n-1}}$ باشد، حکم را نتیجه خواهد داد. چندجمله‌ای $f(z)$ را به‌صورت $f(z) = p(z) + iq(z)$ می‌نویسیم که $p(z), q(z) \in \mathbb{R}[z]$. داریم $|f(z)| \geq |p(z)|$. بنابراین حکم منجر به اثبات وجود نقطهٔ $z \in [-1, 1]$ می‌شود به‌طوری‌که $|p(z)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. اما با توجه به تعریف $f(z)$، چندجمله‌ای $p(z)$ یک چندجمله‌ای تکین است، بنابراین از قضیهٔ ۱.۵ نتیجه می‌شود نقطهٔ z وجود دارد به‌طوری‌که $|p(z)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. □

مسئله ۲.۷. اگر عدد حقیقی r چنان باشد که $r+\frac{۱}{r}$ صحیح باشد آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n عدد $r^n+\frac{۱}{r^n}$ نیز صحیح است.

راه‌حل. فرض کنید $\mathcal{T}_n(x) := ۲T_n(x/۲)$. با جایگزینی x با $\frac{x}{۲}$ در رابطهٔ (۳.۳) و ضرب طرفین آن در ۲، به رابطهٔ بازگشتی $\mathcal{T}_n(x) = x\mathcal{T}_{n-۱}(x) - \mathcal{T}_{n-۲}(x)$ می‌رسیم. با توجه به اینکه $\mathcal{T}_۰(x) = ۲$ و $\mathcal{T}_۱(x) = x$، با استقراء نتیجه می‌شود $\mathcal{T}_n(x)$ تکین است و همهٔ ضرایبش صحیح هستند. از رابطهٔ (۵.۳) به دست می‌آید $\mathcal{T}_n(x+۱/x) = x^n + ۱/x^n$، بنابراین $\mathcal{T}_n(r+\frac{۱}{r}) = r^n + \frac{۱}{r^n}$ صحیح است. □

مسئله ۳.۷. فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ $(n \geq ۲)$ نقاطی هم‌فاصله روی بازهٔ $[-۱,۱]$ باشند. اگر $t_k = \prod_{j\neq k}|x_j - x_k|$ آنگاه نشان دهید $\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\cdots+\frac{۱}{t_n} \geq \frac{۱}{۲^{n-۲}}$.

راه‌حل ([۷]). اگر از درون‌یابی لاگرانژ برای چندجمله‌ای $T_{n-۱}(x)$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$T_{n-۱}(x) = \sum_{k=۱}^{n} T_{n-۱}(x_k)\frac{(x-x_۱)\cdots(x-x_{k-۱})(x-x_{k+۱})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_۱)\cdots(x_k-x_{k-۱})(x_k-x_{k+۱})\cdots(x_k-x_n)}.$$

با مقایسهٔ ضریب جملهٔ پیشرو در طرفین تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$۲^{n-۱} = \sum_{k=۱}^{n}\frac{T_{n-۱}(x_k)}{(x_k-x_۱)\cdots(x_k-x_{k-۱})(x_k-x_{k+۱})\cdots(x_k-x_n)}.$$

از طرفی چون x_k در بازهٔ $[-۱,۱]$ است پس به‌صورت $\cos(\theta_k)$ است، نتیجتاً با توجه به خواص چندجمله‌ای چبیشف داریم $|T_{n-۱}(x_k)| = |\cos(k\theta_k)| \leq ۱$. حال اگر از رابطهٔ فوق قدرمطلق بگیریم و از نامساوی مثلث استفاده کنیم حکم نتیجه می‌شود. □

مسئله ۴.۷. فرض کنید d یک عدد صحیح مثبت نامربع و $(x_۰, y_۰) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ جواب بنیادی (یعنی جواب صحیح مثبت با کمترین مقدار $|x_۰|$) معادلهٔ پِل–فرما

$$x^۲ - dy^۲ = ۱ \qquad (۱.۷)$$

باشد. نشان دهید هر جواب صحیح (x,y) از این معادله به شکل

$$(x,y) = (\pm T_n(x_۰), \pm y_۰ U_{n-۱}(x_۰))$$

قابل بیان است.

راه‌حل ([۱۶]). از نظریهٔ اعداد می‌دانیم هر جواب صحیح دیگر (x,y) از معادلهٔ پِل–فرما از رابطهٔ زیر به دست می‌آید، که در آن n یک عدد صحیح دلخواه است

$$x+y\sqrt{d}=\pm(x_۰+y_۰\sqrt{d})^n. \qquad (۲.۷)$$

از پوشا بودن تابع $\cos$ روی اعداد مختلط نتیجه می‌شود عددی مثل $\theta\in\mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_۰=\cos(\theta)$. بنابراین از (۱.۷) نتیجه می‌شود $y_۰=i\sin(\theta)/\sqrt{d}$. اگر $x_۰,y_۰$ به دست آمده را در (۲.۷) جایگزین کنیم به دست می‌آید $x=\pm\cos(n\theta)$ و $y=\pm i\sin(n\theta)/\sqrt{d}$. بنابراین $x=\pm T_n(x_۰)$ و

$$y=\pm\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}\frac{i\sin(\theta)}{\sqrt{d}}=\pm U_{n-۱}(\cos(\theta))y_۰=\pm y_۰U_{n-۱}(x_۰).$$

□

در خاتمه مسئلهٔ زیر را برای خوانندهٔ علاقه‌مند مطرح می‌کنیم تا آن را با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف حل کند.

مسئله ۵.۷. فرض کنید $a_۰,a_۱,\ldots,a_n$ اعداد حقیقی باشند به‌طوری‌که برای هر $x\in[-۱,۱]$ داشته باشیم $|a_۰+a_۱x+\cdots+a_nx^n|\leq ۱$. نشان دهید برای هر $x\in[-۱,۱]$ داریم $|a_n+a_{n-۱}x+\cdots+a_۱x^{n-۱}+a_۰x^n|\leq ۲^{n-۱}$.

سپاسگزاری نویسندگان، برای چندین تذکرِ ریاضی به جا، که منجر به رفع چند مورد ابهام و مشکل جدی در متن اولیه این متن شد، قدردانِ داور هستند.

مراجع

[1] Bojanov, B. D., Proof of a conjecture of Erdös about the longest polynomial, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84** (1982), 99-103.

[2] Chebyshev, P. L., Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Imprimerie de l'Académie impériale des sciences*, **7** (1853), 539-568.

[3] Chebyshev, P. L., Sur les fonctions analogues à celles de Legendre, *J. de l. Soc. phil. de Moscou*, **4** (1869).

[4] Chebyshev, P. L., Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro, *Liouville J. (2)*, **19** (1874), 319-346.

[5] Chebyshev, P. L., Gesammelte Werke, Bd. II., St. Petersb. XX u. 736 gr. 8° mit zwei Porträts (1907), 1907.

[6] Fateman, R. J., Lookup tables, recurrences and complexity, in *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, 1989, 68-73.
[7] Gelca, R., Andreescu, T., *Putnam and Beyond*, Cham, Springer, 2017.
[8] Karjanto, N., Properties of Chebyshev polynomials (2020), available at `arXiv:2002.01342`.
[9] Khovanskii, A., *Topological Galois Theory, Solvability and Unsolvability of Equations in Finite Terms* (transl. from the Russian), Springer Berlin, 2014.
[10] Koepf, W., Efficient computation of Chebyshev polynomials in computer algebra, in *Computer Algebra Systems. A Practical Guide*, M. J. Wester, ed., John Wiley & Sons, New York, 1999, 79-99.
[11] Lax, P. D., *Linear algebra and Its Applications*, Wiley, New York, 2007.
[12] Mason, J. C., Handscomb, D. C., *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
[13] Rivlin, T. J., *Chebyshev Polynomials, From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
[14] Spielman, D., Spectral and Algebraic Graph Theory, Yale Lecture Notes, Connecticut , 2019.
[15] Szczepański, J., Chebyshev polynomials and continued fractions related, *Science, Technology and Innovation*, **7** (2019), no. 4.
[16] Wayne, A., Fermat's equation and Tshebysheff's polynomials, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 626.
[17] Zapponi, L., Parametric solutions of Pell equations (2015), available at `arXiv:1503.00637`.

محمد غلامزاده محمودی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: `mmahmoudi@sharif.ir`
امیرمحمد کرمی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: `amir.mohammad.karami.aka@gmail.com`
سید محمدرضا موسوی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: `mousavixy@gmail.com`

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 2, Autumn/Winter 2025, Pages 87–112
doi: 10.30504/mct.2024.1468.2032

Chebyshev Polynomials: A Brief Review

M. Gholamzadeh Mahmoudi[1], A. M. Karami[2], M. R. Mousavi[3]

[1,2,3]Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. Chebyshev polynomials are remarkable families of polynomials that arise in diverse domains of mathematics, often in unexpected ways. One of the pioneering investigations into these polynomials was conducted by the eminent Russian mathematician Pafnuti Chebyshev in the 19th century. Chebyshev's researches, primarily situated within the field of approximation theory, has yielded significant applications in mathematics, as well as other scientific and engineering disciplines, including interpolation theory and linear algebra. In this article, we will introduce these captivating polynomials and explore some of their fundamental properties and applications.

Keywords: Chebyshev polynomials, approximation theory, orthogonality, system of linear equations
Article history: Received 27 April 2024; Accepted 5 September 2024
Article type: review

1. mmahmoudi@sharif.ir
2. amir.mohammad.karami.aka@gmail.com
3. mousavixy@gmail.com