فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۴)، صص ۲۱۹ تا ۲۳۴

نظریهٔ میدان‌های رده‌ای روی میدان تک عضوی

حسین بهزادی‌پور، جلال پیردایه، آرش رستگار✉

چکیده. نظریهٔ میدان‌های رده‌ای چارچوبی برای توصیف تمامی گسترش‌های آبلی متناهی یک میدان عددی برحسب ویژگی‌های حسابیِ همان میدان ارائه می‌کند. این مقاله به بررسی این نظریه و به‌ویژه مسئلهٔ دایره‌بری بر روی میدان تک‌عضوی می‌پردازد. علاوه بر این، تعمیم‌های این نظریه ازجمله ایدهٔ سطوح حسابیِ متعلق به بلوخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف اصلی این نوشته، ارائهٔ فرمول‌بندیِ منسجمی از بخش‌های مرتبط با حدس آرتین و هندسهٔ روی میدان تک‌عضوی است تا تصویری روشن از چگونگی تعمیم قضیهٔ کرونکر–وبر در این فضای انتزاعی به دست آید.

۱ مقدمه

حدس کرونکر مبنی بر اینکه تمام گسترش‌های آبلی $\mathbb{Q}$ در گسترش‌های دایره‌بری $\mathbb{Q}$ قرار می‌گیرند را وبر اثبات کرد. برای کرونکر و وبر نظریهٔ میدان‌های رده‌ای وظیفهٔ یافتن تمام گسترش‌های آبلی $\mathbb{Q}$ را بر عهده داشت. آن‌ها به عنوان نتیجه‌ای از این کار قضیهٔ دیریکله دربارهٔ وجود اعداد اول در دنباله‌های حسابی را تعمیم دادند و نشان دادند که این قضیه در میدان‌های عددی نیز معتبر است. برای اثبات این قضیه باید آن را روی میدان تک‌عضوی فرمول‌بندی کنیم؛ شرح این کار هدف این نوشته است.

هیلبرت در سخنرانی معروف خود در سال ۱۹۰۰ در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس پیش‌بینی کرد که نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بسیار فراتر از این مباحث و موضوعات خواهد رفت؛ برای آشنایی بیشتر، [۲] را مطالعه کنید. مسئلهٔ نهم هیلبرت به دست آوردن کلی‌ترین قانون تقابل در یک میدان عددی دلخواه بود که قانون تقابل مربعی گاوس را تعمیم دهد؛ برای دیدن اثبات‌هایی از قانون

عبارات و کلمات کلیدی: نظریهٔ میدان‌های رده‌ای، گسترش آبلی متناهی، هندسهٔ جبری
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۳۰

doi: 10.30504/mct.2023.1415.1994

گاوس، [۱] را مطالعه کنید. این مسئله برای گسترش‌های آبلی به شکل قانون تقابل آرتین در آمد، اما برای گسترش‌های غیرآبلی هنوز بی‌پاسخ مانده است. فرمول‌بندی و بیان شکل این قوانین تقابل روی میدان تک‌عضوی $\mathbb{F}_1$ برای ما دشوار است.

نیم‌قرن پیش تیتس[1] هندسه روی میدان $\mathbb{F}_1$ را، که پیش از آن وجود خارجی نداشت، مطرح کرد. مبانی هندسهٔ جبری روی $\mathbb{F}_1$ را دایتمار [۷، ۸] و سول [۱۳] و تون و وکی [۱۵] ارائه کردند. منین یک نوع هندسهٔ تحلیلی را روی $\mathbb{F}_1$ در [۱۲] مطرح کرد. کاپرونوف[2] و اسمیرنوف تمام گسترش‌های متناهی $\mathbb{F}_1$ را هم‌زمان در نظر گرفتند و با این کار نقش مهمی در فرمول‌بندی هندسه روی $\mathbb{F}_1$ ایفا کردند. این دیدگاه به رویکرد سول انجامید که در آن یک شیء هندسی V روی $\mathbb{F}_1$، پس از گسترش پایه به $\mathbb{Z}$ تجسم می‌یافت و هندسهٔ V در چارچوب $\mathbb{F}_1$ در هندسهٔ نقاط دایره‌بری طرحِ[3] معمولی $V_{\mathbb{Z}}$ بازتاب می‌یابد. دایتمار و تون و وکی با استفاده از نظریهٔ رسته‌ها و مستقل از مفهوم دایره‌بری طرح‌هایی را روی $\mathbb{F}_1$ تعریف کردند.

یک رویکرد دیگر به این مسئله را دوروف [۹] ارائه داد که ممکن است راه را برای یکسان‌سازی همهٔ این فرمول‌بندی‌ها برای میدان تک‌عضوی هموار کند. ما از فرمول‌بندی او برای بسط حساب روی میدان تک‌عضوی استفاده خواهیم کرد. رویکرد دوروف نظریهٔ آراکلوف[4] و هندسهٔ حاره‌ای[5] و دیگر فرمول‌بندی‌های اشیاء هندسی با محتوای حسابی را نیز در بر می‌گیرد.

خلاصه آنکه تاکنون هندسهٔ جبری و هندسهٔ تحلیلی روی $\mathbb{F}_1$ بسط و گسترش یافته است و اکنون نوبت به ابداع حساب روی آن است. ایده‌هایی برای تعریف توابع زتای چندگوناها[6] روی $\mathbb{F}_1$ وجود دارد که جنبهٔ تحلیلی نظریهٔ اعداد را در بر می‌گیرد. بررسی گسترش‌های دایره‌بری $\mathbb{F}_{1^n}$ و فرمول‌بندی صورتی از قضیهٔ کرونکر–وبر روی $\mathbb{F}_1$ کار آسانی است. شرح فرمول‌بندی بخش‌های مربوط به حدس آرتین هدف اصلی این نوشته است. همچنین صورتی از نظریهٔ میدان‌های رده‌ای وجود دارد که بلوخ برای رویه‌های حسابی در [۳] بسط داده است. در ادامهٔ این‌نوشته به این موضوع خواهیم پرداخت که آیا می‌توان این فرمول‌بندی را برای خم‌های روی $\mathbb{F}_1$ نیز بیان کرد یا نه.

لازم است در پایان این مقدمه متذکر شویم که مفاهیم مربوط به نظریهٔ میدان‌های رده‌ای و قانون تقابل برگرفته از آثار گارباناتی [۱۰] و وایمن [۱۶] بوده و بخش‌های مرتبط با مسئلهٔ دایره‌بری و هندسهٔ تحلیلی روی میدان تک‌عضوی، مستقیماً بر اساس مقالهٔ [۱۲] تدوین شده است. تلاش شده است تا با کنار هم قرار دادن این منابع، ساختار یکپارچه و قابل‌فهمی برای خواننده فراهم شود.

1. Tits 2. Kapranov 3. scheme 4. Arakelov 5. tropical geometry 6. varieties

همچنین، نمادگذاری‌ها و مفاهیم (مانند حدس آرتین و سطوح حسابی) را بازنویسی و پیوند میان کار منین و بلوخ را برجسته‌تر کرده‌ایم تا مسیر گذار از نظریهٔ کلاسیک به هندسه روی میدان تک‌عضوی، برای پژوهشگران این حوزه هموارتر و ملموس‌تر گردد.

۲ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای چیست؟

مدت‌ها پیش از گالوا، ریاضی‌دانان دریافته بودند که توابع، مشابه اعداد رفتار می‌کنند. تعبیر این ایدهٔ قدیمی در نظریهٔ اعداد این بود که چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر مشابه اعداد اول هستند؛ بنابراین، باید آن‌ها را مطالعه کرد. پیش از این زمان هم آریاباتا[۱] در هند مقایسهٔ اعداد با توابع را مطرح کرده بود. چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر توجه دکارت را نیز به خود جلب کرده بودند.

گالوا یک میدان عددی K_f را به یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیرِ یکین f با ضرایب صحیح مرتبط می‌کند. این مطلب که $\mathrm{Spl}(f)$، که به عنوان مجموعه‌ای از پیمانه‌های اول[۲] تعریف می‌شود که f در آن‌ها به‌طور کامل شکافته[۳] می‌شود، K_f را به‌طور یکتا تعیین می‌کند، در قرن نوزدهم کشف شد. با استفاده از نظریهٔ ددکیند–کومر می‌دانیم که با تقریب تعداد متناهی اعداد اول، $\mathrm{Spl}(f)$ مجموعه‌ای از پیمانه‌های اول $\mathbb{Z}$ است که در حلقهٔ اعداد صحیح K_f به‌طور کامل شکافته می‌شوند. بنابراین، می‌توانیم چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر را نادیده بگیریم و همه چیز را برحسب میدان‌های عددی متناظر فرمول‌بندی کنیم. برای چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر f و g در $\mathbb{Z}[X]$، $K_f \supset K_g$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Spl}(f) \subset^* \mathrm{Spl}(g)$. در اینجا، $\subset^*$ به معنای «به استثنای تعداد متناهی» است.

قضیه ۱.۲ (قضیهٔ چندجمله‌ای‌های آبلی). مجموعهٔ $\mathrm{Spl}(f)$ را می‌توان با کمک هم‌نهشتی‌ها بر اساس پیمانه‌ای که تنها به هادی[۴] f_{K_f} وابسته است، توصیف کرد، اگر و تنها اگر K_f یک گسترش آبلی از $\mathbb{Q}$ باشد.

اینکه برای گسترش‌های آبلی، هم‌نهشتی‌ها مفید واقع می‌شوند، در قانون تقابل آرتین به‌طور دقیق بیان شده است. هدف ما در این یادداشت، فرمول‌بندی این موضوع برای میدان تک‌عضوی است. پرسش اساسی این است: اگر مطالعهٔ حساب میدان‌های عددی، مطالعهٔ حلقهٔ اعداد صحیح و خارج‌قسمت‌های آن توسط ایده‌آل‌ها و مطالعهٔ گروه رده‌ای ایدل[۵] و زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج‌قسمتی آن‌ها است، پس مطالعهٔ حساب میدان تک‌عضوی به چه معنا خواهد بود؟ پاسخ به این پرسش مطالعهٔ

1. Aryabhata 2. prime modules 3. split 4. conductor 5. idele class group

میدان‌های متناهی را نیز برایمان روشن‌تر می‌کند. به عنوان مثال، انتظار داریم که میدان‌های متناهی دارای گسترش‌های آبلی با گروه گالوای یکریخت با هر گروه متناهی آبلی باشند، درست مانند حالت میدان عددی. چرا نباید مشابه باشند؟ آیا گالوا هنگام گسترش نظریهٔ میدان، نکته‌ای را نادیده گرفته است؟ یک مسئلهٔ حسابی دیگر، مربوط به شکافته شدن چندجمله‌ای‌ها به پیمانهٔ اعداد اول است. در اینجا توجه ما معطوف به قانون تقابل مربعی است: چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(x) = x^{۲} - q$ را به پیمانهٔ p در نظر بگیرید، که در آن p و q اعداد اول فرد هستند. در این حالت، یا $f(x)$ به پیمانهٔ p مربع کامل است، به این معنی که $x^{۲} \equiv q \pmod p$ تنها یک جواب دارد (که وقتی $p = q$ رخ می‌دهد)، یا $f(x)$ به پیمانهٔ p به حاصل‌ضرب عوامل خطی مجزا تجزیه می‌شود که به این معنی است که $x^{۲} \equiv q \pmod p$ دو جواب دارد (زمانی که $(\frac{q}{p}) = ۱$)، یا اینکه $f(x)$ به پیمانهٔ p تحویل‌ناپذیر است که به این معنی است که $x^{۲} \equiv q \pmod p$ هیچ جوابی ندارد (زمانی که $(\frac{q}{p}) = -۱$). تعیین اینکه هم‌نهشتی برای کدام pها جواب دارد، از دیرباز مسئله‌ای دشوار بوده است. اما شکل سنتی قانون تقابل مربعی ما را از این دشواری می‌رهاند. در حالت کلی، قانون تقابل آرتین نیز همین نقش را ایفا می‌کند. اما پرسش مشابه در میدان تک‌عضوی چیست که هر قانون تقابلی باید به آن پاسخ دهد؟

۳ اهداف نظریهٔ میدان‌های رده‌ای چیست؟

اگر بخواهیم زبانی مفهومی برای گسترش‌های گالوایی ارائه دهیم چیزی به این صورت خواهد بود: وقتی یک گسترش میدان گالوایی متناهی داریم، یک شیء نسبی داریم که گروه خودریختی نسبی آن به‌صورت تراگذر روی چیزی عمل می‌کند. ما می‌توانیم برای هر ساختار نسبی در ریاضیات چنین وضعیتی داشته باشیم. به عنوان مثال، فضای پوششی گالوا یک شیء هندسی نسبی است که گروه خودریختی‌های نسبی آن بر روی تارها[1] به صورت تراگذر عمل می‌کند. در این چیدمان هندسی، می‌توان تمام پوشش‌های گالوا را برحسب گروه بنیادی فضای پایه توصیف کرد. می‌خواهیم همین کار را برای میدان عددی K انجام دهیم. یعنی می‌خواهیم تمام گسترش‌های K را برحسب ناورداهای[2] مرتبط با K توصیف کنیم.

به طور خاص، می‌خواهیم $\mathrm{Gal}(L/K)$ را برحسب حساب K بیان کنیم. اما معلوم می‌شود که وقتی $\mathrm{Gal}(L/K)$ آبلی نباشد، نمی‌توان اشیاء غیرآبلی را بر اساس ساختارهای جبری جابه‌جایی

1. fibers 2. invariants

ساخت. بنابراین، یا باید ناورداهایی غیرآبلی به کار بگیریم یا خود را به گروه‌های گالوای آبلی محدود کنیم. روش کلی این است که گروه‌های تقارن، به‌طور کلی، اشیاء هندسی هستند نه حسابی. فقط زمانی که آبلی هستند، می‌توانیم آن‌ها را ساختارهایی حسابی در نظر بگیریم.

بنابراین، انتظار داریم که بتوانیم تنها گسترش‌های آبلی را برحسب حساب K توصیف کنیم. همچنین انتظار داریم هرگاه $\mathrm{Gal}(L/K)$ آبلی باشد، آن را برحسب حساب K بیان کنیم. به‌ویژه، تجزیهٔ یک ایده‌آل اول هنگامی که به L بالا برده می‌شود[۱] باید در حالت L/K آبلی برحسب حساب K قابل فهم باشد. این به معنای ارائهٔ یک قانون تقابل است. در چیدمان هندسی، اگر خود را به پوشش‌های گالوایی آبلی محدود کنیم، ناورداهای آبلی برای فضای هندسی کفایت می‌کند. به عنوان مثال، پوشش‌های گالوایی آبلی را می‌توان برحسب گروه هومولوژی اول فضای پایه طبقه‌بندی کرد که در واقع همان آبلی‌سازی گروه بنیادی است. این نشان می‌دهد که گسترش نظریه‌های کوهومولوژی غیرآبلی برای فضاهای هندسی باید در دستور کار باشد. گروه‌های بنیادی بالاتر، مثال‌هایی از این دست هستند.

گروه بنیادی دارای مشابه‌های جبری–هندسی است. گروه‌های بنیادی بالاتر در هندسهٔ جبری را مازور[۲] تعریف کرده است . ریشهٔ ایدهٔ جایگاه اِتال[۳] به آبیانکار[۴] بازمی‌گردد، اما بسط کلی آن را گروتندیک انجام داد. تلاش‌های دیگری نیز برای نسبت‌دادن نظریه‌های کوهومولوژی غیرآبلی به اشیاء هندسی وجود دارد. در اینجا نکته‌ای وجود دارد که نیاز به بررسی بیشتر دارد: گروه بنیادی حسابی[۵] طیف[۶] یک میدان، همان گروه گالوای آن است. چرا این راه‌حل را برای تفسیر یک گروه تقارن برحسب ناورداهای مرتبط با میدان پایه بر نمی‌گزینیم؟ پاسخ این است که ناورداهای مرتبط را نباید دوباره با استفاده از مفهوم تقارن تعریف کرد.

۴ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای روی $\mathbb{Q}$

در مطالعهٔ گسترش‌های آبلی $\mathbb{Q}$، گسترش‌های دایره‌بری $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}(e^{\frac{۲\pi i}{m}} = \xi)$ نقش مهمی دارند. بر اساس قضیهٔ کرونکر–وبر هر گسترش آبلی متناهی $\mathbb{Q}$ در یک گسترش دایره‌بری $\mathbb{Q}_m$ نشانده[۷] می‌شود. برای گسترش آبلی $L/\mathbb{Q}$، عدد صحیح مثبت m را پیمانهٔ معرف[۸] یا پیمانهٔ مجاز[۹] L می‌نامیم اگر $L \subset \mathbb{Q}_m$. هادی f_L کوچک‌ترین پیمانهٔ مجاز L است. هادی f_L هر پیمانهٔ دیگر m را عاد می‌کند. فرض کنید $L \subset \mathbb{Q}_m$؛ نماد آرتین $\left(\frac{L}{a}\right)$ برای $a \in \mathbb{Z}$ با شرط $(a, n) = ۱$

1. lifted 2. Mazur 3. étale site 4. Abhyankar 5. arithmetic fundamental group 6. spectrum
7. embedded 8. defining modulus 9. admissible modulus

یک خودریختی L است که با محدود کردن خودریختی دایره‌بری $(\xi \mapsto \xi^a)$ به L به دست می‌آید

$$(\frac{L}{\cdot}) : (\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}})^* \to \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}).$$

نگاشت بالا، نگاشت آرتین نام دارد و نگاشتی پوشا است. فرض کنید $I_{L,m}$ هستهٔ نگاشت آرتین باشد. اگر $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ را با $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})$ یکی بگیریم، آنگاه $I_{L,m}$ با $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/L)$ یکی خواهد بود و L میدان ثابت[۱] $I_{L,m}$ خواهد بود.

قضیه ۱.۴ (قانون تقابل آرتین). فرض کنید $L/\mathbb{Q}$ یک گسترش آبلی متناهی با پیمانهٔ معرف m باشد. آنگاه دنبالهٔ زیر دقیق است

$$۱ \to I_{L,m} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to ۰.$$

همچنین گسترش‌های آبلی درون $\mathbb{Q}_m$ با گروه‌های خارج‌قسمتی $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ در تناظر یک‌به‌یک هستند.

یکریختی $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ با $\frac{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*}{I_{L,m}}$ به این معنی است که گروه گالوا برحسب حساب $\mathbb{Q}$ تحقق می‌یابد. هادی f_L گسترشِ آبلی را نیز می‌توان برحسب حساب خود K طبقه‌بندی کرد.

قضیه ۲.۴ (قضیهٔ هادی‌ـانشعاب[۲]). اگر L یک گسترش آبلی متناهی از $\mathbb{Q}$ باشد، آنگاه یک p اول از $\mathbb{Q}$ در L منشعب می‌شود اگر و تنها اگر $p \mid f_L$.

از سوی دیگر، مینکوفسکی[۳] ثابت کرد که p اول در $\mathbb{Q}$ در L منشعب می‌شود اگر و تنها اگر $p \mid \mathrm{disc}(L)$. این نشان می‌دهد که برای گسترش‌های آبلی باید ارتباطی بین هادی و مبین[۴] وجود داشته باشد.

قضیه ۳.۴ (قضیهٔ تجزیه). فرض کنید m یک پیمانهٔ معرف L باشد. اگر $p \nmid m$ (در حالت خاص، p بدون انشعاب است) آنگاه مرتبهٔ $pI_{L,m}$ در $\frac{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*}{I_{L,m}}$ برابر با f است که همان درجهٔ ردهٔ مانده‌ها[۵] است.

در مورد گسترش دایره‌بری $\mathbb{Q}_m$، مرتبهٔ p در $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ مورد نظر است. فرض کنید $m = f_L$؛ ازآنجاکه $efg = [L : \mathbb{Q}]$، داریم

$$p \in \mathrm{Spl}(L/\mathbb{Q}) \iff (e = ۱,\ f = ۱) \iff (p \nmid f_L,\ p \in I_{L,f_L}).$$

1. fixed field 2. conductor-ramification theorem 3. Minkowski 4. discriminant 5. residue class degree

این بدان معنی است که $\mathrm{Spl}(L/\mathbb{Q})$ بر اساس همنهشتی‌ها تعریف می‌شود. اکنون، بر رابطهٔ بین هادی و مبین تمرکز می‌کنیم. فرض کنید X_m نمایانگر گروه مشخصهٔ[1] $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ باشد. بنابراین $\chi \in X_m$ یک همریختی $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ است. می‌گوییم d یک پیمانهٔ معرف برای χ است اگر $\chi(a) = ۱$ برای هر $a \equiv ۱ (d$ به‌پیمانهٔ$)$. فرض کنید

$$X_{L,m} = \{\chi \in X_m \mid \chi(h) = ۱ \ \ \forall h \in I_{L,m}\}.$$

پس

$$X_{L,m} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/L)^{\perp} \cong \frac{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})}{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/L)} \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

قضیه ۴.۴ (قضیهٔ هادی-مبین). فرض کنید m یک پیمانهٔ مجاز برای یک گسترش آبلی متناهی $L/\mathbb{Q}$ باشد. آنگاه $f_L = \mathrm{lcm}\{f_\chi \mid \chi \in X_{L,m}\}$ و $|\mathrm{disc}(L)| = \prod_{\chi \in X_{L,m}} f_\chi$. در حالت خاص، $f_L \mid \mathrm{disc}(L)$ و $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{Q}_{f_L} \subset \mathbb{Q}_{|\mathrm{disc}(L)|}$.

۵ هندسهٔ جبری روی $\mathbb{F}_۱$

از نظر توئن و وکی [۱۵] هندسهٔ جبری روی $\mathbb{F}_۱$ حالت خاصی از هندسهٔ جبری نسبت به یک رستهٔ متقارن تکواره‌ای[2] $(C, \bigotimes, ۱)$ است که کامل و پادکامل[3] بوده و پذیرای همریختی‌های درونی است. رسته‌ای مانند C منجر به رسته‌ای از تکوارهای جابه‌جایی، شرکت‌پذیر، و یکدار $\mathrm{Comm}(C)$ می‌شود که جایگزینی برای رستهٔ حلقه‌های جابه‌جایی معمولی است. هر شیء A از $\mathrm{Comm}(C)$ رستهٔ A-مدول‌ها را تعیین می‌کند که شامل جفت‌های (M, μ) است که M یک شیء از C همراه با عمل $\mu : A \otimes M \to M$ بوده و شرایط معمولی را برآورده می‌کند. رستهٔ مقابل $\mathrm{Aff}_C := \mathrm{Comm}(C)^{opp}$ رستهٔ طرح‌های C-آفین نامیده می‌شود. تابعگون همانگوی[4] $\mathrm{Comm}(C) \to \mathrm{Aff}_C$ را **Spec** می‌نامیم.

بر اساس [۱۵] هندسهٔ $\mathbb{F}_۱$ را به عنوان هندسه‌ای نسبت به رستهٔ تکواره‌ای مجموعه‌ها با حاصل‌ضرب مستقیم $(\mathrm{Ens}, \times, *)$ به دست می‌آوریم. حلقه‌های جابه‌جایی نسبت به $(\mathrm{Ens}, \times, *)$ همان تکوارهای جابه‌جایی شرکت‌پذیر و یکدار معمولی هستند که به‌صورت ضربی نوشته می‌شوند. در واقع، از این منظر، این شعار رایج که برای انجام جبر روی $\mathbb{F}_۱$ باید ساختار جمعی را نادیده گرفت، قابل مشاهده است. هنگامی که عملگر «تغییر پایه» $\otimes_{\mathbb{F}_۱} \mathbb{Z}$ را اعمال کنیم، ساختار جمعی بازیابی

1. character group 2. monoidal 3. co-complete 4. tautological functor

شده و تکوار به حلقهٔ جابه‌جایی شرکت‌پذیر و یکدار $\mathbb{Z}[M]$ تبدیل می‌شود. رستهٔ مقابل تکوارها با $\mathrm{Aff}_{\mathbb{F}_1}$ نشان داده می‌شود. به‌طور مشابه، تغییر پایه با هر حلقهٔ جابه‌جایی R، طرح‌های آفین روی $\mathrm{Spec}R$ را ایجاد می‌کند. اعضای تکوار M و تصاویر آن‌ها در $R[M]$ مختصات دایره‌بری نامیده می‌شوند. دایتمار [۷] یک فضای توپولوژیکی را به یک M مرتبط می‌کند و آن را $\mathrm{spec}M$ می‌نامد تا آن را از Spec متمایز کند، و به آن ساختار یک بافه[1] می‌دهد. نقاط، همان زیرتکوارهای اول هستند. مجموعه‌های باز اصلی و (پیش)بافهٔ تکوارها از طریق موضعی‌سازی تعیین می‌شوند؛ درست مانند حالت کلاسیک حلقه‌های جابه‌جایی. دایتمار ریختارها را در $\mathrm{Aff}_{\mathbb{F}_1}$ بر حسب ریختارهای مناسب از فضای توپولوژیکی spec با بافهٔ ساختاری مشخص می‌کند.

بگذارید چند نمونه را مورد بحث قرار دهیم. فرض کنید M یک گروه آبلی باشد که به عنوان یک تکوار در Ens در نظر گرفته می‌شود. داریم

$$\mathrm{spec}\ M \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[M]$$

در حالت خاص، در [۱۵] $\mathbb{F}_{1^n}$ به عنوان تکوار (گروه) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تعریف شده است و طیف آن پس از بالا بردن به $\mathbb{Z}$ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathrm{spec}\ \mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} := \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[q]/(q^n - 1).$$

طرح آفین $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1}$ با طیف گروه دوری نامتناهی $\mathbb{Z}$ نشان داده می‌شود. با بالا بردن آن به $\mathbb{Z}$ تبدیل به $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ معمولی می‌شود. خط آفین، تکوار دوری نامتناهی $\mathbb{N}$ است. اگر آن را به $\mathbb{Z}$ بالا ببریم، $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[q]$ به دست می‌آید. به‌طور مشابه، $\mathbb{A}^k_{\mathbb{F}_1}$ طیف $\mathbb{N}^k$ برای $k \geq 1$ است.

برای تعریف طرح آفین $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{F}_1}$، بافهٔ طبیعی خودریختی‌های یک مدول آزاد از مرتبهٔ n را در نظر بگیرید. پس از بالا بردن آن به $\mathbb{Z}$، آن را با حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $\mathbb{G}_m^n$ و S_n نشان می‌دهیم [۱۵]. دایتمار در [۷] گروه نقاط $\mathbb{A}$–مقدار $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{F}_1}$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{F}_1}(\mathbb{A}) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}^n).$$

این تعریف را می‌توان با گروه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی از $\mathbb{A}$ که دقیقاً یک عنصر غیرصفر در هر سطر و هر ستون دارند، یکی دانست. این دقیقاً همان تعریفی است که در [۱۵] ارائه

1. sheaf

شده است. برخلاف آنچه برای $\mathbb{A}^k$ و $\mathbb{G}_m$ رخ داد، پس از بالابردن $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{F}_1}$ به $\mathbb{Z}$، $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Z}}$ به دست نمی‌آید. در واقع، بر اساس [۱۵]، $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Z}}$ برای $n > 1$ از بالابردن یک $\mathbb{F}_1$ـ‌بافه حاصل نمی‌شود.

۶ فرمول‌بندی دوروف برای $\mathbb{F}_1$

دوروف در رسالهٔ دکترای خود [۹] چارچوبی جبری به نام نظریهٔ حلقه‌های تعمیم‌یافته و طرح‌ها ارائه کرد که طرح‌های کلاسیک، هندسهٔ جبری، نظریهٔ مدل‌ها، هندسهٔ آراکلوف، هندسهٔ حاره‌ای، و هندسه روی میدان تک‌عضوی را یکشکل می‌کرد. نظریهٔ حلقه‌های تعمیم‌یافته، چه جابه‌جایی و چه ناجابه‌جایی، حلقه‌های کلاسیک شرکت‌پذیر و یکدار را نیز در بر می‌گیرد. او طیف‌های حلقه‌های تعمیم‌یافته‌ی جابه‌جایی را تعریف کرد و طرح‌های تعمیم‌یافته را با چسباندن طیف‌های حلقه‌های تعمیم‌یافته ساخت. این طرح‌های تعمیم‌یافته، فضاهایی حلقه‌ای تعمیم‌یافته هستند؛ یعنی فضاهای توپولوژیکی با بافه‌ای از حلقه‌های تعمیم‌یافته. نکتهٔ مهم این است که هیچ همریختی جدیدی بین طرح‌های کلاسیک در رستهٔ بزرگ‌تر طرح‌های تعمیم‌یافته به وجود نمی‌آید.

نظریهٔ دوروف فواید بسیار دیگری نیز دارد. به‌ویژه، او تعاریف دقیقی هم از «حلقه موضعی ارشمیدسی» $\mathbb{Z}_\infty$ و هم از «میدان تک‌عضوی» $\mathbb{F}_1$ به دست آورد.

دوروف از زبان مونادها[۱] استفاده می‌کند که در اصل آن را مکلین [۱۱] ابداع کرده است. او نظریهٔ درون‌تابعگون‌های داخلی[۲] و مونادهای درونی را روی یک رستهٔ بستهٔ دکارتی[۳] (مثلاً یک توپوس)[۴] بسط می‌دهد. او معمولاً روی مونادهای روی رستهٔ مجموعه‌ها یا مونادهای داخلی روی توپوس‌ها تمرکز داشت که به‌طور شهودی به طرح‌های مونادها روی رستهٔ مجموعه‌ها مربوط بودند. مهم‌ترین نمونه‌های مونادها آن‌هایی هستند که توسط جفت تابعگون‌های الحاقی[۵] $F : C \to D$ و $G : D \to C$ که در آن معمولاً C رستهٔ مجموعه‌ها و D یک رستهٔ جبری (رستهٔ مجموعه‌ها به همراه یک ساختار جبری مانند رستهٔ گروه‌ها، حلقه‌ها و غیره) است، تعریف شده‌اند. سپس نظریهٔ مونادهای جبری را به دو زبان توسعه داد. زبان اول، توصیف رسته‌ای برحسب تابعگون‌ها و مونادهایی بود که او را قادر می‌ساخت تا حدهای تصویری[۶] مونادهای جبری را بسازد. زبان دوم، توصیف جبری به عنوان مجموعه‌هایی از طرح‌ها با برخی عملیات روی آن‌ها بود که او را قادر می‌ساخت حدهای استقرایی[۷] (مانند ضرب تانسوری) بسازد. تعریف اصلی به صورت زیر است.

---

1. monads 2. inner endofunctors 3. Cartesian closed category 4. topos 5. adjoint 6. projective limits 7. inductive limits

تعریف ۱.۶. یک درون‌تابعگون جبری است اگر با حدود استقرایی پالوده[1] جابه‌جا شود.

او به هر موناد $\sum$ یک موناد جبری $\sum_{\mathrm{alg}}$ نظیر کرد و مفهوم موناد جبری را تعریف کرد. اصل کلی در این موضوع این است که اشیاء جبری با اطلاعات متناهی تعیین می‌شوند. سپس توجه را به مونادهای جبری جابه‌جایی جلب می‌کنند و آن‌ها را حلقه‌های تعمیم‌یافته می‌نامند. اگرچه مونادهای جبری جابه‌جایی مانند حلقه‌های جابه‌جایی رفتار می‌کنند، مونادهای جبری (غیرجابه‌جایی) به‌طور کلی رفتار بسیار متفاوتی با حلقه‌های غیرجابه‌جایی کلاسیک دارند.

دوروف مفهوم طیف یک حلقهٔ تعمیم‌یافته را بسط داد و نظریهٔ طرح را بر اساس آن‌ها بنا نهاد. هر موناد جمعی به یک نیم‌حلقه مرتبط می‌شود و به‌طور یکتا توسط آن تعیین می‌شود. همچنین موناد جمعی جابه‌جایی است اگر و تنها اگر نیم‌حلقهٔ متناظر با آن جابه‌جایی باشد. به‌طور کلی، مونادهای جبری جابه‌جایی، جمعی نیستند. مخصوصاً مونادهایی که ما به آن‌ها علاقه‌مندیم؛ برای مثال $\mathbb{Z}_\infty \subset \mathbb{R}$ و همچنین $\mathbb{F}_\emptyset \subset \mathbb{F}_۱ \subset \mathbb{F}_{\pm ۱} \subset \mathbb{Z}_\infty \subset \mathbb{Q}$ همهٔ زیرمونادهای یک موناد جابه‌جایی یعنی $\mathbb{R}$ هستند که غیرجمعی است. در فرمول‌بندی دوروف، $\mathbb{F}_۱ = \mathbb{F}_\emptyset[\circ^{[\circ]}] = \mathbb{F}_\emptyset\{\circ^{[\circ]}\}$ که در ادامه به توضیح مفهوم این نمادها می‌پردازیم.

۷ میدان‌های دایره‌بری روی $\mathbb{F}_۱$

فرض کنید A یک موناد جبری باشد. منظور ما از $A(n)$، Aـمدول آزاد $L_A(S)$ است که $S = \{۱ \dots n\}$، که معمولاً حداقل برای A غیرجمعی با A_n یکریخت نیست. $|A|$ که همان $A(۱)$ است را هم به عنوان یک موناد با عضو یکتای $e \in |A|$ و هم به عنوان یک $|A|$ـمدول در نظر می‌گیریم. $||A||$، مجموعهٔ مدرج[2] از عملیات $\coprod_{n\geq \circ} A(n)$ است. جابه‌جایی بودن یک موناد جبری برحسب $||A||$ تعریف می‌شود. حلقه‌های جابه‌جایی کلاسیک R متناظر با مونادهای جمعی جابه‌جایی $\sum$ هستند که تقارن $[-]$ را می‌پذیرند؛ یعنی یک عمل یکتایی[3] $- \in \sum(۱)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $e + (-e) = \circ$ که به‌طور خودکار دلالت بر $(-)^۲ = e$ دارد.

یک حلقهٔ تعمیم‌یافته مثل Λ را در نظر می‌گیریم. سپس برای هر مجموعهٔ مدرج

$$S = \coprod_{n\geq \circ} S(n)$$

می‌توانیم یک Λـجبر آزاد ناجابه‌جایی مثل $\Lambda\{S\}$ نسبت دهیم (به‌طور مشابه، یک Λـجبر آزاد

1. filtered 2. graded set 3. unary operation

جابه‌جایی $\Lambda[S]$). به کمک ویژگی سرتاسری[1] موناد نسبت به Λ-جبر ناجابه‌جایی (به‌طور مشابه جابه‌جایی) $\sum$ و نگاشت‌های مدرج $S \to ||\sum||$ می‌سازیم. در واقع،

$$\Lambda\{S\} := \Lambda\langle S \mid [S,\Lambda]\rangle = \Lambda\langle S\rangle/\langle[S,\Lambda]\rangle, \quad \Lambda[S] := \Lambda\langle S \mid [S,\Lambda],[S,S]\rangle$$

اگر هر عمل در S یکتایی باشد، $\Lambda\{S\}$ حلقه‌ای از چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای ناجابه‌جایی از S است، که با این حال فرض می‌شود با ثابت‌ها درصورتی‌که Λ و $\Lambda[S]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای جابه‌جایی از S باشند، جابه‌جا می‌شوند. همچنین در این حالت، به ترتیب تقسیم با مجموعه‌ای از روابط $E \subset ||\Lambda\{S\}||$ و $E \subset ||\Lambda[S]||^2$ امکان‌پذیر بوده و جبرهای متناهی‌مولد و با نمایش متناهی معنا پیدا خواهد کرد.

رستهٔ مونادهای جبری، دارای شیء اولیهٔ $\mathbb{F}_\emptyset$ است که توسط تنها ساختار مونادی روی $\mathrm{Id}_{\mathrm{Sets}}$ به دست می‌آید. همچنین، دارای شیء نهایی ۱ است که با ضریب ثابت با مقدار ۱ حاصل شده و با تنها ساختار مونادی خود مجهز شده است. هر مجموعه‌ای یک ساختار $\mathbb{F}_\emptyset$-مدولی یکتا را می‌پذیرد، یعنی داریم $\mathbb{F}_\emptyset\text{-}\mathbf{Mod} = \mathrm{Sets}$. یک موناد جبری، یعنی یک موناد روی مجموعه‌ها با یک تابعگون درونی جبری، می‌تواند برحسب دنباله‌ای از مجموعه‌ها $\{\sum(n)\}_{n\geq 0}$ و برخی از نگاشت‌های بین این مجموعه‌ها و حاصل‌ضرب آن‌ها با در نظر گرفتن شرایطی فرمول‌بندی شود.

جبری بودن یک موناد $\sum$ به این معنی است که $\sum(X) = \bigcup_{\text{متناهی } I\subseteq X} \sum(I)$. اگر ما $\sum(X)$ را به عنوان مجموعه‌ای از تمام ترکیبات $\sum$-خطی از عناصر X در نظر بگیریم، این شرط به این معنی است که هر ترکیب $\sum$-خطی در واقع فقط شامل تعداد متناهی از اعضای X است. به این ترتیب روشن می‌شود که چرا مونادهایی که توسط سیستم‌های جبری تعریف می‌شوند، مونادهای جبری هستند.

هر موناد جبری عنصر یکانی دارد. عناصر $\sum(0)$ را ثابت‌ها و $|\sum| = \sum(1)$ را می‌نامیم. اگر $\sum(0)$ تهی باشد، می‌گوییم یک موناد بدون ثابت مانند $\mathbb{F}_\emptyset$ داریم. اگر $\sum(0)$ دقیقاً یک عضو داشته باشد، می‌گوییم که $\sum$ یک موناد با صفر است و این عضو را 0 می‌نامیم؛ یعنی $\sum(0) = \{0\}$. اگر بخواهیم تأکید کنیم که برای مولدهای یک موناد $\mathbb{F}_\emptyset\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ هر u_i از درجهٔ r_i می‌آید، می‌نویسیم $\mathbb{F}_\emptyset\langle u_1^{[r_1]} \ldots u_n^{[r_n]}\rangle$. با این نماد، اکنون می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_\emptyset[0^{[0]}] = \mathbb{F}_\emptyset\{0^{[0]}\}, \quad \mathbb{F}_{1^n} = \mathbb{F}_1[\zeta_n^{[1]} \mid \zeta_n^n = e],$$

1. global property

$$\mathbb{F}_{\pm ۱} = \mathbb{F}_۱[-^{[۱]} \mid (-)^۲ = e] = \mathbb{F}_۱\{-^{[۱]} \mid (-)^۲ = e\}.$$

برای هر $n, m \geq ۱$، یک نشانندهٔ طبیعی $\mathbb{F}_{۱^n} \to \mathbb{F}_{۱^{mn}}$ داریم که با $\zeta_n \longmapsto \zeta_{mn}^m$ حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن حد استقرایی (پالوده) همهٔ این نگاشت‌ها، یک حلقهٔ تعمیم‌یافته جدید $\mathbb{F}_{۱^\infty} = \varinjlim \mathbb{F}_{۱^n}$ به دست می‌آوریم. به‌وضوح

$$\mathbb{F}_{۱^\infty} = \mathbb{F}_۱\{\zeta_۱, \zeta_۲, \cdots \mid \zeta_۱ = e,\ \zeta_n = \zeta_{nm}^m\}$$

به‌طور مشابه، برای $n, m \geq ۱$، نگاشت پوشای یکتای $\mathbb{F}_{۱^{nm}} \to \mathbb{F}_{۱^n}$ که با $\zeta_{nm} \longmapsto \zeta_n$ به دست می‌آید را داریم. می‌توانیم حد معکوس $\mathbb{F}_{۱^{-\infty}} = \varprojlim \mathbb{F}_{۱^n}$ را محاسبه کنیم. همچنین یک عمل یکانی خاص $\zeta \in \mathbb{F}_{۱^{-\infty}}$ داریم که با دستگاه وارون‌نمای ζ_n تعریف شده است. $\mathbb{F}_۱[\zeta] \subset \mathbb{F}_{۱^{-\infty}}$ با جبر چندجمله‌ای $\mathbb{F}_۱[T^{[۱]}]$ یکریخت است. $\mathbb{F}_\emptyset \to \mathbb{F}_۱$ در رستهٔ حلقه‌های تعمیم‌یافته پوشا است، اما در رستهٔ همهٔ مونادهای جبری چنین نیست.

۸ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای روی $\mathbb{F}_۱$

زبان ساخته‌شده در [۱۵] برای فرمول‌بندی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای روی $\mathbb{F}_۱$ بسیار مناسب است، اما ما فرمول‌بندی را به‌جای تکوارها به زبان مونادها در نظر می‌گیریم تا بتوانیم نتایج آن را در نظریهٔ آراکلوف، هندسهٔ حاره‌ای، و نظریهٔ طرح‌های بُعد بالا بررسی کنیم. همان‌طور که می‌دانیم $\mathbb{F}_{۱^n}$ تکوار $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ است و $\mathbb{F}_۱$ تکوار بدیهی. همچنین می‌دانیم که $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{۱^n}/\mathbb{F}_۱) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

هر نگاشت پوشای $\rho : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to G$ به یک گروه جابه‌جایی G باید با یک شیء $\mathbb{F}_\rho$ متناظر باشد که در آن $\mathbb{F}_۱ \subseteq \mathbb{F}_\rho \subseteq \mathbb{F}_{۱^n}$ به‌طوری که $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_\rho|\mathbb{F}_۱) \cong G$ و $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{۱^n} \mid \mathbb{F}_\rho) \cong \mathrm{Ker}\ \rho$. همچنین باید یک تناظر یک‌به‌یک بین مونادهای جبری Σ که در آن $\mathbb{F}_۱ \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{F}_{۱^n}$ و خارج‌قسمت‌های آبلی $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ وجود داشته باشد. به این ترتیب، ما نه‌تنها نظریهٔ کرونکر–وبر را که می‌گوید همهٔ مونادهای جبری گالوایی $\sum$ روی $\mathbb{F}_۱$ با $\mathrm{Gal}(\sum/\mathbb{F}_۱)$ آبلی در $\mathbb{F}_{۱^\infty}$ قرار دارند، به دست می‌آوریم، بلکه صورتی از قانون تقابل آرتین را هم حاصل می‌کنیم.

هر گروه آبلی متناهی G با زیرگروهی از $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ یکریخت است که m مربوط به عنوان هادی موناد جبری متناظر عمل می‌کند. در واقع، تمام مونادهای جبری متناظر باید یکریخت باشند. نگاشت تقابل آرتین $(\frac{\mathbb{F}_\rho}{*}) : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_\rho/\mathbb{F}_۱)$ با محدود کردن خودریختی $\mathbb{F}_{۱^n}$ که با $\zeta_n \to \zeta_n^a$ نشان داده شده و به $\mathbb{F}_\rho$ محدود می‌شود، به دست می‌آید.

توجه داشته باشید که با گسترش پایه به یک میدان متناهی $\mathbb{F}_p$ داریم

$$\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_{1^n} = \mathbb{F}_{p^n}.$$

این نشان می‌دهد که برای همهٔ گروه‌های آبلی متناهی G، $\mathbb{F}_\rho$ باید یک گسترش مونادی جبری با گروه گالوای G داشته باشد که در $\bar{\mathbb{F}}_p$ نشانده شده است. می‌دانیم که $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ که از $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{1^\infty}/\mathbb{F}_1) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ ناشی می‌شود و بیان می‌کند که همهٔ گروه‌های آبلی متناهی، خارج‌قسمت‌های $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ هستند.

همهٔ چندگوناهای حسابی از چندگوناهای روی $\mathbb{F}_1$ نتیجه نمی‌شوند. چندگوناهای چنبره‌ای[1] و درنتیجه چندگوناهای آبلی، و بسیاری از فضاهای پیمانه‌ای[2] از بالا کشیدن چندگوناهای جبری روی $\mathbb{F}_1$ به دست می‌آیند. بلوخ صورتی از نظریهٔ میدان‌های رده‌ای دارد که برای رویه‌های حسابی، یعنی خم‌های روی $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$، فرمول‌بندی شده است. او از این خاصیت استفاده می‌کند که هر تار یک خم است و بنابراین ژاکوبی[3] دارد. منطقی است که بپرسیم آیا فرمول‌بندی مشابهی برای خم‌های جبری روی میدان تک‌عضوی امکان‌پذیر است یا خیر. ابتدا فرمول‌بندی اصلی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بلوخ را مرور می‌کنیم.

۹ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بلوخ برای رویه‌های حسابی

«نظریهٔ میدان‌های رده‌ای کلاسیک» به گسترش‌های آبلی یک میدان سرتاسری[4] K مرتبط می‌شود. یکی از نتایج مهم، شناسایی گروه گالوای میدان رده‌ای هیلبرت K، که بزرگ‌ترین گسترش بدون انشعاب آبلی K است، با گروه رده‌ای ایدل حلقهٔ اعداد صحیح $\mathcal{O}_K$ می‌باشد. گروه رده‌ای ایدل را می‌توان به‌صورتی‌که در ادامه می‌بینیم، تفسیر کرد: گروه گروتندیک $K_\circ(\mathcal{O}_K)$ مرتبط با رستهٔ همهٔ مدول‌های تصویری روی $\mathcal{O}_K$ در نظر بگیرید. ازآنجاکه $\mathcal{O}_K$ یک حلقهٔ منظم[5] است، $K_\circ(\mathcal{O}_K)$ با گروه گروتندیک مرتبط با رستهٔ همهٔ $\mathcal{O}_K$–مدول‌های متناهی‌مولد نیز یکسان است. خصوصاً، می‌توانیم $\mathbb{F}_\circ K_\circ(\mathcal{O}_K)$ را به عنوان زیرگروه تولیدشده توسط ردهٔ مدول‌هایی با محمل نقطه‌ای[6] تعریف کنیم. اگر مقسوم‌علیه $\sum n_i(p_i)$ که در آن $p_i \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ نقاط بسته هستند را به $\sum n_i[K(p_i)]$ ببریم، که $K(p)$ میدان مانده‌ها در نقطه p است، می‌توان گروه رده‌ای ایدل را با $\mathbb{F}_\circ K_\circ(\mathcal{O}_K)$ یکی دانست و بنابراین می‌توانیم د بنویسیم

$$\mathbb{F}_\circ K_\circ(\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Gal}(H/K).$$

1. toric varieties 2. moduli spaces 3. Jacobian 4. global field 5. regular ring 6. punctual support

با جایگزینی $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ با یک طرح منظم دوبُعدی X که روی $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ سره[1] و تخت[2] است، یعنی جایگزین کردن آن با خانواده‌ای از خم‌ها روی $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$، می‌توانیم $K_\circ(X)$ را در نظر بگیریم که گروه گروتندیک رستهٔ کلاف‌های برداری[3] روی X است که به‌صورت موضعی طرح‌های آزاد از مرتبهٔ متناهی هستند. باز هم $K_\circ(X)$ را می‌توان با گروه گروتندیک مدول‌های منسجم[4] $\mathcal{O}_X$ یکی گرفت. بنابراین منطقی است که در مورد زیرگروه $\mathbb{F}_\circ K_\circ(X)$ از طرح‌ها با محمل روی نقاط بسته صحبت کنیم.

فرض کنید X یک خم تصویری هموار[5] روی یک میدان K باشد. گروه $K_1(X)$ را که با

$$K_1(X) = \pi_2(\mathrm{BQ}(\mathrm{Coh}(X)))$$

تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم که در آن $\mathrm{BQ}(\mathrm{Coh}(X))$ نشان‌دهنده‌ی فضای رده‌بندی‌کننده[6] رستهٔ کوئیلن[7] مربوط به رستهٔ بافه‌های همگن روی X است. Kـگروه کوئیلن، برای نگاشت‌های سره، تابعگون‌های هموردا[8] هستند، بنابراین برای نگاشت ساختاری

$$\pi : X \to \mathrm{Spec}(K)$$

و نقطهٔ بستهٔ $i : x \to X$ داریم

$$\pi_* : K_*(X) \to K_*(K),\ i_* : K_*(K(x)) \to K_*(X).$$

همچنین، دنبالهٔ موضعی‌سازی بلند دقیق زیر وجود دارد

$$\cdots \to K_i(x) \to K_i(K(X)) \to \coprod_{x\in X^1} K_{i-1}(K(x)) \to K_{i-1}(X) \to \dots$$

که در آن X^1 مجموعهٔ نقاط با هم‌بُعد[9] یک روی X و $K(X)$ میدان توابع است. دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$K_2(K(X)) \to \coprod_{x\in X^1} K_1(K(x)) \to K_1(X) \to K_1(K(X)) \to \coprod_{x\in X^1} \mathbb{Z}.$$

در اینجا، ما از این واقعیت استفاده کردیم که K_1 یک حلقهٔ نیم‌موضعی[10]، برابر است با گروه یکه‌های[11] آن حلقه، و $K_\circ$ آن برابر با $\mathbb{Z}$ است. طبق تعریف

$$\mathbb{F}_\circ K_1(X) = \mathrm{Ker}(K_1(X) \to K_1(K(X)))$$

1. proper 2. flat 3. vector bundles 4. coherent 5. smooth 6. classifying space 7. Quillen 8. covariant 9. codimension 10. semi-local 11. units

ابزار اساسی در نظریهٔ کلاسیک، گروه رده‌ای ایدل

$$C(K) = \prod_v K_۱(K_v)/K_۱(K)$$

است که در آن v تمام مقادیر ممکن را می‌گیرد و $\prod$ نماد ضرب محدود[1] است. یک تناظر یک‌به‌یک بین زیرگروه‌های با اندیس[2] متناهی در $C(K)$ و گسترش‌های آبلی (احتمالاً منشعب) K وجود دارد. برای نگاشت هموار و سره $\pi : X \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ که یک برش[3] می‌پذیرد، یعنی $X(K) \neq \emptyset$، یک تناظر یک‌به‌یک بین پوشش‌های آبلی $X' \to X$ که فقط در امتداد تارهای π منشعب می‌شوند و زیرگروه‌های H از اندیس متناهی در گروه

$$C(X) = \prod_v \mathbb{F}_۰K_۱(X_{K_v})/\mathbb{F}_۰K_۱(X_K)$$

وجود دارد و داریم

$$\mathrm{Aut}(X'/X) \cong C(X)/H.$$

۱۰ نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بلوخ روی $\mathbb{F}_۱$

آنچه گفته شد برای میدان تک‌عضوی نیز منطقی به نظر می‌رسد. دوروف خم‌های هموار جبری را که در فضاهای تصویری روی $\mathbb{F}_۱$ نشانده شده‌اند و همچنین رستهٔ بافه‌های همگن را به زبان مونادها تعریف می‌کند. او همچنین نوعی از نظریهٔ K را در فرمول‌بندی خود بسط می‌دهد. هیچ مانعی برای فرمول‌بندی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای بلوخ روی $\mathbb{F}_۱$ وجود ندارد.

همان‌طور که بلوخ اشاره می‌کند، این زبان ممکن است برای ابعاد دلخواه نیز مفید باشد؛ پس چرا روی $\mathbb{F}_۱$ کارامد نباشد. اگرچه روش در نظر گرفتن چندگوناهای ژاکوبی در ابعاد بالاتر روی $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ موجود نیست، بسط این روش روی $\mathbb{F}_۱$ نیاز به تلاش بیشتری دارد. توجه داشته باشید که چندگوناهای ژاکوبی مانند چندگوناهای آبلی از $\mathbb{F}_۱$ به دست می‌آیند.

بلوخ در پایان مقدمهٔ مقالهٔ خود، ایده‌هایی را برای تحقیقات بیشتر بیان می‌کند. یکی از آن‌ها فرمول‌بندی یک نظریهٔ میدان‌های رده‌ای برای خم‌های روی میدان‌های متناهی است که باید سرنخی از نحوهٔ فرمول‌بندی این مسئله روی $\mathbb{F}_۱$ به دست دهد؛ به این دلیل که گروه ایدل روی میدان تک‌عضوی در دسترس نیست (زیرا مفهوم ارزش‌گذاری[4] روی میدان را نداریم). پدیده‌های موضعی–سرتاسری

1. restricted product 2. index 3. section 4. valuation

در این حوزه حضور ندارند. برای درک بهتر پدیده‌های موضعی-سرتاسری در این نظریه، به مقالهٔ دوروف [۹] ارجاع می‌دهیم که در آن نظریهٔ آراکلوف را در چارچوب موناد‌ها صورت‌بندی کرده است.

مراجع

[۱] درفشه، محمدرضا، اثباتی برای قانون مربعی گاوس، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۱** (۱۴۰۱)، شماره ۲، ۶۳-۷۲.

[۲] رستگار، آرش، پیشینهٔ تاریخی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۲** (۱۴۰۲)، شماره ۲، ۳۱۳-۳۴۲.

[3] Bloch, S., Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math. (2)*, **114** (1981), no. 2, 229-263.

[4] Borger, J., The basic geometry of Witt vectors, I: The affine case, math. AG/ 0801.1691.

[5] Borger, J., Λ-rings and the field with one element, 2009 (preprint).

[6] Borger, J., de Smit, B., Galois theory and integral models of Λ-rings, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **40** (2008), 439-446.

[7] Deitmar, A., Schemes over $\mathbb{F}_1$, in *Number Fields and Function Fields—Two Parallel Worlds*, van der G. Geer, B. Moonen, R. Schoof, eds., Progress in Mathematics, vol 239, Birkhäuser Boston,

[8] Deitmar, A., $\mathbb{F}_1$-schemes and toric varieties, *Contrib. Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 2, 517-525 .

[9] Durov, N., New Approach to Arakelov Geometry, e-print math/0704.2030.

[10] Garbanati, D., Class field theory summarized, *Rocky Mountain J. Math.*, **11** (1981), 195-225.

[11] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, New York, 1971.

[12] Manin, Yu. I., Cyclotomy and analytic geometry over $\mathbb{F}_1$ (2008), available at arXiv:

[13] Soulé, C., Les variétés sur le corps à un élément, *Mosc. Math. J.*, **4** (2004), 217-244.

[14] Tits, J., Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes, Colloque d'algèbre supérieure, Centre Belge de Recherches Mathématiques Établissement Ceuterick, Louvain, 1957, 261-289.

[15] Toën, B., Vaquié, M., Au-dessous de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, *J. K-Theory*, **3** (), 437-500.

[16] Wyman, B. F., What is a reciprocity law?, *Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 571-586.

حسین بهزادی‌پور: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `hussein.behzadipour@gmail.com`

جلال پیردایه: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `jp139188@gmail.com`

آرش رستگار: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `rastegar@sharif.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 2, Autumn/Winter 2025, Pages 219–234
doi: 10.30504/mct.2023.1415.1994

Class Field Theory Over a Field with One Element

H. Behzadipour[1], J. Pirdayeh[2], A. Rastegar[3]✉

[1,2,3] Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. Class field theory provides a framework to describe all finite abelian extensions of a number field in terms of the arithmetic properties of the field itself. This paper investigates this theory, with a particular focus on the problem of cyclotomy over the field with one element. Furthermore, generalizations of this theory, including the concept of arithmetic surfaces introduced by Bloch, are examined. The main objective of this paper is to present a coherent formulation of the aspects related to Artin's picture of how the Kronecker-Weber theorem is generalized in this abstract setting.

Keywords: class field theory, finite Abelian extension, algebraic geometry
Article history: Received 11 August 2023; Accepted 21 November 2023
Article type: survey

1. hussein.behzadipour@gmail.com
2. jp139188@gmail.com
3. rastegar@sharif.ir