فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۴)، صص ۲۶۳ تا ۲۸۸

راهبردهای یادگیری فعال برای تدریس و یادگیری مؤثر ریاضیات*

ای. واله، اِی. باربوزا

ترجمهٔ امیر باقری✉، مهدیه میرزایی

چکیده. یادگیری فرایندی فعالانه است که سه بُعد بارز دارد شناختی، اجتماعی، و جسمی، و، علاوه بر این، یادگیری در همهٔ دانش‌آموزان به یک شکل اتفاق نمی‌افتد. بر این اساس، در این مقاله نتایج مطالعه‌ای را گزارش می‌کنیم که هدف آن درک و توصیف عملکرد معلمانی است که پیش از شروع خدمت رسمی، راهبردهای یادگیری فعال را ضمن کلاس‌های ریاضی خود تجربه کرده‌اند. شرکت‌کنندگان ۴۸ نفر از معلمان (آیندهٔ) دورهٔ ابتدایی بودند که سه روش تا کردن کاغذ، گردش در نمایشگاه، و ریاضیاتِ مسیر را به عنوان راهبردهای یادگیری فعال تجربه کردند. نتایج مطالعه نشان می‌دهد که این افراد به این تجربیات اهمیت می‌دادند، زیرا این روش‌ها قابلیت پرورش مفاهیم و مهارت‌های گوناگون ریاضی را دارند و شرکت‌کنندگان از طریق آن‌ها، قابلیت‌های شناختی، اجتماعی، و جسمی خود را بروز می‌دادند. یادگیری فعال از طریق کار جمعی و مفاهمهٔ ریاضی، امکان ظهور راهبردهای مختلف برای حل تکالیف داده‌شده را فراهم می‌آورد. شرکت‌کنندگان می‌توانستند نظرات، اشتباهات، و مشکلات خود و دیگران را در محیطی امن مطرح کرده و از آن‌ها آگاه شوند؛ محیطی که در آن بر تحرک و فعالیت فیزیکی ــ که معمولاً در کلاس‌های درس ریاضی کمرنگ است ــ تأکید می‌شد. اگرچه تحقیقات بیشتری برای تأیید این یافته‌ها لازم است، بااین‌حال نتایج این پژوهش، اهمیت استفاده از راهبردهای یادگیری فعال را به عنوان رویکردی قابل‌توجه در تدریس و یادگیری ریاضیات نشان می‌دهد.

۱ مقدمه

یادگیری ریاضیات عمدتاً توسط معلم، تکالیف تعیین‌شده، و همچنین راهبردهایی که برای ارائهٔ این تکالیف به کار می‌روند، شکل می‌گیرد. بنابراین معلم باید با انتخاب آگاهانهٔ راهبردها و تکالیف،

عبارات و کلمات کلیدی: راهبردهای یادگیری فعال، حل مسئله، تکالیف چالش‌برانگیز، اشتغال‌ورزی جسمی

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱/۲۰

* Vale, I., Barbosa, A., Active learning strategies for an effective mathematics teaching and learning, *Eur. J. Sci. Math. Ed.*, **11** (2023), no. 3, 573-588.

© ۱۴۰۴(انجمن ریاضی ایران)

doi: 10.30504/mct.2025.1513.2057

فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم آورد تا به چالش کشیده شوند و به تفکر بپردازند و بدین‌گونه به پیشرفت و بهبود درک ریاضی آنان کمک کند. این امر مستلزم کار در داخل و خارج از کلاس، در محیطی مبتنی بر یادگیری فعال است [۳۳، ۴۰]. این رویکرد، ابعاد مختلف تفکر دانش‌آموزان را در بر می‌گیرد، ازجمله سرگرم کردن آن‌ها به حل مسائل چالش‌برانگیز (ترجیحاً با راه‌حل‌های متعدد) و ارائهٔ فعالیت‌های عملی برجسته که موجب تشویق آن‌ها به یادگیری ریاضیات و کار گروهی می‌شود. این مقاله به ارائهٔ مطالعه‌ای می‌پردازد که روی معلمان دورهٔ ابتدایی، قبل از شروع خدمت رسمی آن‌ها، انجام شده و هدف آن درک و توصیف عملکرد آن‌ها هنگام تجربهٔ راهبردهای یادگیری فعال در تدریس و یادگیری ریاضیات است. بر این اساس، دو پرسش اصلی این تحقیق به شرح زیر مطرح شد:

پرسش ۱. کدام یک از سه بُعد یادگیری فعال (شناختی، اجتماعی، و جسمی) در عملکرد شرکت‌کنندگان دیده می‌شود؟

پرسش ۲. عکس‌العمل شرکت‌کنندگان به راهبردهای به‌کارگرفته‌شده چیست؟

۲ چهارچوب نظری

یادگیری فعال

مدت‌هاست که سازمان‌هایی مانند شورای ملی معلمان ریاضی [۳۰] بر استفاده از راهبردهای آموزشی‌ای تأکید می‌کنند که نیازمند اشتغال‌ورزی شناختی[۱] دانش‌آموزان در فرایند کسب معلومات جدید هستند و به‌ویژه موضوع اهمیت حل مسئله در ریاضیات در آن‌ها بارز است. با این حال، علاوه بر راهبردها با مبنای ذهنی، راهبردهایی که متضمن فعالیت‌های اجتماعی و جسمی می‌باشند نیز برای پیشبرد بهتر یادگیری فعال حائز اهمیت هستند. یادگیری فعال معمولاً به عنوان روشی آموزشی تعریف می‌شود که فراگیران را در فرایند یادگیری داخل می‌کند [۳۳] و آنان را ملزم به تفکر دربارهٔ آنچه انجام می‌دهند می‌کند. این اصول در تضاد با آن چیزی است که در یک کلاس سنتی رخ می‌دهد؛ که در آن معلم برای معرفی مفهوم یا فرایندی مرتبط با یک مفهوم از تکالیف استفاده می‌کند و سپس دانش‌آموزان با انجام تکالیف مشابه به تمرین می‌پردازند و به‌طور منفعلانه اطلاعات ارائه‌شده توسط معلم را کسب می‌کنند [۴۰]. یادگیری فعال ریشه در نظریهٔ یادگیری ساخت‌گرایی اجتماعی دارد [۴۵] و در کلاس درس به صورت فعالیت‌هایی در می‌آید که باعث می‌شود دانش‌آموزان، به‌واسطهٔ

۱. cognitive engagement؛ شاید «اهتمام شناختی» هم معادل مناسبی باشد. ــ و.

شکل ۱. ابعاد یادگیری فعال ([۴۱]، برگرفته از [۱۲])

حل مسئله، در گروه‌های کوچک، که مستلزم آزمایش کردن و فعالیت‌های دیگر است، به صحبت کردن، گوش دادن، خواندن، نوشتن، بحث کردن، تأمل، حدس و گمانه‌زنی، و استدلال دربارهٔ مطالب مشغول شوند. این‌ها موقعیت‌هایی هستند که دانش‌آموزان را ملزم به به‌کارگیری آموخته‌های خود و استفاده از توانایی‌های عالی تفکر می‌کنند [۶، ۲۶، ۳۷].

همگان قبول دارند که ماندگارترین یادگیری‌ها حاصل تعامل مستقیم میان جنبه‌های ذهنی، اجتماعی، و جسمی است [۱۲، ۱۳، ۳۱]. این موضوع دلیل تأکید ما بر اهمیت این سه مؤلفه در زمینهٔ یادگیری فعال است (شکل ۱). راهبردهای یادگیری فعالی که به‌طور هم‌زمان اشتغال‌ورزی ذهنی، اجتماعی، و جسمی را در خود تلفیق می‌کنند، به احتمال زیاد تجربهٔ خوشایندتری را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورند ضمن آنکه بر محتوای لازمی که دانش‌آموزان باید بیاموزند تمرکز دارند [۱۲]. از این منظر، اتخاذ رویکرد یادگیری فعال منجر به افزایش عملکرد و علاقهٔ دانش‌آموزان به رشته‌های علوم، فنّاوری، مهندسی، و ریاضی[1] می‌شود [۲۴، ۳۳، ۴۰] و انتظارات و انگیزهٔ آنان را برای یادگیری ریاضیات افزایش می‌دهد. برای درک بهتر اصول زیربنایی ابعاد ذهنی، اجتماعی، و جسمی، هریک را جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

بخشی از نقش معلم این است که با ایجاد انگیزهٔ درونی برای برقراری ارتباط، ایجاد درک مفهومی، و به‌کارگیری تفکر انتقادی اطمینان حاصل کند که دانش‌آموزان از نظر ذهنی جذب مطالب مورد نظر شده‌اند. این امر به آنان کمک می‌کند تا از مرحلهٔ حفظ‌کردن صرف فراتر رفته و به درکی

1. science, technology, engineering, and mathematics (STEM)

عمیق‌تر دست یابند [۱۲]. به‌خصوص در ریاضیات، این مهم از طریق تکالیف نیازمند حل مسئله محقق می‌شود که قدرت استدلال و برقراری ارتباط را تقویت می‌کند. معلم از این طریق می‌تواند دانش‌آموزان را به چالش بکشد و به آن‌ها در تفهیم روابط و دستیابی به درکی عمیق‌تر یاری رساند [۱۲، ۳۳، ۴۰]. فراتر از این اصول، باید این نکته را نیز مد نظر داشت که افراد مختلف معمولاً ترجیحات متفاوتی در نحوهٔ تفکر و بیان دارند. به همین دلیل، اثر گاردنر [۱۷] در مورد هوش‌های چندگانه در زمینهٔ آموزش از اهمیت بالایی برخوردار است. به‌ویژه در شیوه‌های سنتی‌تر تدریس، این امر رایج است که دانش‌آموزان بدون توجه به نیازها و خصوصیت فردیشان، با محتوای مشابه و به یک شیوهٔ یکسان مواجه می‌شوند. برای داشتن دانش‌آموزانی که از نظر ذهنی مُشتَغل[1] باشند و مطالب را عمیق‌تر درک کنند، معلمان باید به سبک‌های مختلف یادگیری، فراتر از روش‌های منطقی–کلامی، مجهز باشند [۵]. به گفتهٔ کروتسکی [۲۲] در موضوعات استدلالی سه سبک یادگیری وجود دارد که هنگام حل مسئله در دانش‌آموزان بروز می‌کند:

۱. **تحلیلی:** کسانی که استفاده از روش‌های حل غیرتصویری را ترجیح می‌دهند و روش‌های منطقی–کلامی شامل نمایش‌های جبری، عددی، و کلامی را برمی‌گزینند.
۲. **تصویری (یا هندسی):** کسانی که استفاده از روش‌های حل تصویری را ترجیح می‌دهند و طرح‌های تصویری شامل نمایش‌های گرافیکی (شکل‌ها، نمودارها، و تصاویر) را انتخاب می‌کنند.
۳. **توازنی (یا تلفیقی):** کسانی که ترجیح خاصی بر روش‌های منطقی–کلامی یا تصویری ندارند و هر دو را با هم ترکیب می‌کنند.

این امر استفاده از تکالیفی در حل مسئله را ایجاب می‌کند که روش‌های مختلف تفکر مورد استفادهٔ دانش‌آموزان را در بر بگیرد، همان روش‌هایی که بر دانسته‌هایی که شاگردان با خود به کلاس می‌آورند بنا می‌شود [۳۱، ۳۷]. از این منظر، تکالیف با چند راه‌حل با این رویکرد سازگار هستند و انعطاف‌پذیری و خلاقیت دانش‌آموزان را بر می‌انگیزند [۲۳، ۳۸]. این نوع مسائل به دانش‌آموزان این امکان را می‌دهد که راهبردهای چندگانه در حل‌مسئله با ماهیت تحلیلی، تصویری، یا ترکیبی را پی بگیرند، و بدین ترتیب شانس موفقیت آن‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند. آشنایی با راه‌حل‌ها/ رویکردهای مختلف باعث افزایش خزانهٔ راهبردهای دانش‌آموزان می‌شود و سبب آگاهی بیشتر آن‌ها از صورت‌های دیگر تفکر می‌شود و آن‌هار را قادر می‌کند که بهترین مسیر برای حل مسئله را نقادانه‌تر

1. engaged

انتخاب کنند.

موفقیت دانش‌آموزان در ریاضیات تنها به اشتغال‌ورزی ذهنی آن‌ها وابسته نیست. نباید نقش گفت‌وگو و به‌طور کلی مفاهمهٔ ریاضی[1] را در سازماندهی تعاملات و بحث‌هایی که در کلاس درس میان معلم و دانش‌آموزان و خود آنان رخ می‌دهد، نادیده گرفت. در یادگیری فعال، یکی از شیوه‌های خوب و مؤثر در کلاس درس ریاضی، اشتغال‌ورزی اجتماعی و تشویق دانش‌آموزان به همکاری، چه در قالب فعالیت‌های گروه‌های کوچک و چه بحث‌های عمومی در سطح کل کلاس، است [۳۰، ۳۱]. این نوع همکاری، تبادل و رشد مفاهیم و معانی ریاضی را تسهیل می‌کند؛ با این حال، معلم مسئول ایجاد زمینهٔ مساعدی است که باعث شود دانش‌آموزان برای بیان نظرات خود احساس امنیت و اطمینان کرده و پذیرای مخاطرات باشند و تشویق شوند تا افکار خود را با هم‌کلاسی‌ها و معلم خود در میان بگذارند.

در جهت تقویت این مشی، همچنین می‌توان گفت که فرد در تعامل با همسالان داناتر از خود یا معلم خود یادگیری مؤثرتری دارد [۴۵]. آشنایی با فعالیت دیگران (برای مثال، راهبردها، استدلال‌ها، و نظرات آن‌ها) فرصت‌هایی برای تأمل بیشتر ایجاد می‌کند که چندان در رویکردهای سنتی آموزش اتفاق نمی‌افتد. این نوع فعالیت، یادگیری دانش‌آموزان را بهینه کرده و در نهایت به بهبود آن منجر می‌شود.

به گفتهٔ هانافورد [۱۸] تفکر و یادگیری تنها در ذهن اتفاق نمی‌افتد، بلکه برعکس، جسم ما نقش تعیین‌کننده‌ای در کل فرایند ذهنی/شناختی، از ابتدای حیات ما، ایفا می‌کند. هوش که عموماً به عنوان توانایی صرفاً تحلیلی پنداشته شده و با معیار ضریب هوشی سنجیده و ارزیابی می‌شود، بیش از آنچه معمولاً تصور می‌کنیم به جسم ما وابسته است. صرف‌نظر از نوع فعالیت، دانش‌آموزانی که خصوصاً در کلاس درس تحرک دارند، یادگیری مؤثرتری دارند نسبت به کسانی که در کلاس‌های ساکتِ متداول هستند. از سوی دیگر، ایجاد فرصت برای تحرک دانش‌آموزان در طول درس، به آن‌ها امکان می‌دهد تا بیشتر جذب موضوع شوند و سطح توجه و در نتیجه درک آن‌ها را بهبود می‌بخشد [۱۲]. چندین مطالعه، وجود همبستگی مثبت بین تحرک و یادگیری را نشان داده‌اند [۲۰، ۳۴]. در این زمینه، حوزهٔ علوم اعصاب سهم اساسی در درک رابطهٔ بین مغز و بدن داشته است و به‌طور کلی می‌توان چنین گفت که جسم، امتداد بیرونی مغز است. از طریق جسم است که هر فرد دنیای اطراف خود را تجربه می‌کند و وظیفهٔ مغز است که به این تجربیات معنا دهد. در حین حرکت، خون

1. mathematical communication

و اکسیژن بیشتری به مغز فرستاده می‌شود و ازآنجاکه ما از مغز خود برای یادگیری استفاده می‌کنیم، با این افزایش اکسیژن و جریان خون، فعالیت مغز افزایش می‌یابد که می‌تواند یادگیری را بهبود بخشد. در این حالت، بیشتر احتمال دارد دانش‌آموزان به کشف ایده‌های جدید و همچنین ایجاد ارتباط بین دانسته‌های خود بپردازند [۲۰].

دربارهٔ گنجاندن تحرک در محیط‌های آموزشی باید بازنگری کرد و به فراتر از زمان استراحت یا کلاس تربیت بدنی رفت و باید در خود کلاس درس و در هر برنامهٔ درسی گنجانده شود [۴۶]. با توجه به اینکه حرکت یک محرک بیرونی است، وقتی دانش‌آموزان جلب مبحث خاصی می‌شوند، ما شاخصی خواهیم داشت که نشان می‌دهد حواسشان به چیزی است که قرار است یاد بگیرند. اگر معلم یک رویکرد سنتی را انتخاب کند، که در آن دانش‌آموزان نقشی منفعل دارند، در این صورت احتمال دارد که فرایند مستمر یادگیری نادیده گرفته شود، زیرا ذهن تمایل به سرگردانی و انحراف دارد. در مواردی که توجه صرفاً ذهنی است، انجام کار به‌خصوص برای مدت طولانی دشوار می‌شود، زیرا سیستم عصبی و عضلانی غیرفعال هستند [۳۶]. از سوی دیگر، با گنجاندن تکالیفی که مستلزم حرکت هستند، دانش‌آموزان اساساً مجبور می‌شوند در فرایند یادگیری وارد شوند، مگر اینکه تصمیم بگیرند این کار را نکنند، که موضوع نیازمند توجه است [۳۶]. گاردنر در [۱۷] نیز از کار و فعالیت در کلاس طرفداری می‌کند، زیرا از نظر او «مغز زمانی بهتر یاد می‌گیرد و بیشتر حفظ می‌کند که ارگانیسم به‌طور فعال سرگرم کاوش مکان‌های فیزیکی و اشیا باشد و سؤالاتی بپرسد که واقعاً مشتاق یافتن پاسخ آن‌هاست». استفاده از راهبردهای آموزشی و یادگیری مبتنی بر تحرک که شامل کارهای عملی یا راه رفتن در فضای اطراف (داخل/خارج از کلاس) می‌باشد، در بهبود سطح توجه و اشتغال‌ورزی دانش‌آموزان، به‌ویژه دانش‌آموزان کم‌سن‌وسال، مؤثرتر از حالتی خواهد بود که در آن دانش‌آموزان مجبورند فقط بنشینند و به توضیحات معلم گوش دهند. بنابراین تحرک در محیط‌های آموزشی می‌تواند از منظر یادگیری فعال، اشکال مختلفی به خود بگیرد، اما به‌طور کلی از دانش‌آموزان انتظار داریم که نظر بدهند، آن را اصلاح کنند، ترکیب نمایند، و با دنیای فیزیکی، اشیا، و همتایان خود تعامل داشته باشند [۳۱].

بسیاری از سازمان‌های آموزشی (مرکز برنامه‌ریزی درسی [۸]؛ وزارت آموزش و پرورش اُنتاریو [۳۲]؛ مجمع جهانی اقتصاد [۴۲]) بر این باورند که یادگیری مستلزم تلاشی مؤثر و همراه با تأمل است، و نه‌تنها بر کسب دانش تمرکز دارد بلکه به پرورش مهارت‌های بین‌رشته‌ای در راستای

مهارت‌های فرابخشی[1] مسائل قرن بیست‌ویکم نیز توجه دارد. در این چشم‌انداز، دانش‌آموزان باید بر چهار مهارتی مسلط شوند که به‌طور کلی برای مقابله با چالش‌های پیشرفتِ سریع و پویای جهانی نقش بنیادین دارند. این چهار مهارت عبارت‌اند از: **تفکر انتقادی**: شامل حل مسئله ، تصمیم‌گیری یا قضاوت آگاهانه، به منظور دست‌یابی به بهترین راه‌حل؛ **ارتباط**: فهم و در میان گذاشتن نظرات، افکار، و راه‌حل‌ها با دیگران؛ **همکاری**: فراهم کردن فرصت‌هایی برای همکاری با یکدیگر برای تصمیم‌گیری در راستای یک هدف مشترک؛ **خلاقیت**: فراهم کردن فرصت‌هایی برای رویکردهای جدید و کارآمد. یادگیری فعال نیازمند استفاده از این چهار مهارت در تمام ابعاد اصلی آن است. تغییر رویه از یک رویکرد سنتی به رویکردی که در آن دانش‌آموزان نقش فعالی را در فرایند یادگیری بر عهده می‌گیرند مستلزم مجموعه‌ای از اقدامات است: حل مسائل چالش‌برانگیز، تفکر در مورد راهبردهای ممکن برای رسیدن به یک راه‌حل؛ تعاملات اجتماعی و در میان گذاشتن نظرات و افکار خود با دیگران، و به وجود آوردن اَشکال متفاوتِ برقراری ارتباط؛ همکاری با همسالان خود؛ برقراری پیوندهایی بین نظرات مختلف به روشی انعطاف‌پذیر. محیط‌های یادگیری فعال مبتنی بر تجربیات و تعاملات فراگیران هستند و اشتغال‌ورزی شناختی، اجتماعی، و جسمی یادگیری را به هم پیوند می‌دهند [۳۱، ۳۳] و به‌ویژه برای به کار گرفتن آن چهار مهارت، از طریق ایجاد گفت‌وگوهای سازنده، مناسب هستند؛ مانند ایجاد فرصت‌هایی برای حل مسائل، مفاهمه و استدلال کردن، خلاق بودن، به کار گرفتن تفکر انتقادی، تصمیم‌گیری و فهمیدن نکات مبهم و پیچیده [۴۰].

راهبردهای یادگیری فعال در کلاس‌های درس ریاضی

در بخش قبل، دربارهٔ نکات کلی معنای یادگیری فعال و تناسب اجرای این رویکرد در محیط‌های آموزشی فعلی بحث کردیم. واضح است که یادگیری فعال مشتمل‌بر انواع شیوه‌های آموزشی دانش‌آموزمحور است، اما در حال حاضر چه اهمیتی برای آموزش ریاضی دارد؟ آنچه در آموزش ریاضیات مهم است این است که معلم از راهبردهای مختلفی استفاده کند تا دانش‌آموزان بتوانند زیبایی و سودمندی این رشته را درک کنند، و همزمان باعث رشد توانایی‌های سطح بالای ذهنی شوند. دانش‌آموزان باید با تکالیف چالش‌برانگیزی روبه‌رو شوند [۲۳، ۳۸، ۴۲] که باعث ایجاد نگرش مثبت نسبت به ریاضیات در آن‌ها شود [۱۹]. همچنین روشن است که نحوهٔ انجام تکالیف نیز می‌تواند بر عکس‌العمل دانش‌آموزان تأثیرگذار باشد. یک تدریس ریاضی مؤثر باید شامل راهبردهای یادگیری فعال باشد که هدف آن ورود دانش‌آموزان از لحاظ شناختی، اجتماعی، و جسمی در حل

1. transversal

تکالیفی است که آن‌ها را به فکر کردن، تصمیم‌گیری، حل مسائل، و انتقادپذیری سوق می‌دهد. در چهارچوب یادگیری فعال، فعالیت‌ها از طرف یادگیرنده آغاز می‌شود؛ اساس آن‌ها بر کنجکاوی طبیعی دانش‌آموزان و مسائل مربوط به زندگی واقعی یا مسائل مهم است، که یادگیری ریاضی را موجب می‌شوند، و تکالیف و مفاهیم ریاضی را بار اجتماعی و فرهنگی می‌دهد [۲۸].

بسته به راهبردهای مورد استفاده، دانش‌آموزان می‌توانند همزمان با فعالیت اجتماعی و یا جسمی مشغول فعالیت ذهنی نیز باشند. این امکان وجود دارد که یک فعالیت آموزشی در یک بُعد خاص قرارگیرد [۱۲]، با این حال، ما در این مطالعه راهبردهایی را ترجیح داده‌ایم که شامل و واسط سه بُعد ذکر شده در شکل ۱ هستند. تمرکز ما در این نوشته بر اجرای راهبردهای مختلف یادگیری فعال در زمینهٔ آموزش ریاضیات با استفاده از فعالیت‌های عملی یا تحرک در محیط (داخل کلاس، در یک فضای بسته، یا فضای خارج) است، که عبارت‌اند از تا کردن کاغذ، گردش در نمایشگاه، و ریاضیاتِ مسیر.

مبنای اصلی راهبردهای مبتنی بر فعالیتِ عملی یادگیری از طریق انجام کار یا دست‌ورزی است. یکی از روش‌های رایج در یادگیری عملی در ریاضیاتْ استفاده از دست‌سازه‌ها است. در این شیوه مفاهیم را عینیت می‌بخشند و در نتیجه دانش‌آموزان مفاهیم ریاضی را راحت‌تر درک می‌کنند [۹، ۲۹]. معلم می‌تواند از منابع مختلف برای این منظور استفاده کند، به شرطی که آن منابع ملموس باشند و کار عملی و دستی باعث تفکر و بحث شود و همچنین برداشت ذهنی را ارتقا دهد. دانش‌آموزان می‌توانند سازه‌های موجود یا اشیای مورد استفادهٔ روزمره را به کار بگیرند یا به حل تکالیفی بپردازند که مستلزم ساخت یک مدل است، و در حیطهٔ فعالیت‌های دست‌ساز قرار می‌گیرد. در این مقاله، ما بیشتر بر تکالیف مرتبط با تا کردن کاغذ توجه کرده‌ایم، که ابزار آموزشی مفیدی است و قابلیت به کارگیری مهارت‌های مختلفی (مانند برقراری ارتباط، حل مسئله، خلاقیت، و اثبات کردن) را دارد و بر درک هندسی و به‌ویژه جهت‌یابی فضایی [۳، ۴] و همچنین مفاهیم عددی (مثل کسرها) تأثیر ویژه دارد. تا کردن کاغذ به دانش‌آموز اجازه می‌دهد تا آن را به اشکال مختلف، دو یا سه‌بُعدی تبدیل کند و فرصتی برای کشف و ایجاد روابطی با ماهیت‌های گوناگون فراهم می‌آورد. این امر به دانش‌آموزان امکان می‌دهد تا مفاهیم ریاضی انتزاعی را به‌طور ملموس‌تر و از راه دست‌ورزی با یک ورق کاغذ درک کنند، و در نتیجه مفاهیم و اندیشهٔ ریاضی خود را بهبود بخشند [۱۱]. به این ترتیب، تا کردن کاغذ می‌تواند یک راهبرد عملی، پویا، خلاق، و چالش‌برانگیز برای آشنایی با چندین مفهوم ریاضی باشد، که تجسم و حل مسئله را تسهیل می‌کند [۴۴]. بدون شک این فعالیت یک راهبرد یادگیری فعال است، زیرا دانش‌آموزان را از نظر ذهنی، به جهت چالش‌های فکری که ایجاد

می‌کند، و نیز از نظر جسمی مشغول می‌کند، چراکه به توانایی‌های شنیداری و محرک‌های بصری نیاز دارد، و هم از طریق این اعمال است که مهارت‌های درک فضایی را نیز در بر می‌گیرد و درنتیجه به شکل‌گیری مفاهیم و افکار کمک می‌کند [۳، ۴۴].

راهبرد «گردش در نمایشگاه» یک راهبرد تدریس و یادگیری است که از [۱۵] اقتباس شده است. این راهبرد با اصول زیربنایی یادگیری فعال سازگار است، با همان چشم‌اندازی که هنرمندان موقع نمایش آثار خود در یک گالری دارند [۱۶، ۳۹، ۴۰]. «گردش در نمایشگاه» دارای یک سری مراحل است که می‌توان آن‌ها را به شش مرحله تقسیم کرد [۳۹]:

۱. **حل مسئله:** دانش‌آموزان به صورت گروهی تکلیف داده‌شده را حل می‌کنند.
۲. **ساخت پوسترها:** دانش‌آموزان در مورد نحوهٔ تهیهٔ یک پوستر از راه‌حل‌های خود بحث می‌کنند.
۳. **ارائه و مشاهدهٔ پوسترها:** پوسترها روی دیوارهای کلاس یا در فضای دیگری نصب می‌شوند.
۴. **تجزیه و تحلیل و نوشتن نظرات:** هر دانش‌آموز به‌صورت انفرادی پوسترهای مختلف را می‌بیند و راه‌حل‌های ارائه‌شده را تجزیه‌وتحلیل می‌کند و پس از ارزیابی آن‌ها، نظرات شخصی خود، ابهامات، سؤالات، خطاهای احتمالی، و غیره را روی برگه‌های چسبان می‌نویسد. وقتی دانش‌آموزان راه‌حل‌های هم‌کلاسی‌های خود را مورد بحث قرار می‌دهند، معلم در کلاس درس می‌چرخد و مشاهدات و بحث‌ها را ارزیابی می‌کند.
۵. **بحث گروهی:** پس از این مرحله، دانش‌آموزان پوستر خود را برداشته و محتوای نظرات نوشته‌شده روی آن را تحلیل کرده و گزارشی کوتاه تهیه می‌کنند.
۶. **بحث جمعی:** با نصب مجدد تمام پوسترها روی دیوار، گروه‌ها به صورت شفاهی راه‌حل‌های خود را ارائه می‌کنند و به اظهارنظرهای هم‌کلاسی‌های خود پاسخ می‌دهند.

این زمان بهترین فرصت برای معلم است تا توجه‌ها را به نکات گفته‌شده جلب کند، بین رویکردهای مختلف ارتباط برقرار کند، نظرات را تلفیق و جمع‌بندی نماید، ابهامات و خطاها را روشن کند و تفکر و تأمل را در شاگردان برانگیزد. آخرین گام نیز فرصتی عالی برای معلم است تا بر اساس کار نمایش‌داده‌شده، اظهارنظرها، و بحث‌های انجام شده به محتوای هر پوستر بازخورد بدهد.

پویایی راهبرد «گردش در نمایشگاه» دانش‌آموزان را از صندلی‌هایشان بلند می‌کند و توجه آن‌ها را جلب کار ریاضی هم‌کلاسی‌هایشان می‌کند؛ این کار به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که مجذوب یادگیری به شیوهٔ حسی–حرکتی هستند، جذاب است [۱۵، ۴۰]. همچنین این فرصت را برای دانش‌آموزان

فراهم می‌کند تا با ایده‌ها و راه‌حل‌های مختلف آشنا شوند و بازخورد کتبی و شفاهی دریافت کنند، و این امر می‌تواند یادگیری آن‌ها را بهبود بخشد.

در [۲۱] تأکید شده است که بسیاری از دانش‌آموزان فرصت درک کامل ریاضیات را نمی‌یابند، زیرا آموزش مناسب و مؤثری نمی‌بینند، و این امر می‌تواند باعث ایجاد یک تصویر منفی از ریاضیات در ذهن دانش‌آموزان شود. بنا به [۲۱]، آموزش در فضای باز ابزاری برای تکمیل کار آموزشی انجام‌شده در داخل کلاس است. در میان تجربیات و راهبردهای ممکن، ما راهبرد «ریاضیاتِ مسیر» را می‌یابیم که یک سری از تکالیف درطول یک مسیر از پیش برنامه‌ریزی‌شده (با شروع و پایان مشخص) هستند و از مجموعه‌ای از ایستگاه‌ها تشکیل شده‌اند که در آن دانش‌آموزان تعدادی تکلیف ریاضی را در محیط روزمرهٔ اطراف ما حل می‌کنند [۱، ۱۰]. در [۳۵] یک سری مراحل برای تدارک یک مسیر گره‌خورده به ریاضیات پیشنهاد شده است:

۱. اولین کارْ انتخاب مکان است. این مکان می‌تواند هر جایی باشد، به شرطی که از لحاظ ریاضی غنی باشد. معلم باید تشکیلات مکان انتخاب‌شده را ببیند و به الگوها، اشکال، اشیایی برای اندازه‌گیری، شمارش، یا نمایش نظر داشته باشد.
۲. از هر مکان/شیء عکس بگیرید تا بعداً در طراحی تکلیف استفاده کنید.
۳. پس از انتخاب عکس‌ها باید نقشه‌ای تهیه و در آن مکان‌های انجام تکالیف مشخص شود تا بتوان جای ایستگاه‌ها و فاصله‌ها را در مسیر ارزیابی کرد.
۴. تکالیف مختلفی را طراحی و دستورالعمل‌های گذر از یک ایستگاه به ایستگاه بعدی را تهیه کنید. این تکالیف باید شامل سطوح مختلف شناختی بوده و محتویات ریاضی متفاوتی را در برگیرند. تکالیف باید با به‌کارگیری دانشی که قبلاً در کلاس کسب شده است حل شوند.
۵. در صورت امکان، جالب خواهد بود که بین ریاضیات و سایر حوزه‌های درسی از طریق تکالیف طراحی شده ارتباط برقرار شود.

در [۳۵] به اهمیت پرسیدن سؤالات خوب نیز اشاره شده است، سؤالاتی که کنجکاوی دانش‌آموزان را برمی‌انگیزد و آن‌ها را تشویق می‌کند تا نگاه دقیق‌تری به محیط اطراف داشته باشند تا به راه‌حلی درست و نتیجه‌بخش دست یابند.

شرکت‌کنندگان در یک «ریاضیاتِ مسیر» مجبور می‌شوند مسائل ریاضی را، در یک موقعیت واقعی، حل کنند، و برای این کار از آموخته‌های قبلی استفاده می‌کنند و مهارت‌هایی مانند حل مسئله، برقراری ارتباط، و ایجاد پیوند بین مفاهیم[1] را از خود بروز می‌دهند. «ریاضیاتِ مسیر»، با

1. establishment of connections

توجه به فضای اکتشافی مستتر در آن‌ها، موقعیت‌های محرک یادگیری هستند، که باعث می‌شوند تکالیف برای شرکت‌کنندگان معنادارتر و چالش‌برانگیزتر شوند، و در چهارچوب یادگیری فعال به بهبود دانش ریاضی شرکت‌کنندگان کمک می‌کنند. این راهبرد کار گروهی را از طریق همکاری در چندین جنبه (یادداشت کردن، اندازه‌گیری کردن، و بحث کردن) تسهیل می‌کند؛ مشتمل است بر تحرک، قدم زدن در یک مکان خاص، و مشاهدهٔ ویژگی‌های خاص اجزای محیط اطراف؛ و دانش‌آموزان را مشغول حل مسئله و تفکر در مورد راهبردهای مناسب برای رسیدن به راه‌حل می‌کند [۴۲، ۴۳].

اخیراً یک برنامهٔ کاربردی به نام MathCityMap به منظور انجام فعالیت «ریاضیاتِ مسیر» روی تلفن‌های همراه درست شده است. هدف این برنامه ترکیب جنبه‌های مختلف آموزش ریاضیات در فضاهای باز و یادگیری از طریق تلفن همراه است. کاربر از طریق یک تلفن هوشمند یا تبلتی که به جی‌پی‌اس مجهز است، به راهنمای مسیر دسترسی پیدا کرده و پاسخ خود را از طریق دستگاه ارائه می‌کند و با دریافت بازخورد از درستی پاسخ خود مطلع می‌شود. مفید بودن این فناوری دیجیتال برای آموزش و یادگیری ریاضیات در فضای باز برای معلمان و دانش‌آموزان، ازجمله از جنبه‌های عاطفی–انگیزشی، اثبات شده است [۴۲، ۷، ۲۵]. استفاده از این برنامه، اصول یادگیری فعال را که اصلاً زیربنای خود «ریاضیاتِ مسیر» است تقویت می‌کند، و سبب افزایش اشتغال‌ورزی دانش‌آموزان به تکلیف داده‌شده می‌شود؛ به همین دلیل در این تحقیق نیز از آن استفاده کرده‌ایم.

با نگاهی به راهبردهای شرح‌داده‌شده، درمی‌یابیم که اگرچه این راهبردها ویژگی‌های متفاوتی دارند و بر یکی دو بُعد از یادگیری فعال تمرکز دارند، در هر صورت مستلزم اشتغال‌ورزی شناختی، اجتماعی، و جسمی دانش‌آموزان هستند، با این هدف که دانش‌آموزان خودشان بتوانند اطلاعات را از منابع مختلف به دست آورند، اطلاعات جدید را قابل استفاده کنند، و ایده‌ها و نتایج جدیدی را با استفاده از معلومات قبلی خلق کنند [۱۲]. ما در حوزهٔ یادگیری فعال و آموزش معلمان تحقیقی پیدا نکردیم که از این رویکرد همزیستانه[1] با ترکیب سه راهبرد انتخاب‌شده استفاده کرده باشد و همین امر ما را به این تحقیق اکتشافی سوق داد.

۳ روش‌شناسی

طرح تحقیق و شرکت‌کنندگان

این مقاله یک تحقیق اکتشافی است که با مشارکت تعدادی از معلمان در دورهٔ آموزشی مقدماتی انجام

1. symbiose

شده است، که خدمت رسمی خود را آغاز نکرده‌اند، و هدف آن توصیف عملکرد آن‌ها در حل بعضی تکالیف ریاضی در زمانی است که طی درس فنون تعلیم[1] در کلاس‌های ریاضی، راهبردهای یادگیری فعال را تجربه می‌کردند. برای استفاده از «تا کردن کاغذ»، «گردش در نمایشگاه»، و «ریاضیاتِ مسیر» راهبردهایی را انتخاب کردیم که شرکت‌کنندگان اطلاعی از آن‌ها نداشتند و همچنین مجموعه‌ای از تکالیف به نحوی طراحی شدند که راهبردهای مورد استفاده با محتوای ریاضی آن درس مطابقت داشته باشند. با توجه به هدف اصلی این مطالعه، رویکردی کیفی و تفسیری را اتخاذ کردیم [۱۴]. هدف اصلی از انتخاب این الگو، درک دیدگاه و عکس‌العمل شرکت‌کنندگان در یک موقعیت خاص بود.

این تحقیق با مشارکت ۴۸ معلم، که هنوز خدمت رسمی خود را آغاز نکرده بودند، انجام شده است. آن‌ها در نیمسال دوم از سومین سال یک دورهٔ آموزش مقدماتی کارشناسی، با طول دورهٔ سه‌ساله یا شش نیمسال، بودند، و این دوره تعداد جلسات یک درس اصلی را تعیین می‌کرد که با گذراندن آن دانشجویان صلاحیت تدریس در دوره‌های پیش‌دبستانی و ابتدایی (۳ تا ۱۲ سال) را کسب می‌کنند. دورهٔ مقدماتی شامل مواد درسی مختلفی است مرتبط با حوزه‌های فنون تعلیم، آموزش عمومی، دانش محتوایی، و کار عملی در زمینه‌های آموزش رسمی و غیررسمی. این گروه از معلمان آینده در یک واحد درسی فنون تعلیم ریاضیات، که این تحقیق در قالب آن انجام شده است، و شامل بخش‌های آموزشی مرتبط با مباحث درسی سنتی (اعداد و اَعمال روی آن‌ها، هندسه، جبر، تجزیه و تحلیل داده‌ها و احتمالات) بود، ثبت‌نام کردند. این مباحث را مورد بررسی قرار دادیم تا اطمینان حاصل کنیم که در آن‌ها نقش تکالیف، راهبردهای آموزشی، و منابعی که نیازهای جاری تدریس و یادگیری ریاضیات را برای سطوح ابتدایی، با تمرکز ویژه بر مناسبات ریاضی و حل مسئله، برآورده می‌کند، دیده شده باشد. به‌ویژه در این واحد درسی به اصول یادگیری فعال اهمیت زیاد داده شده بود که به دانشجویان معلمی این فرصت را می‌داد تا با برخی از راهبردهای آن آشنا شوند و بعضی از راهبردهایی ــ مثل تا کردن کاغذ، گردش در نمایشگاه، و ریاضیاتِ مسیر ــ را بیازمایند که از حالا به بعد می‌توانستند در تمرین خودشان از آن استفاده کنند. همچنین به این نکته نیز توجه داشتیم که تکالیف مدنظر از طریق این راهبردها به پرورش مهارت‌های چهارگانه در معلمان آینده کمک کند [۸، ۳۲، ۴۷]. هر دوی ما مدرسان این واحد درسی بودیم و این امر انجام تحقیق و همچنین برقراری ارتباط با شرکت‌کنندگان، که در هر کلاس در گروه‌های سه یا چهارنفری با هم کار می‌کردند، را میسّر می‌کرد.

1. didactics

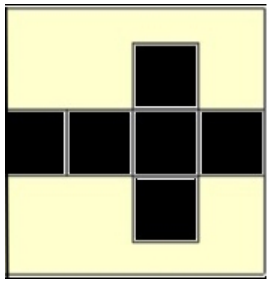
جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها

داده‌ها در طی کلاس‌ها و به شیوهٔ کل‌نگرانه و تفسیری و از طریق مشاهدهٔ توأم با مشارکت (عکس‌العمل هر فرد در هر تجربه) گردآوری شده است، مثل، یادداشت عکس‌العمل‌ها و تعاملات شرکت‌کنندگان در موقعیت‌های مختلف، آثار کتبی (راه‌حل تکالیف داده‌شده به منظور فهم بهتر نحوی استدلال آن‌ها)، گزارش‌های مکتوب (برداشت آن‌ها از تجاربشان)، و عکس‌های گرفته‌شده. ما در جریان این تجارب در کنار دانشجومعلمان بودیم و در طول سه کلاس سه‌ساعته کارهای انجام‌یافته را مشاهده می‌کردیم و هرجا لازم بود، با درنظر گرفتن مسئلهٔ موردبحث، از واکنش‌ها، تعاملات، گفت‌وگوها، بحث‌ها، و تفسیرهای آن‌ها یادداشت‌برداری می‌کردیم. ما علاوه بر یادداشت‌ها و آثار و گزارش‌های کتبی به عکس‌ها نیز توجه ویژه داشتیم، زیرا یک روش بصری مورد استفاده در تحقیق کیفی است [۲] و اطلاعات تکمیلی را فراهم می‌آورد. وجود تصاویر در حین بازنویسی مطالب به ما کمک کرد تا اطلاعات غیرکلامی دخیل در تحلیل توصیفی مانند اعمال غیرکلامی و ایما و اشاره‌های شرکت‌کنندگان و تعاملات آن‌ها با همتایانشان را مد نظر قرار دهیم. عکس‌ها، علاوه بر نقش مکملی که در جمع‌آوری داده‌ها دارند، وسیله‌ای برای نشان‌دادن بصری لحظات خاص به خواننده نیز هستند.

داده‌ها با استفاده از رویکرد استقرایی، متکی به تحلیل محتوا، بر اساس روش مایلز و هیوبرمن [۲۷] تجزیه و تحلیل شدند. پس از چندبار مرور اطلاعاتی که با روش‌های مختلف جمع‌آوری شده بود، به منظور نظام‌مند کردن اطلاعات داده‌ها را برحسب کنش و احساس/واکنش‌های گزارش‌شده توسط شرکت‌کنندگان، سنجیده شده با شواهد مشاهداتی، طبقه‌بندی کردیم. در جریان این کار، مسئله و سؤالات راهنمای تحقیق، ما را به این دسته‌ها، که براساس چهارچوب نظری و داده‌های جمع‌آوری‌شده شکل گرفتند، رساندند: بعد ذهنی/شناختی (عملکرد در انجام تکالیف)، بعد اجتماعی (مفاهمهٔ ریاضی، بحث‌های گروهی)، بعد جسمی (اعمال/حرکات). برای اطمینان از کیفیت تحقیق، کارهای نوشتن، خواندن، بررسی، بازنویسی، و رجوع به داده‌های جمع‌آوری‌شده را چندبار تکرار کردیم. این چندبعدی‌سازی که استفاده از روش‌ها و منابع متعدد داده‌ها به دنبال دارد در کیفیت تحقیق اثر می‌گذارد و درک جامع‌تری از مسئلهٔ تحقیق را ممکن می‌سازد.

۴ بحث و نتایج: تجربیات حاصل از تعلیم معلمان

معلمان شرکت‌کننده در این تحقیق طی این واحد درسی چندین تکلیف مرتبط با مباحث درسی ریاضی را حل کردند. ما در این مقاله سه تکلیف را که در هریک از سه راهبرد یادگیری فعال استفاده شده است ارائه خواهیم کرد.



با استفاده از یک ورق کاغذ مربعی شکل به طول ضلع ۱۰ سانتی‌متر، گستره یک مکعب با حداکثر حجم را رسم کنید. تصویر زیر نمونه‌ای از گستره یک مکعب را نشان می‌دهد. آیا با این گسترده می‌توان مکعبی با بیشترین حجم را ساخت؟

گستره مناسب را یافته و سپس مکعب مطلوب را بسازید.

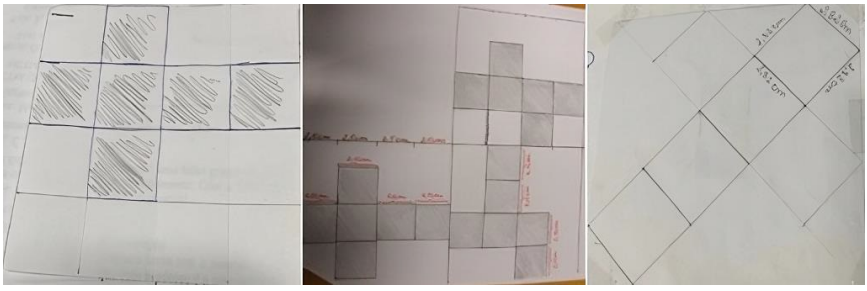
شکل ۲. تا کردن گسترهٔ مکعب [۴۴]

تا کردن کاغذ

مثال ارائه‌شده در شکل ۲ تکلیفی است که به شرکت‌کنندگان داده شد تا آن را در گروه‌های کوچک بین خود حل کنند. این سؤال دو هدف اصلی داشت: یافتن راه‌حل بهینه و استفاده از قابلیت‌های تجسم فضایی برای تبدیل یک شکل دوبعدی به یک شکل سه‌بعدی.

دانشجومعلم‌ها شروع به بحث در مورد نحوهٔ قرار دادن گستره روی کاغذ کردند. متداول‌ترین راه‌حل‌ها به ترتیب راه‌حل‌های ۱، ۲، و ۳ بودند که به ترتیب در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. طراحان راه‌حل ۱ پیشنهاد مطرح‌شده را پذیرفته و وضعیت گستره را به عنوان راه‌حل در نظر گرفتند و تنها با استفاده از اضلاع مربع، آن را روی کاغذ مربعی رسم کردند. آن‌ها کاغذ مربعی را به ۱۶ مربع با طول ضلع ۲٫۵ سانتی‌متر تقسیم کرده و به حجم ۱۵٫۶۲۵ سانتی‌متر مکعب رسیدند. در راه حل ۲، گروه دوم فقط مربع‌های گسترهٔ مکعب را در جهت‌های مختلف قرار داده و به همان حجم راه‌حل ۱ رسیدند. در راه‌حل ۳، شرکت‌کنندگان از قطر مربع استفاده کردند. آن‌ها ابتدا راه‌حل‌های قبلی را امتحان کردند اما دریافتند که اگر گستره را به گونه‌ای قرار دهند که قطر کاغذ مربعی، محور تقارنِ مربع و گستره باشد، می‌توانند شبکه‌ای با طول ضلع بیشتری داشته باشند. هنگامی که آن‌ها طول ضلع یکی از مربع‌های گستره را با آزمون‌وخطا تعیین کردند، مقدارِ نزدیک به ۲٫۸۲ سانتی‌متر و حجم ۲۲٫۴۳ سانتی‌متر مکعب را یافتند. آخرین راه‌حل (راه‌حل ۳) بهترین رویکرد برای یافتن پاسخ صحیح بود.

به‌این‌ترتیب، پس از آزمایش‌های بسیار، محاسبات، و بحث‌های گروهی پاسخ صحیح کشف شد. شرکت‌کنندگان از طریق یک رویکرد تحلیلی متوجه شدند که گستره‌هایشان بیشترین حجم را ندارند. شکل ۴ یکی از کارهای تحلیلی را نشان می‌دهد که در آن شرکت‌کنندگان حجم دو گستره را با هم مقایسه کرده‌اند. اولین راه‌حل (راه‌حل ۱) یک گسترهٔ از قبل معلوم بود (این بار همراه با محاسبات

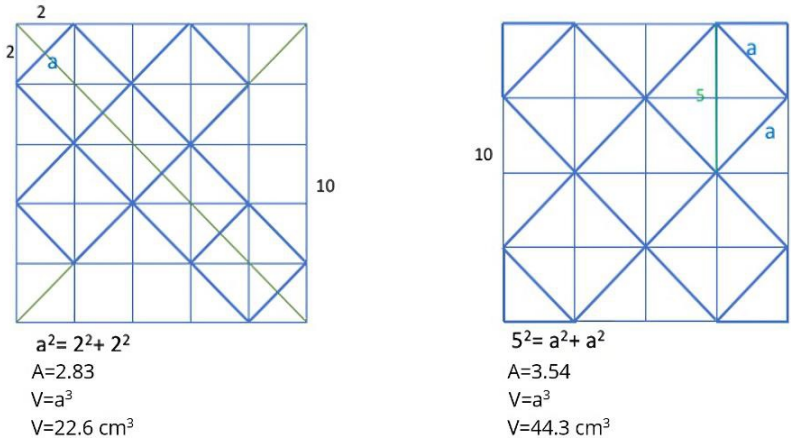


شکل ۳. راه‌حل‌های نادرست دانشجویان

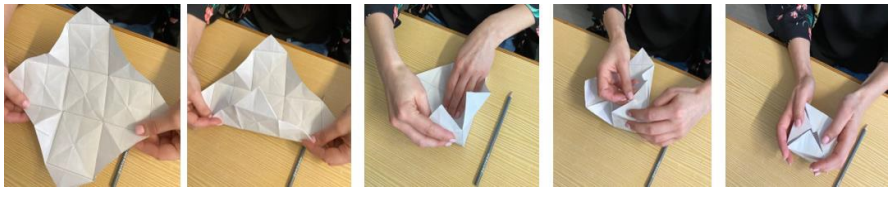
لازم) و راه‌حل دیگر (راه‌حل ۲) یک رویکرد صحیح به حل مسئله را نشان می‌دهد. این تکلیف مستلزم استفاده از استدلال هندسی و فضایی می‌باشد. راه‌های زیادی برای کشیدن گستره روی برگهٔ مربع‌شکل وجود دارد، اما تنها یکی از آن‌ها با شرایط داده‌شده مطابقت دارد. این مسئله برای مقطع ابتدایی تا حدودی پیچیده است، زیرا در دورهٔ ابتدایی عمدتاً از مفاهیم/فرایندهای ریاضی پایه استفاده می‌شود. علی‌رغم ساختن طرح‌های آزمایشی مختلف از گستره‌های رایج ممکن، هیچ‌یک از آن‌ها دانشجویان را به نتیجهٔ مورد انتظار رهنمون نکرد، زیرا آن‌ها با هیچ‌کدام آن‌ها بیشترین حجم را به دست نیاوردند. اکثر این دانشجومعلمان برای حل مسئله تلاش کردند و دم‌دست‌ترین و رایج‌ترین گستره‌ها را، که در آن‌ها یال‌های گستره موازی با اضلاع مربع بودند، امتحان کردند. راه‌حل این مسئله مستلزم آن است که شخص دانش مناسبی از ریاضیات و همچنین شهود بصری از گستره‌های مختلف یک مکعب داشته باشد. علاوه بر این، کشف راه‌حل نیاز به تفکر واگرا، تفکری خارج از چهارچوب متداول، دارد تا بتواند گستره‌ای کاملاً متفاوت از گستره‌های رایج را در نظر آورد.

آخرین بخش مسئله، ساختن مکعب با حداکثر حجم از طریق تاکردن گستره بود. بنابراین، پس از داشتن گسترهٔ صحیح، بزرگ‌ترین چالش این بود که کاغذ مربعی‌شکل را بدون بریدن چنان تا کنند که مکعب موردنظر به دست آید. در این مرحله متوجه شدیم که این معلمان هیچ آشنایی با کارِ تا کردن کاغذ ندارند؛ این موضوع دست‌ورزی با کاغذ را دشوارتر می‌کرد. بنابراین برای کمک به آن‌ها پیشنهاد کردیم که به کاغذ نگاه کنند و نحوهٔ تا کردن آن را تصور کنند و برای رسیدن به مکعب مذکور، تا کردن را از مربع مرکزی شروع کنند. پس از آن، شرکت‌کنندگان با آزمون‌وخطا، کاغذ مربعی را چند تایی زدند تا به نتیجه‌های بهتری برسند (شکل ۵).

تلاش‌های زیادی برای به دست‌آوردن مکعب مطلوب انجام شد، اما هیچ‌یک از شرکت‌کنندگان به‌طور مستقل به راه‌حل مسئله دست نیافتند. واضح است که قدرت تجسم و مهارت‌های تا زدن

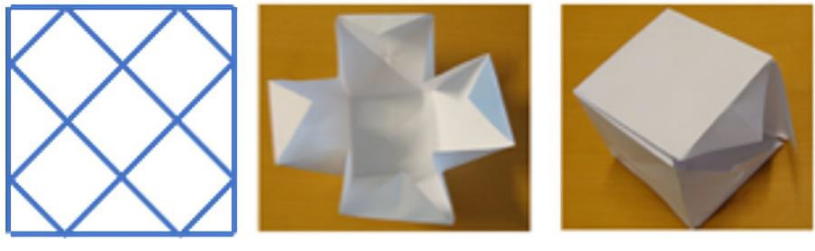


شکل ۴. راه‌حل‌های تحلیلی دانشجویان



شکل ۵. تلاش برای به دست آوردن مکعب مطلوب

کاغذ از توانایی‌های لازم برای حل این سؤال هستند. یک راه‌حل کوتاه برای ساخت چنین مکعبی در شکل ۶ ارائه شده است.



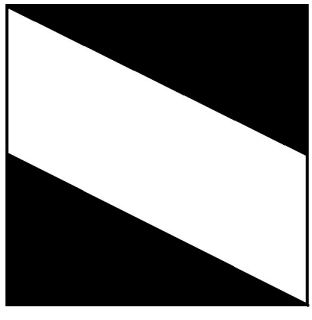
شکل ۶. راه‌حل صحیح و کاغذ تاشدهٔ مکعب

علی‌رغم سطح پیچیدگی این تکلیف، به‌ویژه با توجه به طرح آن در پایه‌های ابتدایی، شرکت‌کنندگان احساس کردند که به چالش کشیده شده‌اند و سرگرم مسئله شدند. اگرچه هیچ‌یک از گروه‌ها به راه‌حل بهینه برای این کار دست نیافت، اما آن‌ها مصمم و خود را ملزم به غلبه بر موانع می‌دیدند، و در

جریان یافتن خود راه‌حل عملکرد خود را بهتر می‌کردند. بحث‌های شکل‌گرفته در این فرایند کمک می‌کرد تا درک بهتری از برخی از وجوه تاریک مسئله حاصل شود و اهمیت استفاده از رویکردهای مختلف، تحلیلی و بصری، برای حل یک مسئلهٔ ریاضی و همچنین مفاهیم متضمن آن معلوم شود. راهبرد تا کردن کاغذ، علاوه بر جنبهٔ شناختی، باعث افزایش اشتغال عاطفی و رفتاری شرکت‌کنندگان می‌شود، که علاقه و پشتکار شرکت‌کنندگان نمود آن است. تحرکات مرتبط با اعمال انجام‌شده روی کاغذ، یا همان دست‌ورزی‌ها، که شامل فعالیت‌های ذهنی نیز می‌شود، به شرکت‌کنندگان کمک کرد تا در مورد روابط موجود فکر کنند و احتمالات مختلف را تا رسیدن به یک راه‌حل آزمایش کنند. این نتایج شباهت بسیاری به نتایج به‌دست‌آمده در یک تحقیق دیگر با افراد دیگر عمدتاً از حیث وجود مشغولیت‌های مختلف و بحث‌های سازنده داشت [۴۴].

گردش در نمایشگاه

موضوع «گردش در نمایشگاه» یک تکلیف با چند راه‌حل است (شکل ۷)، و در آن از دانشجومعلمان خواسته شد تا یک مسئله را به دو روش مختلف، و طی شش مرحله‌ای که قبلاً برای آن‌ها توضیح داده شده بود، حل کنند.



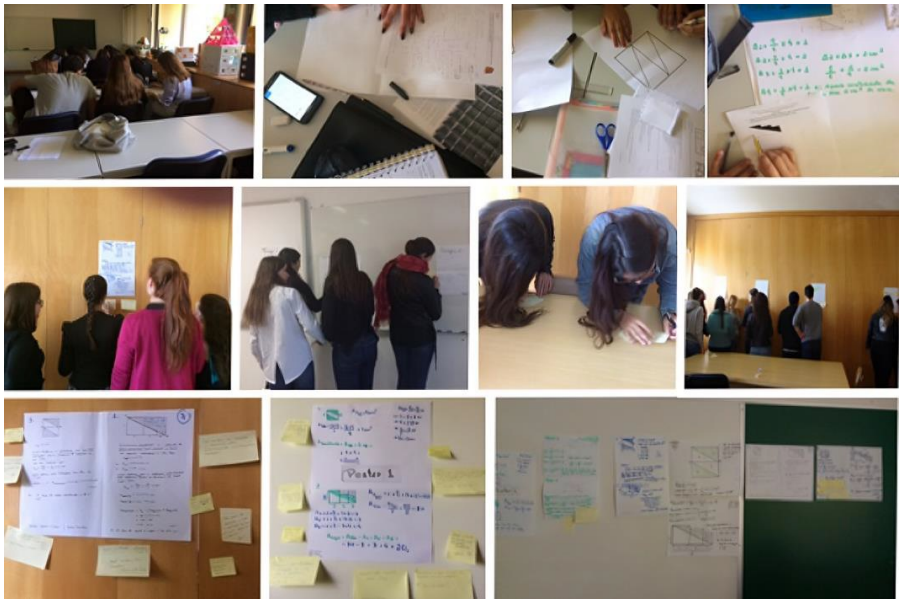
شکل زیر مربعی با مساحت ۴ سانتی‌متر مربع را نشان می‌دهد که در آن P و Q وسط دو ضلع مقابل هستند. با توجه به شرایط شکل، مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟

این مسئله را به دو روش مختلف حل کنید.

شکل ۷. مسئلهٔ مربع هاشورخورده [۴۰]

شرکت‌کنندگان با حل مسئله به‌صورت انفرادی کار را شروع کردند و وقتی به راه‌حلی رسیدند یا در جایی تردید داشتند، در گروه‌های خود وارد بحث می‌شدند، و به روش‌های مختلف حل مسئله نگاه کرده و سعی می‌کردند مؤثرترین راه را پیدا کنند. کار گروهی باعث تسهیل تبادل‌نظر و تصمیم‌گیری می‌شد. پس از حل مسئله، شرکت‌کنندگان به‌صورت گروهی دربارهٔ بهترین شکل طراحی پوستر از راه‌حل‌های مختلف، شیوهٔ نمایش یا روان بودن متن آن تصمیم‌گیری کردند. سپس کار گردش بین پوسترهای مختلف شروع شد. پس از اینکه تمام پوسترها دورتادور کلاس به نمایش گذاشته شدند،

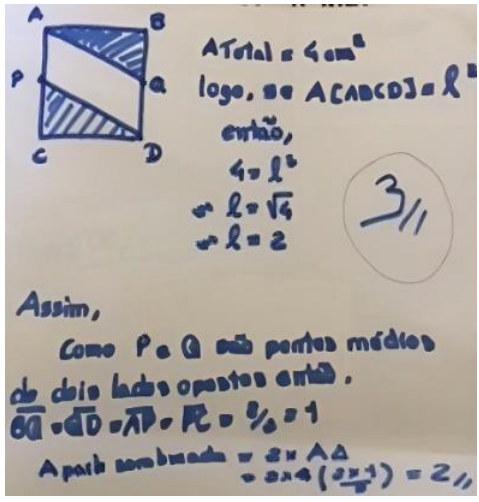
تمامی شرکت‌کنندگان نتیجهٔ تجزیه‌وتحلیل خود را به صورت یادداشت روی پوستر می‌گذاشتند، و به دنبال آن بحث گروهی دربارهٔ وارد بودن یا نبودن آن یادداشت‌ها راه می‌افتاد. در نهایت، کل کلاس دربارهٔ پوسترها بحث می‌کردند، و در آنجا هر گروه خلاصه‌ای از کار خود بیان می‌کرد، به سؤالات پاسخ می‌داد، به ابهامات و ایرادهای هم‌کلاسی‌های خود پاسخ می‌داد، و مدرس مربوط نکات اصلی بحث را نشان می‌داد. شکل ۸ اقدامات دانشجویان در مراحل مختلف «گردش در نمایشگاه» را نشان می‌دهد.



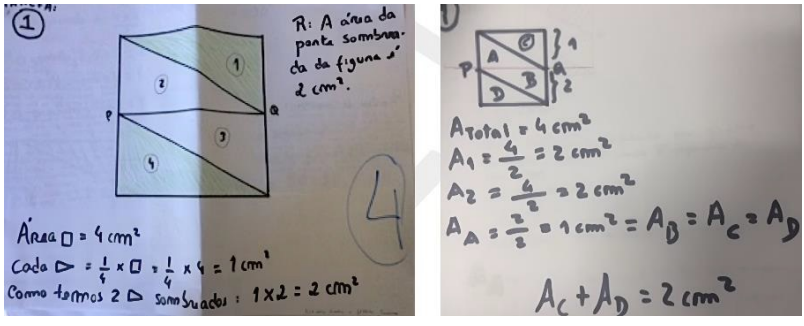
شکل ۸. دانشجویان و مدرسان در حال اجرای مراحل مختلف «گردش در نمایشگاه»

در تجزیه‌وتحلیل راه‌حل‌ها، همان‌طور که انتظار می‌رفت، هیچ نکتهٔ قابل‌توجهی وجود نداشت. از رویکردهای مختلفی استفاده‌شده بود: صرفاً بصری؛ صرفاً تحلیلی؛ یا راه‌حل‌های بصری که با راه‌حل‌های تحلیلی تکمیل شده بود. اکثر گروه‌ها با استفاده از فرمول‌هایی برای یافتن مساحت مربع و مثلث، راه‌حل‌های تحلیلی ارائه کرده بودند. اساساً، همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، آن‌ها روش‌های بیشتر سنتی را انتخاب کرده بودند که برای آن‌ها راحت‌تر بود.

دو گروه، دو راه‌حل بصری را با استفاده از ایدهٔ جزء به کل ارائه کردند (شکل ۱۰). این راه‌حل‌های بصری برای بقیهٔ دانشجویان شگفت‌انگیز بود؛ به نظر آن‌ها این راه‌حل‌ها ساده‌تر و قشنگ‌تر بودند. به‌طور کلی، این معلمان آینده در برابر استفاده از راه‌حل‌های تصویری کمی از خود مقاومت نشان



شکل ۹. راه‌حل تحلیلی



شکل ۱۰. راه‌حل‌های بصری

می‌دادند، زیرا در یافتن رویکرد بصری مشکل داشتند و در استفاده از روش‌های تحلیلی احساس راحتی بیشتری می‌کردند. نظرات شرکت‌کنندگان در مورد پوسترهای به نمایش گذاشته شده را می‌توان در دو نکتهٔ اصلی خلاصه کرد: «راهبردی ساده و قابل درک است» [در مورد راه‌حل بصری] یا «نیازی به استفاده از ریشهٔ دوم نبود» [در مورد راه‌حل غیربصری، تحلیلی]؛ که تمایز امکانات نهفته در راهبردهای بصری را آشکار می‌کند.

به‌طور کلی، شرکت‌کنندگان، با ابراز علاقه و انگیزه، از این تجربه رضایت‌خاطر داشتند. آن‌ها متوجه تأثیر راهبرد «گردش در نمایشگاه» در یادگیری خودشان به عنوان معلمان آینده و همچنین در یادگیری ریاضیات توسط دانش‌آموزان خود شدند. شاهد این مطلب اظهارنظرهای شرکت‌کنندگان در طول این تجارب و گزارش آن‌ها است.

برخی از نکات گفته‌شده عبارت‌اند از: «این روش رویکردی غنی‌تر از راهبرد معمول حل یک مسئله به‌صورت انفرادی است که در آن فقط یکی‌دو دانش‌آموز فکرهایی که به ذهنشان می‌رسد را بیان می‌کنند»؛ «این روش به درمیان گذاشتن ایده‌ها کمک شایانی می‌کند»؛ «به دانش‌آموزان محافظه‌کار و با اعتماد به نفس کمتر این فرصت را می‌دهد که بدون ترس و واهمه در بحث شرکت کنند»؛ «به شما این امکان را می‌دهد که راهبردها و سایر مسیرهای استدلالی را مشاهده کنید و از هم‌کلاسی‌ها در مورد مواردی که مبهم هستند سؤال کرده و تفکر انتقادی خود را بهبود ببخشید»؛ «این یک راهبرد خوب برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان جهت مشارکت در حل مسائل ریاضی و بهبود عملکرد آن‌ها می‌باشد»؛ «باعث می‌شود دانش‌آموزان متوجه شوند که گاهی اوقات دشوار است که ایده‌های خود را به‌وضوح روی کاغذ بیاورند»؛ «روال‌های یکنواخت را در هم می‌شکند»؛ «به تحرک راحت دانش‌آموزان کمک می‌کند».

آشنایی و به کارگیری دیگر راهبردهای حل مسئله، که ویژگی پویایی «گردش در نمایشگاه» آن را افزایش می‌دهد، باعث گسترش مجموعهٔ راهبردهای شخص در حل مسائل می‌شود. «گردش در نمایشگاه»، علاوه بر حوزهٔ فکری، به ما امکان می‌دهد که انواع دیگری از اشتغال‌ورزی افراد را متوجه شویم مانند اشتغال‌ورزی اجتماعی (در تعاملات گروه‌های کوچک و کل گروه) و جسمی (حرکت آزاد در کلاس درس)، که همهٔ این‌ها تأییدی بر قابلیت به کار بردن «گردش در نمایشگاه» به عنوان یک راهبرد یادگیری فعال است.

ریاضیاتِ مسیر

آخرین مثال ما تجربهٔ یک «ریاضیاتِ مسیر» است که معلمان آینده در محیط اطراف مؤسسهٔ خود با استفاده از برنامهٔ کاربردی MathCityMap انجام دادند. «مسیریابی ریاضی» دارای ۱۰ تکلیف بود که هریک از آن‌ها به یکی از موضوعات ریاضیات ابتدایی (به عنوان مثال، الگوها، اعداد گویا، اندازه‌گیری، احتمالات، و تقارن) مربوط می‌شد. شکل ۱۱ جنب‌وجوش موجود حین اجرای «ریاضیاتِ مسیر» را نشان می‌دهد که در آن شرکت‌کنندگان تکالیف داده‌شده را حل کرده‌اند.

از بین تکالیف مختلفی که در «ریاضیاتِ مسیر» اجرا شد، تجربهٔ دانشجویان را در یکی از این تکالیف (شکل ۱۲) ــ با نام «خیابان خیابان کومباتینچیز د گرنجی گِهو»[۱] ــ می‌آوریم که موضوع اصلی آن الگوها و اندازه‌گیری است.

۱. خیابان جنگجویان جنگ بزرگ

شکل ۱۱. معلمان شرکت‌کننده در «ریاضیاتِ مسیر» از برنامهٔ MathCityMap استفاده می‌کنند.

شکل ۱۲. تکلیف خیابان کومباتینچیز د گرنجی گِهو

خیابان خیابان کومباتینچیز د گرنجی گِهو، خیابان اصلی شهر ویانا دو کاستلو است که بین سال‌های ۱۹۱۷ و ۱۹۲۰ ساخته شده است. این خیابان از ایستگاه راه‌آهن شروع و به میدان لیبرتی می‌رسد. به چراغ‌های آن خیابان توجه کنید. این چراغ‌ها دو نوع لامپ با یک الگوی تکراری دارند. با استفاده از این الگو به‌عنوان مرجع، مقدار تقریبی طول خیابان را برحسب متر به‌دست آورید.

این تکلیف چند مفهوم ریاضی را در بر می‌گیرد و نمونه‌ای از حل مسئله در دنیای واقعی است. همانند سایر تکالیف از این نوع، این نیز دارای راه‌حل‌های متعددی است و شرکت‌کنندگان فرصت این را پیدا می‌کنند که راهبردهای مختلفی را برای حل مسئله انتخاب کنند. برنامهٔ MathCityMap به کاربر اجازه نمی‌دهد که کل راه‌حل مسئله را بفرستد، بلکه فقط پاسخ را می‌تواند ارسال کند. با این حال از طریق مشاهدات و گفت‌وگو با دانشجویان ملاحظه کردیم که آن‌ها پس از خواندن تکلیف، بین خودشان شروع به بحث دربارهٔ نحوی حل مسئله می‌کنند. بسیاری از ایده‌های حل مسئله از طریق

چرخش آزادنه فکری به وجود می‌آمدند، و شرکت‌کنندگان، پس از بحث و گفت‌وگو، شروع به کار جمعی می‌کردند، و موفق به حل تکلیف می‌شدند. دو راهبرد اصلی که این دانشجومعلمان استفاده می‌کردند عبارت بودند از: ابتدا فاصله بین چراغ دوحبابی و چراغ یک‌حبابی را محاسبه می‌کردند، سپس فاصلهٔ بین دو چراغ دوحبابی تعیین و تعداد چراغ‌های موجود در خیابان تخمین زده می‌شد و در نهایت طول خیابان با استفاده از الگوی چراغ‌های دوحبابی تخمین زده می‌شد؛ راهبرد دیگری که در این مسئله مورد استفاده قرار گرفت، استفاده از الگوی تکرار چراغ‌های دوحبابی و یک‌حبابی به طور جداگانه بود.

برای اینکه جنب‌وجوش حین اجرای و مواجه با تکلیف داده‌شده را روشن کنیم، اهمیت کار مشترک بین این دانشجومعلمان در ابعاد مختلف مانند بحث دربارهٔ ایده‌ها، تصمیم‌گیری در مورد بهترین راهبرد، و اجرای برخی کارها در شکل ۱۳ به تصویر کشیده شده است.

شکل ۱۳. دانشجومعلمان در حال حل تکلیف

در طول اجرای این تجربه، ما به پیامدهای مثبت عاطفی آن اهمیت زیادی می‌دادیم، مانند کاهش اضطراب و نگرانی از ریاضیات یا افزایش انگیزه و پرداختن به حل تکالیف. استقامت در حل تکالیف، که یادگیری مشارکتی آن را تقویت می‌کند، نقش حیاتی در تلاش برای یافتن راه‌حل دارد، که این نیز خود باعث تعمیق مطالب مورد بحث می‌شود. این روشْ مسیری برای دادن تکالیف سودمند و چالش‌برانگیز براساس اصول یادگیری فعال است که پرداختن دانش‌آموزان به تکالیف را به‌صورت ذهنی، اجتماعی، و جسمی میسر می‌سازد.

۵ جمع‌بندی نهایی

معلمان شرکت‌کننده در این مطالعه، در طول آن نیمسال با راهبردهای یادگیری فعال، از طریق حل مسائل چالش‌برانگیز ریاضی، آشنا شدند. توجه ما در این مقاله بر سه راهبرد آموزشی با ماهیت

یادگیری فعال، «تا کردن کاغذ»، «گردش در نمایشگاه»، و «ریاضیاتِ مسیر»، بود و هدفمان شناسایی نشانه‌های اشتغال شناختی، اجتماعی، و جسمی و همچنین عکس‌العمل‌های افراد شرکت‌کننده بود.

در پاسخ به پرسش اول این تحقیق با تجزیه‌وتحلیل نتایج نتیجه گرفتیم که هر سه جنبهٔ اشتغالی مقوّمِ یادگیری فعال در تجربیات اجراشده با معلمان جاری و ساری بود [۳۱، ۴۱]. در سطح شناختی، می‌توان گفت که همهٔ معلمان از هریک از این سه تجربه بهره‌مند شده‌اند. همهٔ این راهبردها با اصل چالش‌برانگیزی تکالیف سازگار بودند [۲۳، ۳۷، ۳۸]، که این خود یک نکتهٔ اساسی برای حفظ توجه شرکت‌کنندگان و تمایل آن‌ها به پیدا کردن راه‌حل، با وجود بروز موانع، بود. ما متوجه شدیم که رویکردهای تحلیلی بر رویکردهای بصری غلبه دارند، که دلیل آن را می‌توان در تجربیات قبلی آن‌ها در دوران تحصیل یافت. این غلبه تاحدی دلیل برخی اشتباهات در حل تکلیف تا کردن کاغذ است. در سطح اجتماعی، تجربیات انجام‌شده به شرکت‌کنندگان کمک کرد تا مفاهمهٔ ریاضی خود را، چه به شکل شفاهی و چه کتبی، بهبود بخشند، که این امر نتیجهٔ تعامل با هم‌کلاسی‌هایشان از طریق کار مشترک بود چه با مقایسه و دیدن راهبردهای مختلف حل مسئله و چه با گرفتن بازخورد در مورد کار خودشان [۳۰، ۴۵]. فضای این سه تجربه در نظر شرکت‌کنندگان خالی از بیم‌وترس بود که این شوق مشارکت را بیشتر می‌کرد و باعث می‌شد تعاملات به‌شکلی طبیعی راه بیفتد. این ویژگی یادگیری فعال باعث ایجاد گروه‌های تمرین و شیوه‌های مؤثرتر یاددهی و یادگیری می‌شود. در سطح جسمی، تحرک در همهٔ تکالیف وجود داشت و برای شروع فعالیت ریاضی ضروری بود؛ و این باعث می‌شد دانشجومعلمان در مورد افعال خود فکر کنند و راه‌هایی (مثل تا کردن کاغذ) بیابند یا خود را از سبک آموزش سنتی جدا کنند، با حرکت در داخل/خارجِ کلاس، تا با ایده‌های ریاضی به روشی مهیج‌تر مواجه شوند و سطوح توجه و انگیزهٔ درونی‌شان را حفظ کنند.

در بررسی پرسش دوم این تحقیق متوجه شدیم که این معلمان آینده، با وجود اشکالاتی که عمدتاً در «تا کردن کاغذ» دارند، به قابلیت‌های راهبردهای یادگیری فعال و تکالیف داده‌شده پی برده‌اند و در همهٔ تجربیات انجام شده رفتاری حاکی از رضایت داشته و از خود علاقه و توجه بیشتری نشان داده‌اند [۲۸، ۴۴]. همچنین آن‌ها اظهار کرده‌اند که این تجربیات به آن‌ها نشان داد که می‌توانند بیان شفاهی و کتبی ریاضی[1] خود را بهبود بخشند، مجموعهٔ راهبردهای خود را در حل مسائل وسعت بدهند، و دانش خود را دربارهٔ موضوعات موردبحث عمق ببخشند. گفته شده است که این تجربیات فرصتی برای رشد هم‌زمان توانایی‌هایی مانند حل مسئله، مفاهمه[2]، خلاقیت، کار مشترک، و همچنین

1. mathematical oral and written communication 2. communication

یافتن روابط ریاضی[1] است [۴۲، ۱۰، ۱۵]. این معلمان آینده به این نتیجه رسیدند که «تا کردن کاغذ»، «گردش در نمایشگاه»، و «ریاضیاتِ مسیر» می‌توانند همچون مسیرهای پرنشاط و مفیدی هم‌زمان برای ارزیابی و بهبود توانایی‌ها و دانش ریاضی دانش‌آموزان آینده‌شان عمل کنند.

همان‌طور که قبلاً بیان کردیم، و نتایج به دست آمده آن را قوت بخشید، سه بُعد یادگیری فعال سهم مهمی در اشتغال‌ورزی دانش‌آموزان به درس و تکالیف آن دارند، با این حال می‌خواهیم توجه را به مؤلفهٔ جسمی، در قالب تحرک بدنی، جلب کنیم، که علی‌رغم تأثیر آن در فرایند یادگیری، آن بُعدی است که در کلاس درس در تمام سطوح کمتر استفاده یا به آن اهمیت داده شده است. همان‌طور که هانافورد [۱۸] می‌گوید، دانش‌آموزان در هر سنی فقط وقتی فایده‌ای از تدریس می‌برند که مجال حرکت در کلاس‌های درس و همکاری و بحث با یکدیگر را داشته باشند؛ کاری که باعث می‌شود مغز نیرو بگیرد.

مراجع

[1] Barbosa, A., Vale, I., Math Trails: a resource for teaching and learning, in *Proceedings of the Re(s)sources 2018 international conference*, V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, L. Trouche, eds., ENS de Lyon, 2018, 183-186.

[2] Barbour, B., Introducing qualitative research: A student's guide, *SAGE*, 2014.

[3] Blanco, T., Godino, J., Sequeiros, P., Mantecón, J., Skill levels on visualization and spatial reasoning in pre-service primary teachers, *Universal Journal of Educational Research*, **7** (2019), 2647-2661.

[4] Boakes, N., Origami instruction in the middle school mathematics classroom: Its impact on spatial visualization and geometry knowledge of students, *Research in Middle Level Education Online*, **32 (7)** (2009), 1-12.

[5] Borromeo-Ferri, R., Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics [Paper presentation], The 12th International Congress on Mathematical Education, 2012, available at `www.icme12.org/upload/submission/1905_F.pdf`.

[6] Braun, B., Bremser, P., Duval, A., Lockwood, E., White, D., What does active learning mean for mathematicians?, *American Mathematical Society*, **64 (2)** (2017), 124-129.

[7] Cahyono, A. N., Ludwig, M., Teaching and learning mathematics around the city supported by the use of digital technology, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **15 (1)**, (2019), 1-8.

[8] CCR, Four-dimensional education: the competencies learners need to succeed, Center for Curriculum Redesign, 2015, available at `https://curriculumredesign.org/our-work/four-dimensional-21st-century-education-learning-competencies-future-2030`.

[9] Clements, D. H., McMillen, S., Rethinking concrete manipulatives, *Teaching Children Mathematics*, **2** (1996), 270-279.

[10] Cross, R., Developing maths trails, *Mathematics Teaching*, **158** (1997), 38-39.

1. mathematical connections

[11] DeYoung, M. J., Math in the box, *Mathematics Teaching in the Middle School*, **15 (3)** (2009), 134-141.

[12] Edwards, S., Active learning in the middle grades, *Middle School Journal*, **46** (2015), 26-32.

[13] Edwards, S., Kemp, A., Page, C., The middle school philosophy: Do we practice what we preach, or do we preach something different?, *Current Issues in Middle Level Education*, **19 (1)** (2014), 13-19.

[14] Erickson, F., Qualitative methods in research on teaching, in *Handbook of Research on Teaching*, M. C. Wittrock, ed., Macmillan, 1986, 119-161.

[15] Fosnot, C., Jacob, B., *Young mathematicians at work: Constructing algebra*, Heinemann, 2010.

[16] Francek, M., Promoting discussion in the science classroom using gallery walks, *Journal of College Science Teaching*, **36 (1)** (2006), 27-31.

[17] Gardner, H., *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*, Basic Books, 1983.

[18] Hannaford, C., *Smart Moves: Why Learning Is Not All in Your Head*, Great River Books, 2005.

[19] Hannula, M., The metalevel of emotion-cognition interaction, in *Research on mathematics and science education: From beliefs to cognition, from problem solving to understanding*, M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen, V. Vatanen, eds., 2001, 55-65.

[20] Jensen, E., *Teaching with the Brain in Mind*, Association for Supervision and Curriculum Development, 2005.

[21] Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., Taylor, P., Challenges beyond the classroom–sources and organizational issues, in *Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom–New ICMI Study Series 12*, E. Barbeau, P. Taylor, eds., 2009, 53-96.

[22] Krutetskii, V. A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, University of Chicago Press, Chicago, 1976.

[23] Leikin, R., Interplay between creativity and expertise in teaching and learning of mathematics, in *Proceedings of the 40th Conference of the International*, C. Csíkos, A. Rausch, J. Szitányi, eds., 2016, 19-34.

[24] Lucke, T., Dunn, P. K., Christie, M., Activating learning in engineering education using ICT and the concept of 'flipping the classroom', *European Journal of Engineering Education*, **42** (2017), 45-57.

[25] Ludwig, M., Jablonski, S., Step by step: Simplifying and mathematizing the real world with MathCityMap, *Quadrante*, **30** (2021), 242-268.

[26] Meyers, C., Jones, T., *Promoting Active Learning: Strategies for the College Classroom*, Jossey-Bass Publishers, New York, 1993.

[27] Miles, M. B., Huberman, A. M., Qualitative data analysis, *SAGE*, 1994.

[28] NAEYC., *Developmentally Appropriate Practice in Early Childhood Programs: Serving Children from Birth Through Age 8*, National Association for the Education of Young Children, 2009.

[29] NCTM., *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

[30] NCTM., *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*, National Council of Teachers of Mathematics, 2014.

[31] Nesin, G., Active learning, in *This We Believe in Action: Implementing Successful Middle Level Schools*, AMLE, ed., Association for Middle Level Education, 2012, 17-27.

[32] OME., *Capacity Building Series: Communication in the Mathematics Classroom*, Ontario Ministry of Education, Queen's Printer for Ontario, 2016.

[33] Prince, M., Does active learning work? A review of the research, *Journal of Engineering Education*, **93** (2004), 223-231.

[34] Ratey, J. S., *The Revolutionary New Science of Exercise and the Brain*, Little Brown, New York, 2008.
[35] Richardson, K., Designing math trails for the elementary school, *Teaching Children Mathematics*, **11** (2004), 8-14.
[36] Shoval, E., Using mindful movement in cooperative learning while learning about angles, *Instructional Science*, **39 (4)** (2011), 453-466.
[37] Stein, M., Smith, M., Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice, emphMathematics Teaching in the Middle School, **3 (4)** (1998), 268-275.
[38] Vale, I., Barbosa, A., Mathematics creativity in elementary teacher training, *Journal of the European Teacher Education Network*, **10** (2015), 101-109.
[39] Vale, I., Barbosa, A., Gallery walk a collaborative strategy to discuss problem solving, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, **2** (2019), 151-156.
[40] Vale, I., Barbosa, A., Gallery Walk: Uma estratégia ativa para resolver problemas com múltiplas soluções [Gallery Walk: An active strategy to solve problems with multiple solutions], *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, **17** (2020), 1-19.
[41] Vale, I., Barbosa, A., Mathematics & movement: The gallery walk strategy, in *Improving Children's Learning and Well-being*, G. S. Carvalho, P. Palhares, F., Azevedo, C. Parente, eds., 2020, 7-22.
[42] Vale, I., Barbosa, A., Promoting mathematical knowledge and skills in a mathematical classroom using a Gallery Walk, *International Journal of Research in Education and Science*, **7** (2021), 1211-1225.
[43] Vale, I., Barbosa, A., Cabrita, I., Mathematics outside the classroom: Examples with pre-service teachers, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, **2** (2019), 137-142.
[44] Vale, I., Barbosa, A., Cabrita, I., Paper folding for an active learning of mathematics: An experience with preservice teachers, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, **7** (2020), 53-59.
[45] Vygotsky, L. S., *A Formação Social da Mente [The social formation of mind]*, Martins Fontes, 1996.
[46] Webster, C. A., Russ, L., Vazou, S., Goh, L., Erwin, H., Integrating movement in academic classrooms: Understanding, applying and advancing the knowledge base, *Obesity Reviews*, **16** (2015), 691-701.
[47] WEF, *New Vision for Education: Fostering Social and Emotional Learning through Technology*, World Economic Forum, New York, 2016.

امیر باقری: دانشگاه فنی و مهندسی مرند، گروه علوم پایه
رایانامه: a_bageri@tabrizu.ac.ir
مهدیه میرزایی: دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی
رایانامه: m.mahdieh7@gmail.com

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 2, Autumn/Winter 2025, Pages 263–288
doi: 10.30504/mct.2025.1513.2057

Active Learning Strategies for an Effective Mathematics Teaching and Learning*

I. Vale, A. Barbosa
Translated by A. Bagheri[1]✉, M. Mirzaei[2]

[1]Department of Geomatics Engineering, Technical University of Marand, Iran
[2]Department of Mathematics, Payame Noor University, Iran

Abstract. Learning is an active enterprise, where three dimensions stand out, cognitive, social, and physical, and, in addition, not all students learn in the same way. Grounded on these ideas, this article reports a study that aims to understand and characterize the performance of pre-service teachers when experiencing active learning strategies during their mathematics classes. The participants were future teachers of primary education that experienced paper folding, a gallery walk, and a math trail as active learning strategies. The results of the study show that the participants valued these experiences, due to their potential in the development of a diversity of mathematical concepts and abilities, and throughout them showed traits of cognitive, social, and physical engagement. Although more research is needed, the results encourage the use of active learning strategies as a valuable approach to teaching and learning.

Keywords: active learning strategies, problem solving, challenging tasks, physical engagement
Article history: Received 14 December 2024; Accepted 9 April 2025
Article type: translation

⁎ Vale, I., Barbosa, A., Active learning strategies for an effective mathematics teaching and learning, *Eur. J. Sci. Math. Ed.*, **11** (2023), no. 3, 573-588.

1. a_bageri@tabrizu.ac.ir
2. m.mahdieh7@gmail.com

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license