

مبانی نظریه مجموعه‌ای ریاضیات و چالش‌های آن

مرتضی منیری

چکیده. در این مقاله به این موضوع می‌پردازیم که نظریه مجموعه‌ها به چه معنایی به‌عنوان مبانی ریاضیات در نظر گرفته می‌شود. در ادامه به چالش‌های این دیدگاه می‌پردازیم. در این راستا، نظریه مجموعه مرتبه اول را با منطق مرتبه دوم و همچنین با نظریه مجموعه مرتبه دوم مقایسه می‌کنیم. در نهایت این پرسش را بررسی می‌کنیم که آیا ریاضیات اصلاً به مبنا نیاز دارد.

۱ مقدمه

در خلال قرن بیستم، نظریه مجموعه‌ها به‌عنوان مبانی برای ریاضیات به رسمیت شناخته شد. این به معنای آن است که همه مفاهیم ریاضی، شامل مفاهیمی ملموس چون عدد و خط تا مفاهیم مجردی چون گروه و فضای هیلبرت را می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف کرد و خواص مورد نظر آن‌ها را به کمک اصول موضوعه مجموعه‌ها اثبات کرد. به قول کیونن [۱۴]:

نظریه مجموعه‌ها مبانی ریاضیات است. همه مفاهیم ریاضی بر اساس مفاهیم اولیه مجموعه و عضویت تعریف می‌شوند. در نظریه مجموعه اصل موضوعی ما اصولی را در مورد این مفاهیم اولیه تنظیم می‌کنیم. از این اصول موضوعه همه ریاضیات شناخته شده می‌تواند نتیجه شود.

اما امکان تحویل ریاضیات به مجموعه‌ها لزوماً به آن معنا نیست که ریاضیات به مبنا احتیاج دارد، یا اینکه مفاهیم ریاضی یادشده «واقعاً» مجموعه هستند. همچنین به این معنا نیست که نظریه مجموعه‌ها راهی برای شناخت ماهیت واقعی مفاهیم ریاضی به دست می‌دهد. مبنایگرایی مبتنی بر

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه مجموعه‌ها، مبانی ریاضیات، منطق مرتبه دوم، مبنایگرایی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۶

نظریه‌ها را می‌توان صرفاً تلاشی برای وحدت بخشیدن به حوزه‌های مختلف ریاضیات و فراهم آوردن زبانی یک‌دست برای آن دانست، چیزی که به هیچ وجه از نظر ریاضی ضروری نیست. البته، از مزایای ریاضی این رویکرد تسهیل ایجاد رابطه بین شاخه‌های به ظاهر مختلف ریاضی بوده است؛ اطلاعات مختصری در [۲] آمده است.

توجه به مجموعه‌ها در حکم مبانی ریشه‌ای قدیمی دارد. تسرملو در سال ۱۸۹۷ وارد گوتینگن شد. او در این باره می‌نویسد [۱۹]:

زمانی که من در گوتینگن دانشجوی خصوصی بودم، تحت تأثیر هیلبرت، که بیش از هر کس دیگری رشد علمی خود را مدیون او هستم، مشغول سؤالاتی در مورد مبانی ریاضیات، به ویژه مسائل اساسی نظریه مجموعه‌های کانتوری، شدم.

تسرملو در بیان اصول موضوعه مشهور خود می‌گوید [۱۹]:

نظریه مجموعه‌ها شاخه‌ای از ریاضیات است که وظیفه آن بررسی ریاضی مفاهیم بنیادی «عدد»، «ترتیب»، و «تابع» است و آن‌ها را به شکل ساده و بکر خود در می‌آورد و از این طریق پایه‌های منطقی همه حساب و آنالیز را توسعه می‌دهد.

و اخیرتر، موسکواکیس^۱ در این مورد می‌گوید [۱۹]:

یک مثال معمولی از روشی که ما اتخاذ خواهیم کرد، «شناسایی» [خط هندسی] با مجموعه ... اعداد حقیقی است. ... معنای دقیق این «شناسایی» چیست؟ مطمئناً این نقاط اعداد واقعی نیستند. ... منظور ما از «همسان‌سازی» [خط] با [واقعی‌ها] این است که مطابقت ... یک نمایش وفادار به ما می‌دهد ... که به ما امکان می‌دهد برای همه مفاهیم هندسی مفید تعریف‌های حسابی ارائه دهیم و خواص ریاضی [خط] را طوری مطالعه کنیم که گویی نقاط اعداد واقعی هستند. ... به همین ترتیب، ما در درون کیهان مجموعه‌ها بازنمایی‌های وفادار تمام اشیاء ریاضی مورد نیاز خود را کشف خواهیم کرد و نظریه مجموعه‌ها را مطالعه خواهیم کرد ... انگار همه اشیاء ریاضی مجموعه هستند.

در این مقاله در ابتدا به این می‌پردازیم که یک مبنا برای ریاضیات دقیقاً چه خواصی باید داشته باشد. از دید برخی از فیلسوفان علم مبنایی برای ریاضیات تنها چارچوبی برای گفتمان مشترک در

کل ریاضیات نیست، بلکه فراهم آوردن چارچوب یک‌دست مفهومی برای آن نیز است. در ادامه به این پرسش می‌پردازیم که آیا نظریه مجموعه‌ها، به‌ویژه در دستگاه تسرملو-فرانکل (ZF)، این خواص را دارا است یا نه؟ درنهایت، به برخی پرسش‌های فلسفی مربوط به مبنای، به‌ویژه مبنای ریاضی، اشاره می‌کنیم. به‌ویژه، بررسی می‌کنیم که آیا ساختارگرایی در ریاضیات با در نظر گرفتن نظریه مجموعه‌ها در حکم مبانی ریاضیات سازگار است یا نه؟

۲ ویژگی‌های یک مبنا

مجموعه‌ها تنها مبنای پیشنهادی برای ریاضیات نیستند. رسته‌ها یا تایپ‌ها در نظریه هوموتوپیک تایپ‌ها نیز به‌عنوان مبنایی برای ریاضیات پیشنهاد شده‌اند [۶، ۸، ۱۵، ۱۶]. اما قبل از هر بحثی، خوب است ببینیم که منظور از یک مبنا برای ریاضیات چیست و چه انتظاراتی از آن می‌باید داشته باشیم. مفاهیم مختلفی در ریاضیات مطرح هستند. به‌طور خلاصه، یک مبنا برای ریاضیات، استفاده از یک مفهوم واحد برای توضیح همه مفاهیم ریاضی است. مبناهای یادشده از مفاهیم مجموعه، رسته، و تایپ برای این منظور استفاده می‌کنند. به نظر می‌رسد که این مفاهیم به‌طور پیش‌ریاضیاتی نیز قابل درک‌اند، یا حداقل تصویری شهودی ولی شاید مبهم از آن‌ها وجود دارد. هر یک از این مفاهیم چارچوبی را فراهم می‌کند که با استفاده از آن می‌توان در مورد همه اشیاء ریاضی صحبت کرد.

لیدیمن و پرسنل^۱ معتقدند که این امر به تنهایی کافی نیست، برای آنکه بتوان از مبنا برای ریاضیات به معنای قوی آن صحبت کرد می‌باید جنبه‌هایی دیگری را نیز به بحث گذاشت [۱۶]. این جنبه‌ها را به اختصار می‌توان معناشناسانه، متافیزیکی، شناخت‌شناسانه، و روش‌شناسانه دانست. برای مثال، در مورد مجموعه‌ها باید روشن کنیم که وقتی از مجموعه صحبت می‌کنیم چه تعبیری از مجموعه و روابط بین آن‌ها را مدنظر داریم. به‌علاوه باید به این بپردازیم که مجموعه‌ها به چه معنایی وجود دارند، اگر نام‌گرایانه نمی‌اندیشیم، عینی یا ذهنی؟ همچنین چگونه به آن‌ها دسترسی شناختی داریم و اصول مربوط به آن‌ها را بر چه اساسی درست می‌دانیم؟ و درنهایت روش مطالعه آن‌ها چگونه باید باشد و چگونه بین آن‌ها و جهان فیزیکی ارتباط برقرار کنیم؟ این‌ها پرسش‌هایی هستند که بیش از آنکه ریاضی‌دانان متولی بحث در مورد آن‌ها باشند، به فلاسفه ریاضی یا ریاضی‌دانانی که دغدغه فلسفی دارند مربوط می‌شوند. همچنین توجه کنید که این پرسش‌ها در درجه اول به خود

مفهوم مجموعه مرتبط می‌شوند، نه به مفاهیم ریاضی که بر اساس آن‌ها تعریف می‌شوند. به علاوه، همه این‌ها به این معنی نیست که باید توافقی کامل بر سر پاسخ این پرسش‌ها وجود داشته باشد. از طرف دیگر، پلویه مدی اینکه مبنای مجموعه‌ای بتواند یا ادعا داشته باشد که از نظر شناخت‌شناسی یا متافیزیکی حرف عمیقی در مورد ریاضیات بزند را رد می‌کند [۱۹]. ریاضی‌دانان بسیاری از قضیه‌های ریاضی را می‌دانند بدون آنکه به ارتباط آن‌ها با نظریه مجموعه‌ها اندیشیده باشند. از طرف دیگر، اینکه مثلاً اعداد یا زوج‌های مرتب را به شکل‌های متفاوت می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف کرد، این اندیشه که تعریف‌های مبتنی بر مجموعه‌ها بتوانند ماهیت اشیای ریاضی را مشخص کنند نامحتمل می‌کنند [۷]. تفاوت مبانی مختلف مطرح‌شده برای ریاضیات و فلسفه‌های مختلف ریاضیات در همین است که از دومی انتظارات فلسفی بیشتری دارند. برای مثال، از تعریف فرگه برای عدد طبیعی انتظار بیشتری می‌رود تا مفهوم این اعداد را توضیح دهد تا تعریف نظریه مجموعه‌ای آن [۴، ۷].

کانتور یک مجموعه را گردایه‌ای از عناصر متمایز که جایگاهشان در شهود یا فکر انسان است تعریف کرد یا همه عناصری که بتوان به کمک قاعده‌ای آن‌ها را به هم مرتبط کرد و به عنوان شیئی واحد دانست. به تعریف اول ایرادات زیادی می‌توان گرفت. مثلاً، مفهوم گردایه روشن‌تر از خود مفهوم مجموعه نیست، مجموعه‌هایی وجود دارند که در ذهن و شهود نمی‌گنجند. تعریف دوم روشن نمی‌کند که یک قاعده چگونه می‌تواند تعدادی عنصر را به شیئی واحد تبدیل کند و به نظر می‌رسد مجموعه‌هایی وجود دارند که توسط یک قاعده گرد هم نیامده‌اند، و از همه مهم‌تر آنکه این تعریف از مجموعه به پارادوکس راسل منجر می‌شود.

در بخش بعد خواهیم دید که توصیف بهتری از مجموعه‌ها وجود دارد که در کار ساختن ریاضیات براساس مفهوم مجموعه کارایی بیشتری دارد. اما همین‌جا اشاره می‌کنیم، که با توصیفات کانتور روشن است که از دید او هر مجموعه با معین کردن اعضایش کاملاً مشخص می‌شود، و اینکه اعضای یک مجموعه بر خود آن مجموعه به نوعی تقدم دارند [۷]. اینها دو خاصیتی هستند که در همه بحث‌ها در مورد مجموعه‌ها باید در نظر داشت. بنابراین، هرچند پرسش‌های فلسفی فوق پاسخ‌های قاطعی ندارند، اما پیش‌زمینه‌های غیردقیقی هم در مورد مفهوم مجموعه وجود دارد. البته در مورد مجموعه‌ها مطالعات دقیق فلسفی زیادی شده است که در اینجا آن‌ها را نمی‌آوریم؛ برای مثال، [۱۸] را ببینید.

۳ تصور سلسله مراتبی از مجموعه‌ها

حداقل به دو گونه می‌توان به مجموعه‌ها نگریست. در دیدگاه اول، مجموعه‌ها به صورت بالفعل و به صورت یک کل وجود دارند و کار ریاضی‌دان رتبه‌بندی مجموعه‌ها و پیدا کردن ساختاری در بین آن‌ها است. در دیدگاه دوم، مجموعه‌ها به صورت بالقوه وجود دارند. به عبارت دیگر، و به صورت استعاری، می‌توان گفت که مجموعه‌ها از مجموعه تهی و با روش بازگشتی به مرور ساخته می‌شوند. در ادامه به دیدگاه دوم، دیدگاه سلسله‌مراتبی، می‌پردازیم.

در مرحله صفر مجموعه تهی را در نظر بگیرید. در مرحله یک، مجموعه همه زیرمجموعه‌های تهی را در نظر بگیرید. به همین ترتیب به ازای هر عدد طبیعی پیش بروید. بعد از همه این‌ها، مرحله ω ، اجتماع همه مجموعه‌های مراتب قبلی را در نظر بگیرید. در مرحله بعد از ω ، مجموعه توانی مجموعه مرحله ω را در نظر بگیرید. به همین ترتیب، در هر گام جلو بروید. هرگاه مرحله بلافاصله قبلی وجود نداشت، اجتماع مجموعه‌های ساخته شده در مرحله قبل از آن را در نظر بگیرید. به این ترتیب سلسله‌مراتب V از مجموعه‌ها به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که تلقی سلسله‌مراتبی یادشده خواص مورد انتظار از مجموعه‌ها را دارا است و به علاوه، فارغ از پارادوکس‌های مجموعه‌ای معمول است. برای مثال، در این تلقی، هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند عضوی از خودش باشد، و بنابراین، مجموعه همه مجموعه‌ها وجود ندارد، زیرا عناصر هر مجموعه در مراحل پیش از خود مجموعه قرار دارند.

می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌های یادشده، تمام خواصی را که اصول موضوعه ZF بیان می‌کنند دارا هستند. در واقع، ZF را می‌توان تلاشی برای اصل موضوعی کردن خواص سلسله‌مراتب شهودی V دانست. البته، از جهت دیگر، می‌توان V را به عنوان مدلی از ZF، ساخته شده در دل این نظریه بنیادی دانست. در این دیدگاه V رده‌ای (و نه مجموعه‌ای) از مجموعه‌ها است که اثبات وجودش متکی بر اصول ZF است. این ساخت را می‌توان در ZF بدون اصل مبنا^۱ انجام داد. در این صورت اصل مبنا معادل این ادعا است که هر مجموعه‌ای در یکی از مراتب این سلسله‌مراتب قرار دارد.

در موردی جملاتی مانند اصل انتخاب، با اینکه می‌باید در V درست یا غلط باشد، اما ما نمی‌دانیم که کدام حالت برقرار است. برای توضیح این وضعیت، فرض کنید x مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی مجزا باشد. x در مرحله‌ای چون s تشکیل شده است. اعضای اعضای x در مراحل زودتر از s تشکیل می‌شوند. از این رو، بنابر اصل انتخاب، در s ، اگر نه زودتر، مجموعه‌ای

تشکیل می‌شود که دقیقاً شامل یک عضو از هر عضو x است. اما چگونه بفهمیم که چنین مجموعه انتخابی تشکیل شده است؟ در این مورد راهی مستقل از پذیرفتن خود اصل انتخاب به نظر نمی‌رسد. فرضیه پیوستار نیز وضعیتی مشابه دارد. در دیدگاهی واقع‌گرایانه به مجموعه‌ها، که همه احکام مجموعه‌ای را درست یا غلط می‌داند، احکامی مانند اصل انتخاب و فرضیه پیوستار، مستقل از ZF هستند، صرفاً به این دلیل که ما در صورت‌بندی اولیه این اصول به اندازه کافی آگاه نبوده‌ایم تا نظریه‌ای را بپذیریم که آن‌ها را تعیین تکلیف کند. وظیفه پیش روی ما جستجوی اصولی بنیادی است که این سؤالات را تعیین تکلیف کنند. پذیرفتن اصولی مانند اصولی که وجود کاردینال‌های بسیار بزرگ را بیان می‌کنند، تلاشی در این مسیر بوده که هنوز با موفقیت همراه نبوده است [۱۲]. به‌طور دقیق‌تر، ثابت شده است که با فرض وجود کاردینال‌های بزرگ، درستی و نادرستی فرضیه پیوستار با دیگر اصول سازگار هستند [۱۷].

در اینجا توضیح یک نکته ظریف مفید به نظر می‌رسد. چرا پذیرفتن اینکه V مدلی از ZF است با اینکه بنابر قضیه‌های ناتمامیت گودل ZF نمی‌تواند سازگاری خود را اثبات کند، تعارض ندارد؟ همان‌طور که گفتیم خود ZF وجود V را ثابت می‌کند، اما نکته این است که در ZF ما نمی‌توانیم این جمله را بیان کنیم: «هر اصل موضوع ZF در V درست است». بیان این حکم از یک محمول درستی مرتبه اول استفاده می‌کند و در ZF، بنابر قضیه تعریف ناپذیری صدق تارسکی، چنین محمولی تعریف‌پذیر نیست [۱۳]. اینکه V تمام اصول ZF را برآورده می‌کند، یک جمله واحد نیست، بلکه قالبی از تعدادی نامتناهی جمله است. یعنی، هرچند در فرانظریه می‌دانیم که هر اصل ZF در V صادق است، آنچه به‌طور مرتبه اول داریم، فقط جملات صادق مجزا در مورد هریک از نامتناهی اصل ZF است.

نقطه شروع V را می‌توان به‌جای مجموعه تهی مجموعه‌ای از عناصری که مجموعه نیستند هم در نظر گرفت، مثلاً یک صندلی یا میز. اما در کار تعریف مفاهیم ریاضی به چنین اشیائی نیاز نیست. مفاهیم پایه‌ای ریاضی، شامل اعداد، را می‌توان مطابق روش مرسوم در کتاب‌های نظریه مجموعه‌ها برحسب مجموعه‌های محض تعریف کرد. همان‌طور که مشهور است، این کار را به روش‌های متعددی می‌توان انجام داد. این به این مشکل فلسفی منجر می‌شود که ظاهراً جمله‌های ریاضی مرجع ثابتی ندارند [۹]. البته، از نظر ریاضی این هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد. می‌توان هریک از تعریف‌ها را که به دلایل عمل‌گرایانه مناسب‌تر به نظر می‌رسند، برگزید. از طرف دیگر، ساختارهای ریاضیات جدید معمولاً همه در ابتدا برحسب مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. در واقع، در

حال حاضر روش استاندارد برای آنکه ریاضی‌دانان نشان دهند که فلان نظریه ریاضی سازگار است، یافتن مدلی براساس مجموعه‌ها برای آن نظریه ریاضی است. در مجموع به نظر می‌رسد که ساختار مجموعه‌های V می‌تواند به عنوان بنیادی برای ریاضیات در نظر گرفته شود. در واقع، V را تسرملو به همین منظور مطرح کرد.

۴ نظریه مجموعه‌ها در مقابل منطق مرتبه دوم

نظریه مجموعه‌ها به طور معمول در دستگاه اصل موضوعی تسرملو-فرانکل مرتبه اول همراه با اصل انتخاب، ZFC، مطالعه می‌شود. منطق مرتبه اول تنها شامل متغیرهای فردی است، یعنی متغیرهایی که به اعضای دامنه ساختارهای ریاضی (یا غیرریاضی)، مانند یک گروه اشاره می‌کنند. این دستگاه، ZFC، علی‌رغم محدود بودن به زبان مرتبه اول، دستگاه منطقی استاندارد برای مجموعه‌ها است که مبانی ریاضیات در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر، ساختارهای مختلفی در ریاضیات وجود دارند که اساساً مرتبه دوم یا حتی بالاتر هستند، مانند حساب مرتبه دوم پتانو، میدان‌های مرتب کامل، یا فضا‌های توپولوژیک. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

پاسخ خلاصه آن است که خیر، تناقض یا ابهامی در کار نیست؛ درست است که ZFC مرتبه اول است، اما تعبیری که ما به عنوان مجموعه از متغیرهای آن داریم، و اینکه $\in$ را به عنوان تعلق تعبیر می‌کنیم، باعث می‌شود که بتوانیم در مورد اعضای مجموعه‌ها، اعضای اعضای مجموعه‌ها، و به همین ترتیب از هر مرتبه‌ای، صحبت کنیم. خود ZFC تنها یک دستگاه اثباتی منطقی صوری مبتنی بر برهان‌های با طول متناهی است. پس این تعبیر ما است که این قدرت بیان از کلیه مراتب را به فرمول‌های ZFC اعطا می‌کند، وگرنه همان‌طور که گفتیم، این دستگاه بر پایه زبان و منطق مرتبه اول بنا شده است. منطق مرتبه اول منطق کلاسیک و استاندارد است و برخی از مهم‌ترین قضایای منطق مانند قضیه فشرده‌گی در مورد آن برقرار هستند ولی در مورد منطق مرتبه دوم خیر. در ادامه کمی دقیق‌تر به معرفی منطق مرتبه دوم می‌پردازیم.

زبان منطق مرتبه دوم، توسیعی از زبان منطق مرتبه اول است، به این معنی که علاوه بر متغیرهای فردی که به اعضای دامنه تعبیرهایش دلالت می‌کنند، متغیرهای رابطه‌ای و تابعی هم دارد. این‌ها به روابط و توابع تعریف شده بر دامنه تعبیرها دلالت می‌کنند. زبان‌های از مراتب بالاتر حاوی متغیرهایی هستند که به روابط بین روابط و الی آخر، دلالت می‌کنند. در ادامه برای سادگی کار فقط به منطق مرتبه دوم با متغیرهای مجموعه‌ای می‌پردازیم.

در معناشناسی استاندارد از زبان منطق مرتبه دوم هر زیرمجموعه‌ای از دامنه یک ساختار، به عنوان تعبیری از زبان، می‌تواند تعبیری از یک متغیر مجموعه‌ای باشد، به خلاف معناشناسی هنکین^۱ برای منطق مرتبه دوم که می‌توان دسته‌ای خاص از زیرمجموعه‌های دامنه‌ها را از ابتدا به عنوان تعبیر متغیرهای مجموعه‌ای در ساختار مورد در نظر ثابت گرفت. در هریک از این تعبیرها درستی یک فرمول در یک ساختار به طریق طبیعی تعریف می‌شود، یعنی همان تعریف صدق تارسکی. می‌دانیم که منطق مرتبه دوم با معناشناسی استاندارد به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نیست، اما منطق مرتبه اول و همچنین منطق مرتبه دوم با معناشناسی هنکین به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر هستند. یعنی دستگاهی اثباتی دارند که اصول و قواعد آن‌ها به‌طور الگوریتمی قابل تمییزند و دقیقاً جملاتی در این دستگاه اثبات‌پذیرند که معتبر هستند، یعنی در همه ساختارهای تعبیرگر درست هستند. از این نظر منطق مرتبه دوم استاندارد اساساً با منطق مرتبه اول و همچنین منطق مرتبه دوم با معناشناسی هنکین متفاوت است. از اینجا به بعد منظور ما از منطق مرتبه دوم همین منطق است. همین ویژگی اصل‌پذیر نبودن یکی از نقاط ضعف اساسی منطق مرتبه دوم استاندارد است.

حساب مرتبه دوم پئانو، PA^2 ، توسیعی از حساب مرتبه اول پئانو [۴] است. در PA^2 اصل استقرا با اصل استقرای قوی‌تر مرتبه دوم، که به‌ازای هر متغیر مجموعه‌ای بیان می‌شود، تعویض می‌شود. این واقعاً یک اصل است، به‌خلاف اصل (یا بهتر بگوییم طرح کلی)^۲ استقرای مرتبه اول که در واقع بی‌نهایت مورد دارد، به‌ازای هر فرمول. به‌علاوه، اصل شمول^۳ نیز به آن اضافه می‌شود. بنابر این اصل، به‌ازای هر فرمول، متغیر مرتبه دومی وجود دارد که با آن فرمول هم‌ارز است. نظریه مجموعه مرتبه دوم، ZFC^2 ، نیز توسیعی از ZFC است که در آن طرح‌های کلی تفکیک^۴ و جایگزینی^۵ به ترتیب با تک اصل‌های تفکیک و جایگزینی تعویض شده‌اند، و همچنین طرح کلی شمول نیز اضافه شده است [۹].

یکی از مزایای در نظر گرفتن ساختارهای ریاضی مرتبه دوم آن است که برخلاف ساختارهای مرتبه اول نباشد بر ZFC به‌نوعی یکتا هستند. یک ساختار مرتبه دوم A مشخصه‌پذیر مرتبه دوم^۶ است هرگاه جمله‌ای در زبان آن ساختار موجود باشد که در آن ساختار درست باشد و ضمناً هر ساختار دیگری که آن جمله در آن درست بود با A یکرخت باشد. ساختارهای مرتبه دوم اعداد طبیعی، اعداد حقیقی، و اعداد مختلط همگی مشخصه‌پذیر مرتبه دوم هستند. این‌ها ساختارهای اساسی ریاضیات هستند، و اینکه به عنوان ساختارهای مرتبه دوم به نوعی یکتا هستند، اهمیت

زیادی دارد. البته به راحتی می توان نشان داد که مجموعه ساختارهای مشخصه پذیر مرتبه دوم در یک زبان شمارا، شمارا است، بنابراین بسیاری از ساختارهای ریاضی مشخصه پذیر نیستند. علی رغم این موضوع، پیدا کردن ساختارهایی که مشخصه پذیر مرتبه دوم نیستند کار ساده ای نیست. مثالی از این نوع ساختار $(N, <, A)$ است که در آن A مجموعه کدهای همه جملات معتبر زبان مرتبه دوم شامل تنها یک رابطه دو موضعی است. به علاوه، اینکه هیچ ساختار مرتبه دومی به شکل $(R, +, \cdot, <, A)$ که در آن A یک پایه همل^۱ است، مشخصه پذیر مرتبه دوم نباشد، با ZF سازگار است [۲۰].

علی رغم فواید در نظر گرفتن ساختارهای ریاضی به عنوان ساختارهای مرتبه دوم، به هنگام مطالعه ساختارهای مرتبه دوم استفاده از یک فرانظریه نظریه مجموعه ای ضروری به نظر می رسد. در واقع، جملات مرتبه دومی وجود دارند که درستی یا نادرستی آنها در یک ساختار معادل درست بودن اصل انتخاب یا فرضیه پیوستار در جهان نظریه مجموعه ها است. پس جملات مرتبه دومی وجود دارند که حتی نظریه مجموعه ها نمی تواند در مورد آنها تصمیم بگیرد. این شاید مؤید نظر مشهور کواين^۲ باشد که منطق مرتبه دوم همان نظریه مجموعه ها در لباس گوسفند است [۲۱]!

۵ نظریه مجموعه مرتبه اول در مقابل نظریه مجموعه مرتبه دوم

اندیشه ای که حداقل از زمان ددکیند و به ویژه هیلبرت در مورد ریاضیات مطرح شد این بود که آنچه در ریاضیات اهمیت دارد ساختارها هستند و نه اشیاء ریاضی. این اندیشه بعداً در دست فیلسوفانی چون شاپیرو^۳ به صورت یک مکتب عمده در فلسفه ریاضی درآمد [۵]. آیا مبنای نظریه مجموعه ای با ساختارگرایی سازگار است؟ ساختارگرایی در ریاضیات این دیدگاه فلسفی است که در ریاضیات آنچه مهم است، روابط بین اشیاء ریاضی است و نه ماهیت خود اشیاء. برای تعدادی از اصول هر مجموعه ای از اشیاء و خواص مرتبط آنها را که آن اصول را برآورده کنند می توان به عنوان تعبیری از آن اصول در نظر گرفت. نظریه گروه ها به عنوان یک نظریه جبری مثال خوبی از نظریه هایی است که با دیدگاه ساختارگرایی همراه هستند. اما در مورد نظریه های بنیادی چون ZF چه می توان گفت؟ دستگاه ZF نیز، اگر به صورت یک دستگاه اصل موضوعی مرتبه اول معمولی به آن نگاه کنیم، مدل های بی شماری دارد. این مدل ها حتی می توانند شمارا باشند، اگر از بیرون و اصطلاحاً فرازبان به آنها بنگریم. در هریک از این مدل ها می توان V را تعریف کرد و مطابق معمول همه ساختارهای آشنای ریاضی را در آنها بازسازی کرد. از این نظر، ما با ریاضیات متفاوتی مواجه هستیم. حتی

از نظر برخی فیلسوفان متأخر ریاضی، این دیدگاه با افلاطون‌گرایی ریاضی سازگار است. تنها به جای یک جهان با جنگلی از جهان‌های متفاوت مواجه هستیم که مستقلاً وجود دارند. بنابراین، اگر از جنبهٔ بنیادی و فرازبانی V بگذریم، می‌توانیم مدل‌های مختلفی از مجموعه‌ها داشته باشیم که همگی مشروعیت دارند ولی در هریک ریاضیات مشخصهٔ خود را دارد. در این دیدگاه، V یکی از بی‌شمار مدل‌های مجموعه‌ها است [۱۱].

حال ببینیم وضعیت با تغییر منطق مرتبهٔ اول به منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی استاندارد چه تفاوتی می‌کند. همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، در معناشناسی استاندارد در هر ساختار سورهای مرتبهٔ دوم می‌توانند به هریک از زیرمجموعه‌های دامنه اشاره کنند. حال اگر نظریهٔ مجموعه‌های مرتبهٔ دوم ZFC^2 را نظر بگیریم، بنابر قضیهٔ تسرملو، هر مدل این نظریه به شکل V_K است، که در آن K یک کاردینال دسترس‌ناپذیر^۱ است. منظور از یک کاردینال دسترس‌ناپذیر کاردینالی نا شمارا است به طوری که از کاردینال‌های کوچک‌تر به کمک اعمال حسابی معمول کاردینال‌ها به دست نمی‌آید. بنابراین، هر دو مدل این نظریه در مراتب پایین سلسله مراتب V ، جایی که ریاضیات استاندارد را می‌توان تعبیر کرد، با هم یکرخت‌اند. این قضیه می‌تواند نتایجی بنیادی داشته باشد. برای مثال، از آنجا که فرضیهٔ پیوستار مربوط به رده‌های پایینی سلسله مراتب V است، بنابر قضیهٔ فوق، فرضیهٔ پیوستار در همهٔ مدل‌های نظریهٔ مرتبهٔ دوم مجموعه یا درست است و یا غلط است [۹، ۱۱].

البته، همان‌طور که اشاره شد، معناشناسی استاندارد برای منطق مرتبهٔ دوم از فرض وجود مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های دامنه‌های تعبیرها استفاده می‌کند، و بنابراین خود برای شفاف‌سازی نیاز به نظریه‌ای برای مجموعه‌ها دارد. در واقع، نظریهٔ مجموعهٔ ZF با اصولی چون اصل نامتناهی، جایگزینی، و مجموعه توانی از ابتدا و به صراحت وجود برخی مجموعه‌های به قدر کافی بزرگ را می‌پذیرد. اما در گونهٔ مرتبهٔ دومی نظریه‌های ریاضی، این کار گام‌به‌گام صورت می‌گیرد. این وضعیتی است که در مورد نظریه‌های مرتبهٔ دوم حساب و اعداد حقیقی و اعداد مختلط برقرار است، هرچند این نظریه‌ها از این امتیاز برخوردارند که ساختارهای هدف خود را در حد یکرختی کاملاً مشخص می‌کنند. بنابراین، در نهایت به نظریهٔ مجموعه‌ها نیازمندیم [۹، ۱۱، ۲۰].

ساختار مجموعه‌ها در V یک موقعیت ویژه هم دارد. به راحتی می‌توان ثابت کرد که V ساختاری سخت^۲ است، یعنی تنها خودریختی آن، خودریختی بدیهی است. البته این ویژگی‌ای است که همهٔ مجموعه‌های انتقالی^۳ هم دارند، یعنی آن‌هایی که هر عضو یکی از اعضای آن‌ها، عضوی از خود آن‌ها نیز است [۱۳، ۱۴]. از این نظر، هریک از اعضای ردهٔ V موقعیتی ویژه دارند و نمی‌توان آن‌ها را

1. inaccessible cardinal 2. rigid 3. transitive

بدون از دست دادن این ساختار با عناصر دیگر تعویض کرد. حال دو روش مرسوم تعریف اعداد طبیعی را در نظر بگیرید: تعریف تسرملو ($0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{1\}, \dots$) و تعریف فون‌نویمان ($0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \dots$). این دو ساختار از نظر حسابی یکریخت‌اند. با توجه به اینکه هریک از این دو ساختار مدلی از اصول معمول حساب اعداد طبیعی هستند، برخی این را دلیلی بر این گرفته‌اند که اعداد واقعاً مجموعه نیستند، که تأییدی بر ساختارگرایی در ریاضیات است [۷].

البته باید توجه کرد که دو ساختار فون‌نویمان و تسرملو از لحاظ مجموعه‌ای با هم یکریخت نیستند. اگر اعداد طبیعی را واقعاً از جنس مجموعه‌ها بدانیم، بر این اساس می‌توانیم استدلال کنیم که حداکثر یکی از این دو تعریف واقعی اعداد است. بنابراین، عدم تعین نه تنها به اشیاء که به ساختارها نیز سرایت می‌کند. البته، درست است که در حال حاضر نمی‌دانیم کدام یک از دو تعریف فوق به ماهیت اعداد نزدیک‌تر است، اما پیدا کردن چنین دلایلی در آینده ناممکن نیست. در هر حال، به نظر می‌رسد که این عدم تعین ظاهری تهدیدی برای تحویل‌گرایی نظریه مجموعه‌ای نیست، اگر همانند مدی، فیلسوف مشهور، تنها بر فواید عمل‌گرایانه این تحویل تأکید کنیم [۱۹].

۶ آیا ریاضیات به مبنا نیاز دارد؟

ریاضیات از زمان باستان به‌عنوان مظهر دقت در نظر گرفته شده است. آکادمی افلاطون بر روی کسانی که هندسه، و در واقع ریاضیات، نمی‌دانستند بسته بود. تا همین امروز، ریاضیات ابزاری مطمئن برای انجام دقیق‌ترین و ظریف‌ترین کارها از جمله فرستادن سفینه‌ها به ماه یا شکافتن ذرات بنیادی است. از طرف دیگر، فلسفه و علوم تجربی فاقد چنین صفاتی هستند. در فلسفه بر سر هیچ مفهومی توافق وجود ندارد، و در علوم تجربی عدم قطعیت و نهایی نبودن نظریه‌های علمی، امری مسلم است. پرسش‌های فلسفی‌ای که فیلسوفان، از زمان افلاطون، درباره ریاضیات مطرح کرده‌اند، بیشتر تلاشی بوده برای فهم خود ریاضیات. این خیلی پیش از آن بوده که در ابتدای قرن بیستم علائق فلسفی ریاضی‌دانان به سبب آشکار شدن برخی ابهام‌ها و پارادوکس‌های ظاهری به ریاضیات جلب شود. علاقه فلاسفه به ریاضیات قدمتی بسیار بیشتر و دلایلی بسیار متنوع‌تر دارد [۴، ۱۰].

درمورد مبناگرایی نیز برخی فیلسوفان علم مانند هیلری پاتنم معتقدند که ریاضیات به مبنا احتیاج ندارد. دلیلش ساده است؛ مبنا باید مستحکم‌تر از خود بنا باشد، اما هیچ چیز مستحکم‌تری از خود ریاضیات وجود ندارد (البته خود پاتنم، دقیقاً بعد از این ادعا، به کار ساخت مبنايي ديگر

برای ریاضیات می‌پردازد [۱]!) در هر حال، باید توجه کرد که مبنای ریاضیات را می‌توان جزئی از خود ریاضیات دانست. کانتور یک آنالیزدان بود که در ادامه کار خود در سری‌های نامتناهی به مجموعه‌ها پرداخت [۱۱]. به قول هیلبرت، نظریه مجموعه‌ها بهشتی بوده که ریاضی‌دان‌ها نخواستند از آن بیرون روند. به علاوه، در مطالعه این نظریه روش‌های ریاضی موجود، به خصوص منطق ریاضی که قبلاً تدوین شده بود، به کار رفته است.

یکی دیگر از مزایای مهم استفاده از مبنای ریاضیات مجموعه‌ای، و شاید هر نوع مبنای دیگری در ریاضیات، تسهیل به کار بردن یک شاخه از ریاضیات در شاخه دیگر است. زمانی که ساختارهای مختلف ریاضی در بخش‌های مختلف ریاضیات بر اساس ایده مشابه مجموعه‌ای تعریف شوند، ترکیب آن‌ها با یکدیگر و استفاده از روش‌ها و مفاهیم یکی در دیگری آسان‌تر می‌شود. از طرف دیگر، مبنای ریاضی برای بررسی پرسش‌های بنیادی در مورد ریاضیات هم است. به قول برجس [۱۹]:

به هم پیوستگی [شاخه‌های مختلف ریاضیات] نشان می‌دهد که دیگر کافی نیست که هر شاخه از ریاضیات را به‌طور جداگانه بر مبنای دقیقی قرار دهیم ... برای تضمین اینکه دقت در فرایند انتقال مطالب از یک شاخه از ریاضیات به شاخه دیگر به خطر نیفتد، ضروری است که نقاط شروع شاخه‌های در حال اتصال لزوماً ... هماهنگ باشند. ... تنها راه واضح برای اطمینان از هماهنگی نقاط شروع ... در نهایت استخراج همه شاخه‌ها از یک نقطه شروع مشترک و یکپارچه است.

آنالیز ریاضی و مفهوم عدد حقیقی در اینجا موقعیتی ویژه دارد. اعداد طبیعی همواره مفاهیمی بدون ابهام در نظر گرفته شده‌اند، اما مبنای شهودی اعداد حقیقی کافی به نظر نمی‌رسید. در واقع، این ابهام‌ها منشأ پیدایش فلسفه‌های ریاضی در ابتدای قرن بیستم بوده است. ددکیند در مورد مفهوم پیوستگی می‌نویسد [۱۹]:

پس این پیوستگی شامل چه چیزی می‌شود؟ همه چیز باید به پاسخ این سؤال بستگی داشته باشد و تنها از طریق آن می‌توانیم مبنای علمی برای بررسی همه حوزه‌های پیوسته به دست آوریم.

از این نظر، تعریف مفهوم عدد حقیقی از طریق مفهوم مجموعه کارایی سطح بالاتری از نظریه مجموعه به عنوان مبانی ریاضیات را نشان می‌دهد. این تعریف باعث شد که مفهوم عدد حقیقی بر پایه‌ای محکم قرار بگیرد که تا قبل از آن از آن بی‌بهره بود.

مراجع

- [۱] پاتنم، ه.، ریاضیات بدون مبانی، در هیلری پاتنم: منتخب مقاله‌های فلسفی، تدوین کاوه لاجوردی، نشر نو، تهران، ۱۴۰۱.
- [۲] متیاس، ای. آر. دی، تجاهل بوریایی، ترجمه محسن خانی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۱ (۱۴۰۱)، شماره ۲، ۱۵۰-۱۲۹.
- [۳] منیری، مرتضی، اصل موضوع و تعریف در ریاضیات، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۱۱۱-۱۲۶.
- [۴] منیری، مرتضی، چرا فلسفه‌های سه‌گانه مشهور ریاضی مهم هستند؟، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۷ (۱۳۹۷)، شماره ۱، ۱-۱۳.
- [۵] منیری، مرتضی، ساختارگرایی در فلسفه ریاضی معاصر، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۷ (۱۳۹۷)، شماره ۲، ۳۷-۵۰.
- [6] Awodey, S., Structure in mathematics and logic: A categorical perspective, *Philos. Math.*, 4 (3) (1996), 209-237.
- [7] Benacerraf, P. & Putnam, H., eds., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [8] Bentzen, B., What types should not be, *Philos. Math.*, 1 (28) (2020), 60-76.
- [9] Button, T., Walsh, S. P., *Philosophy and Model Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [10] Hacking, I., *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [11] Hamkins, J. D., *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, MIT Press, Massachusetts, 2021.
- [12] Honzik, R., Large cardinals and the continuum hypothesis, in *The Hyperuniverse Project and Maximality*, C. Antos, S. D. Friedman, R. Honzik, C. Ternullo, eds., Birkhäuser, Cham, 2018.
- [13] Jech, T., *Set Theory, The Third Millennium Edition*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [14] Kunen, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [15] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, College Publications, Suwanee, 2009.
- [16] Ladyman, J., Presnell, S., Does homotopy type theory provide a foundation for mathematics?, *British J. Philos. Sci.*, 69 (2) (2018).
- [17] Lévy, A., Solovay, R. M., Measurable cardinals and the continuum hypothesis, *Israel J. Math.*, 5 (1967), 234-248.
- [18] Maddy, P., *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [19] Maddy, P., Set-theoretic foundations, in *Foundations of Mathematics*, A. E. Caicedo, J. Cummings, P. Koellner, Paul B. Larson, eds., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2016.
- [20] Väanänen, J., Second order logic or set theory?, *Bull. Symbolic Logic*, 18 (1) (2012), 91-121.
- [21] Väanänen, J., Second-order and higher-order logic, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, ed., 2021.

Set-theoretic Foundations of Mathematics and Its Challenges

M. Moniri¹

Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Iran

Abstract. In this article, we discuss in what sense set theory is considered as the foundations of mathematics. We will also discuss the challenges of this view. In this regard, we compare the first-order set theory with the second-order logic and also with the second-order set theory. Finally, we examine the question whether mathematics needs a foundation at all.

Keywords: set theory, foundations of mathematics, second-order logic, foundationalism

Article history: Received 4 April 2024; Accepted 6 July 2024

Article type: survey
