فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۵، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۵)، صص ۱۲۹ تا ۱۳۴

ماهیت موجودات ریاضی*

روبن هرش

ترجمهٔ زهره نقی‌زاده✉، اکبر هاشمی برزآبادی

چکیده. روبن هرش در این مقاله دیدگاه خود دربارهٔ ماهیت و نحوهٔ وجود موجودات ریاضی را به‌اختصار صورت‌بندی می‌کند. براساس این دیدگاه، موجودات ریاضی را می‌توان از سه جنبهٔ به‌هم‌پیوسته در نظر گرفت: اجتماعی، ذهنی و عصبی. ریاضیات از یک سو نهادی اجتماعی و تاریخی است که از طریق آموزش، تعامل، و متون ریاضی استمرار می‌یابد؛ از سوی دیگر، موجودات ریاضی موضوع تفکر و بازنمایی ذهنی افرادند و این فعالیت‌های ذهنی با فرایندهای عصبی در مغز همراه‌اند. هرش هیچ‌یک از این سه جنبه را مستقل از دو جنبهٔ دیگر نمی‌داند و در پایان، این تلقی چندوجهی و بین‌رشته‌ای را با نگرشی پدیدارشناختی مرتبط می‌سازد. ــ و.

در کتاب *ریاضیات واقعاً چیست؟* من، با الهام از نظر لزلی وایت[1] استدلال کردم که موجودات ریاضی اشیاء واقعی هستند و از عناصر فرهنگ به حساب می‌آیند، یعنی موجودات اجتماعی–فرهنگی و بین‌الاذهانی.[2]

عبارات و کلمات کلیدی: موجودات ریاضی، فلسفه انسان‌گرایانه، روش‌شناسی، بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضی، پدیدارشناسی

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۲/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۲/۷

*Hersh, R., On the nature of mathematical entities, in *Humanizing Mathematics and its Philosophy*, B. Sriraman, ed., Birkhäuser, Cham, 2017, 361-363.

۲. واژهٔ بین‌الاذهانی به مفاهیمی اشاره دارد که بین افراد مختلف ردوبدل شده و از طریق تعاملات اجتماعی، زبان، یا تجربیات مشترک ایجاد می‌شوند. به بیان ساده، چیزی که نه کاملاً ذهنی (شخصی) است و نه کاملاً عینی (مستقل از ذهن)، بلکه در ارتباط میان افراد شکل می‌گیرد مانند پول و هنجارهای اجتماعی. ــ م.

1. Leslie White

© ۱۴۰۵(انجمن ریاضی ایران)

doi: 10.30504/mct.2025.1554.2091

جزء مهم ریاضیات، یا همانی که گاهی ریاضیات محض به آن گفته می‌شود، مجموعهٔ وسیعی از بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات[۱] است. یک روش‌شناسی به نام اثبات ریاضی وجود دارد که معیار پذیرش یک ادعا یا قضیه در بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات است. پذیرش اثبات یک ادعا یا قضیه آن را از نظر اعتبار به درجهٔ بالایی می‌رساند و استناد به آن را در اثبات‌های دیگر میسر می‌کند. گاهی گفته می‌شود که قضیه‌های پذیرفته‌شده کاملاً قطعی هستند. این فکر ساده‌لوحانه است. بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات تحت بازبینی و اصلاح مداوم قرار می‌گیرد. بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات یک دستاورد انسانی است و مانند تمام دستاوردهای انسانی هیچ‌گاه نمی‌تواند ادعا کند که به کمال نهایی رسیده است.

من این نظرات را براساس تجربیات شخصی خودم و دیگران مطرح کرده‌ام، یعنی براساس مشاهدهٔ تجربی، که گاهی به‌اشتباه به‌عنوان «درون‌نگری» به آن بی‌توجهی می‌شود. همچنین من این نظر عرفی را می‌پذیرم که افکار ما رویدادهایی در مغزمان هستند،[۲] دیدگاهی که امروزه عصب‌شناسان پیرو استانیسلاس دِئان[۳] آن را شرح و بسط داده‌اند.

دو دیدگاه دربارهٔ موجودات ریاضی، یکی درحکم رویدادهای عصبی و دیگری رویدادهای ذهنی، با یکدیگر در تضاد یا رقابت نیستند، بلکه دو دیدگاه یا روش متفاوت برای دستیابی به یک چیز هستند.

اکنون می‌خواهم بگویم که سه جنبه یا دیدگاه دربارهٔ «وجودها»ی موجودات ریاضی ــ اجتماعی، ذهنی، و عصبی ــ به لحاظ منطقی غیرقابل اجتناب‌اند و مقدم بر تأیید تجربی آن‌ها است.

---

۱. established mathematics؛هرش در کتاب [۵] می‌گوید «بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات» مجموعه‌ای از ریاضیات است که به عنوان پایه‌ای برای اثبات‌های ریاضی‌دانان پذیرفته شده است. این مجموعه شامل گزاره‌های اثبات‌شده در «متون علمی» و همچنین برخی گزاره‌های ساده‌تر است که به‌قدری پذیرفته شده‌اند که نیازی به ارجاع به متون علمی ندارند. هستهٔ مرکزی بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات نه تنها شامل حساب، هندسه، جبرخطی و چندجمله‌ای‌ها و حساب دیفرانسیل و انتگرال است، بلکه عناصری از نظریهٔ توابع، نظریه گروه‌ها، توپولوژی، نظریهٔ اندازه، فضاهای باناخ و هیلبرت و معادلات دیفرانسیل ــ که معمولاً در دو سال اول تحصیلات تکمیلی آموزش داده می شوند ــ را نیز در بر می‌گیرد. افزون بر این، برای خلق ریاضیات جدید، فرد باید بر بخش‌هایی از بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ دانش در یک حوزهٔ تخصصی خاص نیز تسلط یابد. هر ریاضی‌دان بر بخش قابل‌توجهی از بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات تسلط‌یافته و به آن اطمینان کامل دارد. او یک ریاضی‌دان خبره به حساب نمی‌آید مگر اینکه به چنین اطمینان و تسلطی دست یافته باشد. اطمینان به بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات برای یک ریاضی‌دان به همان میزان ضروری است که اطمینان به مکانیک و فوت‌وفن یک پیانو برای یک نوازنده چیره‌دست یا اطمینان به ویژگی‌های توپ و چوب بیسبال برای یک بازیکن حرفه‌ای بیسبال. اگر نگران این موضوع باشید، حتی وارد بازی نشده‌اید. بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات شبکه‌ای پیچیده و درهم‌تنیده از مفاهیم دو طرفه و کمکی است که از طریق استدلال‌های معقول و قیاسی به هم متصل شده‌اند. انتشار یک نتیجهٔ تحقیقاتی به معنای افزودن چیزی جدید به مجموعهٔ بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات است. ــ م. ۲. براساس این دیدگاه، افکار ما چیزی جدا از مغز ما یا کاملاً ذهنی و مستقل نیستند، بلکه نتیجهٔ فعالیت‌های زیستی و فیزیکی مغز به شمار می‌آیند و به شکل رویدادهایی ملموس در ساختار مغز ما اتفاق می‌افتند و این فعالیت‌ها را می‌توان با ابزارهای علمی ثبت و مشاهده کرد. ــ م.

3. Stanislas Dehaene

نخست اینکه، هیچ شکی وجود ندارد که ریاضیات تاریخی دارد، یعنی ریشه‌دار و نهادی شده است، یعنی به‌صورت مکتوب نشر می‌یابد، و یعنی مطالب آن آموزش داده می‌شود. خلاصه اینکه هیچ‌کس شکی ندارد که ریاضیات در حکم یک نهاد اجتماعی یک واقعیت است.

علاوه‌بر این، هیچ‌کس شکی ندارد که افراد موجودات ریاضی ــ اعداد، مثلث‌ها، توابع، فضاها و غیره ــ را می‌فهمند و فکر کردن دربارهٔ آن‌ها عملی و ثمربخش است. ما با این موجودات ذهنی کار می‌کنیم، آن‌ها را دستکاری می‌کنیم، به چیز دیگری تبدیل می‌کنیم، ویژگی‌های آن‌ها را کشف می‌کنیم، و احکامی را در مورد آن‌ها اثبات می‌کنیم که معمولاً «قضیه» نامیده می‌شوند. ازاین‌رو، منطقی نخواهد بود که انکار کنیم چیزی به نام مدل‌های ذهنی از موجودات ریاضی وجود دارد. وجود آن‌ها در میان حقایق انکارناپذیر و مسلم جهان منطقاً اجتناب‌ناپذیر است.

و باید این را نیز پذیرفت که تفکر در«درون» یک موجود انسانی که در حال فکر کردن است ــ و عمدتاً در سیستم عصبی او، به‌ویژه مغز او ــ صورت می‌گیرد.

بنابراین، موجودات ریاضی وجود دارند و سه نمود اصلی دارند: اجتماعی، ذهنی، و عصبی. اما هیچ‌یک از این سه قائم به خود نیست. وجود اجتماعی موجودات ریاضی به مشارکت ذهن و مغز افراد وابسته است؛ در غیر این صورت، هیچ موجود ریاضی در افواه یا بین‌الاذهان وجود نخواهد داشت.

از سوی دیگر، وجود الگوهای ذهنی در اذهان فردی از طریق مشارکت در فعالیت‌های اجتماعی به وجود می‌آید. آموزش، تعامل با همنوعان در مدرسه یا همکاری کردن، و مطالعهٔ کتاب‌ها و مقالات همگی بخشی از وجود اجتماعی ریاضیات است که وجود مدل‌های ذهنی فردی را ممکن می‌سازد.

و وجود فرآیندهای عصبی متناظر با موجودات ریاضی نتیجهٔ تفکر و یادگیری فرد است. ردپای عصبی مفهومی مانند تابع نمایی در مغز دردسترس یا حاضر است نه به دلایل ژنتیکی یا بیولوژیکی بلکه به این دلیل که آن مغزْ مغز شخصی است که تابع نمایی را یاد گرفته است و در مورد آن تفکر می‌کند.[۱]

تابع نمایی یک چیز یا شیء منفرد با ویژگی‌های بسیار است. در کتاب و رایانه ثبت و ضبط می‌شود. این ثبت و ضبط‌ها ریاضیات است و نه صرفاً نشانه‌هایی بی‌معنا، زیرا برای افراد قابل‌فهم‌اند

۱. منظور این است که اثری از مفهوم تابع نمایی یا هر مفهوم ریاضیاتی دیگر در مغز ثبت می‌شود، مانند یک نقشه یا الگوی عصبی، که وقتی به تابع نمایی فکر می‌کنیم فعال می‌شود. ما با دانش تابع نمایی به دنیا نیامده‌ایم. این چیزی نیست که در دی‌ان‌ای ما باشد یا از طبیعت مغزمان بیاید. تنها دلیل وجود این الگو در مغز این است که حین مطالعه ذهن با آن مواجه شده است. اگر فردی هیچ وقت ریاضی نخوانده باشد، چنین ردپا و الگوی عصبی‌ای در مغز خود نخواهد داشت. یادگیریِ یک مفهوم جدید ریاضی مسیرهای عصبی جدیدی در مغز شکل می‌دهد. این نشان‌دهندهٔ انعطاف‌پذیری مغز و نقش یادگیری در شکل‌گیری ساختارهای عصبی است.

و معنا دارند. واقعیت اصلی ریاضیات دست‌سازه‌های غیرطبیعی آن نیست، بلکه خودآگاهی انسان از آن است که به‌شکل تفکر فردی، مفاهیم بین‌الاذهانی، و پایگاه یا هم‌ردیف عصبی در مغز نمود پیدا می‌کند.[۱] هیچ‌یک از این سه نمود اصلی نمی‌تواند مستقل از دوتای دیگر موجود باشد. با دخیل کردن این جنبهٔ عصب‌شناختی می‌توان از شدت ترس طرفدار مکتب افسانه‌گرایی یا نام‌گرایی کاست از اینکه می‌ترسد «ریاضیات نمی‌تواند واقعی باشد زیرا فقط چیزهای فیزیکی، یا قابل‌مشاهده با ابزار فیزیکی، واقعاً واقعی هستند.» فعالیت‌های مغز چیزهای فیزیکی هستند. رد پا و آثار اعیان ریاضی در مغز جلوه‌هایی از افکار ریاضی هستند که ما نحوهٔ مشاهدهٔ فیزیکی آن‌ها را می‌دانیم. ادلّهٔ تجربی که من در جای دیگر ارائه کرده‌ام مبنی‌بر اینکه ما مدل‌هایی ذهنی از موجودات ریاضی داریم، در حال حاضر تأییدی بر این ادعا محسوب می‌شود، ادعایی که پیش از این منطقاً غیرقابل‌انکار و برای همگان مسلّم بود.

فیلسوف ممکن است تعریف یا توصیفی از ریاضیات طلب کند فراتر از صرف وجود مجموعهٔ بدنهٔ تثبیت‌شدهٔ ریاضیات، کار و دانش اهل ریاضیات، و ردپای آن‌ها در مغز. این همان انتظاری است که ساختارگرایان، صورت‌گرایان، یا افلاطونیان دارند.

نگاه جامع و بین‌رشته‌ای که من اینجا عرضه کردم در سال‌های اخیر تحت تأثیر چندین عامل شکل گرفته است: مقالات خودم درباره پلورالیسم که در رُم و کلکته ارائه کردم، کتاب‌های دانشمندان عصب‌شناسی مانند آنتونیو دِمازیو[۲] و استانیسلاس دِئان، و کتاب عالی مقدمه بر پدیدارشناسی نوشتهٔ رابرت سوکولاوفسکی[۳].

از دیدگاه پدیدارشناسی، این یک اصل اساسی و معمولی است که در جهان اشیائی وجود دارند که هویتی دارند، وجودی قابل‌شناسایی و پایدار، که به انحاء متعددی نمود پیدا می‌کند. این چندگانگی‌های نمودْ تناقض منطقی نیست. آن‌ها راه‌های گوناگون ما برای شناختن چیزها هستند ــ هر نوع چیزی ــ از جمله مفاهیم ریاضی که می‌توانند به شکل پدیده‌های فرهنگی، تجربه‌های شخصی، یا فرایندهایی در جسم و جان ما ظاهر شوند.

یادداشت مترجمان روبن هرش (۱۹۲۷–۲۰۲۰)، ریاضی‌دان و فیلسوف آمریکایی، با نگاهی منتقدانه بر مکاتب سنتی فلسفهٔ ریاضیات، یعنی افلاطون‌گرایی و صورت‌گرایی، دیدگاه انسان‌گرایانهٔ

۱. در زمان فکر کردن به یک مفهوم ریاضی فعالیت‌هایی در مغز (مانند روشن شدن نورون‌ها) اتفاق می‌افتد که گویی همتای آن مفهوم در دنیای عصبی و فیزیکی مغز است. در واقع، الگوهای خاصی از فعالیت عصبی شکل می‌گیرند که این الگوها همان تجلی فیزیکی آن فکر ریاضی در مغز ما هستند.

2. Antonio Damasio 3. Robert Sokolowski

خود را در سال ۱۹۸۰ مطرح نمود. دیدگاهی که از باارزش‌ترین و شاید متقاعدکننده‌ترین دیدگاه‌های فلسفی متأخر در تقابل با فلسفه‌های برجستهٔ سنتی است. او معتقد است ریاضیات نه کشفِ حقایقی ازلی در جهانی مجرد، بلکه یک فعالیت انسانی، پدیده‌ای اجتماعی و بخشی از فرهنگ بشری است که در طول تاریخ تکامل یافته است. به باور او نیازی به جستجوی معنایی پنهان یا تعریف ریاضیات فراتر از معنای اجتماعی–تاریخی–فرهنگی آن نیست. او وجود سه جنبه یا دیدگاه موجودیت‌های ریاضی ــ اجتماعی، ذهنی و عصبی ــ را از نظر منطقی غیرقابل اجتناب می‌داند و بر این باور است که این دیدگاه بین‌رشته‌ای او دیدگاهی پدیدارشناسانه است. او معتقد است موجودات ریاضی توسط انسان‌ها ساخته می‌شوند، اما نه خودسرانه؛ بلکه از تعامل با موجودات ریاضی موجود و از نیازهای علم و زندگی روزمره.

هرش استدلال می‌کند که افلاطون‌گرایی با نخبه‌گرایی پیوند دارد و برای توجیه این ادعا استفاده می‌شود که «بعضی افراد ذاتاً نمی‌توانند ریاضی یاد بگیرند». در مقابل، فلسفهٔ انسان‌گرایانه ریاضیات را با مردم، جامعه و تاریخ پیوند می‌دهد و با آرمان‌های برابری‌خواهانه مانند سوادآموزی همگانی و دسترسی جهانی به دانش سازگارتر است.

مشهورترین اثر هرش کتاب تجربهٔ ریاضی است که با همکاری فیلیپ جی. دیویس نوشته شد و در سان ۱۹۸۱ جایزهٔ ملی کتاب علوم را دریافت کرد. از دیگر آثار مهم او می‌توان به کتاب ریاضیات واقعاً چیست؟ به سال ۱۹۹۷ اشاره کرد. او تا پایان عمر به تدریس و نوشتن ادامه داد و به عنوان پلی میان ریاضیات و فلسفه‌ای قابل‌فهم و انسانی شناخته می‌شد.

چند منبع فارسی زیر را برای خواننده‌ای که مایل است با پیشینهٔ دیدگاه هرش و بحث‌های مرتبط بیشتر آشنا شود ذکر می‌کنیم.

- نقی‌زاده، زهره، تبیین رهیافتی جامعه‌شناختی به ریاضیات انسان‌گرایانه، مطالعات میان‌رشته‌ای در علوم انسانی، **۱۸** (۱۳۶۹)، شماره ۱، ۳۹-۶۹.
- هرش، روبن، بیایید فلسفهٔ ریاضی تدریس کنیم!، ترجمهٔ محمدصالح مصلحیان و بهزاد بوستانی، نشر ریاضی، **۷** (۱۳۷۴)، شماره ۱، ۴۳-۴۶.
- هرش، روبن، تفکر مستقل، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۲۲** (۱۳۸۲)، شماره ۱، ۵۵–۶۰.

مراجع

[1] Damasio, A., *Looking for Spinoza: Joy, Sorrow, and the Feeling Brain*, Harcourt, New York, 2012.

[2] Damasio, A., *Self Comes to Mind: Constructing the Conscious Brain*, Random House, New York,

2010.
[3] Dehaene, S., *Consciousness and the Brain*, Penguin Books, New York, 2014.
[4] Friend, M., *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics*, Springer, New York, 2013.
[5] Hersh, R., *Experiencing Mathematics: What Do We Do, When We Do Mathematics?*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
[6] Sokolowski, R., *Introduction to Phenomenology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
[7] White, L., The locus of mathematical reality; An anthropological footnote, in *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, R. Hersh, ed., Springer, New York, 2006, 304–319.

زهره نقی زاده: دانشگاه علم و فناوری مازندران، گروه ریاضی
رایانامه: z.naghizadeh@mazust.ac.ir
اکبر هاشمی برزآبادی: دانشگاه علم و فناوری مازندران، گروه ریاضی
رایانامه: borzabadi@mazust.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 45, Number 1, Spring/Summer 2026, Pages 129–134
doi: 10.30504/mct.2025.1554.2091

On the Nature of Mathematical Entities*

R. Hersh
Translated by Z. Naghizadeh[1], A. Hashemi Borzabadi[2]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Science and Technology of Mazandaran, Iran

Abstract. In this article, Reuben Hersh concisely formulates his view on the nature and mode of existence of mathematical entities. According to this view, mathematical entities can be considered from three interconnected aspects: social, mental, and neural. On the one hand, mathematics is a social and historical institution that is perpetuated through education, interaction, and mathematical texts; on the other hand, mathematical entities are the objects of individuals' thought and mental representation, and these mental activities are accompanied by neural processes in the brain. Hersh does not regard any of these three aspects as independent of the other two, and in conclusion, he relates this multifaceted and interdisciplinary conception to a phenomenological attitude.

Keywords: mathematical entities, humanistic philosophy, methodology, the body of established mathematics, phenomenology
Article history: Received 21 April 2025; Accepted 27 April 2025
Article type: translation

* Hersh, R., On the nature of mathematical entities, in *Humanizing Mathematics and its Philosophy*, B. Sriraman, ed., Birkhäuser, Cham, 2017, 361-363.

1. z.naghizadeh@mazust.ac.ir
2. borzabadi@mazust.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license