

تعمیم فرمول‌های دو برابر زاویه برای توابع مثلثاتی*

گ. بروئوور

ترجمه امیرمحمد مؤمنی کوهستانی✉، یاسمن نژادحسینیان

چکیده. فرمول دو برابر زاویه برای تابع سینوس، یعنی $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ بسیار معروف است. با جایگزینی $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$ در $\cos \theta$ در این فرمول می‌بینیم که $\sin 2\theta$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو تابع سینوس نوشت، که تابع سینوس دوم با استفاده از تغییر فاز زاویه θ و تقارن نسبت به محور افقی از تابع سینوس پایه به دست آمده است. در این مقاله نشان خواهیم داد که برای هر عدد طبیعی n ، $\sin n\theta$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب n تابع سینوس نوشت که فقط شامل تغییرات فاز زاویه θ و یک تقارن نسبت به محور افقی است. فرمول‌های مشابهی نیز می‌توان برای توابع کسینوس و تانژانت یافت.

۱ مقدمه

دیوید ووجل، یکی از همکارانم در دانشگاه ایالتی میدل جورجیا، توجه‌ام را به این اتحاد جالب جلب کرد

$$\cos(2^\circ)\cos(4^\circ)\cos(8^\circ) = \frac{1}{8}.$$

این اتحاد برایم بسیار جذاب بود، زیرا هیچ‌یک از عوامل این ضرب عددی گویا نیستند، اما حاصل ضرب عددی گویاست. این اتحاد را با جرمی آیکین، یکی دیگر از همکارانم، در میان گذاشتم و

عبارات و کلمات کلیدی: سینوس، فرمول دو برابر زاویه، مثلثات، کسینوس
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۷/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۱

*Brouwer, G., A Generalization of the angle doubling formulas for trigonometric functions, *Math. Mag.*, **90** (1) (2017), 12-18.

او چند سؤال جالب مطرح کرد که یکی از آن‌ها این بود که آیا حاصل ضرب‌های مشابه دیگری هم وجود دارند که بیش از سه عامل داشته باشند. به عبارت دقیق‌تر و رسمی‌تر آیا اعداد صحیحی وجود دارند که $90^\circ > i_n > \dots > i_2 > i_1 > 0^\circ$ و برای $n \geq 3$ حاصل ضرب $\prod_{k=1}^n \cos(i_k^\circ)$ عددی گویا باشد؟ این نوع حاصل ضرب‌ها را حاصل ضرب‌های گویای کسینوس‌های صحیح می‌نامیم.

تصمیم گرفتم به دنبال یافتن نمونه‌های دیگری از چنین حاصل ضرب‌هایی باشم و اولین کارم استفاده از کامپیوتر برای یافتن آن‌ها بود. در کمال تعجب، تعداد زیادی از آن‌ها وجود داشت: برای مثال، کامپیوتر 6° حاصل ضرب گویای کسینوس‌های صحیح را پیدا کرد که پنج عامل داشتند. با بررسی‌های بیشتر، متوجه شدم که معادله اصلی با نام قانون ماری نیز معروف است. این نام را ریچارد فاینمن فیزیک‌دان انتخاب کرده است، زیرا او این اتحاد را در دوران کودکی خود از پسری به نام ماری جیکوبز [۳] یاد گرفته بود.

در [۱] نشان داده شده است که قانون ماری یک حالت خاص از رابطه‌های از نوع ماری است،

یعنی رابطه‌های زیر

$$2^k \prod_{j=0}^{k-1} \cos(2^j x) = \frac{\sin(2^k x)}{\sin x}$$

به‌ازای $x = 2^\circ$ و $k = 3$. در [۴، ۵] به‌ترتیب یک اثبات هندسی بسیار ظریف برای قانون ماری و یک فرمول دیگر از نوع ماری داده شده است. متأسفانه، فرمول‌ها از نوع ماری تنها بخش کوچکی از حاصل ضرب‌های گویای کسینوس‌های صحیح هستند و روش‌های به کار رفته در اثبات هندسی برای تعمیم به سایر حاصل ضرب‌های گویای کسینوس‌های صحیح دشوار است. با این حال، در حالی که داشتیم حاصل ضرب‌ها را با دقت بیشتری بررسی می‌کردم به نظرم رسید که به یک الگوی جالب برای تابع $\sin(n\theta)$ رسیده‌ام

$$\sin(3\theta^\circ) = 4 \sin(\theta^\circ) \sin(60^\circ - \theta^\circ) \sin(60^\circ + \theta^\circ),$$

$$\sin(4\theta^\circ) = 8 \sin(\theta^\circ) \sin(45^\circ - \theta^\circ) \sin(45^\circ + \theta^\circ) \sin(90^\circ - \theta^\circ),$$

$$\sin(5\theta^\circ) = 16 \sin(\theta^\circ) \sin(36^\circ - \theta^\circ) \sin(36^\circ + \theta^\circ) \sin(72^\circ - \theta^\circ) \sin(72^\circ + \theta^\circ).$$

خیلی زود متوجه شدم که این الگو برای تابع سینوس می‌تواند به عنوان تعمیمی از فرمول دو برابر شدن زاویه لحاظ شود

$$\sin(2\theta^\circ) = 2 \sin(\theta^\circ) \sin(90^\circ - \theta^\circ).$$

در این مقاله، از یک روش تحلیلی برای اثبات فرمول‌های زاویه چنگانه فوق و سایر فرمول‌های مشابه استفاده خواهیم کرد.

۲ نتایج

در این مقاله، زاویه‌ها برحسب رادیان هستند مگر اینکه مشخصاً خلاف آن را ذکر کنیم.

قضیه ۱. برای هر عدد صحیح فرد n داریم

$$\sin(n\theta) = 2^{n-1} \sin(\theta) \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\sin\left(\frac{m}{n}\pi + \theta\right) \sin\left(\frac{m}{n}\pi - \theta\right) \right].$$

اثبات. با استفاده از قضیه دموآور داریم

(۱)

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) (i \sin(\theta))^k$$

با مقایسه جزء مختلط دو طرف معادله، برای عدد فرد n خواهیم داشت

$$\sin(n\theta) = \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-(2j+1)}(\theta) \sin^{2j+1}(\theta). \quad (2)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ و فاکتورگیری $\sin(\theta)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\sin(n\theta) = \sin(\theta) \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (1 - \sin^2(\theta))^{\frac{n-1}{2}-j} \sin^{2j}(\theta) \quad (3)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای برای n فرد، می‌توان $\sin(n\theta)$ را به صورت حاصل ضرب $\sin \theta$ در یک چندجمله‌ای برحسب $\sin^2(\theta)$ نوشت. برای اینکه بفهمیم این چندجمله‌ای چه شکلی دارد، از قضیه دوجمله‌ای برای بسط توان‌های عبارت $(1 - \sin^2 \theta)$ استفاده می‌کنیم. پس از ساده‌سازی به

رابطه زیر می‌رسیم

(۴)

$$\sin(n\theta) = \sin \theta \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}-j} (-1)^{\frac{n-1}{2}-m} \binom{n}{2j+1} \binom{\frac{n-1}{2}-j}{m} \sin^{n-1-2m} \theta$$

بنابراین،

$$\sin(n\theta) = \sin \theta P_{\frac{n-1}{2}}(\sin^2 \theta) \quad (5)$$

که در آن $P_{\frac{n-1}{2}}$ یک چندجمله‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود

(۶)

$$P_{\frac{n-1}{2}}(\sin^2 \theta) = \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}-j} (-1)^{\frac{n-1}{2}-m} \binom{n}{2j+1} \binom{\frac{n-1}{2}-j}{m} \sin^{n-1-2m} \theta.$$

با در نظر گرفتن جمله‌ای که $m = 0$ است در رابطه (۵) می‌توان نتیجه گرفت که درجه

چندجمله‌ای $P_{\frac{n-1}{2}}$ برابر با $\frac{n-1}{2}$ است و ضریب جمله پیشروی آن برابر با

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}. \quad (7)$$

از آنجا که برای هر عدد صحیح m داریم $\sin(m\pi) = 0$ ، از رابطه ۵ نتیجه می‌شود که برای هر عدد صحیح ناصفر m که مضربی از n نباشد، $\sin^2\left(\frac{m}{n}\pi\right)$ یک ریشه برای $P_{\frac{n-1}{2}}$ است، درحالت خاص، برای $\frac{n-1}{2}, m = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ ریشه متمایز داریم. بنابراین، می‌توان رابطه (۵) را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\sin(n\theta) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin(\theta) \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\sin^2(\theta) - \sin^2\left(\frac{m}{n}\pi\right) \right]. \quad (8)$$

برای به دست آوردن نتیجه مطلوب باید رابطه (۸) را بازنویسی کنیم. با استفاده از اتحادهای

جمع و تفاضل برای تابع سینوس می‌بینیم که برای هر u و هر x رابطه زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \sin(u+x) \sin(u-x) &= (\sin u \cos x + \sin x \cos u)(\sin u \cos x - \sin x \cos u) \\ &= \sin^2 u \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 u \\ &= \sin^2 u (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x (1 - \sin^2 u) \\ &= \sin^2 u - \sin^2 x. \end{aligned} \quad (9)$$

در نتیجه، می‌توان رابطه (۸) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\sin(n\theta) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin \theta \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\sin \left(\theta - \frac{m\pi}{n} \right) \sin \left(\theta + \frac{m\pi}{n} \right) \right]. \quad (10)$$

اکنون با وارد کردن ضریب $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ به داخل حاصل ضرب و با توجه به اینکه تابع سینوس یک تابع فرد است (یعنی $\sin(-x) = -\sin(x)$) به نتیجه مطلوب می‌رسیم. $\square$

مثال. قضیه ۱ را می‌توان برای اثبات قانون ماری به کار برد. با جایگذاری $n = 3$ و $\theta = 10^\circ$ داریم

$$\sin(3 \times 10^\circ) = 2^{3-1} \sin(10^\circ) \sin(60^\circ - 10^\circ) \sin(60^\circ + 10^\circ)$$

یا

$$\frac{1}{2} = 4 \cos(80^\circ) \cos(40^\circ) \cos(20^\circ).$$

قضیه ۲. برای هر عدد صحیح زوج n داریم

$$\sin(n\theta) = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \left[\sin \left(\frac{m-1}{n} \pi + \theta \right) \sin \left(\frac{m}{n} \pi - \theta \right) \right].$$

اثبات. با قرار دادن $n = 2k$ خواهیم داشت

$$\sin(2k\theta) = 2^{2k-1} \prod_{m=1}^k \sin \left(\frac{m-1}{k} \frac{\pi}{2} + \theta \right) \prod_{m=1}^k \sin \left(\frac{m}{k} \frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (11)$$

که برای هر $k \in \mathbb{N}$ برقرار است.

اثبات رابطه (۱۱) را با استقراء انجام می‌دهیم. برای $k = 1$ این رابطه به کمک فرمول دو برابر زاویه تابع سینوس برقرار است، زیرا

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

حال فرض کنیم (۱۱) برای هر $k \leq n$ برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم (۱۱) برای $k = n + 1$ نیز برقرار است. با استفاده از فرمول دو برابر زاویه برای تابع سینوس داریم

$$\sin [2(n+1)\theta] = 2 \sin [(n+1)\theta] \sin \left[\frac{\pi}{2} - (n+1)\theta \right]. \quad (12)$$

دو حالت وجود دارد که باید بررسی شوند. حالت ۱: $n + 1$ زوج است.

در این حالت، می‌توان از فرض استقراء با $k = \frac{n+1}{2}$ استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$\sin[(n+1)\theta] = 2^n \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{2m-1}{n+1} \frac{\pi}{2} + \theta\right) \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{2m}{n+1} \frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (13)$$

که پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sin\left[\frac{\pi}{2} - (n+1)\theta\right] &= \sin\left[2 \cdot \frac{n+1}{2} \left(\frac{\pi/2}{n+1} - \theta\right)\right] \\ &= 2^n \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{2m-1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{2m}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right). \end{aligned} \quad (14)$$

مشاهده می‌کنیم که عوامل رابطه (۱۳) مضارب زوج $\frac{\pi/2}{n+1}$ را دارند، و عوامل رابطه (۱۴) مضارب فرد $\frac{\pi/2}{n+1}$ را شامل می‌شوند. بنابراین، با ضرب دو عبارت (۱۳) و (۱۴) در هم به رابطه زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \sin[2(n+1)\theta] &= 2 \sin[(n+1)\theta] \sin\left[\frac{\pi}{2} - (n+1)\theta\right] \\ &= 2 \cdot 2^n \cdot 2^n \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{m-1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{m}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} - \theta\right). \end{aligned} \quad (15)$$

با این کار، گام استقراء برای حالت $n + 1$ زوج به پایان می‌رسد.

حالت ۲: $n + 1$ فرد است.

در این حالت، از قضیه ۱ استفاده می‌کنیم و می‌بینیم که $\sin[(n+1)\theta]$ برابر است با

$$\begin{aligned} 2^{n+1-1} \sin \theta \prod_{m=1}^{\frac{n+1-1}{2}} \sin\left(\frac{m}{n+1} \pi + \theta\right) \prod_{m=1}^{\frac{n+1-1}{2}} \sin\left(\frac{m}{n+1} \pi - \theta\right) \\ = 2^n \sin \theta \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{2m}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right) \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{2m}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} - \theta\right), \end{aligned} \quad (16)$$

و پس از کمی ساده سازی $\sin \left[\frac{\pi}{2} - (n+1)\theta \right]$ برابر است با

$$2^n \sin \left(\frac{\pi/2}{n+1} - \theta \right) \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \sin \left(\frac{2m+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \times \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \sin \left(\frac{2m-1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} + \theta \right). \quad (۱۷)$$

□ گام استقراء را می توان با استفاده از استدلالی مشابه حالت اول تکمیل کرد.

مثال. با $n = 6$ و $\theta = 5^\circ$ ، به معادله زیر می رسم:

$$\sin(5^\circ) \sin(25^\circ) \sin(35^\circ) \sin(55^\circ) \sin(65^\circ) \sin(85^\circ) = \frac{1}{64}. \quad (۱۸)$$

توجه داشته باشید که تمام زاویه های موجود در معادله (۱۸) مضرب های فرد عدد $\frac{\pi}{2}$ رادیان هستند. همان طور که در [۵] آمده است، اگر کسر $\frac{r}{q}$ به ساده ترین شکل خود باشد، مقادیر $\cos \left(\frac{r\pi}{q} \right)$ را می توان فقط با استفاده از اعمال حسابی پایه و استخراج ریشه های متناهی اعداد گویای حقیقی بیان کرد اگر و تنها اگر $q = 2^k p_1 p_2 \dots p_s$ که در آن k عدد صحیحی نامنفی است و $p_1 p_2 \dots p_s$ مجموعه ای متناهی (شاید تهی) از اعداد اول فرمای متمایز است. این نتیجه ای از قضیه ای است که گاوس و وانسئل اثبات کرده اند [۲، ۶]. اگرچه عدد ۳ یک عدد اول فرما محسوب می شود، اما از آنجا که $3^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ هیچ یک از عوامل موجود در معادله (۱۸) فرم بسته ای به صورت ترکیبی از اعمال حسابی پایه و استخراج ریشه های متناهی روی اعداد گویای حقیقی ندارند.

قضیه ۳. برای هر عدد صحیح فرد n ،

$$\cos(n\theta) = 2^{n-1} \cos(\theta) \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos \left(\frac{m}{n} \pi + \theta \right) \cos \left(\frac{m}{n} \pi - \theta \right) \right].$$

□ اثبات. از قضیه ۱ با جایگذاری $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ استفاده کنید.

قضیه ۴. برای هر عدد صحیح زوج n ،

$$\cos(n\theta) = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(\frac{n+1-2m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right. \\ \left. \times \cos \left(\frac{n+1-2m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]. \quad (۱۸)$$

اثبات. از قضیه ۲ با جایگذاری $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ استفاده کنید. $\square$

ملاحظه. توجه کنید که این قضیه یک فرمول دوبرابر زاویه برای کسینوس به دست می‌دهد، زیرا

$$\cos(2\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

با ترکیب نتایج قضیه‌های ۱ و ۳ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۵. برای عدد صحیح فرد n ,

$$\tan(n\theta) = \tan(\theta) \prod_{m=1}^{n-1} \left[\tan\left(\frac{m}{n}\pi + \theta\right) \tan\left(\frac{m}{n}\pi - \theta\right) \right].$$

مثال. با جایگذاری $n = 3$ و $\theta = 20^\circ$ ، داریم

$$\tan(60^\circ) = \tan(20^\circ) \tan(40^\circ) \tan(80^\circ).$$

با ضرب دو طرف تساوی بالا در $\tan(60^\circ)$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\tan(20^\circ) \tan(40^\circ) \tan(60^\circ) \tan(80^\circ) = 3.$$

متأسفانه به دلیل تفاوت‌های قضیه‌های ۲ و ۴، فرمول برای $\tan(n\theta)$ وقتی n عددی زوج باشد، به سادگی حالت فرد نخواهد بود. رابطه بازگشتی زیر برای $\tan(n\theta)$ را می‌توان از فرمول جمع و تفریق تانژانت به دست آورد

$$\tan(n\theta) = \frac{\tan[(n-1)\theta] + \tan\theta}{1 - \tan[(n-1)\theta] \tan\theta}. \quad (19)$$

قضیه ۶. برای عدد صحیح زوج n ,

$$\tan(n\theta) = \frac{\tan(\theta) \prod_{m=1}^{n-2} \tan\left(\frac{m\pi}{n-1} + \theta\right) \prod_{m=1}^{n-2} \tan\left(\frac{m\pi}{n-1} - \theta\right) + \tan\theta}{1 - \tan^2(\theta) \prod_{m=1}^{n-2} \tan\left(\frac{m\pi}{n-1} + \theta\right) \prod_{m=1}^{n-2} \tan\left(\frac{m\pi}{n-1} - \theta\right)}.$$

کاربردها

فرمول‌های دو برابر زاویه‌ها در قضیه‌های ۳ و ۴ را می‌توان برای تولید بسیاری از حاصل‌ضرب‌های گویای کسینوس‌های صحیح به کار برد. نکته در این است که n و θ (برحسب درجه) را به گونه‌ای

انتخاب کنیم که $\cos(n\theta)$ عددی گویا باشد و n به طور مساوی 90° را تقسیم کند. برای مثال، اگر $n = 5$ و $\theta = 12^\circ$ در قضیه ۴ انتخاب شود، در نهایت به رابطه زیر می‌رسیم

$$\cos(12^\circ) \cos(24^\circ) \cos(48^\circ) \cos(84^\circ) = \frac{1}{16}.$$

فرمول‌های دو برابر زاویه‌ها در قضیه‌های ۱ و ۲ نیز می‌توانند برای محاسبه برخی حاصل ضرب‌های سینوس مورد استفاده قرار گیرند، همان‌طور که در نتیجه زیر نشان داده شده است.

نتیجه. برای $n \geq 3$,

$$\prod_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sin\left(m \cdot \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad (20)$$

اثبات. اگر n زوج باشد،

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} - 1$$

و می‌توانیم از قضیه ۲ استفاده کنیم و رابطه زیر را به دست آوریم

(۲۱)

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{m}{n}\pi + \theta\right) \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{m}{n}\pi - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

از دو طرف وقتی $\theta \rightarrow 0$ حد می‌گیریم و به رابطه زیر می‌رسیم

$$n = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) \quad (22)$$

هر دو طرف معادله (۲۲) را بر 2^{n-1} تقسیم کرده و جذر دو طرف را می‌گیریم تا نتیجه برای حالتی که n زوج است به دست آید.

اگر n فرد باشد،

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2},$$

و می‌توانیم از قضیه ۱ استفاده کنیم و رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 2^{n-1} \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{m}{n}\pi + \theta\right) \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{m}{n}\pi - \theta\right). \quad (23)$$

□

می‌توانیم اثبات را با استفاده از همان استدلال حدی دقیق قبلی کامل کنیم.

مثال. با قرار دادن $n = ۱۸^\circ$ ، داریم

$$\prod_{m=1}^{۸۹} \sin(m^\circ) = \prod_{m=1}^{۸۹} \cos(m^\circ) = \frac{۳\sqrt{۱^\circ}}{۲۸۹}.$$

سپاسگزاری مترجمان از دکتر علیرضا خلیلی اسبویی (گروه ریاضی دانشگاه فرهنگیان) بابت رهنمودهای ارزشمندشان در بهتر شدن ترجمه کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- [1] Beyer, W. A., Louck, J. D., Zeilberger, D. A generalization of a curiosity that Feynman remembered all his life, *Math. Mag.*, **69** (1996), 43–44.
- [2] Gauss, C. F., *Disquisitiones Arithmeticae*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [3] Gleick, J., *Genius: The Life and Science of Richard Feynman*, first ed., Pantheon Books, New York, 1992.
- [4] Moreno, S. G., García-Caballero, E. M., A geometric proof of Morrie's law, *Amer. Math. Monthly*, **122** (2016), 168.
- [5] Moreno, S. G., García-Caballero, E. M., A geometric proof of a Morrie-type formula, *Math. Mag.*, **90** (2016), 214–215.
- [6] Wantzel, M. L., Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, *J. Math. Pures Appl.*, **2** (1837), 366–372.

امیرمحمد مؤمنی کوهستانی: دانش‌آموخته دکترای ریاضیات و کاربردها، دانشگاه مازندران

رایانامه: a.momeni04@umail.umz.ac.ir

یاسمن نژادحسینیان: دانش‌آموخته دکترای ریاضیات و کاربردها، دانشگاه مازندران

رایانامه: yasaman.n.hoseinian56@gmail.com

A Generalization of the Angle Doubling Formulas for Trigonometric Functions*

G. Brouwer

Translated by A. M. Kohestani¹, Y. Nejadhoseinian²

^{1,2}Graduated in pure mathematics from University of Mazandaran, Iran

Abstract. The angle doubling formula $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ for the sine function is well known. By replacing the cosine in this formula with $\sin(\pi/2 - \theta)$, we see that $\sin 2\theta$ can be written as the product of two sine functions where the second sine function is obtained from the basic sine function by only using a phase shift of the angle θ and a reflection about the horizontal axis. In this paper, we will show that, for any natural number n , $\sin n\theta$ can be written as the product of n sine functions involving only phase shifts of the angle θ and a possible reflection about the horizontal axis. Similar formulas will be derived for the cosine and tangent functions.

Keywords: sine, double formula, trigonometry, cosine

Article history: Received 3 October 2025; Accepted 22 November 2025

Article type: translation

* Brouwer, G., A Generalization of the angle doubling formulas for trigonometric functions, *Math. Mag.*, **90** (1) (2017), 12–18.

1. a.momeni04@umail.umz.ac.ir

2. yasaman.n.hoseinian56@gmail.com