فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۶۳ تا ۸۶

دورهای تحلیلی روی خمینه‌های مختلط *

سام نریمان

چکیده

سال ۱۹۶۱، مایکل اتیا[1] و فردریش هیتزبروخ[2] برای این که کلاس دوری در همولوژی، تحلیلی باشد، شرط توپولوژیک پیدا کردند. برای این‌که دوری تحلیلی باشد، می‌بایست شرط بدیهی برقرار شود که منجر به حدس هاج خواهد شد. در این مقاله، شرطی از هندسهٔ مختلط که از نظریهٔ هاج تحمیل می‌شود را بررسی خواهیم کرد، اما بخش اعظم مقاله را به ایده‌های اصلی مانع توپولوژیک[3] تحلیلی بودن دور، اختصاص خواهیم داد.

۱. مقدمه

فرض کنید X یک خمینهٔ مختلط و Y زیرفضای بسته، تحویل‌ناپذیر، kـ بعدی و تحلیلی مختلط از X باشد. در این صورت Y کلاس همولوژی با ضریب صحیح از بعد $2k$ در X خواهد بود. دور تحلیلی، یک ترکیب خطی متناهی صوری $\sum n_i Y_i$ است که n_i عدد صحیح و Y_i مانند بالا تعریف شده است. کلاس همولوژی این دور را با $\sum n_i y_i$ نشان می‌دهیم. اگر کلاس کوهمولوژی u دوگان پوانکارهٔ کلاس همولوژی تحلیلی باشد، می‌گوییم u کلاس کوهمولوژی تحلیلی است. در این مقاله، می‌خواهیم مانعی توپولوژیک برای تحلیلی بودن u پیدا کنیم. این شرط‌ها عملگرهای کوهمولوژی مشخصی هستند که می‌باید روی u صفر شوند؛ به‌عنوان مثال $Sq^3 u = 0$.

*) این تحقیق با حمایت مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی زیرنظر دکتر مهرداد شهشهانی انجام شد.

1) M. Atiyah 2) F. Hirzebruch 3) topological obstruction

توجه کنید که Y_i ها می‌توانند تکینگی داشته باشند که در صورتی که شرط زیرخمینه بودن را اضافه کنیم، رنه توم[۱] [۶] ثابت کرد که باید برای هر k، $Sq^{2k+1}u = 0$. اگر X خمینهٔ کهلر[۲] باشد، شرط لازم برای تحلیلی مختلط بودن کلاس کوهمولوژی $u \in H^{2q}(X,\mathbb{Z})$ این است که می‌بایست در تجزیهٔ هاج[۳] از نوع (q,q) باشد. هاج حدس زد که اگر X خمینهٔ افکنشی جبری باشد، این شرط کافی نیز هست. در این مقاله توضیح خواهیم داد که حدس با این کلیت برای $q \geq 2$ برقرار نیست، اما ممکن است با ضرایب در $\mathbb{Q}$ درست باشد.

۲. درآمدی بر حدس هاج

قبل از پرداختن به موضوع اصلی که پیدا کردن مانع توپولوژیک برای تحلیلی بودن دور است، لازم است کمی دربارهٔ حدس هاج صحبت کنیم. فرض کنید X یک خمینهٔ کهلر باشد، در این صورت با استفاده از تجزیهٔ هاج، داریم

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

در این‌جا $H^{p,q}(X)$ کلاس فرم‌های همساز از نوع (p,q)[۴] است. فرض کنید Z زیرخمینهٔ مختلط از X و $i: Z \to X$ نگاشت شمول باشد. فرم (p,q) دلخواه α را می‌توان با واکشیدن[۵] به‌روی Z انتگرال گرفت. حول نقطهٔ دلخواه از Z می‌توان مختصات z_1، ... ، z_n را انتخاب کرد که Z موضعاً با معادلات $z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$ داده شود. اگر $p > k$، آن‌گاه α شامل dz_i خواهد بود که z_i به صفر واکشیده می‌شود. به‌طور مشابه برای $q > k$ نیز α به صفر واکشیده می‌شود. پس اگر $(p,q) \neq (k,k)$، انتگرال α صفر می‌شود. از طرف دیگر، مقدار انتگرال برابر ضرب کمانی[۶] کلاس همولوژی Z با α است. اگر دوگان پوانکارهٔ Z را با $[Z]$ نشان دهیم، این انتگرال را می‌توان با اثر دادن ضرب ناوی[۷] $[Z]$ و α روی کلاس اساسی X نیز به‌دست آورد. با توجه به محاسبهٔ بالا اگر $[Z]$ را در کلاس از نوع $(p,q) \neq (k,k)$ ضرب ناوی کنیم، صفر حاصل می‌شود. چون تجزیهٔ هاج در بیشترین درجه بدیهی است، یعنی $H^{2n}(X,\mathbb{C}) = H^{n,n}(X)$، کلاس کوهمولوژی $[Z]$ می‌بایست از

1) René Thom 2) Kähler Manifold 3) Hodge decomposition

۴) کلاس‌های کوهمولوژی که در پایهٔ مختلطی مثل $\{z_1,\ldots,z_n\}$ از ترکیب خطی فرم‌های دیفرانسیلی که از ضرب یک تابع همساز در $dz_{i_1} \wedge \cdots dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \cdots d\bar{z}_{j_q}$ به‌دست می‌آیند، تولید می‌شوند.

5) pullback 6) cap product 7) cup product

نوع $(n-k, n-k)$ باشد. حال سؤال طبیعی که هاج مطرح کرده این است که

کدام کلاس‌های کوهمولوژی در $H^{k,k}(X)$ از دوگان زیرخمینهٔ مختلط Z القا می‌شود؟

کلاس‌های کوهمولوژیی که در گروه $H^{2k}(X,\mathbb{Q})\cap H^{k,k}(X)$ قرار دارند را کلاس هاج می‌نامیم.

حدس هاج این است که هر کلاس هاج در خمینهٔ افکنشی مختلط X از ترکیب خطی با ضرایب گویا از کلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط القا می‌شود، به‌دست می‌آید. این حدس ابتدا با ضرایب در $\mathbb{Z}$ بود که در این مقاله با استفاده از ایده‌های اتیا و هیتزبروخ مثال نقضی در رد حدس در این حالت خواهیم ساخت. اولین نتیجهٔ شاخص در راستای حدس هاج، قضیه کلاس $(1,1)$ منسوب به لفشتز[1] است: هر عضو $H^{2}(X,\mathbb{Z})\cap H^{1,1}(X)$ از ترکیب خطی با ضرایب صحیح از کلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط با نقص بعد ۱ القا می‌شود، به‌دست می‌آید. اثبات ساده‌ای با استفاده از کوهمولوژی بافه[2] برای این قضیه وجود دارد. با توجه به نظریهٔ هاج، دورام[3] و دولبو[4]، به‌خاطر طبیعی بودن[5] کوهمولوژی‌ها، نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{array}{ccc} H^{p}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H^{p}(X,\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p}_{dR}(X,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi_{0,p}} & H^{0,p}(X,\mathcal{O}) \end{array}$$

در بالا $\mathcal{O}$ بافهٔ نگاشت‌های هلومورف روی خمینه است و $\pi_{0,p}$ افکنش فرم هارمونیک (که همدستهٔ همان فرم مشخصی است که می‌خواهیم $\pi_{0,p}$ را رویش اثر دهیم) روی مولفهٔ $(0,p)$ تجزیهٔ هاج است. حال فرض کنید $x\in H^{1,1}(X)\cap H^{2}(X,\mathbb{Z})$. با توجه به نمودار جابه‌جایی بالا، داریم

$$i_*(x)=0$$

از دنبالهٔ دقیق بلند کوهمولوژیی که به دنبالهٔ دقیق کوتاه بافه‌های

$$0\to\mathbb{Z}\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}^*\to 0$$

نسبت داده می‌شود ($\mathcal{O}^*$ بافهٔ توابع هولومورفی است که هیچ‌جا صفر نمی‌شوند)،

$$H^{1}(X,\mathcal{O}^*)\longrightarrow H^{2}(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^{2}(X,\mathcal{O})\longrightarrow\cdots$$

نتیجه می‌شود که x باید از $H^{1}(X,\mathcal{O}^*)$ آمده باشد. اما این گروه، متناظر با گروه کلاف‌های خطی

1) Lefschetz 2) Sheaf cohomology 3) de Rham 4) Dolbeault 5) naturality

است. پس با توجه به نگاشت مرز، کلاف خطی $\mathcal{L}$ وجود دارد که $x = c_1(\mathcal{L})$. اما چون اولین کلاس چرن هر کلاف خطی، دوگان پوانکارهٔ صفرهای یک مقطع نوعی[1] از آن کلاف است، حکم بدیهی می‌شود.

با استفاده از قضیهٔ سخت لفشتز که در ادامه صورت ساده‌ای(!) از آن را بیان خواهیم کرد، واضح است که اگر حدس هاج برای کلاس هاج درجهٔ p صادق باشد، برای درجهٔ $2n-p$ نیز صادق است. فرض کنید X خمینهٔ افکنشی مختلط باشد. منظور از مقطع ابرصفحهٔ X، تقاطع X با ابرصفحهٔ نوعی است. دوگان مقطع ابرصفحهٔ X را با η نشان‌می‌دهیم و عملگر L را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Lz = z\cdot\eta, \quad z\in H^i(X,\mathbb{C})$$

قضیهٔ سخت لفشتز حاکی است که برای هر k، عملگر

$$L^k : H^{n-k}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k}(X,\mathbb{C})$$

یکریختی است. پس با توجه به قضیهٔ کلاس $(1,1)$ لفشتز و قضیهٔ سخت لفشتز، حدس هاج برای کلاس هاج درجهٔ $2n-2$ نیز برقرار است.

پس از این مقدمه از هندسهٔ مختلط و توضیح مانعی که هاج برای تحلیلی بودن یک دور عنوان کرد، مانع توپولوژیک مهمی پیدا می‌کنیم که به ما کمک می‌کند تا برای حدس هاج وقتی ضرایب در $\mathbb{Z}$ باشند، مثال نقض بسازیم.

۳. مشخصهٔ چرن[2] و نظریهٔ مانع[3]

در این بخش، با استفاده از مشخصهٔ چرن، نظریهٔ مانع را برای Kــ تئوری ارائه می‌کنیم. مشخصهٔ چرن، همریختی حلقه‌ای بین $K(X)$ (گروه گروتندیک[4] کلاف برداری روی X) و $H^{*,even}(X,\mathbb{Q})$ است. اگر $X=S^{2n}$، آن‌گاه تصویر مشخصهٔ چرن، ch، $H^*(S^{2n},\mathbb{Z})$ می‌شود. برای هر کلاف E روی S^{2n} داریم

$$\mathrm{ch}\ (E) = \mathrm{rank}(E) + \frac{c_n(E)}{(n-1)!}.$$

---

1) generic 2) Chern character 3) Obstruction theory

۴) E_f کلافی است که از f به‌دست می‌آید.

فرض کنید E کلاف $\mathbb{C}^n$ روی S^{2n} با مقطع سرتاسری φ باشد. از توپولوژی دیفرانسیل می‌دانیم $c_n(E)[S^{2n}] = \sum_p \mathrm{index}_p\varphi$ که جمع روی صفرهای φ است. کلاف $\mathbb{C}^n$ روی S^{2n} توسط نگاشت

$$f : S^{2n-1} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

که در واقع عضو $\pi_{2n-1}(GL(n, \mathbb{C}))$ است، داده می‌شود:

$$f : x \longrightarrow (f^1(x), \ldots, f^n(x)) \in GL(n, \mathbb{C}).$$

f نگاشت $x \longrightarrow \frac{f^1(X)}{\|f^1(X)\|}$ را القا می‌کند که از S^{2n-1} به خودش است. درجهٔ این نگاشت برابر است با $c_n(E_f)[S^{2n}]$ که برای N های بزرگ همسانریختی $\pi_{2n-1}(GL(N, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ را به‌دست می‌دهد.

فرض کنید E کلافی روی CW ـ مجتمع X باشد و همچنین $\dim E = \dim X = 2k$. ۲. اگر E روی سلول $2k - 1$ بعدی بدیهی باشد، یعنی $E|_{X^{2k-1}} = I_k$، آن‌گاه E روی هر قرص $2k$ بعدی e^{2k} که به X^{2k-1} می‌چسبد تا X^{2k} را بسازد، نیز بدیهی است. از مقایسهٔ این دو بدیهی‌سازی روی $S^{2k-1} = \partial e^{2k}$، نگاشتی $\alpha_E : S^{2k-1} \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$ که در واقع عضوی از $\pi_{2k-1}(GL(k, \mathbb{C}))$ است، به‌دست می‌آید. عضو η_E در گروه پادزنجیر $C^{2k}(X, \mathbb{Z}) = C^{2k}(X, \pi_{2k-1}(GL(k, \mathbb{C})))$ را این طور تعریف می‌کنیم که روی e^{2k} همان عضو α_E از $\pi_{2k-1}(GL(K, \mathbb{C}))$ باشد که بالاتر تعریف کردیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $(k-1)!\,\eta_E = c_k(E)$. در حالتی که $\dim_{\mathbb{C}} E > k$ نیز می‌توان E را به کلاف بدیهی و کلافی که بُعدش k باشد، شکافت که آن کلاف را با E' نمایش می‌دهیم (علت این ادعا فراتر از هدف این مقاله است) که در این حالت $\eta_E \in C^{2k}(X, \pi_{2k-1}(GL(\dim E, \mathbb{C})))$ و دوباره رابطهٔ $(k-1)!\,\eta_E = c_k(E)$ برقرار است. حال فرض کنید $\eta \in C^{2k}(X, \mathbb{Z})$. برای r به‌قدر کافی بزرگ، می‌توانیم کلاف برداری $\mathrm{Vec}_r(X^{2k})$ را طوری پیدا کنیم که

$$(k-1)!\,\eta = c_k(E).$$

فرض کنید تحدید E بر X^{2k-1} بدیهی باشد و همچنین روی هر سلول $2k$ ـ بعدی و e^{2k} که از روی ∂e^{2k} به X^{2k-1} می‌چسبد، نیز بدیهی است. مقایسهٔ این دو بدیهی‌سازی، عضوی در $\pi_{2k-1}(GL(r, \mathbb{C}))$ القا می‌کند که همان $\eta(e^{2k})$ است. با توجه به آنچه که گفته شد، می‌دانیم

$$(k-1)!\,\eta = c_k(E)|_{X^{2k}}.$$

کلاف E توسط نگاشت رده‌بندی

$$\psi : X^{2k} \longrightarrow \mathrm{Grass}(r, 2r)$$

به‌دست می‌آید[1]. مانع برای گسترش ψ به X^{2k+1}، عضوی است از گروه پادزنجیر $C^{2k+1}(X^{2k+1}, \pi_{2k}(\mathrm{Grass}(r, 2r)))$ که آن را با η_ψ نشان می‌دهیم $\eta_\psi = \delta\eta$. توجه کنید که $\eta_\psi(e^{2k+1})$ عضوی از $\pi_{2k}(\mathrm{Grass}(r, 2r))$ است که توسط $\psi|_{\partial e^{2k+1}}$ تعریف می‌شود. $\eta_\psi(e^{2k+1}) = 0$ اگر و تنها اگر ψ را بتوان به سلول e^{2k+1} گسترش داد. پس اگر η پاد دور باشد، ψ را می‌توان به X^{2k+1} گسترش داد.

η_ψ را می‌توان به‌عنوان پادزنجیر در k ـ گروه تعبیر کرد:

$$\eta_\psi(e^{2k+1}) = E - I_r|_{\partial e^{2k+1}} \in \tilde{K}(S^{2k})$$

که به‌روشنی مانع برای گسترش ψ به گراسمانیان است. از طرف دیگر، چون $E - I_r$ در پوچی نگاشت طبیعی $K(X^{2k}) \longrightarrow K(X^{2k-1})$ قرار می‌گیرد، پس می‌توان به آن به‌چشم عضوی از $\tilde{K}(X^{2k}/X^{2k-1}) = K(X^{2k}, X^{2k-1})$ نگریست. حال $\eta(e^{2k})$ عضوی از $\tilde{K}(S^{2k})$ است که از واکشیدن[2] $E - I_r$ توسط نگاشت

$$\frac{e^{2k}}{\partial e^{2k}} \longrightarrow \frac{X^{2k}}{X^{2k-1}}$$

القا شده است. در نتیجه $\eta_\psi = \delta\eta$.

در ادامهٔ این بخش، احکامی دربارهٔ دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ که به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم. برای مطالعهٔ طرز ساخت دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ، به مقالهٔ [۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲ برای CW ـ مجتمع متناهی X، دنبالهٔ طیفی $\{E_r, d_r\}$ وجود دارد که

$$E_2^{p,q} = H^p(X, K^q(point))$$

و

$$E_\infty^{p,q} = \frac{F_p K^{p+q}(X)}{F_{p+1} K^{p+q}(X)}$$

---

۱) خمینهٔ گراسمانیان $\mathrm{Grass}(r, 2r)$ زیرفضای خطی r بعدی در $\mathbb{C}^{2r}$ است.

که در آن، $F_pK^j(X)$ پالایشی [1] از $K^j(X)$ است،

$$F_pK^j(X) = \ker(K^j(X) \longrightarrow K^j(X^{p-1}))$$

و مشتق‌های این دنباله طیفی با تعلیق [2] جابه‌جا می‌شوند.

برای هر دو عدد صحیح p و q که $q \geq p$ تعریف می‌کنیم:

$$K(p,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} K^n(X^p, X^q).$$

در این صورت $E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}}$ که

$$\begin{aligned} B_r^{p,q} &= \ker(K^{p+q}(p, p-1) \longrightarrow K^{p+q}(p, p-r)), \\ Z_r^{p,q} &= \ker(K^{p+q}(p, p-1) \xrightarrow{\delta} K^{p+q+1}(p+r-1, p)). \end{aligned}$$

با استفاده از قضیهٔ تناوب بات [3]، داریم

$$E_1^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-1}) = \begin{cases} C^p(X,\mathbb{Z}) & \text{اگر } q \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

d_1 (مشتق اول دنبالهٔ طیفی) همان نگاشت پادمرز $C^p(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(X,\mathbb{Z})$ است، اگر q زوج باشد. پس برای q زوج داریم

$$E_1^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-1}) \cong C^p(X,\mathbb{Z}) \cong H^p(X^p, X^{p-1})$$

اما می‌دانیم نگاشت مشخصهٔ چرن در این حالت:

$$\mathrm{ch} : K^p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\cong} H^p(X^p, X^{p-1})$$

یکریختی است. در دومین صفحهٔ دنباله طیفی داریم

$$E_2^{2p,0} \xrightarrow{\cong} H^{2p}(X,\mathbb{Z})$$

که به‌صورت زیر داده شده است:

$$\xi \in Z_2^{2p,0} = \ker(K^{2p}(X^{2p}, X^{2p-1}) \longrightarrow K^{2p+1}(X^{2p+1}, X^{2p})).$$

1) Filtration 2) Suspension 3) Bott periodicity formula

ξ به‌شکل $[E]-[I_r]$ است؛ در این‌جا E، کلاف با تار $\mathbb{C}^r$ روی X^{2p} است که روی X^{2p-1} بدیهی و قابل گسترش به X^{2p+1} است. با توجه به مطالب بخش قبل، می‌دانیم گسترش به X^{2p+1} معادل است با صفر شدنِ $\delta\mathrm{ch}_p(\xi)$ و ch_p، p ـ امین مؤلفهٔ ch است:

$$ch_p : K(X^{2p}, X^{2p-1}) \longrightarrow H^{2p}(X^{2p}, X^{2p-1})$$

در نتیجه ξ در تناظر است با $[\mathrm{ch}_p\xi] \in H^{2p}(X^{2p+1}, \mathbb{Z}) = H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. عضو ξ تا ابد در دنبالهٔ طیفی باقی می‌ماند اگر و تنها اگر

$$\xi \in \ker(K^{2p}(X^{2p}, X^{2p-1}) \longrightarrow K^{2p+1}(X, X^{2p}))$$

یعنی ξ را بتوان به کل X گسترش داد. به این ترتیب

قضیه ۲.۲ برای هر $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$ داریم $\forall k \geq 0,\ d_{2k+1}\alpha = 0$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\xi \in K(X)$ که روی X^{2p-1} بدیهی است و «کلاس‌های مرتبهٔ بالاتر $\mathrm{ch}(\xi) = \alpha +$ ».

۳. بافهٔ منسجم[1]

در این بخش، قضیه‌های کارتان دربارهٔ بافه‌های منسجم را که به قضیه‌های A و B شهرت دارند، بدون اثبات بیان می‌کنیم و در بخش‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید X خمینهٔ تحلیلی حقیقی از بُعد n و $\mathcal{O}$ جوانهٔ[2] توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X است. می‌دانیم $\mathcal{O}$ بافه‌ای منسجم است، یعنی coker نگاشتی بین بافه‌های $\mathcal{O}$ ـ مدول آزاد است.

گزاره ۱.۳ اگر S بافهٔ منسجم $\mathcal{O}$ ـ مدول باشد، قضیه‌های A و B کارتان برقرارند، یعنی برای هر $x \in X$ تصویر $H^0(X, S)$ در S_x، S_x را به‌عنوان $\mathcal{O}$ ـ مدول تولید می‌کند و $H^q(X, S) = 0$ برای $q \geq 1$.

گزاره ۲.۳ اگر S یک بافهٔ منسجم $\mathcal{O}$ ـ مدول باشد و A زیرمجموعهٔ فشرده از X، آن‌گاه دنباله‌ای از بافه‌های منسجم به‌صورت

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

وجود دارد به‌طوری که در هر $x \in A$، این دنباله دقیق و هر $(L_i)_x$ آزاد است.

حال اگر X خمینهٔ مختلط باشد و $\mathcal{B}$ بافهٔ جوانهٔ توابع هلومورف روی X، آن‌گاه X خمینهٔ تحلیلی

1) Coherent Sheaves 2) germ

حقیقی نیز هست. اگر T بافه‌ای دلخواه از $\mathcal{B}$ ــ مدول‌ها باشد، قرار می‌دهیم $T^\circ = T \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{O}$. به‌راحتی می‌توان دید که اگر T بافه‌ای منسجم از $\mathcal{B}$ ــ مدول‌ها باشد، T° بافه‌ای منسجم از $\mathcal{O}$ ــ مدول‌ها خواهد بود.

حال تجزیهٔ[۱] گروتندیک[۲] برای بافه‌ها را می‌توانیم معرفی کنیم. فرض کنید V فضای برداری مختلط با بعد q باشد. دوگان V را با V^* نمایش می‌دهیم و i ـ امین ضرب خارجی V را با $\lambda^i(V)$. همریختی ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} V^* \otimes \lambda^i(V) &\longrightarrow \lambda^{i-۱}(V) \\ f \otimes x_۱ \wedge x_۲ \wedge \ldots \wedge x_i &\longrightarrow \textstyle\sum_{۱\le j\le i}(-۱)^{i+j} f(x_j) x_۱ \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_i. \end{aligned}$$

در این‌جا منظور از $\hat{x}_j$ این است که x_j را حذف می‌کنیم.

گزاره ۳.۳ گیریم V فضای برداری مختلط با بعد q و V^* دوگان آن باشد. فرض کنید s مقطع ناصفر از V^* است. همریختی $\alpha_i : \lambda^i(V) \longrightarrow \lambda^{i-۱}(V)$ را ضرب داخلی در مقطع s تعریف می‌کنیم. در این صورت دنبالهٔ دقیق

$$\circ \longrightarrow \lambda^q(V) \xrightarrow{\alpha_q} \lambda^{q-۱}(V) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_۱} \lambda^\circ(V) \longrightarrow \circ$$

را داریم.

اثبات: پایهٔ $\{e_۱,\ldots,e_q\}$ را برای V انتخاب کنید طوری که $s(e_۱) = ۱$ و $s(e_i) = \circ$ برای هر $i > ۱$. در این صورت روشن است که هر دو زیرفضای $\ker \alpha_r$ و $\mathrm{Im}\alpha_{r+۱}$ توسط اعضای $e_{i_۱} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ تولید می‌شوند که $۲ \le i_۱ < i_۲ < \ldots < i_r \le q$. در نتیجه این دنباله، دقیق است. $\square$

چون ضرب داخلی، تابعگون است، حکم قبل برای کلاف‌های برداری نیز صادق است.

گزاره ۴.۳ اگر E کلاف برداری مختلط پیوسته با بعد q روی فضای X باشد و s مقطع E که هیچ جا صفر نمی‌شود، آن‌گاه دنبالهٔ دقیق از فضاهای برداری وجود دارد:

$$\circ \longrightarrow E_q \xrightarrow{\alpha_q} E_{q-۱} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_\circ} E_\circ \longrightarrow \circ$$

که $E_i = \lambda^i(E^*)$ و α_i ضرب داخلی در مقطع s هستند.

فرض کنید E کلاف برداری مختلط با بعد q را نمایش دهد که تحلیلی حقیقی نیز هست.

---

1) resolution 2) Grothendieck

اگر $s : X \longrightarrow E$ مقطع تحلیلی حقیقی از E باشد، بافهٔ S از صفرهای s را این گونه تعریف می‌کنیم: E را موضعاً به‌صورت $X\tilde{\mathbb{C}}^q$ نمایش می‌دهیم که s در واقع توسط q تابع $s_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ داده می‌شود. تعریف می‌کنیم $S = \frac{\mathcal{O}}{(s_1,\dots,s_q)}$. این تعریف از نمایش موضعی E مستقل است. فرض کنید E_i و α_i ها مانند گزاره تعریف شده باشند. گیریم L_i بافهٔ موضعاً آزاد در تناظر با E_i باشد (توجه کنید کلاف‌های برداری، بافه‌های موضعاً آزاد هستند):

$$0 \longrightarrow L_q \xrightarrow{\alpha_q} L_{q-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} S \longrightarrow 0. \qquad (8)$$

در این‌جا $L_0 = \mathcal{O}$ و $\varepsilon : L_0 \longrightarrow S$ نگاشت طبیعی است. در نقطهٔ x که $s(x) \neq 0$ داریم $S_x = 0$ و (۱) دنبالهٔ دقیق است. فرض کنید s دارای این خاصیت است که برای x که $s(x) = 0$، یکریختی موضعی $E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^q$ در همسایگی x وجود دارد به‌طوری که اگر جوانهٔ s_x را توسط جوانهٔ s_i ها که $(1 \leq i \leq q) s_i \in \mathcal{O}_x$ نمایش دهیم. آن‌گاه s_i در $\frac{\mathcal{O}}{(s_1\dots,s_{i-1})}$ مقسوم‌علیه صفر نیست. در این صورت دنباله (۱) در حالت $s(x) = 0$ نیز دقیق است.

۴. کلاف تفریق

فرض کنید X یک CW ـ مجتمع متناهی و Y زیرمجتمع آن باشد. E و F کلاف‌های برداری روی X و α یکریختی کلافی $E|_Y \xrightarrow{\alpha} F|_Y$ است. می‌خواهیم به هر سه‌تایی (E, F, α) عضوی از $K^0(X, Y)$ را نسبت دهیم. بازهٔ بستهٔ واحد را با I نمایش می‌دهیم. زیرفضای A از $X \times I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{X \times 0\} \cup \{X \times 1\} \cup \{Y \times I\}.$$

روی A کلاف برداری L قرار می‌دهیم به‌طوری که تحدیدش به $X \times 1$، E و تحدیدش به $X \times 0$، F می‌شود و روی $Y \times I$ توسط α به هم متصل می‌شوند. به بیان دقیق‌تر

$$\begin{aligned} &I_0 = I - \{0\}, \quad I_1 = I - \{1\}, && I_{01} = I_0 \cap I_1 \\ &A_0 = X \times 0 \cup Y \times I_1, && E_0 = F \\ &A_1 = X \times 1 \cup Y \times I_0, && E_1 = E \end{aligned}$$

فرض کنید $f_i : A_i \longrightarrow X$ از افکنش $X \times I \longrightarrow X$ القا شده باشد. $f_i^*(E_i)$ کلافی روی مجموعهٔ باز A_i است و α یکریختی $f_0^*(E_0) \longrightarrow f_1^*(E_1)$ را روی مجموعهٔ باز $A_0 \cap A_1 = Y \times I_{01}$ القا می‌کند که کلاف مورد نظر را روی A می‌دهد. این کلاف عضوی از $K^0(A)$ است که آن را با ξ

نمایش می‌دهیم. از دنبالهٔ دقیق

$$K^{0}(X\times I)\longrightarrow K^{0}(A)\xrightarrow{\delta}K^{1}(X\times I,A)$$

به‌دست می‌آوریم $\delta\xi\in K^{1}(X\times I,A)$. چون

$$(X\times I)/A=S(\frac{X}{Y}),\qquad K^{1}(S(\frac{X}{Y}))\cong K^{0}(X,Y)$$

پس $\delta\xi$ عضوی از $K^{0}(X,Y)$ است. این عضو را با $d(E,F,\alpha)$ نشان می‌دهیم و کلاف تفریق می‌نامیم.

گزاره ۱.۴ (i) $d(E,F,\alpha)$ تابعگونی است، یعنی اگر $f:(X',Y')\longrightarrow(X,Y)$ نگاشت دلخواه باشد، آن‌گاه $d(f^{*}E,f^{*}F,f^{*}\alpha)=f^{!}d(E,F,\alpha)$؛

(ii) $d(E,F,\alpha)$ تنها به ردهٔ هموتوپی α بستگی دارد؛

(iii) اگر $Y=\phi$، آن‌گاه $d(E,F,\alpha)=E-F$؛

(iv) اگر $f^{!}:K^{*}(X,Y)\longrightarrow K^{*}(X)$ نگاشت طبیعی باشد، $f^{!}d(E,F,\alpha)=E-F$؛

(v) اگر α به یکریختی $E\longrightarrow F$ روی X گسترش پیدا کند، در این صورت $d(E,F,\alpha)=0$؛

(vi) $d(E\oplus E',F\oplus F',\alpha\oplus\alpha')=d(E,F,\alpha)+d(E',F',\alpha')$؛

(vii) $d(F,E,\alpha^{-1})=-d(E,F,\alpha)$؛

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، $d(E\otimes D,F\otimes D,\alpha\otimes 1)=d(E,F,\alpha).D$، که در سمت راست رابطه، از ساختار $K^{0}(X)$ ـ مدول $K^{0}(X,Y)$ استفاده کرده‌ایم.

اثبات: (i) از تعریفِ $d(E,F,\alpha)$ نتیجه می‌شود. فرض کنید π افکنش $X\times I\xrightarrow{\pi}X$ و $i_t:X\longrightarrow X\times I$ شمول $(x,t)\longrightarrow x$ باشد. یک هموتوپی α_t از یکریختی کلافی $E|_Y\longrightarrow F|_Y$ طبق تعریف، یکریختی

$$\beta:\pi^{*}E|_{Y\times I}\longrightarrow\pi^{*}F|_{Y\times I}$$

را القا می‌کند. پس

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha_0) &= d(i_0^{*}\pi^{*}E,i_0^{*}\pi^{*}F,i_0^{*}\beta)\\ &= i_0^{!}d(\pi^{*}E,\pi^{*}F,\beta)\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه، $d(E,F,\alpha_1)=i_1^{!}d(\pi^{*}E,\pi^{*}F,\beta)$. چون $i_0\simeq i_1$ و $K^{0}(X,Y)$ تحت هموتوپی ناورداست، پس $d(E,F,\alpha_0)=d(E,F,\alpha_1)$ و لذا (ii) نیز ثابت می‌شود. برای اثبات (iii)

می‌بایست همریختی

$$\delta : K^\circ(X \times S^\circ) \longrightarrow K^1(X \times I, X \times S^\circ) \cong K^\circ(X)$$

بسازیم که در آن $S^\circ = \{0\} \cup \{1\} \subset I$. با توجه به این‌که $K^\circ(X \times S^\circ) \cong K^\circ(X) \otimes K^\circ(S^\circ)$، کافی است حکم را برای وقتی که X فقط یک نقطه دارد ثابت کنیم:

$$\delta : K^\circ(S) \longrightarrow K^1(I, S^\circ) \overset{\sigma}{\cong} K^\circ\ (point).$$

چون δ و نگاشت تعلیق، با ch جابه‌جا می‌شود، پس کافی است

$$\delta : H^\circ(S^\circ) \longrightarrow H^1(I, S^\circ) = H^\circ\ (point)$$

را در نظر بگیریم. اما $\delta(a_1) = +1$، $\delta(a_0) = 1$، که a_0 و a_1 مولدهای $H^\circ(S^\circ, \mathbb{Z})$ متناظر با نقاط ۰ و ۱ هستند. در نتیجه اثبات (iii) کامل است. (iv) و (v) و (vi) و (viii) از سه حکم قبلی به‌سادگی نتیجه می‌شود. حال (vii) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید ξ و η کلاف‌های برداری روی $A = X \times 0 \cup X \times 1 \cup Y \times I$ باشند که توسط (E, F, α) و (F, E, α^{-1}) تعریف شده‌اند. اگر $f : A \longrightarrow A$ نگاشت $x \longrightarrow 1 - x$ روی I باشد، داریم $\eta \cong f^*\xi$. پس $\delta\eta = g^!\delta\xi$ که g نگاشت تعلیق نگاشت $x \longrightarrow 1 - x$ است. اما $g^! = -1$ و چون $\delta\eta = -\delta\xi$، حکم (vii) نتیجه می‌شود.

حال تعریف کلاف تفریق را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید E_0، E_1، ... ، E_n کلاف‌های برداری روی X باشند که

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} 0 \qquad (9)$$

دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی Y است. تعمیم کلاف تفریق را طوری تعریف می‌کنیم که

$$d(E_0, E_1, \ldots, E_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^\circ(X, Y).$$

دنبالهٔ دقیق (۲) به دنبالهٔ کوتاه دقیق

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow E_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow 0 \qquad (10)$$

می‌شکند. در این‌جا $F_r = \ker \alpha_r$ که کلاف برداری روی Y است. دنبالهٔ دقیق کوتاه (۳) می‌شکافد و چون هر دو شکافتنی با هم هموتوپ هستند، با انتخاب شکافتنی دلخواه برای هر r، یکریختی‌های

زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda : \sum E_{2k+1} \longrightarrow \sum_r F_r,$$
$$\mu : \sum_k E_{2k} \longrightarrow \sum_r F_r.$$

پس $\alpha = \lambda^{-1}\mu$ یکریختی $\sum E_{2k+1} \longrightarrow \sum E_{2k}$ را القا می‌کند. با توجه به گزارهٔ ۱.۴ (ii)، می‌توانیم عضو یکتا

$$d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = d\left(\sum E_{2k}, \sum E_{2k+1}, \alpha\right) \in K^\circ(X, Y)$$

را تعریف کنیم که به‌طور خلاصه با $d(E_i, \alpha_i)$ نشان می‌دهیم. خواص کلاف تفریق تعمیم‌یافته را در گزارهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

گزاره ۲.۴ (i) $d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تابعگونی است؛

(ii) $d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تنها به کلاس هموتوپی $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ بستگی دارد؛

(iii) اگر $Y = \phi$، در این صورت $d(E_1, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i$؛

(iv) اگر $f^! : K^\circ(X, Y) \longrightarrow K^\circ(X)$ نگاشت طبیعی باشد،

$$f^! d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i;$$

(v) اگر α_1، α_2، ... ، α_n به X توسعه پیدا کند، یعنی دنبالهٔ

$$0 \to E_n \overset{\alpha_n}{\to} E_{n-1} \to \cdots E_1 \overset{\alpha_1}{\to} E_0 \to 0$$

روی X دقیق باشد، داریم

$$d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0;$$

(vi) $d(E_i, \alpha_i) + d(E'_i, \alpha'_i) = d(E_i \oplus E'_i, \alpha_i \oplus \alpha'_i)$؛

(vii) $d(0, E_0, \ldots, E_n; 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$؛

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، داریم

$$d(E_i \otimes D, \alpha_i \otimes 1) = d(E_i, \alpha_i)D.$$

حال به ساختن کلاف تفریق ویژه‌ای خواهیم پرداخت. فرض کنید X یک CW ـ مجتمع متناهی و E کلاف برداری مختلط روی X با بُعد q باشد. کلاف کرهٔ واحد و قرص واحد E را به‌ترتیب با A° و A نمایش می‌دهیم. اگر $\pi : A \longrightarrow X$ نگاشت افکنشی باشد، در این صورت π^*E مقطعی دارد که هیچ‌جاروی A° صفر نمی‌شود. پس با استفاده از گزارهٔ ۴.۳ روی A°، دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری

$$\circ \longrightarrow F_q \xrightarrow{\alpha_q} F_{q-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} F_\circ \longrightarrow \circ$$

را داریم که $F_i = \pi^*\lambda^i(E^*)$. در نتیجه عضو زیر در $K^\circ(A, A^\circ)$ خوش‌تعریف است:

$$d(F_\circ, F_1, \ldots, F_q; \alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in K^\circ(A, A^\circ).$$

گزاره ۳.۴ فرض کنید E کلاف برداری مختلط روی X CW ـ مجتمع متناهی X باشد و A و A° مانند بالا تعریف شده باشند. کلاف تفریق $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ را با ξ نشان می‌دهیم. در این صورت $\text{ch}\xi = \varphi_*\mathcal{T}(E)^{-1}$ که φ_* همریختی جیسین[1] و $\mathcal{T}$ کلاس تاد[2] است.

اثبات: می‌دانیم $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ تابعگونی است، در نتیجه کافی است حکم را برای کلاف عام[3] ثابت کنیم. پس فرض کنید X فضای عام برای $U(q)$ باشد (فضای عام برای گروه G، CW ـ مجتمع متناهی نیست، اما می‌توانیم فضایی انتخاب کنیم که نوع هموتوپی آن تا سلول N ـ بعدی با فضای عام یکسان باشد و بعد N را به‌قدر کافی بزرگ کنیم). با استفاده از گزارهٔ ۲.۴ می‌دانیم اگر تصویر ξ را در $K^\circ(A) \cong K^\circ(X)$ با η نمایش دهیم، آن‌گاه

$$\eta = \sum (-1)^i \lambda^i(E^*)$$

که جمع بالا روی همهٔ ترکیب‌های i_1، i_2، ...، i_r که $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq q$ گرفته می‌شود. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\sum_{r=\circ}^{q} (-1)^r ch\lambda^r E^* &= \prod_{i=1}^{q} (1 - e^{-\gamma_i}) \\
&= (\gamma_1 \ldots \gamma_q) \prod_{i=1}^{q} \frac{1 - e^{-\gamma_i}}{\gamma_i} \\
&= c_q(E)\mathcal{T}(E)^{-1}.
\end{aligned}$$

1) homomorphism Gysin 2) Todd class 3) universal bundle

اما اگر $\sum_{j=\circ}^{q} c_j(E)x^j = \prod_{i=۱}^{q}(۱+\gamma_i x)$ که $c_j(E)$ کلاس‌های چرن E هستند، آن‌گاه داریم

$$\mathrm{ch}\ \lambda^r E^* = \sum e^{-(\gamma_{i_۱}+\cdots+\gamma_{i_r})}.$$

از طرف دیگر، تصویر طبیعی $H^*(BU(q), BU(q-۱), \mathbb{Q})$ در $H^*(BU(q), \mathbb{Q})$ یکریخت است با ایدآل تولید شده توسط $c_q(E)$ و همچنین بنابر تعریف همریختی جیسین، $\varphi_*(x)$ به $c_q(E)x$ می‌رود. پس $\mathrm{ch}\ \xi = \varphi_* \mathcal{T}^{-۱}(E)$.

۵. عنصر گروتندیک

در این بخش، با ارتباط دادن مطالب دو بخش قبل برای هر بافهٔ منسجم، عنصری در K ـ گروه موسوم به عنصر گروتندیک می‌سازیم که در اثبات قضیهٔ گروتندیک ـ ریمان ـ رخ مفهوم کلیدی به‌حساب می‌آید. فرض کنید X خمینهٔ تحلیلی حقیقی و $\mathcal{O}$ بافهٔ جوانهٔ توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X باشد. برای هر زیرفضای Y از X و بافه منسجم S از $\mathcal{O}$ و مدول‌های روی X که محمل آن‌ها در Y است، عنصر $\gamma_Y(S) \in K^\circ(X, X-Y)$ نسبت خواهیم داد. برای تعریف $\gamma_Y(S)$، ابتدا باید عنصر $f^! \gamma_Y(S) \in K^\circ(A, B)$ را بر هر نگاشت $f : (A, B) \longrightarrow (X, X-Y)$ که (A, B) زوج مجتمع‌های متناهی است، تعریف کنیم. چون $f(A) \subset X$ فشرده است، می‌توانیم باز $f(A) \subset U$ را که $\bar{U}$ فشرده است، انتخاب کنیم. حال از گزارهٔ ۲.۳ استفاده می‌کنیم منتها به‌جای A، $\bar{U}$ را جایگزین می‌کنیم و سپس دنباله را به U تحدید می‌کنیم. پس دنبالهٔ دقیق از بافه‌ها روی U به‌صورت

$$\circ \longrightarrow L_n \xrightarrow{\alpha_n} L_{n-۱} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_۱} L_\circ \xrightarrow{\alpha_\circ} S \longrightarrow \circ$$

به‌دست می‌آید. در این‌جا L_i ها بافه‌های موضعاً آزاد هستند. فرض کنید E_i ها کلاف‌های برداری مختلط متناظر با L_i ها باشند. چون محمل S در Y است، دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی $U - U \cap Y$ به‌دست می‌آوریم:

$$\circ \longrightarrow E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-۱} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_۱} E_\circ \longrightarrow \circ.$$

توجه کنید که $f(B) \subset U - U \cap Y$، پس دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی B القا می‌شود. در نتیجه می‌توانیم تعریف کنیم

$$f^! \gamma_Y(S) = d(f^* E_\circ, \ldots, f^* E_n; f^* \alpha_۱, \ldots, f^* \alpha_n).$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $f^!\gamma_Y(S)$ به تجزیهٔ افکنشی S و به انتخاب باز U بستگی نداشته و تنها به ردهٔ هموتوپی f وابسته است. پس با توجه به گزارهٔ ۲.۴ (i)، $f^!\gamma_Y(S)$ به‌خاطرِ طبیعی بودنِ تعمیم کلاف تفریق، عضو $\gamma_Y(S)$ را به‌طور یکتا در $K^\circ(X, X-Y)$ مشخص می‌کند.

گزاره ۱.۵ فرض کنید X قرص باز $\sum_1^n |z_i|^2 < 1$ در $\mathbb{C}^n$ و Y زیرفضایی از X باشد که با معادله‌های $z_i = 0$ $(1 \leq i \leq q)$ داده شده است. فرض کنید $\mathcal{B}_Y$ بافهٔ توابع هولومورف روی Y (که روی $X - Y$ صفر است) باشد: $\mathcal{B}_Y^\circ = \mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{O}_X$. در این صورت داریم

$$\mathrm{ch}\ \gamma_Y(\mathcal{B}^\circ) = u$$

که u مولد $H^{2q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ متناظر با Y است.

اثبات: چون $\mathcal{B}_Y^\circ = \frac{\mathcal{O}_X}{(z_1, \ldots, z_q)}$، می‌توانیم از نکته‌ای که در انتهای بخش ۳ آوردیم برای کلاف بدیهی $E = X \times \mathbb{C}^q$ استفاده کنیم. در این صورت، تجزیه‌ای از $\mathcal{B}_Y^\circ$ به‌دست می‌آوریم. این تجزیه را به قرص

$$A: \quad \sum_{i=1}^{q} |z_i|^2 \leq \frac{1}{2}, \quad z_i = 0\ (i > q)$$

تحدید می‌کنیم. با استفاده از گزارهٔ ۳.۴ به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{ch}\ \gamma_Y(\mathcal{B}^\circ) = u$$

که $u \in H^{2q}(A, A^\circ; \mathbb{Z})$ مولد متناظر با دوگان Y است. چون

$$H^{2q}(A, A^\circ; \mathbb{Z}) \cong H^{2q}(X, X-Y; \mathbb{Z}),$$

پس حکم نتیجه می‌شود.

۶. دورهای تحلیلی

در این بخش توضیح می‌دهیم که چگونه مشکل فنی در تعریف ردهٔ همولوژی یا کوهمومولوژی تحلیلی مختلط را رفع می‌کنیم. به این منظور، از گزاره‌های مقدماتی و کلاسیک زیر استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱.۶ گیریم X خمینهٔ مشتق‌پذیر و Y زیرخمینهٔ بسته از نقص بعد k و $f : A \longrightarrow X$ نگاشتی از CW ـ مجتمع متناهی A با بُعد کمتر از k به X باشد. در این صورت با هموتوپی به‌قدر دلخواه کوچک، می‌توان f را با g هموتوپ کرد که $g(A) \subseteq X - Y$.

گزاره ۲.٦ گیریم X خمینهٔ مختلط و Y زیرخمینهٔ تحلیلی با مقادیر مختلط از X با نقص بُعد مختلط q و (A,B) زوج CW ــ مجتمع متناهی با بُعد کمتر از $2q$ باشد. در این صورت برای هر نگاشت $f:(A,B)\longrightarrow(X,X-Y)$ می‌توان نگاشت g هموتوپ با f را پیدا کرد که $g(A)\subseteq X-Y$.

گزاره ۳.٦ فرض X و Y مانند گزاره قبل باشند. در این صورت $i:X-Y\longrightarrow X$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$i^*:H^r(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^r(X-Y;\mathbb{Z}),\quad 0\leq r\leq 2q-2.$$

اثبات: اگر A یک CW ــ مجتمع متناهی باشد و $f:A\longrightarrow X$ نگاشت دلخواه، از گزارهٔ ۲.٦ برای زوج $(A^{2q-1},\emptyset)$ که A^i سلول i ــ بعدی A است، نتیجه می‌گیریم f با نگاشت g هموتوپ است که $g(A^{2q-1})\subseteq X-Y$. پس i^* یک‌به‌یک است. حال گزارهٔ ۲.٦ را برای زوج $(A^{2q-2}\times I, A^{2q-2}\times 0\cup A^{2q-2}\times 1)$ به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که کلاس هموتوپی $g:A^{2q-2}\longrightarrow X-Y$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ f معین می‌شود. پس i^* پوشا نیز هست.

حال با استفاده از گزارهٔ قبل، کلاس دوگان زیرفضای تحلیلی را تعریف می‌کنیم. فرض کنید X خمینهٔ همبند مختلط و Y زیرفضای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) از نقص بُعد q در X باشد. اگر W زیرفضای تکین Y باشد، می‌بایست نقص بعدش بزرگتر از یا مساوی با $q+1$ باشد. پس اگر گزارهٔ قبل را برای X و W به‌کار ببریم، داریم

$$i^*:H^{2q}(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^{2q}(X-W,\mathbb{Z}).$$

i^* یکریختی است، اما از طرفی، $Y-W$ زیرخمینهٔ بسته از $X-W$ است و هر دو به‌طور طبیعی به‌خاطرِ ساختار مختلط، جهت‌دار هستند. پس $Y-W$ کلاسی مانند $y''\in H^{2q}(X-W,\mathbb{Z})$ را تعریف می‌کند.

گزاره ۴.٦ اگر X خمینهٔ مختلط و Y زیرخمینهٔ تحلیلی (حقیقی اما با مقادیر مختلط) از X با نقص بُعد q باشد، W را زیرفضای تکین Y قرار می‌دهیم. در این صورت یک و فقط یک کلاس $y\in H^{2q}(X,\mathbb{Z})$ وجود دارد که تصویرش در $H^{2q}(X-W,\mathbb{Z})$ کلاس y' است که توسط $Y-W$ به‌دست می‌آید.

کلاس y در گزارهٔ ۴.٦ را کلاسی که توسط زیرفضای Y مشخص می‌شود، می‌نامیم.

گزاره ۵.۶ گیریم X و Y مانند گزارهٔ قبل باشند. نگاشت $j:(X-W,X-Y)\longrightarrow(X,X-Y)$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$j^*: H^r(X,X-Y;\mathbb{Z})\longrightarrow H^r(X-W,X-Y;\mathbb{Z}),\qquad (0\le r\le 2q).$$

اثبات: استدلال شبیه گزارهٔ ۳.۶ است. فرض کنید $f:(A,B)\longrightarrow(X,X-Y)$ نگاشتی از زوج CW ـ مجتمع‌های متناهی (A,B) باشد. گزارهٔ ۲.۶ را برای زوج (A^{2q+1},B^{2q+1}) و فضاهای X و $X-W$ به‌کار می‌بریم. پس نگاشت g هموتوپ با f وجود دارد که $g(A^{2q+1})\subseteq X-W$. در نتیجه j^* یک‌به‌یک است. حال اگر گزارهٔ ۲.۶ را برای زوج $(A^{2q}\times I, B^{2q}\times I\cup A^{2q}\times 0\cup A^{2q}\times 1)$ و فضاهای X و $X-W$ به‌کار ببریم، مانند گزارهٔ ۳.۶ نتیجه می‌گیریم که j^* پوشا نیز هست.

گزاره ۶.۶ فرض کنید X و Y مانند گزارهٔ ۲.۵ تعریف شده‌اند با این تفاوت که Y تحویل‌ناپذیر است. در این صورت $H^{2q}(X,X-Y;\mathbb{Z})$ گروه دوری نامتناهی است که با عضوی مانند u تولید می‌شود که تصویرش در $H^{2q}(X;\mathbb{Z})$، کلاس y است.

اثبات: با استفاده از گزاره‌های ۳.۶ و ۵.۶، نمودار جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc}
H^{2q}(X,X-Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^*} & H^{2q}(X-W,X-Y;\mathbb{Z})\\
\downarrow & & \downarrow\\
H^{2q}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2q}(X-W;\mathbb{Z})
\end{array}$$

در این‌جا i^* و j^* هر دو یکریختی هستند. با توجه به نحوهٔ تعریف کلاس y، می‌توانیم برای اثبات گزاره، حکم را برای $X-W$ و $Y-W$ به‌جای X و Y ثابت کنیم، یعنی می‌توانیم فرض کنیم Y بدون تکینگی و همبند است. پس $H^{2q}(X,X-Y;\mathbb{Z})$ دوری نامتناهی است که با کلاس تعریف شده توسط Y تولید می‌شود.

۷. قضیهٔ اصلی

فرض کنید X خمینهٔ مختلط باشد و $y\in H^{2q}(X;\mathbb{Z})$. می‌گوییم کلاس y تحلیلی مختلط است اگر زیرفضاهای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) Y_i وجود داشته باشند به‌طوری که $y=\sum n_i y_i$، $n_i\in\mathbb{Z}$ و y_i کلاسی است که توسط Y_i در $H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ تعریف می‌شود. حال می‌توانیم قضیهٔ اصلی این مقاله را بیان کنیم.

قضیه ۱.۷ اگر X خمینهٔ مختلط و $y \in H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ دور تحلیلی مختلط باشد، آن‌گاه $d_r y = 0$ برای هر r که d_r مشتق‌های دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ $H^* \Longrightarrow K^*$ هستند. به‌طور خاص، برای هر عدد اول p داریم $\delta_p P_p^1(y) = 0$.

P_p^1، p ـ امین توان عملگر استینراد است که

$$P_p^1 : H^{2q}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q+2p-2}(X, \mathbb{Z}_p).$$

در حالتی که $p = 2$، $\delta_p P_p^1$ همان Sq^3 است.

با استفاده از گزاره‌های ۲.۶ و ۶.۶ و همچنین ۱.۸ که در بخش بعد اثبات می‌کنیم، قضیهٔ ۱.۷ از گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۷ فرض کنید X خمینهٔ مختلط و Y زیرفضای بستهٔ تحویل‌ناپذیر تحلیلی از نقص بُعد مختلط q باشد و u مولد $H^{2q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ باشد که در گزارهٔ ۶.۶ بیان کردیم. در این صورت

$$\mathrm{ch}\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ) = \rho_*(u) + \text{درجات بالاتر}$$

که در آن $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ عنصر گروتندیک از بافهٔ $\mathcal{B}_Y^\circ$ است و ρ_* نگاشتی که از نشاندن ضرایب $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Q}$ القا می‌شود.

توجه کنید که چون $\mathcal{B}_Y^\circ$ بافه‌ای منسجم است، پس $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ خوش‌تعریف است. از طرفی چون $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ و u تابعگونی هستند، کافی است گزارهٔ ۲.۷ را برای مثال خاص ثابت کنیم. اما گزارهٔ ۱.۵ حالت خاص گزارهٔ ۱.۷ است وقتی X قرص باز $\sum |z_i|^2 < 1$ و Y زیرفضای $z_i = 0$ ($1 \le i \le q$) است. در نتیجه، گزارهٔ ۲.۷ و با توجه به خواص دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ و قضیهٔ ۲.۲، قضیهٔ ۱.۷ نیز اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۱.۷ شرط لازم را برای آن‌که یک دور، تحلیلی باشد به‌دست می‌دهد که این به ما کمک می‌کند تا دورهایی بسازیم که تحلیلی هستند. در حالتی که خمینهٔ X استاین Stein باشد مثال ساده‌ای وجود دارد، اما مثال خمینهٔ افکنشی جبری که از روی ایده‌های سِر Serre ساخته شده بیشتر جالب توجه است.

گزاره ۳.۷ اگر G گروهی متناهی باشد و $n > 2$، خمینهٔ جبری افکنشی X وجود دارد که نوع هموتوپی n ـ ام X با ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین $K(G,1) \times K(\mathbb{Z},2)$ یکسان است و مشخصاً $H^*(G,\mathbb{Z})$ یک فاکتور مستقیم[1] $H^*(X,\mathbb{Z})$ است.

1) direct factor

گزاره ۴.۷ اگر p عددی اول، آن‌گاه گروه متناهی G و ردهٔ کوهمولوژی $y \in H^{2q}(G,\mathbb{Z})$ با مرتبهٔ p وجود دارند که $\delta_p P_p^1(y) \neq 0$.

در نتیجه با استفاده از مشاهدهٔ بخش بعد در مورد مشتق دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ و دو گزارهٔ قبل، خمینهٔ افکنشی جبری پیدا کردیم که مثال نقض حدس هاج است.

اثبات ۳.۷. سِر در [۵] نشان داد که برای عدد طبیعی r داده شده، نمایش G در $\mathbb{C}^{N+1}$ و خمینهٔ جبری Y در $\mathbb{P}^N$ وجود دارند که Y تحت عمل G ناوردا است و همچنین اولاً عمل G روی Y نقطه ثابت ندارد، ثانیاً Y تقاطع تام[1] از تعدادی ابررویه[2] درجهٔ d در $\mathbb{P}^N$ است که روی Y تکینگی ندارند و به‌طور تراگذر[3] یکدیگر را قطع می‌کنند و ثالثاً بُعد مختلط Y، r است. Y همبند است و $X = \frac{Y}{G}$ یک خمینهٔ جبری افکنشی. توجه کنید که $Y \longrightarrow \mathbb{P}_N$، $(r-1)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است. چون در ابتدا با درنظر گرفتن همهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ d، $\mathbb{P}^N$ را در $\mathbb{P}^M$ بنشانید، با توجه به انتخاب Y، Y از تقاطع تراگذر $\mathbb{P}^M$ با زیرفضای خطی L به‌دست می‌آید. اما از هندسهٔ دیفرانسیل می‌دانیم نگاشت $L \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ با نگاشت $L' \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ هم‌ارز هموتوپی است که L' زیرفضای خطی هم‌بُعد L است که $\mathbb{P}^N$ را به‌طور تراگذر قطع می‌کند. در نتیجه $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$ را می‌توانیم با $Y' \longrightarrow \mathbb{P}^N$ که Y' تقاطع تام ابررویه‌های بدون تکینگی است، جایگزین کنیم. حال اگر از صورتی از قضیهٔ لفشتز که توسط بات [۳] ثابت شد استفاده کنیم، نتیجه می‌شود $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$، $(r-1)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است. فرض کنید $v \in H^2(Y,\mathbb{Z})$ تحدید مولد طبیعی $\mathbb{P}^N$ باشد. در این صورت v، کلاس چرن تحدید کلاف خطی $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ است. چون G روی این فضای کلاف عمل می‌کند، کلاف ξ روی X وجود دارد به‌طوری که $\eta = \pi^*\xi$ که در آن $\pi : Y \longrightarrow X$ نگاشت پوششی است. اگر u کلاس چرن ξ باشد، می‌بایست $v = \pi^* u$. فرض کنید u توسط نگاشت $f : X \longrightarrow K(\mathbb{Z},2)$ القا شده باشد و $g : X \longrightarrow B_G$ نگاشتی باشد که نگاشت پوششی $X \longrightarrow Y$ را القا می‌کند. همچنین فرض کنید $\bar{g} : Y \longrightarrow E_G$ نگاشت طبیعی باشد که از g روی کلاف‌ها القا می‌شود:

$$\begin{array}{lcl} Y & (f\circ\pi,\bar{g}) \longrightarrow & K(\mathbb{Z},Y)\times E_G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ X & (f,g)\longrightarrow & K(\mathbb{Z},Y)\times B_G \end{array}$$

---

1) complete intersection 3) hypersurface 4) transversally

نگاشت $(f\circ \pi, \bar g)$، $(r-1)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است و در نتیجه (f,g) نیز این‌گونه است. اگر فرض کنیم $r-1\geq n$، با توجه به این‌که $B_G=K(G,1)$، حکم ثابت می‌شود.

اثبات ۴.۷: فرض کنید p عدد اول فرد است و $G=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$. با توجه به انتخاب G، هر عضو غیرصفر $H^q(G,\mathbb{Z})$، $(q\geq 1)$ دارای مرتبهٔ p است. در نتیجه $H^*(G,\mathbb{Z})$ پوچی همریختی باکشتاین[1]

$$\beta: H^*(G,\mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^{*+1}(G,\mathbb{Z}_p)$$

است. با استفاده از فرمول کونت[2] روی میدان‌ها، داریم

$$H^*(G,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p[u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3]$$

که برای $i=1,2,3$، $u_i^2=0$ و همچنین $\beta(u_i)=v_i$، $P_p^1(u_i)=0$ و $P_p^1(v_i)=v_i^p$. قرار می‌دهیم $\mathcal{L}^1=\beta P_p^1-P_p^1\beta$. به‌سادگی مشاهده می‌شود که $\mathcal{L}^1$ پادمشتق است و اگر $x\in\ker\beta$، آن‌گاه $\mathcal{L}^1(x)=\beta P_p^1(x)$. در نتیجه برای اثبات گزارهٔ ۴.۷ می‌بایست نشان دهیم $y\in H^{2q}(G,\mathbb{Z}_p)$ وجود دارد به‌طوری که $\beta(y)=0$ و $\mathcal{L}^1(y)\neq 0$. تعریف می‌کنیم $y=\beta(u_1u_2u_3)$. به‌وضوح $\beta(y)=0$ و

$$\mathcal{L}^1(y)=\mathcal{L}^1\left(\sum_{\text{دوری}}(v_1v_2^pu_3)\right)=-\sum_{\text{دوری}}(v_1v_2^pu_3-v_1u_2v_3^p)\neq 0.$$

۸. عملگر d_{2p-1}

در این بخش به اثبات ادعایی درباره مشتق‌های d_{2p-1} از دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ که در بخش قبل استفاده کردیم، می‌پردازیم. صورت ادعایی که در بخش قبل استفاده کردیم به‌شکل زیر بود:

گزاره ۱.۸ اگر مشتق‌های دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ d_ru صفر باشند، آن‌گاه $\delta_pP_p^1(u)=0$.

این گزاره از گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۸ گیریم $u\in H^k(X;\mathbb{Z})$ که p عددی اول است. در این صورت عدد صحیح N که نسبت به p اول است وجود دارد به‌طوری که $d_s(Nu)=0$، $s<2p-1$ و $d_{2p-1}(Nu)=-N\delta_pP_p^1(u)$.

با توجه به بخش (۲) که شرط صفر شدن مشتق‌های دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ را برحسب

---

1) Bockstein 2) Künneth formula

مشخصهٔ چرن بیان کردیم، ضابطهٔ اولین مشتق ناصفر برحسب مشخصهٔ چرن قابل بیان است.

لم ۳.۸ با نمادگذاری بخش (۲)، فرض کنید $d_s\alpha = \circ$ برای $s < r$. اگر پادزنجیر $\mathrm{ch}_{k+r-1}(\xi)$ را با β نمایش دهیم، $\delta\beta$ نمایش پادزنجیر $d_r\alpha$ خواهد بود.

برای اثبات گزارهٔ ۲.۸ از خواص فضای آیلنبرگ ـ مک‌لین $K(\mathbb{Z}, n)$ استفاده می‌کنیم:

(۱) $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ برای $\circ < q < n$ متناهی و مستقل از n است؛

(۲) p ـ زیرگروه $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z})$ برای $\circ < q < 2p-1 \leq n$ صفر است؛

(۳) اگر $n > 2p-1$، p ـ زیرگروه $H^{n+2p-1}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ دوری از مرتبهٔ p است که با $\delta_p P_p^1(v)$ که v کلاس پایه‌ای[1] $K(\mathbb{Z},n)$ است، تولید می‌شود.

همچنین از خواص گروه هموتوپی پایدار گروه‌ها نیز استفاده می‌کنیم:

(۴) $\pi_q^s = \pi_{n+q}(S^n)$ برای $\circ < q < n-1$ متناهی و مستقل از n است؛

(۵) p ـ زیرگروه π_q^s برای $\circ < q < 2p-3$ صفر است؛

(٦) p ـ زیرگروه π_{2p-3}^s دوری از مرتبهٔ p است.

لم ۴.۸ اگر p اول و $\mathbb{P}^n$ فضای افکنشی مختلط از بعد n باشد، نگاشت پایدار[2] $g : S^{2p} \longrightarrow \mathbb{P}^p$ از درجهٔ Mp وجود دارد که M نسبت به p اول است.

اثبات: دنبالهٔ دقیق از گروه هموتوپی پایدار برای زوج $\mathbb{P}^n$ و $\mathbb{P}^{n-1}$ را درنظر بگیرید:

$$\cdots \longrightarrow \pi_q^s(\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_q^s(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{j_*} \pi_{q-2n}^s \xrightarrow{\delta} \cdots$$

برای اثبات لم کافی است عضو $\alpha \in \pi_{2p}^s(\mathbb{P}^p)$ پیدا کنیم که $j_*(\alpha) = Mp\eta$ (η مولد $\pi_\circ^s = \mathbb{Z}$ است). معادلاً نشان دهیم $\delta(\eta) \in \pi_{2p-1}^s(\mathbb{P}^{p-1})$ مرتبه‌ای دارد که Mp را می‌شمارد. با قراردادن $q = 2p-1$ و $n = 2,\ldots,p-1$ در دنبالهٔ دقیق بالا و با استفاده از (۵) و (٦)، نتیجه می‌گیریم که $\pi_{2p-1}^s(\mathbb{P}^{p-1})$ دوری مرتبهٔ p است و لم ثابت می‌شود.

حال به اثبات گزارهٔ ۲.۸ بازمی‌گردیم. چون دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ طبیعی است، کافی است فرض کنیم X ساختار سلولی متناهی ـ بعد اما بعد به‌دلخواه بزرگ از $K(\mathbb{Z},k)$ است و u از

1) fundamental class

۲) منظور این است که $k > \circ$ وجود دارد که $S^k g : S^{2p+k} \longrightarrow S^k\mathbb{P}^p$ درجه‌اش Mp است ($S^k g$ یعنی k بار روی g نگاشت تعلیق را اثر دهید).

کلاس پایه‌ای v القا شده باشد. با توجه به (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم عدد صحیح N وجود دارد که نسبت به p اول است و $d_s(Nv) = ۰$ برای $s < ۲p - ۱$ و

$$\exists \lambda \in \mathbb{Z}_p : \quad d_{۲p-۱}(Nv) = \lambda N \delta_p P_p^۱(v)$$

چون دنبالهٔ طیفی تحت نگاشت تعلیق نیز پایدار است، پس λ از k مستقل است. برای محاسبهٔ λ، فرض کنید

$$X = S^{۲n}(\mathbb{P}^p) \cup \mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$$

که $\mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$ سلولی است که با نگاشت g در لم ۴.۸ به‌دست آوردیم. اگر x مولد $H^۲(\mathbb{P}^p, \mathbb{Z})$ باشد، با ترکیب نگاشت تعلیق با خودش داریم $u = S^{۲n}(x) \in H^{۲n+۲}(X, \mathbb{Z})$. می‌دانیم عضو $\xi \in K(\mathbb{P}^p)$ وجود دارد که

$$\mathrm{ch}\xi = e^x - ۱ = x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}.$$

در نتیجه عضو $K(S^{۲n}(\mathbb{P}^p)) \ni \eta = S^{۲n}(\xi)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{ch}\eta = S^{۲n}(e^x - ۱) = u + \cdots + \frac{S^{۲n}(x^p)}{p!}.$$

با توجه به لم ۳.۸، $d_r u$ توسط پادزنجیر $\frac{My}{(p-۱)!}$ که y مولد گروه پادزنجیر $C^{۲n+۲p+۱}(X, \mathbb{Z})$ است، قابل نمایش است. از طرف دیگر برای x در $\mathbb{P}^p$ داریم $P_p^۱(x) = \bar{x}^p$ که $\bar{x}$ نمایش x به پیمانهٔ p است. پس $\delta_p P_p^۱(u)$ توسط My قابل نمایش است. چون $(p-۱)! \equiv_p -۱$، پس $\lambda = -۱$ و این اثبات ۲.۸ را کامل می‌کند.

مراجع

[1] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, "Analytic cycles on complex manifolds", *Topology*, **1**(1962), 25-45.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, "Vector bundles and homogeneous spaces", *Proceedings of Symposiam of American Mathematical Society*, **3**(1960), 7-38.

[3] R. Bott, "On theorem of Lefschetz", *Mich. Math. J.*, **6**(1959), 211-216.

[4] P. Griffiths, *Topics in algebraic and analytic geometry*, Princeton University Press, 1974.

[5] J-P. Serre, “Sur la topolgie des variétés algébriques en characteristique p”, *Symposium Internacional de Topologia Algebraica*, Mexico, 1958, 24-53.

[6] R. Thom, “Quelques properétés des varietés différentiables”, *Comment. Math. Helvet.*, **28**(1954), 17-86.

سام نریمان

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

sam.nariman@gmail.com