فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۵۳ تا ۷۱

نظریهٔ شمارشی پولیا

فاطمه کوره‌پزان مفتخر و علی‌رضا اشرفی

چکیده

در این مقاله به بازنگری فرمول شمارشی پولیا می‌پردازیم. این روش، راه‌حلی را برای شمارش تعداد گراف‌های غیریکریخت از مرتبهٔ n ارائه می‌دهد. به‌علاوه، کاربردهایی از قضیهٔ شمارش پولیا در حل مسائلی از شیمی ارائه خواهد شد که با استفاده از آن می‌توان تعداد ایزومرهای خانواده‌ای از ترکیبات شیمیایی را به‌دست آورد.

واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی: شاخص دوری، عمل گروه، قضیهٔ شمارشی پولیا.
رده‌بندی موضوعی: انجمن ریاضی آمریکا: 05E18.

۱. مروری بر زندگی علمی جورج پولیا

پدر و مادر جورج پولیا[۱]، آنا دویچ[۲] و یاکاب پولیا[۳]، هر دو یهودی بودند. آنا از خانواده‌ای اصیل بود که مدت زیادی در شهر بودا[۴] زندگی کرده بودند. در سال ۱۸۷۲ زمانی که آنا ۱۹ ساله بود شهرهای بودا، ابودا[۵] و پست[۶] با هم ادغام شدند و به شهر بوداپست[۷] تبدیل شدند. شاید بهتر است کمی در مورد نام خانوادگی جورج پولیا توضیح دهیم، زیرا کاملاً آن‌گونه که به‌نظر می‌آید نبوده است. وقتی جورج متولد شد، پنج سال بود که نام خانوادگیشان به پولیا تغییر یافته بود. قبل از این نام پدرش، یاکاب پالیک[۸] بود اما برای پی بردن به دلیل این موضوع احتیاج به نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ مجارستان و همچنین دورهٔ زندگی یاکاب پالیک داریم.

یاکاب وکیل بود. پس از ورشکستگی شرکت حقوقی خودش، در یک شرکت بین‌المللی بیمه مشغول به‌کار شد. اما آنچه او واقعاً می‌خواست یک پست دانشگاهی بود تا بتواند در موضوعاتی که

1) George Polya 2) Anna Deutsch 3) Jakab Polya 4) Buda 5) Obuda 6) Pest
7) Budapest 8) Jakab Pollak

واقعاً به آن‌ها علاقه‌مند بود، نظیر اقتصاد و آمار، کار پژوهشی انجام دهد. پس از سال ۱۸۶۷ مجارستان از حکومت سلطنتی اتریش ـ مجارستان استقلال کامل پیدا کرد و سیاست کشور به سمت دولت مجارستان متمایل شد. این بهترین زمان بود تا یاکاب پالیک شانس خود را برای یافتن یک پست دانشگاهی بهبود بخشد. برای این منظور، در سال ۱۸۸۲ یک نام خانوادگی مجاری برای خود انتخاب کرد، اما این‌که آیا این کار به او در موفقیتش در گرفتن منصب استادیاری در دانشگاه بوداپست کمک کرده یا نه، چیزی نمی‌توان گفت. او این کرسی را در اوایل دههٔ پنجاه زمانی که جورج ده ساله بود، مدت کوتاهی قبل از فوتش، به‌دست آورد. یاکاب پولیا در سال ۱۸۹۷ فوت کرد. آن موقع، جورج یک برادر بزرگتر به نام ینو[1] داشت که ۲۱ ساله بود و در رشتهٔ پزشکی تحصیل می‌کرد و برادری کوچکتر به نام لازلو[2] که ۴ سال از او جوان‌تر بود. ذکر این نکته با ارزش است که ینو عاشق ریاضیات بود و همیشه از این‌که ریاضیات را دنبال نکرده بود پشیمان بود. به‌همان اندازه که جورج به‌عنوان یک ریاضیدان شهرت داشت، ینو در حرفهٔ پزشکی معروف بود. با وجود این‌که ینو باهوش‌ترین کودک خانواده بود، اما متأسفانه قبل از آن‌که شهرتی برای خود دست و پا کند، در جنگ جهانی اول کشته شد. با وجود تلاش‌های پدر پولیا برای ورود به یک محیط علمی، اصرار مادر برای این‌که جورج حرفهٔ پدرش را ادامه دهد، جای تعجب دارد.

جورج در بوداپست به مدرسهٔ ابتدایی رفت و گواهی‌نامهٔ خود را در سال ۱۸۹۴ دریافت کرد. پس از آن، وارد دبیرستان شد و زبان‌های کلاسیک یونانی و لاتین را به‌خوبی زبان‌های آلمانی و مجارستانی مطالعه کرد. در مدرسه موضوعات مورد علاقه‌اش زیست شناسی و ادبیات بودند و در درس ادبیات موفق به دریافت درجهٔ ممتاز شد که البته در درس جغرافی و موضوعات دیگر نیز این اتفاق افتاده بود. نسبتاً غیرعادی است که شخصی غرق در شاخه‌های مختلف ریاضیات باشد اما در مدرسه عاشق این رشته نبوده باشد. اما این همان اتفاقی است که برای جورج پولیا افتاده است. او در دوران دبیرستان نمرات خوبی در ریاضیات کسب نکرد و کار خود را در هندسه صرفاً با درجهٔ رضایت‌بخش به اتمام رساند. با این حال، در درس حساب نمرات بهتری کسب می‌کرد. دلیل عدم موفقیت او در ریاضیات به‌خاطر ضعف آموزش بود و او بعدها از دو تا از سه معلم ریاضیش به‌عنوان معلم‌های مطرود یاد می‌کند.

در سال ۱۹۰۵، پولیا در دانشگاه بوداپست ثبت نام کرد و از لحاظ مالی توسط برادرش ینو که آن زمان یک جراح بود حمایت می‌شد. او شروع به مطالعهٔ حقوق کرد اما برایش خسته کننده بود و بیشتر از یک ترم دوام نیاورد. سپس دو سال به موضوعات مورد علاقه‌اش در مدرسه، یعنی زبان و ادبیات پرداخت و گواهی‌نامهٔ تدریس لاتین و مجارستانی در دبیرستان را کسب کرد. اما این صرفاً یک مدرک تحصیلی بود که به آن می‌بالید و هرگز از آن استفاده نکرد. بعداً به فلسفه علاقه‌مند شد اما استادش به او پیشنهاد کرد برای فهم بهتر فلسفه دروس ریاضی و فیزیک را بگذراند و لذا در نهایت، به مطالعهٔ ریاضیات پرداخت. پولیا در دانشگاه بوداپست فیزیک را نزد اُتووش[3] و ریاضیات را

1) Jeno 2) Laslo 3) Eotvos

نزد فِجِر[۱] آموخت.

در سال تحصیلی ۱۹۱۱—۱۹۱۰ پولیا در دانشگاه وین تحصیلات خود را ادامه داد. در این مدت هزینهٔ تحصیلش را از تدریس خصوصی به پسر یکی از مقامات عالی‌رتبه به‌دست می‌آورد. او در وین در سخنرانی‌های ریاضیات که توسط ویرتینگر[۲] و مرتنس[۳] ارائه می‌شد، حضور پیدا می‌کرد و به‌خاطر علاقهٔ وافری که به فیزیک داشت، پیوسته در سخنرانی‌های مربوط به نسبیت و اپتیک شرکت می‌کرد. سال بعد به بوداپست برگشت و سپس مدرک دکتری خود را به‌خاطر کار بر روی مسئله‌ای در احتمالات هندسی دریافت کرد. او بیشتر وقتش در سال‌های ۱۹۱۲ و ۱۹۱۳ را در دانشگاه گوتینگن[۴] بود جایی که ریاضیدانان برجسته‌ای مانند کاراتئودوری[۵]، کلاین[۶]، هیلبرت[۷]، هکه[۸]، ادموند لانداو[۹]، رونگه[۱۰]، کورانت[۱۱] و تئوپلیتز[۱۲] حضور داشتند.

پولیا در سال ۱۹۱۳ به بوداپست بازگشت وابتدا سگو[۱۳] را ملاقات کرد. در آن زمان، سگو یک دانشجو بود و پولیا به همراه او حدسی را دربارهٔ ضرایب فوریه مطرح کرده بودند. چند سال بعد که پولیا تصمیم به نوشتن کتاب مسائل و قضایای آنالیز گرفت، می‌دانست که به تنهایی قادر به انجام آن کار نیست. بنابراین به‌همراه سگو در زمانی بیش از یک سال، دو مجموعهٔ فوق‌العاده از مسائل را نوشتند. در ([۱]) پولیا دلیل این‌که چرا ایده‌های ریاضی مسائلی را که قبلاً حل شده‌اند از راه‌های مختلف توضیح می‌دهد، بیان می‌کند.

> «من خیلی دیر به ریاضیات روی آوردم. همان‌طور که به طرف ریاضیات آمدم و مطالب را یاد گرفتم با خودم فکر می‌کردم که چگونه این اثبات به ذهن افراد خطور کرده است و چگونه می‌توانند به این نتایج برسند. مشکل من در فهم ریاضیات، چگونگی کشف راه‌حل‌ها بود.»

کتاب پولیا و سگو چه چیز تازه‌ای داشت که آن را از دیگر کتاب‌ها متمایز می‌کرد؟ آن چیز، ایدهٔ پولیا در طبقه‌بندی مسائل نه بر اساس موضوع بلکه بر اساس روش حل آن‌ها بود. پولیا و سگو در سال ۱۹۲۳ برای چاپ کتابشان با انتشارات اشپرینگر گفتگو کردند و سرانجام در سال ۱۹۲۵ کتاب مسائل و قضایای آنالیز در دو جلد و به زبان آلمانی منتشر شد.

> «این یک شاهکار ریاضی بود که خود کتاب اعتبارش را تضمین می‌کرد ([۲]).»

دانشگاه استنفورد اهمیت کار پولیا را این‌گونه توصیف می‌کند ([۸]):

> «بین آموزش ریاضیات و جهان حل مسئله یک خط فاصل مشخص وجود دارد. حل مسئله قبل و بعد از پولیا.»

پولیا در کتاب «چگونه مسئله حل کنیم» ([۹]) بیان می‌کند که برای حل مسائل به مطالعهٔ اکتشافی نیاز است.

---

1) Fejer 2) Wirtinger 3) Mertnes 4) Gottingen 5) Caratheodory 6) Klein 7) Hilbert 8) Hecke 9) Edmund Landau 10) Runge 11) Courant 12) Toeplitz 13) Szego

> «هدف بحث اکتشافی مطالعهٔ روش‌ها و قانون‌های کشف و اختراع است. . . .
> هدف، کشف یک راه‌حل برای مسئلهٔ پیش رو است. آموزش خوب عبارت است از این که با یک روش معین به دانش‌آموزان فرصت بدهیم مطالب را خودشان کشف کنند.»

او همچنین رهنمودهای حکیمانه‌ای دارد:

> «اگر شما نمی‌توانید مسئله‌ای را حل کنید، حتماً یک مسئله آسان‌تری وجود دارد که می‌توانید آن را حل کنید، پس پیدایش کنید.»

تقارن هندسی و شمارش رده‌های تقارن اشیاء، علاقهٔ اصلی پولیا در بیش از چندین سال بود. او در سال ۱۹۲۴ مقاله‌ای در مورد هفده گروه کریستالوگرافی نوشت که بعدها الهام‌بخش اِشِر[1] در نقاشی‌های مشهورش شد. پولیا با استفاده از مفهوم تابع مولد و گروه جایگشتی، تعداد ایزومرها را در شیمی آلی شمرد، که در آن زمان از اهمیت اساسی برخوردار بود. منظور از ایزومر، مولکول‌های شیمیایی است که فرمول شیمیایی یکسان اما آرایش اتمی متفاوت دارند. سهم اصلی پولیا در ترکیبیات، قضیهٔ شمارشی او است که در سال ۱۹۳۷ منتشر شد.

۲. جورج پولیا و ریاضیات شمارشی

جورج پولیا پدر بی چون و چرای حل مسائل ترکیبیاتی است. طی زندگی طولانی و پر فراز و نشیبش (۱۹۸۵ ــ ۱۸۸۷) به آنالیز کلاسیک و حل مسائل کاربردی جبر پرداخت. او سهم قابل‌توجهی در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضیات داشته است. اما در بین متخصصان ترکیبیات، بیش از هر چیز به‌خاطر قضیهٔ شمارشی خود که در مقاله‌ای در سال ۱۹۳۷ به چاپ رسید، مشهور است ([۷]). این مقاله از بسیاری جهات قابل توجه است؛ برای مثال مقاله‌ای طولانی است که منحصراً به یک قضیه و کاربردهای آن اختصاص دارد.

قضیهٔ پولیا دستهٔ بزرگی از مسائل ترکیبیاتی روزمره را به شرح ذیل حل می‌کند: فرض کنیم یک تعدادی جعبه و یک فروشگاه از اشیاء، به‌نام شکل، داریم که هر کدام از آن‌ها دقیقاً در یک جعبه قرار دارد. البته ممکن است در دو یا چند جعبه شکل‌های یکسانی قرار داده باشیم. ساختار نهاییِ جعبه‌ها به‌علاوهٔ اشکال پیکربندی نامیده می‌شود. علاوه بر این، فرض کنیم که هر شکلی دارای یک ظرفیت است که معمولاً یک عدد صحیح نامنفی است و ظرفیت یک پیکربندی را برابر جمع ظرفیت‌های شکل‌های داخل جعبه‌ها تعریف می‌کنیم. حال اگر همهٔ جعبه‌ها متمایز باشند، یک مسئلهٔ ساده، تعیین تعداد پیکربندی‌هایی که محتوایی معین دارند.

اگر جعبه‌ها متمایز نباشند چه اتفاقی می‌افتد؟ در آن صورت تجدید آرایش مشخص جعبه‌ها در یک پیکربندی، یک پیکربندی جدیدی را ایجاد می‌کند که از بعضی جهات هم‌ارز پیکربندی اصلی

1) Escher

است. به عبارت دقیق‌تر، یک گروه G از جایگشت‌های روی جعبه‌ها داریم. دو پیکربندی را هم‌ارز می‌نامیم اگر یکی از روی دیگری به‌وسیلهٔ جابه‌جا کردن جعبه‌ها توسط اعضایی از G به‌دست آمده باشد. حال این سؤال مطرح است که چه تعداد پیکربندی ناهم‌ارز داریم که محتوایی مشخص دارند؟ این مسئله‌ای است که قضیهٔ پولیا به آن پاسخ می‌دهد. پولیا استفادهٔ ظریفی از سری شمارش و توابع مولد در مقاله‌اش کرده است. سری شمارش اشکال در مسئلهٔ پولیا یک سری توانی است که در آن، ضریب x^n برابر تعداد شکل‌های با محتوای n است. این مطلب معمولاً از حکم مسئله معلوم است. سری شمارش پیکربندی به‌طور مشابه برای پیکربندی‌های با محتوای n تعریف می‌شود. بنابراین، این سری همهٔ جواب‌های مسئله را خلاصه می‌کند. چه ارتباطی بین این دو سری هست که ما را قادر می‌سازد سری دوم را از روی سری اول به‌دست آوریم؟ به‌وضوح این مطلب باید به گروه G بستگی داشته باشد. هر جایگشت را می‌توان به حاصل‌ضرب دورهای مجزا تجزیه کرد و این تجزیه صرفنظر از ترتیب دورها یکتا است. به هر جایگشت g از G، تک‌جمله‌ای $s_1^{j_1}s_2^{j_2}\ldots$ را نسبت می‌دهیم که در آن، j_i تعداد دورهای به طول i در g است. میانگین این تک‌جمله‌ای‌ها روی تمام عناصر G عبارتی است که پولیا به آن شاخص دوری گروه G می‌گوید. قضیهٔ پولیا بیان می‌کند که سری شمارشی پیکربندی از جایگزینی سری شمارشی اشکال در شاخص دوری به‌دست می‌آید، به این معنی که اگر سری اشکال را با $f(x)$ نشان دهیم، با جایگزینی هر پیشامد s_i با $f(x^i)$ در شاخص دوری، سری شمارشی پیکربندی به‌دست می‌آید. این قضیه حل طیف گسترده‌ای از مسائل محاسباتی با کاربرد تجربی را ممکن کرده است. در اینجا تعدادی از کاربردهای این قضیه را بیان می‌کنیم.

کاربرد ویژه‌ای از قضیهٔ پولیا در شمارش درختان ریشه‌دار دیده می‌شود. در یک درخت ریشه‌دار، یک رأس به‌عنوان ریشه از بقیه رأس‌ها متمایز است. فرض کنیم kتا یال به ریشه متصل باشد. در طرف دیگر این یال‌ها، دوباره یک درخت ریشه‌دار داریم. بنابراین kتا جعبه داریم و در هر کدام از آن‌ها می‌توانیم یک درخت ریشه‌دار قرار بدهیم. در مسئلهٔ اساسی از این نوع، یال‌های متصل به ریشه و بنابراین جعبه‌ها، می‌تواند به هر طریقی جابه‌جا شوند و لذا با استفاده از قضیهٔ پولیا، به این نتیجه می‌رسیم که این گروه برابر گروه تقارن‌های کامل S_k است. قضیهٔ پولیا، سری شمارش درخت‌های ریشه‌دار با kتا یال متصل به ریشه را برحسب سری شمارشی $T(x)$، برای همهٔ درختان ریشه‌دار بیان می‌کند. با جمع این نتایج روی همهٔ مقادیر k و ریشه، سری شمارش $T(x)$ را که به‌طور بازگشتی تعریف شده است، بازیابی می‌کنیم. این دست تعاریف بازگشتی از سری‌های شمارشی در بسیاری از کاربردهای قضیهٔ پولیا متداول هستند، ولی به‌ندرت به یک فرمول صریح برای تعداد پیکربندی‌های شمارش شده منجر می‌شوند و معمولاً برای محاسبات عددی مناسب هستند.

ترکیبات شیمیایی را می‌توان با فرمول ساختاری نشان داد که این فرمول‌ها با نظریهٔ مقدماتی گراف‌ها قابل بررسی هستند. خصوصاً ترکیبات شیمیایی غیرحلقوی که فاقد مدار می‌باشند، متناظر با درخت‌ها هستند. پولیا با استفاده از روش‌هایی مشابه آنچه در پاراگراف آخر مطرح شد، شمارش

انواع مختلف ترکیبات غیرحلقوی مانند آلکان‌ها (یا پارافین‌ها)، آلکان‌های استخلافدار شده و بسیاری از خانواده‌های دیگر از ترکیبات را به‌منظور تعیین تعداد ایزومرها انجام داد. با انتخاب مناسب گروه G او قادر بود این شمارش را برای حالت ایزومرهای فضایی به خوبی وقتی که شکل مولکول مهم نبود انجام دهد. پولیا همچنین برخی از انواع ترکیبات شیمیایی حلقوی را که از طریق افزایش رادیکال‌های آلکین یا ترکیبات شبه‌درختی دیگر به اتم‌های ساختارهای حلقوی ساده مختلف به‌دست آمده بودند، در مقالهٔ سال ۱۹۳۷ و در برخی مقالات دیگری که در سال‌های قبل از آن چاپ شده بود، شمرد. این موارد و بسیاری از کاربردهای دیگر قضیه، بخش اصلی مقالهٔ پولیا را کامل می‌کند؛ هرچند در بخش آخر، پولیا توانایی‌های تحلیلی قابل توجه‌اش را برای استنتاج نتایج تقریبی برای خیلی از مسائل شمارشی حل‌شده در بخش‌های قبلی به‌کار می‌برد. با این کار، او مسیری را برای شمارش تقریبی ایجاد کرده است که باید توسط گروه‌های تحقیقاتی دیگر پیموده شود.

پولیا علاوه بر مسائلی که در قضیهٔ اصلیش آمده بود، مسائل زیاد دیگری را هم حل کرد. در سال ۱۹۴۰، از قضیه‌اش برای حل مسئله‌ای در منطق استفاده کرد و مشهور است که درخت‌های غیربرچسب‌دار با تعداد رأس‌ها و یال‌های معلوم را شمرده است. در کمال تعجب او کارش را روی این مسئله هرگز منتشر نکرد. این شمارش را می‌توان به این شرح اجرا کرد: برای گراف‌های با p رأس، هر جفت از رأس‌های یک گراف را به‌عنوان یک جعبه در نظر می‌گیریم که در آن می‌توانیم یکی از دو شکل با یال یا بدون یال را قرار دهیم که محتوایشان به ترتیب ۱ و ۰ است. چون هیچ تفاوتی بین رأس‌های گراف بدون برچسب نیست، بنابراین می‌تواند توسط هر عضوی از گروه متقارن S_p جابه‌جا شود. این جایگشت‌ها، گروه $S_p^{(2)}$ را روی جفت رأس‌ها، جعبه‌ها در این مسئله، القا می‌کنند. شاخص دوری $S_p^{(2)}$ به‌راحتی با استفاده از قضیهٔ شمارش پولیا محاسبه می‌شود.

طی پنجاه سال پس از انتشار مقالهٔ پولیا، بسیاری از پیشرفت‌ها در حوزهٔ ترکیبات شمارشی به مقالهٔ پولیا مربوط می‌شود. شیمی‌دانان پی بردند که قضیهٔ پولیا در رشتهٔ آن‌ها نه فقط برای پیدا کردن تعداد ایزومرهای خانواده‌ای از ترکیبات، بلکه در بسیاری از مسائل دیگر که ماهیت تجربی دارند می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. نظریه‌پردازان علاقه‌مند به شمارش، بیشترین استفاده را از قضیهٔ پولیا کرده‌اند و در تلاش خود برای شمارش گراف‌های پیچیده‌تر، کار پولیا را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای گسترش دادند. در واقع در دو یا سه دههٔ گذشته، «نظریهٔ گراف شمارشی» به‌عنوان یک شاخه از ترکیبیات به رسمیت شناخته شده است. این، به‌واسطهٔ سهم برجستهٔ پولیا در نظریهٔ شمارش بود: قضیه‌ای عالی در مقاله‌ای عالی که نقطهٔ عطفی در تاریخچهٔ آنالیز ترکیبی است.

قدیمی‌ترین کاربرد نظریهٔ گراف در شیمی کار کیلی ([۳]) در سال ۱۸۷۵ است که تعداد درخت‌های ریشه‌دار با تعداد رأس داده شده را محاسبه کرد. یک مولکول شیمیایی را می‌توان با یک گراف با در نظر گرفتن هر اتم به‌عنوان رأس و پیوندهای کوالانسی، به‌عنوان یال‌ها نمایش داد. بنابراین درجهٔ هر رأس چنین گرافی، ظرفیت اتم مورد نظر را به‌دست می‌دهد.

آلکان‌ها دارای فرمول مولکولی C_nH_{2n+2} هستند. آن‌ها $3n+2$ رأس دارند که از این تعداد nتا اتم کربن و $2n+2$ اتم باقی‌مانده هیدروژن هستند. همگی آن‌ها $3n+1$ یال دارند. کیلی با استفاده از روش‌های شمارشی در نظریهٔ گراف تعداد ایزومرهای C_nH_{2n+2} را شمرد. فرمول او نشان می‌دهد که پارافین با فرمول مولکولی $C_{13}H_{28}$ دارای ۸۰۲ ایزومر متفاوت است.

۳. قضیهٔ شمارشی پولیا

در این قسمت به معرفی شاخص دوری و اثبات قضیهٔ شمارشی پولیا می‌پردازیم. فرض کنیم G یک گروه جایگشتی از مرتبهٔ n است. هر جایگشت $g \in G$ دارای یک تجزیهٔ یکتا به دورهای مجزا است. طول دور c را با $|c|$ نشان می‌دهیم و $j_k(g)$ معرف تعداد دورهای به طول k در G است. به‌سادگی می‌توان دید که

$$0 \leq j_k(g) \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{n} k j_k(g) = n.$$

مثال ۱. فرض کنیم $g = (1)(23)(4)$. در این صورت

$$j_1(g) = 2, \quad j_2(g) = 1, \quad j_3(g) = 0, \quad j_4(g) = 0$$

و لذا $j_1(g) + j_2(g) = 2 + 2 = 4$. به هر عضو g، تک‌جمله‌ای $\prod_{k=1}^{n} a_k^{j_k(g)} = \prod_{c \in g} a_{|c|}$ را نسبت می‌دهیم.

تعریف ۲. شاخص دوری گروه جایگشتی G عبارت است از میانگین تک‌جمله‌ای‌های بالا روی تمام عناصر G، یعنی

$$Z(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{k=1}^{n} a_k^{j_k(g)}.$$

مثال ۳. فرض کنیم $G = S_3$ و $X = \{1, 2, 3\}$. در این صورت

$$g_1 = (\ ), \quad g_2 = (1\ 2\ 3), \quad g_3 = (1\ 3\ 2), \quad g_4 = (1\ 2), g_5 = (2\ 3), \quad g_6 = (1\ 3).$$

همچنین $z(g_1) = a_1^3$، $z(g_2) = z(g_3) = a_3^1$ و $z(g_4) = z(g_5) = z(g_6) = a_1^1\ a_2^1$. بنابراین

$$Z(S_3) = \frac{1}{6}(a_1^3 + 2\ a_3^1 + 3\ a_1^1\ a_2^1).$$

در حالت کلی بنابر قضیه‌ای معروف در نظریهٔ گروه‌های جایگشتی، شاخص دوری گروه متقارن S_n از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Z(S_n) = \sum_{(j)} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} j_k! k^{j_k}} \prod a_k^{j_k(g)}$$

که در آن، جمع روی همهٔ افرازهای (j) از n گرفته شده است که $j_1 + 2j_2 + \cdots + kj_k = n$.

قضیه ۴. فرض کنیم C_n گروه دوری تولیده شده به‌وسیلهٔ جایگشت $\pi = (1\ 2\ 3 \cdots n)$ است. در این صورت برای هر مقسوم‌علیه d از n، $\varphi(d)$ جایگشت در C_n وجود دارد که $\frac{n}{d}$ دور از طول d دارد و بنابراین شاخص دوری C_n عبارت است از

$$Z(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{\frac{d}{n}} \varphi(d) a_d^{\frac{n}{d}}.$$

مثال ۵. فرض کنیم

$$\begin{aligned} D_8 = \quad & \{g_1 = (\,), g_2 = (1\ 2\ 3\ 4), g_3 = (1\ 4\ 3\ 2), g_4 = (1\ 3)(24), g_5 = (1\ 4)(2\ 3), \\ & g_6 = (1\ 2)(3\ 4), g_7 = (1\ 3), g_8 = (2\ 4)\}. \end{aligned}$$

در ایــن مــورد $z(g_1) = a_1^4$، $z(g_2) = z(g_3) = a_4^1$، $z(g_4) = z(g_5) = z(g_6) = a_2^2$ و $z(g_7) = z(g_8) = a_1^2\ a_2^1$. بنابراین

$$Z(D_8) = \frac{1}{8}(a_1^4 + 2\ a_4^1 + 3\ a_2^2 + 2\ a_1^2\ a_2^1).$$

قضیه ۶. شاخص دوری گروه D_n عبارت است از

$$Z(D_n) = \frac{1}{2} Z(C_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 a_2^{\frac{n-1}{2}} & \text{فرد } n \\ \frac{1}{4}\left(a_1^2 a_2^{\frac{n-2}{2}} + a_2^{\frac{n}{2}}\right) & \text{زوج } n \end{cases}$$

تعریف ۷. فرض کنیم X یک مجموعه و C مجموعه‌ای از رنگ‌ها است. یک رنگ آمیزی X عبارت است از یک تابع $\omega : X \to C$. همچنین فرض کنیم Ψ مجموعهٔ تمام رنگ آمیزی‌های X است. اگر $g \in G \subset S_X$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{g} : \Psi &\to \Psi \\ \hat{g}(\omega)(x) &= \omega(g(x)). \end{aligned}$$

$\hat{G}$ را مجموعهٔ تمام $\hat{g}$هایی در نظر می‌گیریم که در آن، $g \in G$. در حل هر مسئلهٔ شمارشی به دنبال تابع مولد $K_E(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ هستیم که در آن، E مجموعه‌ای از رنگ‌آمیزی‌ها شامل یک نماینده از هر مدار $\hat{G}$ روی Ψ است. ضریب $c_1^s c_2^t \ldots$ در K_E برابر است با تعداد رنگ‌آمیزی‌های اساساً متمایزی که در آن رنگ c_1، s بار، c_2، t بار و ... به‌کار رفته‌اند.

قضیه ۸ (پولیا). فرض کنیم شاخص دوری گروه جایگشتی G روی X برابر $Z_G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ است. در این صورت تابع مولد تعداد رنگ آمیزی‌های متمایز X با رنگ‌های c_1، c_2، ...، c_n عبارت است از

$$K_E(c_1, c_2, \ldots, c_n) = Z_G(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$$

که در آن،

$$\tau_i = c_1^i + c_2^i \cdots + c_n^i \quad (1 \leq i \leq n).$$

مثال ۹. رنگ‌آمیزی‌های یک مربع با دو رنگ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $16 = 2^4$ شکل متمایز داریم. با در نظر گرفتن D_8 به‌عنوان گروه تقارن‌ها، ۶ رنگ آمیزی اساساً متمایز به شکل زیر خواهیم داشت. با توجه به مثال ۵، می‌دانیم که

$$Z_{D_8}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{8}(a_1^4 + 2\ a_4^1 + 3\ a_2^2 + 2\ a_1^2\ a_2^1).$$

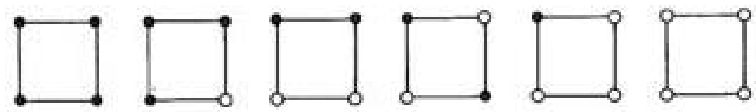
حال با جایگزینی‌های قضیهٔ پولیا،

$$a_1 = r + w, \quad a_2 = r^2 + w^2, \quad a_3 = r^3 + w^3, \quad a_4 = r^4 + w^4$$

و داریم

$$\begin{aligned} K_E(r,w) &= \frac{1}{8}[(r+w)^4 + 2(r+w)^2(r^2+w^2) + 3(r^2+w^2)^2 + 2(r^4+w^4)] \\ &= r^4 + r^3w + rw^3 + w^4 + 2r^2w^2. \end{aligned}$$

بنابراین $K_E(1,1) = 6$، یعنی ۶ رنگ‌آمیزی متفاوت داریم.



شکل ۱: ۶ رنگ‌آمیزی متفاوت از یک مربع.

قضیه ۱۰ (شکل وزندار لم برنساید). فرض کنیم G گروهی است که روی X عمل می‌کند. تعداد مدارهای G روی X برابر است با

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

که در آن، $F(g) = \{x \in X, g \in G \mid g(x) = x\}$.

صورت وزندار این عبارت به شکل زیر است:

$$\sum_{x \in D} I(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in F(g)} I(x).$$

تعریف ۱۱. فرض کنیم مجموعهٔ X با $U = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ رنگ آمیزی شده است. متناظر با هر رنگ آمیزی $\omega : X \to U$، نشانگر ω به‌صورت

$$\mathrm{ind}(\omega) = c_1^{h_{c_1}} c_2^{h_{c_2}} \ldots c_n^{h_{c_n}}$$

تعریف می‌شود که در آن، h_{c_i} تعداد عناصر X است که با رنگ c_i رنگ‌آمیزی شده‌اند. در اینجا $h = h_{c_1} + h_{c_2} + \cdots + h_{c_n}$ و $|X| = h$. اگر B زیرمجموعهٔ Ψ باشد، آن‌گاه تابع مولد K_B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_B(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{\omega \in B} \operatorname{ind}(\omega).$$

اکنون می‌خواهیم صورت دیگری از قضیهٔ پولیا را بیان کنیم. قبل از آن، لازم است مطلبی را یادآوری کنیم. برای هر دو مجموعهٔ متناهی A و B، B^A مجموعهٔ تمام توابع از A به B است. فرض کنیم گروه G روی A عمل می‌کند. در این صورت برای هر $g \in G$، تابع $f^g : A \to B$ با ضابطهٔ $f^g(x) = f(x^{g^{-1}})$ یک عمل از G روی B^A است.

قضیه ۱۲ (شکل دوم قضیهٔ پولیا). فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند و G روی A عمل کند. همچنین فرض کنیم $c_k(G)$ تعداد جایگشت‌هایی از G است که در عمل روی A به k دور مجزا تجزیه می‌شوند. در این صورت تعداد مدارهای G روی B^A برابر است با $\frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(G) \cdot |B|^k$.

اگر در قضیهٔ ۱۲، B مجموعهٔ رنگ‌ها باشد، آن‌گاه هر تابع $f : A \to B$ یک رنگ‌آمیزی از A است. در واقع در این قضیه تعداد رنگ‌آمیزی‌های A را می‌شماریم، یعنی تعداد مدارها برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های A است. این در واقع همان قضیهٔ ۸ است که تعداد رنگ‌آمیزی‌ها را حساب می‌کرد.
در جدول ۱ می‌توان عناصر گروه D_6 را مشاهده نمود.

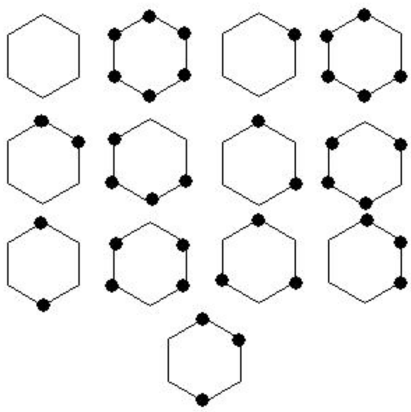
جدول ۱: عناصر گروه D_6.

ρ_0	(۱)(۲)(۳)(۴)(۵)(۶)
ρ_1	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶)
ρ_2	(۱ ۳ ۵)(۲ ۴ ۶)
ρ_3	(۱ ۴)(۲ ۵)(۳ ۶)
ρ_4	(۱ ۵ ۳)(۲ ۶ ۴)
ρ_5	(۱ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲)
μ_1	(۱ ۶)(۲ ۵)(۳ ۴)
μ_2	(۱)(۲ ۶)(۳ ۵)(۴)
μ_3	(۱ ۲)(۳ ۶)(۴ ۵)
μ_4	(۱ ۳)(۲)(۵)(۴ ۶)
μ_5	(۱ ۴)(۲ ۳)(۵ ۶)
μ_6	(۶)(۱ ۵)(۲ ۴)(۳)

مثال ۱۳. فرض کنیم $G = D_۶$، A نشان دهندهٔ رئوس یک شش‌ضلعی منتظم و B مجموعه‌ای از رنگ‌ها است. در این صورت عمل G روی B^A معرف تعداد رنگ آمیزی‌های اساساً متمایز است. بنابراین $c_۱(G) = ۲$، $c_۲(G) = ۲$، $c_۳(G) = ۴$، $c_۴(G) = ۳$، $c_۵(G) = ۰$ و $c_۶(G) = ۱$. با به‌کار بردن قضیهٔ پولیا و این فرض که $|B| = ۲$، داریم

$$\begin{aligned} r &= \frac{۱}{۱۲}\sum_{k=۱}^{۶}|B|^k c_k(G) \\ &= \frac{۱}{۱۲}(۲|B| + ۲|B|^۲ + ۴|B|^۳ + ۳|B|^۴ + |B|^۶) \\ &= \frac{۱}{۱۲}(۴ + ۸ + ۳۲ + ۴۸ + ۶۴) = ۱۳. \end{aligned}$$

در شکل بعد می‌توان ۱۳ رنگ آمیزی متمایز را مشاهده کرد.



شکل ۲: رنگ آمیزی‌های متمایز رئوس یک شش ضلعی منتظم با دو رنگ.

۴. کاربرد قضیهٔ شمارشی پولیا در پیدا کردن گراف‌های غیریکریخت

اغلب مهم است بدانیم که چند گراف با یک خاصیت مشخص داریم. در واقع زمانی که گراف‌ها برای مدل‌سازی برخی از ساختارهای فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش‌های شمارش گرافیکی بسیار باارزش هستند. خیلی از روش‌های شمارش گراف‌ها بر اساس قضیهٔ اصلی جورج پولیاست. فرانک هراری[1] و دیگران از قضیهٔ پولیا در شمارش گراف‌های ساده، گراف‌های چندگانه، گراف جهت‌دار و ساختارهای گرافیکی مشابه استفاده کردند.

1) Frank Harary

تعریف ۱۴. فرض کنیم $\alpha \in S_n$. جایگشت دوگانهٔ α' القا شده توسط α، جایگشتی روی زیرمجموعه‌های دو عضوی $X_n = \{۱, ۲, \dots, n\}$ است که $\alpha' : \{x, y\} \to \{\alpha(x), \alpha(y)\}$. گروه جایگشتی $\{\alpha' : \alpha \in S_n\}$ را گروه متقارن دوگانه روی n حرف نامیده با $S_n^۲$ نمایش می‌دهیم.

برای شمارش بهتر گراف‌ها، باید دو گراف متمایز را تعریف کنیم. دو گراف G و G' را مجزا می‌نامیم هرگاه هیچ جایگشتی از رأس‌ها وجود نداشته باشد که یال‌های G و G' را به هم تصویر کند. گروه جایگشتی روی رأس‌های گراف از مرتبهٔ n دقیقاً برابر گروه متقارن S_n است. این گروه یک گروه جایگشتی القا می‌کند که روی یال‌های K_n به‌طور طبیعی عمل می‌کند و آن را با $S_n^۲$ نشان می‌دهیم. سپس گراف‌های متمایز به‌وسیلهٔ کلاس‌های هم‌ارزی متمایز تحت عمل $S_n^۲$ ارائه می‌شود.

مثال ۱۵. می‌خواهیم شکل دوری $S_n^۲$ را پیدا کنیم. فرض کنیم $V = \{۱, ۲, ۳\}$ مجموعهٔ رأس‌ها، $S_۳$ گروه جایگشتی روی V و $S_۳^۲$ گروه جایگشتی روی $V^{(۲)} = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ است. در این صورت

$$|V^{(۲)}| = \binom{۳}{۲} = ۳.$$

اگر عناصر $V^{(۲)}$ را با ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کنیم، آن‌گاه $\{۱, ۲\} < \{۱, ۳\} < \{۲, ۳\}$. طبق تعریف ۱۴، برای هر $\alpha \in S_۳$، $\alpha' \in S_۳^{(۲)}$ وجود دارد به‌طوری که $\alpha'\{i, j\} = \{\alpha_i, \alpha_j\}$. می‌دانیم که شکل دوری $S_۳$ به‌صورت زیر است:

جدول ۲: شکل دوری $S_۳$.

$\rho_۰ = (۱)(۲)(۳)$	$\rho_۱ = (۱\ ۲\ ۳)$	$\rho_۲ = (۱\ ۳\ ۲)$
$\mu_۱ = (۱)(۲\ ۳)$	$\mu_۲ = (۱\ ۳)(۲)$	$\mu_۳ = (۱\ ۲)(۳)$

شکل دوری عناصر $S_۳^۲$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $\rho_۰ = (۱)(۲)(۳) \in S_۳$، $\rho'_۰ \in S_۳^{(۲)}$ و $\rho'_۰\{i, j\} = \{\rho_۰ i, \rho_۰ j\}$. در این صورت

$$\rho'_۰\{۱, ۲\} = \{۱, ۲\},$$
$$\rho'_۰\{۱, ۳\} = \{۱, ۳\},$$
$$\rho'_۰\{۲, ۳\} = \{۲, ۳\}.$$

در نتیجه $\rho'_۰ = (۱۲)(۱۳)(۲۳)$. به‌طور مشابه، اگر $\rho_۱ = (۱\ ۲\ ۳)$، آن‌گاه $\rho'_۱ = (۱۲\ ۲۳\ ۱۳)$. همچنین برای $\rho_۲ = (۱\ ۳\ ۲)$ داریم $\rho'_۲ = (۱۲\ ۱۳\ ۲۳)$. اگر $\mu_۱ = (۱)(۲\ ۳)$، $\mu_۲ = (۱\ ۳)(۲)$ و $\mu_۳ = (۱\ ۲)(۳)$، آن‌گاه به‌ترتیب داریم $\mu'_۱ = (۱۲\ ۱۳)(۲۳)$، $\mu'_۲ = (۱۲\ ۲۳)(۱۳)$ و $\mu'_۳ = (۱۳\ ۲۳)(۱۲)$.

جدول ۳: مقایسهٔ بین S_3 و S_3^{2}.

S_3	شکل دوری	$S_3^{(2)}$	شکل دوری
$(1)(2)(3)$	a_1^3	$(12)(13)(23)$	a_1^3
$(1\ 2\ 3)$	a_3	$(12\ 23\ 13)$	a_3
$(1\ 3\ 2)$	a_3	$(12\ 13\ 23)$	a_3
$(1)(2\ 3)$	a_1a_2	$(12\ 13)(23)$	a_1a_2
$(1\ 3)(2)$	a_1a_2	$(12\ 23)(13)$	a_1a_2
$(1\ 2)(3)$	a_1a_2	$(12)(13\ 23)$	a_1a_2

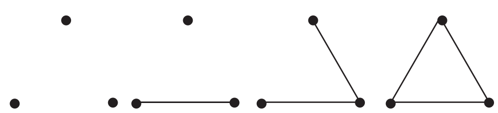
عناصر اخیر جایگشت هستند و عمل ضرب همان ترکیب دو جایگشت است. در بین اعضای اخیر هیچ جایگشتی وجود ندارد که ضرب آن در گروه نباشد. بنابر تعریف ۲، شاخص‌های دوری گروه متقارن S_3 و گروه متقارن دوگانهٔ S_3^{2} از جدول ۳ به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$Z(S_3) = Z(S_3^{(2)}) = \frac{1}{6}a_1^3 + \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{1}{3}a_3.$$

گروه جایگشتی دوگانهٔ S_3^{2} روی رأس‌ها عمل می‌کند. زمانی که گراف‌ها را می‌شماریم، تابع مولد اشیاء برابر $z + 1$ است. این مشخص می‌کند که آیا یک یال حاضر است یا نه. با جایگزینی $a_k = 1 + z^k$ در $Z(S_3^{(2)})$ داریم

$$\begin{aligned} Z(S_3^{(2)}) &= \frac{1}{6}(1+z)^3 + \frac{1}{2}(1+z)(1+z^2) + \frac{1}{3}(1+z^3) \\ &= \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{3} \\ &= z^3 + z^2 + z + 1. \end{aligned}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که یک گراف با سه یال، یک گراف با دو یال، یک گراف با یک یال و یک گراف با هیچ یال وجود دارد. بنابراین تعداد گراف‌های غیریکریخت با سه رأس برابر چهار است و در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: ۴ گراف غیر یکریخت سه رأسی.

مثال ١٦. شکل دوری $S_۴^۲$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $V^{(۲)} = \{a, b, c, d, e, f\}$. اگر عناصر $V^{(۲)}$ را با ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کنیم، آن‌گاه

$$a = \{۱, ۲\}, b = \{۱, ۳\}, c = \{۱, ۴\}, d = \{۲, ۳\}, e = \{۲, ۴\}, f = \{۳, ۴\}.$$

پس هر $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ می‌تواند با یک جایگشت در $S_٦$ مشخص شود. مثلاً اگر $\alpha = (۱\ ۴\ ۳) \in S_۴$، آن‌گاه تجزیهٔ دوری متمایز $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\alpha'(a) &= \alpha'\{۱, ۲\} = \{\alpha(۱), \alpha(۲)\} = \{۴, ۲\} = e,\\
\alpha'(e) &= \alpha'\{۲, ۴\} = \{\alpha(۲), \alpha(۴)\} = \{۲, ۳\} = d,\\
\alpha'(d) &= \alpha'\{۲, ۳\} = \{\alpha(۲), \alpha(۳)\} = \{۲, ۱\} = a.
\end{aligned}$$

بنابراین $(a\ e\ d)$ یکی از دورها در تجزیهٔ دوری α' به دورهای مجزا است. ادامه می‌دهیم

$$\begin{aligned}
\alpha'(b) &= \alpha'\{۱, ۳\} = \{\alpha(۱), \alpha(۳)\} = \{۴, ۱\} = c,\\
\alpha'(c) &= \alpha'\{۱, ۴\} = \{\alpha(۱), \alpha(۴)\} = \{۴, ۳\} = f,\\
\alpha'(f) &= \alpha'\{۳, ۴\} = \{\alpha(۳), \alpha(۴)\} = \{۱, ۳\} = b.
\end{aligned}$$

بنابراین $\alpha' = (a\ e\ d)(b\ c\ f)$. محاسباتی مشابه منجر به جدول ۴ می‌شود که در آن، هر $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ متناظر با یک عضو از $S_٦$ است. توجه می‌کنیم که $|S_v^{(۲)}| = |S_v| = ۴! = ۲۴$ عامل کوچکی از $٦! = ۷۲۰$ است، زیرا برای $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $S_۴$ و $S_۴^{(۲)}$ زیرمجموعه‌های $S_٦$ هستند.

جدول ۴: مقایسهٔ بین $S_۴$ و $S_۴^۲$.

α	α'	α	α'
(۱)(۲)(۳)(۴)	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	(۱ ۴ ۲)	$(a\ c\ e)(b\ d\ f)$
(۱ ۲)	$(b\ d)(c\ e)$	(۱ ۴ ۳)	$(a\ e\ d)(b\ c\ f)$
(۱ ۳)	$(a\ d)(c\ f)$	(۲ ۳ ۴)	$(a\ b\ c)(d\ f\ e)$
(۱ ۴)	$(a\ e)(b\ f)$	(۲ ۴ ۳)	$(a\ c\ b)(d\ e\ f)$
(۲ ۳)	$(a\ b)(e\ f)$	(۱ ۲ ۳ ۴)	$(a\ d\ f\ c)(b\ e)$
(۲ ۴)	$(a\ c)(d\ f)$	(۱ ۲ ۴ ۳)	$(a\ e\ f\ b)(c\ d)$
(۳ ۴)	$(b\ c)(d\ e)$	(۱ ۳ ۲ ۴)	$(a\ f)(b\ d\ e\ c)$
(۱ ۳)(۲ ۴)	$(a\ f)(c\ d)$	(۱ ۳ ۴ ۲)	$(a\ b\ f\ e)(c\ d)$
(۱ ۲ ۳)	$(a\ d\ b)(c\ e\ f)$	(۱ ۴ ۲ ۳)	$(a\ f)(b\ c\ e\ d)$
(۱ ۲ ۴)	$(a\ e\ c)(b\ d\ f)$	(۱ ۴ ۳ ۲)	$(a\ c\ f\ d)(b\ e)$
(۱ ۳ ۲)	$(a\ b\ d)(c\ f\ e)$	(۱ ۲)(۳ ۴)	$(b\ e)(c\ d)$
(۱ ۳ ۴)	$(a\ d\ e)(b\ f\ c)$	(۱ ۴)(۲ ۳)	$(a\ f)(b\ e)$

با توجه به جدول ۴، شاخص دوری $S_۴$ عبارت است از

$$Z(S_۴)=\frac{۱}{۲۴}(a_۱^۴+۶a_۱^۲a_۲+۸a_۱a_۳+۳a_۲^۲+۶a_۴).$$

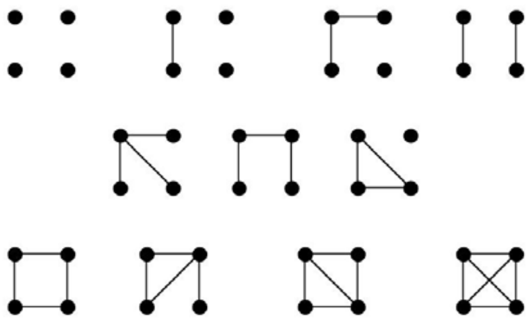
از جدول ۴ می‌توان دید که چگونه با تغییر چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴$ می‌توان چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴^۲$ را به‌دست آورد. مشاهده می‌کنیم که چندجمله‌ای $a_۱^۴$ در $S_۴$ را باید با چندجمله‌ای $a_۱^۶$ جایگزین کرد. طبق جدول ۴، $\alpha=(۱\ ۲)(۳\ ۴)$ متناظر با $\alpha'=(b\ e)(c\ d)(a)(f)$ است. بنابراین عبارت $۳a_۲^۲$ باید با $۳a_۱^۲a_۲^۲$ جایگزین شود. با فرآیندی مشابه عبارات $a_۴$، $a_۱^۲a_۲$ و $a_۱a_۳$ به‌ترتیب با عبارات $۶a_۲a_۴$، $۶a_۱^۲a_۲^۲$ و $۸a_۳^۲$ جایگزین می‌شوند. بنابراین چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴^۲$ برابر است با

$$Z(S_۴^{(۲)})=\frac{۱}{۲۴}(a_۱^۶+۹a_۱^۲a_۲^۲+۸a_۳^۲+۶a_۲a_۴).$$

پس گروه جایگشتی برابر $S_۴^۲$ و تابع مولد اشیاء، $z+۱$ است. با جایگزینی $a_k=۱+z^k$ در $Z(S_۴^{(۲)})$، داریم

$$\begin{aligned}Z(S_۴^{(۲)}) &= \frac{۱}{۲۴}((۱+z)^۶+۹(۱+z)^۲(z^۲+۱)^۲+۸(z^۳+۱)^۲+۶(z^۲+۱)(z^۴+۱))\\ &= z^۶+z^۵+۲z^۴+۳z^۳+۲z^۲+z+۱.\end{aligned}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که یک گراف با شش یال، یک گراف با پنج یال، دو گراف با چهار یال، سه گراف با سه یال، دو گراف با دو یال، یک گراف با یک یال و یک گراف با صفر یال وجود دارد. در شکل زیر، ۱۱ گراف غیریکریخت ۴ رأسی نشان داده شده است:



شکل ۴: ۱۱ گراف غیر یکریخت چهار رأسی.

با استفاده از قضیهٔ پولیا و محاسباتی کم و بیش مشابه بالا ولی با پیچیدگی بیشتر، می‌توان قضیه زیر را ثابت نمود.

قضیه ۱۷. به‌ترتیب ۳۴، ۱۵۶ و ۱۰۴۴ ردهٔ یکریختی از گراف‌های ساده ۵ رأسی، ۶ رأسی و ۷ رأسی وجود دارند.

اکنون به کاربرد قضیهٔ پولیا در شمارش چندگراف‌ها اشاره می‌کنیم. چندگراف n رأسی را در نظر می‌گیریم که بین هر جفت از رأس‌ها حداکثر دو یال داشته باشیم. در این حالت، دامنه و گروه جایگشتی همانند گراف‌های ساده است؛ اگرچه برد متفاوت است. یک جفت از رأس‌ها می‌تواند با هیچ یال، ۱ یال یا ۲ یال به‌هم متصل باشند. بنابراین برد شامل سه عضو s، t و u است که به‌ترتیب دارای محتوای $a_۰$، $a_۱$ و $a_۲$ هستند. در اینجا a_i دلالت دارد بر این‌که i یال بین یک جفت از رأس‌ها هست که $i = ۰, ۱, ۲$. بنابراین سری شمارش شکل عبارت است از $۱ + a + a^۲$. با جایگزینی $۱ + a^r + a^{۲r}$ به‌جای y_r در $Z(R_n)$ به سری شمارش ساختار مورد نظر می‌رسیم.

مثال ۱۸. تعداد چهارگراف‌های ۴ رأسی را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $D = \{$ دو مرتبه حاضر، غایب، یک مرتبه حاضر $\}$. فرض کنیم $S_۴^{(۲)}$ گروه متقارن دوگانه روی مجموعهٔ زوج‌های نامرتب تعریف شده روی مجموعهٔ S است. شاخص دوری $S_۴^{(۲)}$ عبارت است از:

$$Z(S_۴^{(۲)})(a_۱, \ldots, a_۴) = \frac{۱}{۲۴}(a_۱^٦ + ۹a_۱^۲a_۲^۲ + ۸a_۳^۲ + ٦a_۲a_۴).$$

به‌وضوح $f(a) = ۱ + a + a^۲$. بنابراین سری شمارش شکل به‌وسیلهٔ جایگزینی a_i با

$f(z^i) = ۱ + z^i + z^{۲i}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$
\begin{aligned}
Z(S_۴^{(۲)}) &= \frac{۱}{۲۴}[(۱ + z + z^۲)^٦ + ۹((۱ + z + z^۲)^۲(۱ + z^۲ + z^۴)^۲ + ۸(۱ + z^۳ + z^٦)^۲ \\
&+ ٦(۱ + z^۲ + z^۴)(۱ + z^۴ + z^۸)] \\
&= ۱ + z + ۳z^۲ + ۵z^۳ + ۸z^۴ + ۹z^۵ + ۱۲z^٦ + ۹z^۷ + ۸z^۸ + ۵z^۹ + ۳z^{۱۰} \\
&+ z^{۱۱} + z^{۱۲}.
\end{aligned}
$$

ضریب z^j، $۰ \leq j \leq ۱۲$ برابر تعدادگراف‌های ساده ۴ رأسی با j یال است.

یک صورت بسیار مفید دیگر از قضیهٔ پولیا وجود دارد که در آن از مفهوم محتوا استفاده می‌شود. در این حالت، C را مجموعه‌ای از اشکال در نظر می‌گیریم و نگاشت از X به C پیکربندی نامیده می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، این قضیه مخصوصاً در شمارش ایزومرهای ترکیبات شیمیایی کاربرد دارد. هر شکل در C یک محتوا دارد که عددی صحیح و نامنفی است. سری شمارش شکل عبارت است از

$$c(x) = c_۰ + c_۱x + c_۲x^۲ + \cdots + c_kx^k + \cdots$$

که c_k برابر تعداد اشکال در C از محتوای k است.

قضیه ۱۹ (صورت محتوایی قضیهٔ پولیا). فرض کنیم گروه جایگشتی G روی مجموعهٔ X عمل می‌کند. در این صورت G روی مجموعهٔ نگاشت‌های از X به C نیز عمل می‌کند. فرض کنیم سری شمارش شکل برابر $c(x)$ است. در این صورت سری شمارش شکل ناهم‌ارز $\varphi(x)$، به‌وسیلهٔ جایگزینی $c(x^r)$ با s_r در شاخص دوری G به‌دست می آید؛ یعنی $\varphi(x) = Z(G; c(x))$.

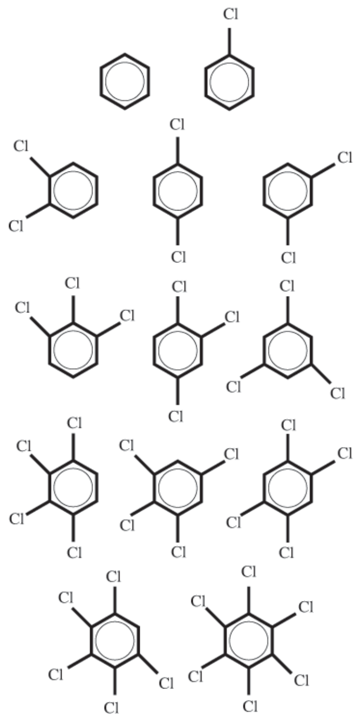
مثال ۲۰. یکی از مهم‌ترین کاربردهای قضیهٔ پولیا پیدا کردن ایزومرهای مختلف ترکیبات شیمیایی است. در این مثال قصد داریم تعداد حلقه‌های بنزنی را پیدا کنیم که در آن کلر با هیدروژن جایگزین شده است. گروه تقارن حلقهٔ بنزن $D_٦$ است. از طرفی می‌دانیم که

$$Z(D_٦) = \frac{۱}{۱۲}(a_۱^٦ + ۴a_۲^۳ + ۲a_۳^۲ + ۳a_۱^۲a_۲^۲ + ۲a_٦).$$

اینجا $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦\}$ و $C = \{H, Cl\}$. فرض می‌کنیم محتوای هیدروژن برابر صفر و محتوای کلر برابر یک است. در این صورت $c(x) = ۱ + x$.

$$
\begin{aligned}
&\sum \varphi(x) \\
&= \frac{۱}{۱۲}[(۱ + x)^٦ + ۴(۱ + x^۲)^۳ + ۲(۱ + x^۳)^۲ + ۳(۱ + x)^۲(۱ + x^۲)^۲ + ۲(۱ + x)^٦] \\
&= ۱ + x + ۳x^۲ + ۳x^۳ + ۳x^۴ + x^۵ + x^٦.
\end{aligned}
$$

بنابراین ۱۳ ترکیب شیمیایی با استفاده از این روش به‌دست می‌آید که در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



شکل ۵: ایزومرهای مختلف مثال ۲۰.

اخیراً شیمی‌دانی ژاپنی به‌نام شینساکو فوجیتا[1] تعمیم‌های بسیار زیبا و کاربردی از قضیه پولیا یافته و دسته‌های بزرگی از مسائل شیمی را با آن حل نموده است. در اینجا فرصت پرداختن به این تعمیم‌ها نیست ولی به‌عنوان نمونه خوانندگان علاقه‌مند را به [۴، ۵] ارجاع می‌دهیم.

سپاسگزاری:

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از جناب آقای دکتر روح‌اله جهانی پور، ویراستار محترم مجلهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی جهت اصلاحات و پیشنهادات ارائه شده، ابراز می‌دارند.

1) Shinsaku Fujita

مراجع

[1] D. J. Albers & G. L. Alexanderson, *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhauser Boston, 1985.

[2] G. L. Alexanderson & L. H. Lange, "Obituary: George Polya", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **19**(1987), 563 – 603.

[3] A. Cayley, "On the theory of analytical forms called trees", *Philos. Mag.*, **13**(1857), 172 – 176.

[4] S. Fujita, "Restricted enumerations by the unit-subduced-cycle-index(USCI) approch. III. the restricted— partial-cycle-index (RPCI) method for treating interactions between two or more orbits", *MATCH commun. Math. Comput. Chem.*, **69**(2013), 311–332.

[5] S. Fujita, "Restricted enumerations by the unit-subduced-cycle-index(USCI) approch. IV. the restricted— subduced-cycle-index (RSCI) method for enumeration of Kekule structures and of perfect matchings of graphs", *MATCH commun. Math. Comput. Chem.*, **69**(2013), 333–354.

[6] F. Harary & E. M. Palmer, *Graphical enumeration*, Academic Press, New York, 1973.

[7] G. Polya, "Combinatorial number of terms for groups, graphs and chemical compounds", *Acta Mathematica*, **68**(1937), 145 – 254.

[8] A. H. Schoenfeld, "Polya, problem solving, and education", *Math. Mag.*, **60**(1987), 283 – 291.

[۹] جورج پولیا،چگونه مسئله را حل کنیم؟، ترجمه احمد آرام، مؤسسه کیهان، ۱۳۶۹.

فاطمه کوره‌پزان مفتخر f.k.moftakhar@gmail.com
و علی‌رضا اشرفی ashrafi@kashanu.ac.ir
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان