فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۷۵ تا ۷۸

اثبات‌های جدیدی برای قضایای اقلیدس و اویلر*

ژان پابلو پیناسکو

ترجمه: حمیدرضا وهابی

در این نوشته، برهانی جدید برای نامتناهی بودن اعداد اول ارائه می‌دهیم. چندین برهان متفاوت با روش‌های گوناگون برای اثبات این مطلب وجود دارد که برخی از آن‌ها را می‌توان در [۱، ۳، ۴، ۵ و ٦] یافت. این برهان بر اساس یک ایدهٔ شمارشی ساده با استفاده از اصل شمول ــ طرد همراه با فرمولی صریح می‌باشد. برهان متفاوتی را بر اساس روش‌های شمارشی از تیو[1] (۱۸۹۷) همراه با چندین تعمیم، در [٦] و نیز روش جالبی را با استفاده از نظریهٔ اطلاعات الگوریتمی از چایتین[2] در [۲] می‌توان یافت. به علاوه ما ثابت می‌کنیم که سری معکوس اعداد اول واگراست. برهان‌های ما حاصل از ارتباطی بین اصل شمول ــ طرد و حاصلضرب نامتناهی اویلرند.

فرض کنید $\{p_i\}_i$ دنبالهٔ اعداد اول باشد. دنبالهٔ بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_{k+1} = a_k + \frac{1 - a_k}{p_{k+1}}$$

N ــ امین جملهٔ این دنبالهٔ بازگشتی مساوی با

$$a_N = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 \cdots p_N}$$

است که می‌توان آن را به شکل

---

*) Juan Pablo Pinasco, *American Mathematical Monthly*, Vol 116, No 2, February 2009, pp. 172-174.

1) Thue 2) Chaitin

$$a_N = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - \frac{1}{p_i})$$

نوشت و لذا $1 > a_N > 0$ ، زیرا هر یک از عوامل حاصلضرب اکیداً مثبت و کوچک‌تر از یک‌اند.
اکنون برای اثبات قضیهٔ اقلیدس آماده‌ایم:

قضیه ۱. بینهایت عدد اول وجود دارد.

برهان. فرض کنید $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$ همهٔ اعداد اول باشند. برای هر $x \geq 1$ و هر $i = 1, \ldots, N$، فرض کنید A_i مجموعهٔ اعداد صحیحی در بازهٔ $[1, x]$ باشد که بر p_i بخش‌پذیرند. بنابراین با به‌کارگیری فرمول شمول ــ طرد در مورد عدد اصلی مجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ ، تعداد اعداد صحیح و مثبت در $[1, x]$ به‌دست می‌آید:

$$[x] = 1 + \sum_i \left[\frac{x}{p_i}\right] - \sum_{i<j} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] + \sum_{i<j<k} \left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right] - \cdots + (-1)^{N+1} \left[\frac{x}{p_1 \cdots p_N}\right]$$

که در آن $[s]$ جزء صحیح s است. پس با توجه به

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \left[\frac{x}{t}\right] = \frac{1}{t}$$

به تناقض

$$1 = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 \cdots p_N} = a_N < 1$$

می‌رسیم و لذا برهان کامل است.

با مشاهدهٔ برهان قبل درمی‌یابیم که $D(p_1, \ldots, p_N)$ چگالی مجانبی مجموعهٔ اعداد صحیحی که بر هیچ یک از اعداد اول $p_1, \ldots, p_N$ بخش‌پذیر نیستند، دقیقاً مساوی با

$$D(p_1, \cdots, p_N) = 1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^N \frac{1}{p_1 \cdots p_N}$$

است و لذا

$$1 - a_N = D(p_1, \ldots, p_N) = \prod_{j=1}^{N}(1 - \frac{1}{p_j}).$$

قرار می‌دهیم $D = \lim_{N \to \infty} D(p_1, \ldots, p_N)$. در این صورت با لگاریتم گرفتن، نتیجه می‌گیریم که سری

$$\sum_p \ln(1 - \frac{1}{p})$$

همگراست اگر $D > ۰$ و واگراست اگر $D = ۰$. از آن جا که سری $\sum_p \frac{۱}{p}$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_p \ln(۱ - \frac{۱}{p})$ همگرا باشد، پس برای اثبات قضیهٔ اویلر کافی است نشان دهیم $D = ۰$.

قضیه ۲. سری $\sum_p \frac{۱}{p}$ واگراست.

برهان. هم‌زمان نشان می‌دهیم که $D > ۰$ و همگرایی $\sum_p \frac{۱}{p}$ رخ نمی‌دهد. برای رسیدن به این هدف، فرض کنید $D > \varepsilon > ۰$ و N را چنان بزرگ انتخاب کنید که

$$\varepsilon < D(p_۱, \dots, p_N) \qquad \sum_{p>p_N} \frac{۱}{p} < \varepsilon.$$

اکنون چگالی مجانبی اعداد صحیحی که بر هیچ یک از اعداد اول $p_۱$، ...، p_N بخشپذیر نیستند از پایین به ε کراندار است. از طرف دیگر، این اعداد صحیح باید بر برخی از اعداد اول $p > p_N$ بخش‌پذیر باشند، پس چگالی آن‌ها از بالا به

$$\sum_{p>p_N} \frac{۱}{p} < \varepsilon$$

کراندار است و این یک تناقض است. در نتیجه $D = ۰$ و سری $\sum_p \frac{۱}{p}$ واگراست.

مراجع

[1] M. Aigner and G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

[2] G. J. Chaitin, Toward a mathematical definition of life, in *the Maximum Entropy Formalism*, R. D. Levine and M. Tribus, eds., MIT Press, Cambridge, 1979, pp. 477-498.

[3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1, Chelsea Publishing, New York, 1952, pp. 413-415.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, London, 1954, pp.12-17.

[5] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, 2000, pp. 1-10.

[6] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 3-11.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر
hrvahabi@yahoo.com