فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۳) صص. ۱۳ تا ۲۹

# ریاضیات و علوم مالی*

امانوئل گوبت، ژیه پگه و مارک یور

مترجمین: زانیار احمدی، شیوا زمانی

چکیده

از ابتدای دهه ۱۹۹۰، ریاضیات و به طور خاص‌تر نظریه احتمالات، نقش فزاینده‌ای در صنعت بانکداری و بیمه ایفا کرده‌اند. این موضوع نویسندگان را بر آن داشت که در این‌جا بعضی از تعامل‌های بین ریاضیات و مالی و نتایج آن‌ها را در سطح تحقیقات و آموزش این حوزه‌ها در فرانسه ارائه دهند.

## ۱ تاریخچه موضوع

مبدأً پایه‌های ریاضی مالی نوین به رسالهٔ لویی بشلیه[1] با عنوان نظریهٔ سفته‌بازی[2] [۲] برمی‌گردد که در ۱۹۹۰ در دانشگاه سوربن دفاع شد. این کارها، در حقیقت، تولد فرآیندهای تصادفی زمان ـ پیوسته، و از طرف دیگر استراتژی‌های زمان ـ پیوسته برای پوشش ریسک[3] در مالی بود. از وجه ریاضی، رسالهٔ بشلیه تأثیر شگرفی بر تحقیقات کلموگروف[4] در مورد فرآیندهای زمان ـ پیوسته در دهه ۲۰ و نیز تحقیقات ایتو[5] مخترع حسابان تصادفی در دهه ۵۰ داشت. در نقطهٔ مقابل، در مورد مالی، رویکرد بشلیه برای سه ربع قرن، دقیقاً تا ۱۹۷۳، زمانی که کار بلک[6]، شولز[7] و مرتون[8] پدید آمد[9] [۳]، [۲۳] فراموش شده بود.

---

*) Gobet, E., Pagés, G. and Yor, M. *Mathematics and Finance*,
Aspects of Mathematical Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, pp: 63-76

1) Louis Bachelier 2) Theorié de la apéculation 3) Risk Hedging 4) Kolmogorov
5) Itô 6) Black 7) Scholes 8) Merton

۹) برای همین کار، شولز و مرتون جایزه نوبل اقتصاد را در سال ۱۹۹۷ دریافت کردند (بلک در سال ۱۹۹۵ درگذشت).

برای درک بهتر بستر آن زمان، بیایید به دهه ۷۰ برگردیم. در آن زمان است که خواست‌های سیاسی برای کم کردن قوائد بازارهای مالی شکل می‌گیرد و باعث می‌شود نرخ‌های بهره متلاطم‌تر و نرخ‌های تبدیل ارز ناپایدار شود. در چنین محیط عاری از قوائدی، شرکت‌های صنعتی و تجاری در معرض خطر فزاینده‌ای قرار می‌گیرند که برای مثال با تغییرپذیری فرین نرخ‌های تغییر مرتبط است. این موفقیت دلپذیر نیست، به‌ویژه وقتی که درآمدها و هزینه‌ها با ارزهای متفاوتی دریافت و پرداخت می‌شوند (مثلاً دلار و یورو). برای ایجاد بنگاه‌هایی با ابزارهایی سازگار با این مسائل، و به طور کلی‌تر برای این که شرکت‌های بیمه و بانک‌ها بتوانند این انواع جدید ریسک‌ها را پوشش دهند، بازارهای سازمان‌یافته جدیدی ایجاد شدند که به گروه‌های مختلف اجازه می‌دادند محصولات بیمه‌ای را در حجم زیاد معامله کنند. این بازارها منجر به ظهور ابزارهای مالی جدیدی شدند که محصولات مشتقه[1] خوانده می‌شوند. اختیار خرید[2]، نمونه اولیه این مشتقات است که هنوز یکی از پرکاربردترین این ابزارهاست.

در مثال قبل، چنین اختیاری بنگاه را در مقابل افزایش نرخ تبدیل[3] یورو/دلار محافظت می‌کند. همین که یک بنگاه این اختیار را صاحب شود، اختیار به آن بنگاه این حق[4] اما نه اجبار، را می‌دهد که یک دلار را در عوض $K$ یورو (قیمت اجرا[5] یا قیمت توافق‌شده[6] که مشخصه ثابتی از قرارداد است) در زمان معین $T$ در آینده (که زمان انقضا یا سررسید[7] خوانده می‌شود) خریداری کند. اگر نرخ تبدیل ارز در زمان $t$، $S_t$ باشد (یعنی ۱ دلار $= S_t$ یورو)، این بیمه برای شرکت به معنی دریافت مقدار $\max(S_T - K, 0)$ یورو در سررسید $T$ است: اگر $S_T \leq K$، نرخ خرید دلار به صرفه‌تر از نرخی است که در قرارداد قید شده است و بنابراین شرکت چیزی دریافت نمی‌کند (و یوروهای خود را در صورت لزوم در بازار یورو/دلار به یورو تبدیل می‌کند)؛ از طرف دیگر، اگر $S_T > K$، شرکت از حقش استفاده می‌کند و دلار را با نرخی بهتری که اختیار تضمین کرده است: ۱ دلار $= K$ یورو خریداری می‌کند (این که چه مقدار دلار را به این ترتیب می‌توان خرید بخشی از قرارداد اختیار است).

برای گروه‌های مداخله‌گر در بازار دو سؤال پیش می‌آید: قیمت (که حق بیمه[8] خوانده می‌شود) چنین قراردادهای اختیاری چقدر است، و بعداز فروختن چنین محصولی با قبول ریسک بالا رفتن دلار در مقابل یورو در زمان سررسید قرارداد ــ به‌عنوان خریدار چه رفتاری باید در پیش گرفت؟ اگرچه بشلیه در همان سال ۱۹۰۰ در رساله‌اش [2] ارتباط بین قیمت این نوع ابزارهای مالی و برخی محاسبات احتمالی وابسته به فرآیندهای تصادفی مشخصی را ارائه کرد، اما مسأله پوشش ریسک قرارداد، تنها با کارهای بلک، شولز و مرتون در ۱۹۷۳ حل شد. در آن زمان، ایدهٔ متنوع سازی ریسک، به دلیل کارهای اولیهٔ مارکوویتز[9] در ۱۹۵۲ در مورد بهینه‌سازی سبد مالی هنوز مد روز بود: مارکوویتز یک تنوع‌بخشی برای ریسک ایستا مطرح می‌کند، که بر بخش‌بندی مجدد دارایی‌ها در یک سبد مالی استوار است.

1) Drivative Product 2) Call Option 3) Exchange Rate 4) Right 5) Exercise Price
6) Strike Price 7) Maturity 8) Premium 9) Markowitz

اما در مورد بیمه خسارت مسأله باز فرق می‌کند: در این مورد، تنوع‌بخشی به تعداد افراد بیمه‌شده بستگی دارد. رویکرد جدید بلک، شولز و مرتون که هنوز سنگ‌بنای مالی نوین است، عبارت است از پخش ریسک در طول زمان (زمان امروز تا سررسید)، با اجرای یک استراتژی سرمایه‌گذاری پویا. در مورد اختیار خرید نرخ ارز، این استراتژی عبارت است از خرید یا فروش دلار در هر لحظه. این معجزه وقتی کامل می‌شود که بلک، شولز و مرتون نشان می‌دهند یک استراتژی پویای بهینه وجود دارد که به طور صریح قابل محاسبه است و تمام ریسک‌های ممکن در همه سناریوهای بازار را از بین می‌برد.
این گام این امکان را به‌وجود آورد که این بازارهای جدید به سرعت به صورت سازمان‌یافته‌ای توسعه پیدا کنند. اولین این بازارها: بازار معاملات شیکاگو (CBOT[1]) در ۱۹۷۳ در شیکاگو باز شد و به سرعت بازارهای دیگری در پی آن باز شدند، ابتدا در ایالات متحده (فیلادلفیا) و سپس در هر جای دیگر از جهان. فرانسه گام به گام پیش رفت و در ۱۹۸۵ MATIF[2] را تأسیس کرد، به معنای: بازار بین‌المللی فرانسه، (و پس از چندین تغییر در معنای این کلمه مخفف) MONEP[3] به معنای: بازار اختیارهای قابل مذاکره در پاریس در ۱۹۸۷. همان‌طور که نشان خواهیم داد، پیشرفت‌های تکنولوژیکی ( در کامپیوترها، ارتباطات و ...) همپای پیشرفت‌های نظری (در ریاضیات) نیز به این توسعهٔ تماشایی کمک بسیاری کرد.

## دنیای بلک، شولز و مرتون

به منظور صورت‌بندی مفهوم پوشش ریسک پویا، بیایید ملزومات مثال نرخ تبدیل ارز قبل را در نظر بگیریم. در زمان صفر، فروشنده حق بیمه $C_\circ$ را از خریدار دریافت می‌کند (قیمت اختیار). در این موقع، او این حق بیمه را در دلار (آمریکا) سرمایه‌گذاری می‌کند. به طور دقیق‌تر، او مقدار (جبری) $\delta_t$ از دلارها را در هر لحظه $t$ خریداری می‌کند و بقیه پول را سرمایه‌گذاری نمی‌کند (برای ساده کردن استدلال در این‌جا فرض می‌کنیم که نرخ بهره که واحد تبدیل پول‌های سرمایه‌گذاری نشده است؛ که در این‌جا نقد شوندگی یورو است، صفر است). هیچ پولی از خارج نمی‌تواند در مدیریت پویای این فرد تزریق شود: که می‌گوییم خود تأمین[4]. اگر ارزش آن را در زمان با $(V_t)_{t\in[\circ,T]}$ نشان دهیم، آن‌گاه تغییرات بی‌نهایت خرد[5] آن در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t(S_{t+dt} - S_t), \qquad (۱)$$

با این قید که در زمان سررسید $T$ به مبلغی که به خریدار تعهد شده است، دست یابد، یعنی:

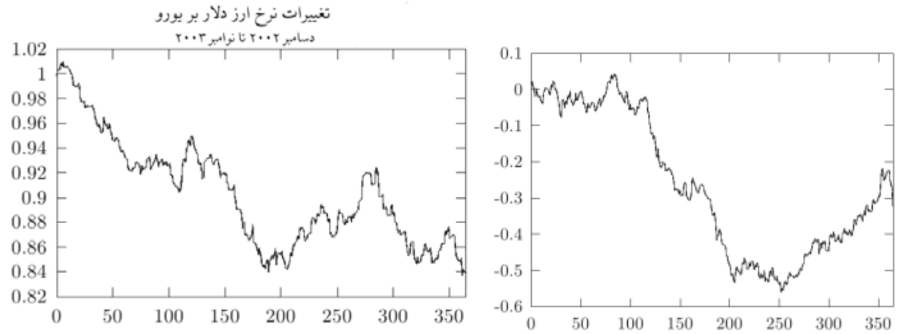
$$V_T = \max(S_T - K, \circ). \qquad (۲)$$

1) Chicago Board of Trade 2) Marché Terme International de France 3) Marché à des Options Négociables de Paris 4) Self-financed Portfolio 5) Infinitesimal

در این نقطه از تحلیل، لازم است مدل (تصادفی) تحول نرخ تبدیل ارز $(S_t)_{t\geq 0}$ را صراحتاً ارائه دهیم. بدون از دست دادن کلّیت مطلب، طبیعی است که بازده لحظه‌ای آن را ترکیب یک روند موضعی و یک نوفه در نظر بگیریم. ساموئلسون[1] (۱۹۶۰) و سپس بلک، شولز و مرتون (۱۹۷۳)، نوفه را به کمک حرکت براونی $(W_t)_{t\geq 0}$ مدل‌سازی کردند که به دینامیک بی‌نهایت خردی از نوع زیر منتهی شد:

$$\frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t}=\mu_t dt+\sigma(W_{t+dt}-W_t). \qquad (۳)$$

نوسان موضعی نوفه توسط پارامتر $\sigma$ (که غیر صفر فرض می‌شود) داده می‌شود و تلاطم[2] خوانده می‌شود.




شبیه‌سازی مسیر یک حرکت براونی (سمت چپ) و تحول نرخ تبدیل ارز دلار/یورو (سمت راست): چیزی بیش از شباهت وجود دارد تقریباً یک شباهت خانوادگی ...

مورد ۱.
**تعریف حرکت براونی:** حرکت براونی یک فرآیند گاوسی با نموهای مانا و مستقل است. برای $0 \leq s < t$، نمو $W_t - W_s$ آن از یک توزیع گاوسی مرکزی با واریانس $(t-s)$ پیروی می‌کند.
**روند تاریخی:** در ۱۸۲۷، رابرت براون[3] گیاه‌شناس (اسکاتلندی) آن‌چه که بعدها حرکت براونی نامیده شد به مسیرهای بسیار بی‌قاعدهٔ (در واقع به عنوان تابعی مشتق از زمان) در ذرات ریز در یک سیال ثبت داد. در سال ۱۹۰۰، لویی بشلیه از آن به‌عنوان مدلی برای نرخ‌های بازار استفاده کرد، و سپس اینشتین[4] در ۱۹۰۵ انتشار یک ذره را با آن توضیح داد. تازه در ۱۹۲۳ بود که وینر[5] ساخت ریاضی آن را صورت‌بندی کرد. این تاریخ، نقطهٔ شروع تحقیقات ریاضی فشرده‌ای است که تا به امروز ادامه دارند و بخش بزرگی از نظریه احتمال نوین را تغذیه کرده است.

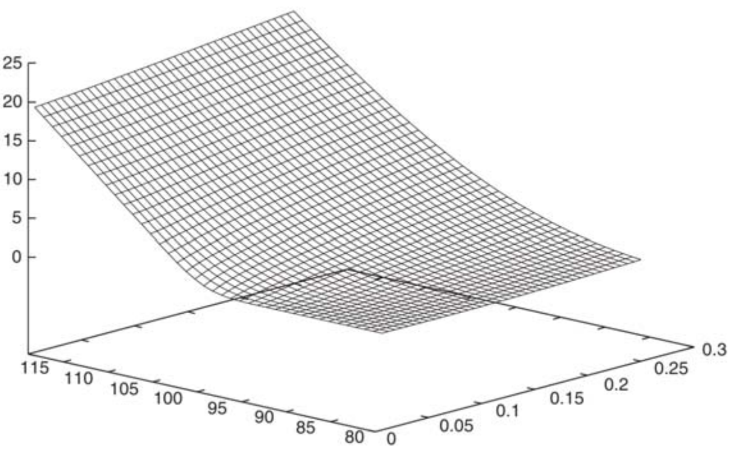
---

1) Samuelson 2) Volatility 3) Robert Brown 4) Enistein 5) Wiener

در واقع، ایدهٔ معرفی حرکت براونی به عنوان مدلی بر تصادفی بودن نرخ‌های بازار سهام، به بشلیه در سال ۱۹۰۰ برمی‌گردد. این ایده با پیدایش اولیه حرکت براونی ارتباط تنگاتنگی دارد. با این فرآیند می‌توان بعضی از خواص مورد انتظار، مانند: استقلال نموها، یا ناوردایی مقیاس را به راحتی در نظر گرفت. در نهایت، رفتار مسیری آن کاملاً شبیه چیزی است که در عمل مشاهده می‌شود (شکل ۱ را ببینید). اما نکتهٔ آخر هنوز جای بحث دارد و موجب بررسی‌های در رده‌های بزرگتری از فرآیندها، مانند حرکت براونی کسری شده‌اند.

در واقع توجیه عبارت‌های بی‌نهایت خرد (۱) و (۳) آسان نیست، چون $(W_t)_{t\geq ۰}$ دارای تغییرات نامتناهی اما تغییرات مرتبه دوم متناهی است. حسابان تصادفی که در دهه ۱۹۵۰ توسط ایتو توسعه پیدا کرد، به ما اجازه می‌دهد که این مسائل تکنیکی را حل کنیم. یک حسابان تصادفی نیز می‌توان به دست آورد، طبق فرمول ایتو؛ برای هر تابع به اندازهٔ کافی منظم $f$ داریم:

$$f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt + \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{۱}{۲}\sigma^۲(S_t)^۲\partial^۲_{xx} f(t, S_t)dt. \qquad (۴)$$




شکل ۲. رویه قیمت به عنوان تابعی از $x$ و $T-t$

وجود جمله اضافی $\frac{۱}{۲}\sigma^۲(S_t)^۲\partial^۲_{xx} f(t, S_t)$، با ظاهر مشتق دوم $f$ نسبت به متغیر دوم با تغییرات مرتبه دوم متناهی حرکت براونی توضیح داده می‌شود. این جمله، به یک معنا، حساب دیفرانسیل تصادفی است، چون در حساب دیفرانسیل معمولی، هیچ جملهٔ مرتبه دومی وجود ندارد (شکل (۱) را ببینید).

به کمک این ابزارهای ریاضی، بلک، شولز و مرتون مسئله پوشش ریسک را برای اختیار خرید حل می‌کنند. در واقع، اگر ارزش متناظر سبد $V_t = C(t, S_t)$ باشد، آنگاه با در دست داشتن معادلات (۱)، (۲) و (۴)، از یک طرف لزوماً داریم $\delta_t = \partial_x C(t, S_t)$ و از طرف دیگر

$\partial_t C(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{xx} C(t,S_t) = 0$ و $C(T,x) = \max(x-K,0)$. این معادله دیفرانسیل پاره‌ای آخر با تغییر متغیر به یک معادله گرما تقلیل می‌یابد که جواب آن، که مدت‌هاست شناخته شده و صریح است. بنابراین فرمول معروف بلک و شولز، که در تمام بازارهای جهانی از آن استفاده می‌شود به دست می‌آید و $V_0 = C(0,S_0)$، ارزش امروز اختیار را به دست می‌دهد. قابل ذکر است که با استراتژی بالا، فروشنده اختیار قادر است در همهٔ سناریوهای بازار به هدف تصادفی $\max(S_T - K, 0)$ دست یابد. به همان اندازه عجیب است که دقت کنیم قیمت $V_0$ فقط به واسطهٔ تلاطم $\sigma$ به مدل (۳) بستگی دارد؛ به‌ویژه بازده موضعی $(\mu_t)_t$ در فرمول ظاهر نمی‌شود.

مورد ۲.

**فرمول بلک و شولز:** قیمت (یا حق بیمه) (شکل (۲)) اختیار خرید با زمان سررسید $T$ و قیمت توافقی $K$ با تابع زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} C(t,x) = x\mathcal{N}[d_1(x/K,t)] - K\mathcal{N}[d_0(x/K,t)], \\ d_0(y,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} log(y) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(y,t) = d_0(y,t) + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases} \tag{5}$$

که $\mathcal{N}$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را نشان می‌دهد.

استراتژی پوشش ریسک متناظر در لحظهٔ $t$ از $\delta_t = C'_x(t,S_t) = \mathcal{N}[d_1(S_t/K,t)]$ قسمت از دارایی ریسکی داده می‌شود.

تنها چیزی که باقی‌مانده، فهمیدن این است که چرا قیمت اختیار یکتاست. فرض نبود فرصت آربیتراژ[1] که در مالی بنیادین است، جواب این مسئله را می‌دهد. این فرض بیان می‌کند که به دست آوردن پول با اطمینان کامل بدون هیچ سرمایه‌گذاری ممکن نیست. بنابراین در مورد اختیار خرید ذکر شده، فرض کنید قیمت آن $V'_0 > V_0$ باشد، کافی است چنین قراردادی را بفروشیم، سپس، با حق بیمهٔ دریافت شده، استراتژی $\delta_t = C'(t,S_t)_{0\leq t \geq T}$ را دنبال کنیم تا با اطمینان کامل و با شروع از هیچ، سودی برابر $V'_0 - V_0 > 0$ به دست آوریم. استدلالی مشابه برای $V'_0 < V_0$ معتبر است، کافی است عکس استراتژی قبل را به معنای ریاضی آن اجرا کنیم. این استدلال در نهایت نشان می‌دهد که تنها یک قیمت منصفانه وجود دارد که از فرمول بالا به دست می‌آید. به همین علت است که استراتژی $\delta_t$، استراتژی $\delta$ ـ خنثی خوانده می‌شود.

در پایان این مطلب خاطر نشان می‌کنیم که قیمت $V_0$ را می‌توان با استفاده از فرمول فایمن ـ کاتس[2]

---

1) Absense of arbitrage opportunity 2) Feynman-Kac

که جواب معادله گرما و حرکت براونی را ارتباط می‌دهد، به صورت یک امید ریاضی نیز نوشت. این نوشتن ارزش اختیار به صورت یک امید ریاضی مسیر بسیاری از محاسبات صریح قیمت‌های اختیار در چارچوب مدل بلک ــ شولز را هموار کرد و کارایی حسابان تصادفی را به نمایش گذاشت.

## تجربه بازار

در بخش پیش، ساختن یک سبد پویای $(\delta_t)_{t\in[0,T]}$ که ارزش اختیار را در زمان سررسید آن، یعنی $\max(S_T-K,0)$ شبیه‌سازی یا بازسازی می‌کرد شرح دادیم. این قسمت در قلب مدل‌سازی مالی است. چنین موقعیت‌هایی در کلاس کلی‌تری از مدل‌ها، که بازارهای کامل نامیده می‌شوند، یافت می‌شود. با این حال، در وهله اول، ممکن است اصلاً اهمیت این فرآیند را زیر سؤال ببریم: چرا این همه تلاش کنیم تا رابطه‌ای را به‌دست بیاوریم که ارزش یک اختیار را در هر نقطه از وجودش به ما می‌دهد، در حالی که بازارهای معاملاتی‌ای وجود دارد که علت وجودی آن دقیقاً به دست دادن این ارزش از طریق تعادل عرضه و تقاضاست؟ در واقع، پاسخ، در رویکردی نهفته است که رابطه آن به دست می‌آید. بدون ورود به جزئیات کار چنین بازارهایی، روشن است که در زمان سررسید، مدیرانی (یا طرف‌های قراردادی) برای قراردادهای اختیار وجود دارند که، به‌طور خلاصه، با دارندگان اختیار روبه‌رو می‌شوند و باید به آن‌ها مقدار تصادفی یاد شدهٔ $\max(S_T-K,0)$ یورو را (به وضوح وقتی که $S_T>K$) پرداخت کنند. حال این طرف‌های قرارداد بین تاریخی که در آن حق بیمه را دریافت خواهند کرد (با فروختن یک قرارداد اختیار) و تاریخ سررسید $T$ چه خواهند کرد؟ طبیعتاً، آن‌ها به یک روش $\delta$ـ خنثی، با گذر زمان، یک سبد مالی خود تأمین را که متشکل از $\delta_t$ دارایی پایهٔ $S_t$ در لحظه $t$ است، پوشش ریسک خواهند داد، طوری که با اطمینان کامل (بدون ریسک) مقدار تصادفی $\max(S_T-K,0)$ یورو را در زمان سررسید کسب کنند: به‌طور معادل، می‌توان در مورد سبدهای پوشش دهنده ریسک صحبت کرد (ما در این‌جا هزینه‌های تراکنش را که شامل پرداخت‌هایی به بازیگران بازار است را در نظر نمی‌گیریم). بدین منظور، این طرف‌های قرارداد از رابطهٔ صریحی که در مدل بلک ــ شولز $\delta_t$ را می‌دهد استفاده می‌کنند (مورد ۲ را ببینید). رابطهٔ دقیق در این‌جا خیلی مهم نیست. از طرف دیگر، نکتهٔ اساسی، حضور پارامتر تلاطم $\sigma$ است. این پارامتر را نمی‌توان به طور لحظه‌ای در بازار مشاهده کرد، باید آن را با به کار بردن روشی از بازار استخراج کرد. یکی از این روش‌ها که طبیعی‌ترین روش خواهد بود، اما جامعه مالی اساساً از آن چشم‌پوشی کرده است، برآورد آماری پارامتر $\sigma$ از مشاهدات است. این رفتارمند آماری بدون شک تا حد زیادی به فرهنگ جامعه مالی ارتباط دارد. اما نه منحصراً: در حقیقت تحلیل‌گران مالی به بازار اعتماد خیلی بیشتری دارند تا به هر مدلی با همین باور، آن‌ها مسئله را معکوس می‌کنند: رابطهٔ بلک ــ شولز که قیمت یک اختیار خرید را می‌دهد (مورد ۲ را ببینید) تابعی از برخی پارامترهای معلوم در زمان $t$ است، یعنی $t$، $S_t$، $K$ و $T$ و یک پارامتر مجهول، تلاطم $\sigma$. خیلی سخت نیست که ببینیم رابطهٔ بلک ــ شولز تابعی از $\sigma$ است که اکیداً صعودی و پیوسته است، و نیز روی مجموعه‌ای از

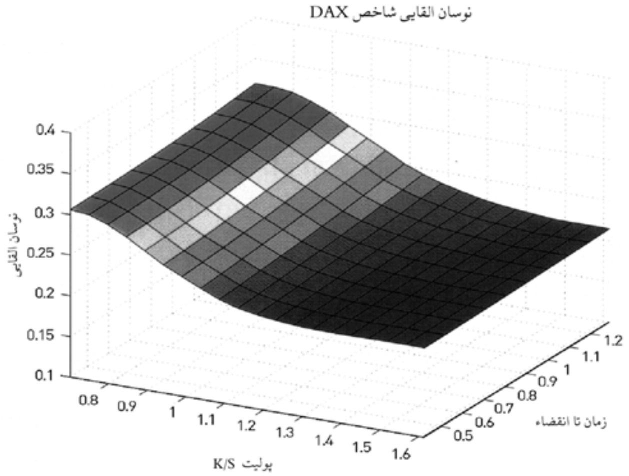
پیش تعیین شدهٔ قیمت‌های ممکن اختیار یک به یک است. مدیران سپس از قیمت‌های بازار استفاده می‌کنند تا تلاطم ضمنی[1] را که جواب یکتای معادله زیر در زمان $t$ است، به دست آورند. (برای قیمت اعلام شده دارایی $S_t$)

$C(t, S_t, T, K, \sigma_{impl}) =$ قیمت اعلام شده قرارداد $(t, K, T)$.

با فرض این که مدل دینامیک دارایی پایه مناسب باشد، $\sigma_{impl}$ عیناً برابر $\sigma$ خواهد بود. با گذر زمان و برای تمام قیمت‌های اعمال $K$. اما در عمل همه چیز کاملاً متفاوت است: نه تنها تلاطم ضمنی برحسب $t$ تغییر می‌کند، بلکه برحسب $K$ نیز تغییر می‌کند! این پدیده به لبخند تلاطم[1] معروف است، زیرا نمودار تابع

$$K \longmapsto \sigma_{impl}(t, K),$$

برای برخی از اشکال بازار شکل سهموی یک لبخند را دارد (شکل (۳)).




تلاطم ضمنی به عنوان تابعی از $K/S_0$ و $T - t$ (شبیه‌سازی توسط کنت)

همین که با کمک معکوس کردن عددی رابطهٔ بلک ــ شولز، تلاطم ضمنی $\sigma_{impl}(t, K)$ از قیمت بازار استخراج شد، مدیری که اختیار را فروخته است، سبد پوشش ریسک خود را با کنار گذاشتن $\delta_t(S_t, \sigma_{impl}(t, k))$ دارایی پایه برای هر اختیار با دارایی پایهٔ $S$، قیمت اعمال $K$ و تاریخ سررسید $T$ که او در آن طرف قرارداد است، تعدیل می‌کند.

از این زاویه بازار برای معاملهٔ اختیارها، بازاری است از تلاطم ضمنی دارایی پایهٔ اختیار. در آن‌جا می‌توان رفتارهای بسیار عملگرانهٔ افراد را مشاهده کرد که با نقص مدلی مواجه هستند، که از طرف دیگر از روز پیدایش آن به خاطر سهولت محاسباتی مورد قبول اکثریت بوده‌اند.

1) Implied Volatility 2) Volatility Smile

در وهلهٔ اول، کارهای متنوعی ویژگی استحکام[1] کیفی مدل بلک شولز را تأیید کردند: با فرض این که پارامتر $\sigma$ دیگر ثابت نباشد بلکه تصادفی باشد، درحالی که از پایین با $\sigma_{min}$ و از بالا با $\sigma_{max}$ کراندار است، در این صورت مدل‌های بلک ـ شولز با پارامترهای $\sigma_{min}$ و $\sigma_{max}$ قیمت‌های اختیار را در مدل کلی کراندار می‌کنند [۱۰]. اما، چنین ملاحظات کیفی دیگر نمی‌تواند افرادی را که آن‌ها را نسبت به ریسک‌های مدیریت ابزارهای مشتقه حساس‌تر کرده است، راضی کنند. به این ترتیب، این ایده پدیدار شد که مدل‌هایی که با پارامترهای بیشتر توسعه پیدا کنند، اساساً با در نظر گرفتن تلاطم $\sigma$ به عنوان یک فرآیند تصادفی که خود توسط تعدادی پارامتر مدل می‌شود، نه به عنوان یک پارامتر تعیّنی (شکل ۳ را ببینید). سپس، آن‌ها چنین مدلی را نسبت به پر معامله‌ترین قیمت‌های بازار با بهره بردن از درجه آزادی بیشتر، برازش می‌دهند، تحلیل‌گران مالی ترجیح می‌دهند از واژه تطبیق[2] استفاده کنند.

این کار عموماً از طریق رویهٔ تلاطم ضمنی حاصل از $(K,T) \longmapsto \sigma impl(t,K,T)$ انجام می‌شود (که نمودار یک بعد بالاتر لبخندهای تلاطم برای سررسیدهایی است که در سبد حضور دارند). این کار همیشه با معکوس کردن رابطهٔ بلک ـ شولز انجام می‌شود: به این ترتیب پارامترهای مدل غنی شده تعیین می‌شود که اجازه می‌دهد این رویه به بهترین وضع ممکن بازتولید شود. این روشی برای برازش پارامترها از قیمت‌های اختیارهایی است که در بازار اعلام می‌شوند، در دنیایی که با شهود و شیوه‌ی حرفه‌ای‌های بازار سازگار است که هر دو بر پایهٔ تلاطم هستند. به محض این‌که این پارامترها تعیین شدند، تنها چیزی که می‌ماند محاسبه پوشش ریسکی است که مربوط به اختیارهای مشمول در سبد، و در صورت لزوم، قیمت‌های اعلان‌نشده‌ی اختیارهایی است که عموماً اختیارهای نامتعارف[3] هستند. همچنین می‌توانیم خود را در آینده ببینیم با شبیه‌سازی کامپیوتری یا روش‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ساختار احتمالاتی سبد را در یک هفته یا یک ماه آینده ترسیم کنیم، مشخصاً احتمال از پیش تعیین‌شده‌ی خارج شدن از یک محدودهٔ داده شده را تعیین کنیم. این هدف ارزش در معرض ریسک[4] است که نماد مالی بازه اطمینان می‌باشد [۱].

به منظور غنی کردن مدل پویای دارایی، تمام تجهیزات احتمالاتی به کمک فراخوانده شده‌اند. این کار با اضافه کردن یک مؤلفه پرش به دینامیک دارایی پایه، با وابسته کردن تلاطم به ارزش سهم ($\sigma = \sigma(S_t)$) با مدل‌سازی دینامیک تلاطم با یک فرآیند پخشی که با حرکت براونی $W$ که تحول دارایی پایه را هدایت می‌کند کم و بیش ناهمبسته است با اضافه کردن پرش به فرآیند تلاطم و به همین ترتیب. به نظر می‌رسد این فرآیند نردبانی بی‌پایان است، اما می‌تواند با توجه به این مطلب تعدیل شود: اگرچه برازش مدل وقتی تعداد پارامترها افزایش می‌یابد آسان‌تر می‌شود، پایداری آن با این تعداد نسبت معکوس دارد. این قانونی است که بسیاری از بازیگران بازار آن را با خرج خودشان یاد می‌گیرند، وقتی از یک روز به روز دیگر، پارامترهای برازش رویه‌ی تلاطم کاملاً تغییر می‌کنند و به این ترتیب اعتماد آن‌ها را نسبت به مدل از بین می‌برند.

---

1) Robust 2) Calibrate 3) Exotic 4) Value at Risk

تا به حال برای سادگی، فقط در مورد خاص اختیار خرید بحث کردیم. اگر از نقطه نظر تاریخی، این چارچوب، اولین چارچوبی است که نظریه برای آن پدید آمده است. (در [۳]، با دارایی پایه‌ای که سهام بدون سود تقسیمی[1] است) و امروز تنها مثالی بسیار ساده از میان سایر مثال‌های ابزارهای مشتق است. همراه با(فروش) اختیارهای خرید، (خرید) اختیارهای فروش[2]، و به دنبال آن، آن‌چه: اختیارهای دامنک[3]، دو منظوره[4]، زینی[5]، پروانه‌ای[6] و ... نامیده می‌شوند، گسترش یافتند، و باز خیلی زود حق‌های مشروطی[7] عرضه شدند که نه تنها به قیمت سهام در زمان سررسید بلکه به تمام مسیر قیمت‌های اعلان‌شده‌ی آن از زمان ۰ تا $T$ بستگی دارد. از این نوع اختیارها می‌توان به اختیار (خرید) آسیایی[8] اشاره کرد که چیزی نیست غیر از یک اختیار خرید روی میانگین $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ از قیمت‌های اعلان‌شده بین ۰ تا $T$، اختیارهای با مانع[9]، اختیارهای بدون پشیمانی[10]، کلیکت[11]، اختیارهای دیجیتال و از این قبیل. پس از سال‌ها نشاط فن‌آوری که رضایت استادان حرکت براونی و شاگردان آن‌ها را به همراه داشت، به نظر می‌رسد که این موج شادمانی اختیارهای نامتعارف باید از اوایل دهه ۱۹۹۰ به نظر آرام می‌شد. با برآورد و مدیریت ریسک (ارزش در معرض ریسک و موارد مشابه آن) که اولین مشارکت پربار و کاملاً غیرمنتظره احتمال‌دانان و فروشندگان ابزارهای مشتق بود. باید تأکید کنیم که این اختیارهای نامتعارف عموماً در بازار معاملات منعقد نمی‌شوند، بلکه بیشتر متناظر با تراکنش‌های فرابورسی[12] هستند، حتی برای افرادی که جزئی از شبکه‌ی بزرگ بانکی هستند.

اگرچه انواع ابزارهای مشتق (تقریباً) نامتناهی به نظر می‌رسد، تعداد دارایی‌های پایهٔ آن‌ها چنین نیست، هرکدام از آن‌ها کم وبیش ویژگی مهمی را در رویکرد کلی معرفی می‌کنند. در کنار سهامی سود تقسیمی پرداخت نمی‌کنند (در واقع شاخص‌های سهام)، بعضی از انواع جدید اختیارها روی نرخ‌های ارز، روی قراردادهای آتی[13] و روی کالاها وارد بازار شده‌اند. این فهرست را با اشاره خاصی به ابزارهای مشتق اوراق قرضه و نرخ‌های بهره خاتمه می‌دهیم که دارایی پایهٔ مشترک آن به یک معنا منحنی نرخ‌های بهره بر حسب زمان‌های سررسید است. این حوزه به دلیل حجم زیاد مبادلات آن اهمیت اقتصادی بنیادینی دارد؛ همچنین، این حوزه به لحاظ مدل‌سازی، پیچیدگی زیادی دارد، زیرا نه تنها باید تغییرات یک سهم، یا یک سبد از آن‌ها را در نظر بگیریم، بلکه یک (شبه-) پیوستار از نرخ‌ها (تا ۱ روز، ۱ ماه، ۳ ماه، ۱ سال، ۳ سال، ... و ۳۰ سال) را که به‌طور تصادفی بین آن‌ها و در طول زمان با رفتاری کم و بیش همبسته تغییر می‌کند؛ و به این ترتیب نوعی از فرآیندهای تصادفی را توصیف می‌کنند که در یک فضای توابع مقدار می‌گیرند. از میان حوزه‌هایی که پدید آمده‌اند و همچنان گسترش می‌یابد، بگذارید به پرسش‌هایی مربوط به بهینه‌سازی سبد مالی، هزینه‌های تراکنش، صندوق‌های پوششی[14]، ... اشاره کنیم.

1) Dividend 2) Put Option 3) Spread Options 4) Straddle 5) Saddle 6) Butterfly 7) Conditional Rights 8) Asian Options 9) Barrier Options 10) Options Without Regret 11) Cliquets 12) Over-the-Counter 13) Futures 14) Hedge Funds

اخیراً ریسک اعتباری[1] یا ریسک نکول[2] و محصولات گوناگون مرتبط با آن‌ها اهمیت اساسی پیدا کرده است: هدف محافظت در برابر ریسک‌های متناظر با اوراق قرضه ــ کوپن‌های پرداخت نشده، از دست دادن کل یا جزئی از سرمایه ــ منتشر شده توسط بنگاهی است که ممکن است ورشکسته شود. حال متغیر کیفی دیگری را که در دنیای اختیارها خاص است، معرفی می‌کنیم: محدودهٔ حق اجرا[3]؛ تاکنون به‌طور ضمنی در مورد قراردادهایی که اروپایی نامیده می‌شوند، بررسی کردیم که به دارندهٔ خود این حق را می‌دهند که در تاریخ $T$ یک جریان پولی برابر $\max(S_T - K, 0)$ را دریافت کنند. اگر این حق دریافت به کل بازهٔ زمانی $[0, T]$ بسط داده شود، یعنی بتوان آن را به انتخاب فرد در یک تاریخ $t$ یک‌بار و فقط یک‌بار اجرا کرد و مبلغ $\max(S_t - K, 0)$ را دریافت کرد، صحبت از یک اختیار آمریکایی است. اینجاست که فرد با یک مسأله توقف بهینه[4] روبرو است که موجب می‌شود، دارندهٔ قرارداد، در یک محیط تصادفی تصمیم بگیرد. اغلب بازارهای اختیار سازمان‌یافتهٔ سهام یا شاخص، با قراردادهای آمریکایی سروکار دارند.

## پیشرفت‌های ریاضی

توسعه بازارهایی که مختص ابزارهای مشتقه بود در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ و همین‌طور بحران‌هایی که چندین بار این بازارها را زیر و رو کردند، در شکوفایی و توسعه چندین شاخه از ریاضیات کاربردی و در مرحله‌ی اول نظریه احتمال و حسابان تصادفی نقش مؤثری ایفا کرده‌اند؛ در این رابطه، شگفت‌انگیزترین اتفاقی که رخ داد انتقال حرکت براونی، فرمول ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی از دایره‌ی بسته‌ی محض‌ترین احتمال‌دانان به مدارس کسب و کار بود. تا جایی که به ریاضیات مربوط است، مثال‌هایی از این نوع کم نیستند، اما در مورد اخیر مخصوصاً تماشایی است. یکی دیگر از ویژگی‌های قابل توجه به خود طبیعت بازارهای مالی برمی‌گردد: یک فعالیت انسانی که در یک اضطرار ثابت تحول پیدا می‌کند و در یک تحول همیشگی است؛ هستند، و آن‌جا مدل‌سازی هم‌زمان موقعیتی مرکزی و متلاطم دارد: چیزی که امروز درست است ممکن است فردا درست نباشد. ریاضیدانی که طبیعتاً به دنبال حل مسائل است، می‌تواند آن‌جا پرسش‌های جذابی بیابد در حالی که از طرف دیگر، هر تحلیل‌گر مالی مشتاق به دست آوردن جواب‌هاست! به هر حال، هر دو گروه ممکن است به نقطه‌ی مشترکی برسند، وقتی‌که ریاضیدان باید اول از همه به یافتن یک حل سخت و خسته‌کننده برای مسئله‌ای که مأمور آن است بچسبد، تحلیل‌گر تغییرپذیری مدل‌ها و پارامترهای آن‌ها را ترجیح می‌دهد (تا به یک نمایش ذهنی برای دنیای تصمیمات ممکن دست پیدا کند) و اول از همه به راحتی به کارگیری آن‌ها (فرمول‌های صریح، اجراهای عددی و ...) که تنها راه برای حفظ واکنش به‌موقع او در میانه‌ی تراکنش‌های ظریف است (جایی که واحد زمان ثانیه است).

حوزه‌ای از ریاضی که تعامل آن با مالی قوی‌ترین تعامل بوده است به وضوح نظریه احتمال

1) Credit Risk 2) Default Risk 3) Range of exercise rights 4) Optimal Stopping Time

است: حسابان تصادفی و حرکت براونی در اولین دوره به‌ویژه با ظهور اختیارهای نامتعارف. پس پیچیدگی بیش از بیش محصولات، تعداد بیشتر مدل‌ها، ضرب کردن شاخص‌هایی که برای محدود کردن منابع ریسک لازم بودند، منجربه شرایطی شده‌اند که محاسبات صریح، حداقل برخی مواقع، نیاز به روش‌های عددی دارند. دو خانوادهٔ بزرگ از روش‌ها در دسترس هستند، آن‌هایی که از آنالیز عددی نشأت می‌گیرند و آن‌هایی که از احتمال عددی نشأت می‌گیرند. هر کدام از این دو دیسیپلین را می‌توان تقریباً در یک کلمه خلاصه کرد: معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای یکی، روش مونت کارلو برای دیگری (یعنی، محاسبهٔ یک میانگین با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری سناریوهای تصادفی بسیار زیاد).

آنالیز عددی پایهٔ تاریخی ریاضیات کاربردی در فرانسه منبع جدیدی از مسائل را یافت که روش‌هایش با کارایی آزمون‌شده، می‌تواند در آن‌ها به کار رود. از طرف دیگر، احتمال عددی، تحت انگیزش مالی کمّی [1]، رشد بی‌سابقه‌ای پشت سر گذاشت، به‌ویژه در روش‌های گسسته‌سازی فرآیندها به‌ویژه با نقش دنی تله [2] در اینریا [3]). بسیاری از حوزه‌های اساسی نظریه‌ی احتمال، از جمله حسابان مالیوان [4] (حسابان تغییرات تصادفی) اخیراً با نقش مهم و از بعضی لحاظ غیرمنتظره‌ای که ایفا کرده‌اند وارد این عرصه شده‌اند. حوزه‌های دیگر نظریهٔ احتمال به‌ویژه، نظریهٔ توقف بهینه در اختیارهای آمریکایی، یا نظریهٔ بهینه‌سازی که نقش اساسی از نظریه‌ی پوشش ریسک میانگین ــ واریانس [5] فولمر ـ ساندرمن [6] تا بسیاری از الگوریتم‌های تطبیق بازی می‌کند، واقعاً در دوره‌ی جوانی مجدد خود هستند. اما توسعه‌ی احتمال و شبیه‌سازی برای سایر جنبه‌هایی که بیشتر نظری هستند زیان‌آور نبوده است زیرا، در طول سالیان اخیر، فرآیندهای پرش، که معمولاً متناظر با مسائل شبکه‌ها و صف بوده‌اند، امروزه در مدل‌سازی مالی به طور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، به‌خصوص در زمینه‌هایی که بیشترین پیچیده‌گی را دارند (فرآیندهای لوی [7]، برای مثال [۴] را ببینید).

در نهایت، همان‌طور که در چنین تعامل‌هایی دیده می‌شود، مدل‌سازی مالی منجربه ظهور مسائل جدیدی شد که اساساً به شیوه‌ای خودگردان در نظریهٔ احتمال توسعه یافتند: این موضوع به‌ویژه در پرسش‌هایی که از تعمیم مفهوم آربیتراژ برخاستند، چه در فضای فرآیندهای بیش از پیش کلی، و چه در مدل‌سازی‌های واقعی‌تر برای فعالیت‌های بازارها (در نظر گرفتن دامنک خرید و فروش [8] در اعلان‌ها، و بحث در مورد کران‌های متنوع برای درجهٔ آزادی مدیران و از این قبیل) دیده می‌شود.

## آموزش

توسعهٔ ریاضیات مالی در دههٔ ۱۹۸۰ از نظر آموزش ریاضیات کاربردی، بیشتر در نظریهٔ

1) Quantitative Finance 2) Denis Taley 3) Inria 4) Malliavan Calculus
5) Mean-Variance 6) Föllmer-Sanderman 7) Lévy Processes 8) Bid-Ask Spread

احتمال، با انگیزش اولیهٔ نیکولاس بولو[۱]، نیکول ال کاروی[۲]، لور الی[۳]، هیلت گمان[۴]، ژان ژاکود[۵]، مونیک ژان بلان[۶]، دمین لامبرتون[۷] و برنارد لاپیر[۸] تأثیر قوی داشته است. از اواخر دههٔ ۱۹۸۰، اولین درس‌های حسابان تصادفی با هدف‌گذاری مالی ظاهر شدند، به‌ویژه در اکول ناسیونال دِپونت شوسه[۹] سپس به سرعت در اکول پلی‌تکنیک[۱۰]. قابل توجه است که دانشگاه‌ها هم نقش مهمی در این توسعه برعهده گرفتند، به‌ویژه در مجتمع دانشگاهی ژوسیو[۱۱]، که همزمان درس‌هایی ویژه‌ی مالی در $DEA$ (= درس‌های تحصیلات تکمیلی) احتمال هم در دانشگاه‌های پاریس شش و هم پاریس هفت تدریس می‌شد. موفقیت بلافصل بود، و در طول سال‌ها هم همین‌طور باقی‌ماند؛ در حالی که اولین دوره‌ی تخصصی احتمال و مالی در $DEA$ی احتمال و کاربردهای آن در دانشگاه پاریس شش (با همکاری اکول پلی‌تکنیک در زمینه‌ی مالی) در ۱۹۹۱ تنها ۵ فارغ التحصیل داشت، بعد از ۲۰۰۳ هر دوره مجموعاً بیش از ۸۰ فارغ التحصیل داشته است. حرکت مشابهی در دانشگاه پاریس هفت هم مشاهده شده است. در همین مدت، اصطلاحات قدیمی $DEA$ و $DESS$ به $M2$ (= سال دوم تحصیلات تکمیلی) تغییر یافت، با کیفیت خوبی در تحقیقات و حرفه‌ای بودن. امروزه، اگر تنها منطقه‌ی پاریس و حومهٔ آن (ایل ـ دِ ـ فرانس[۱۲]) را در نظر بگیریم و تنها این آموزش‌ها را، سه کارشناسی ارشد دیگر نیز با ریاضیات مالی هدف‌گذاری و با موفقیت توسعه یافتند: $DEA$ی ریاضیات کاربردی در علوم اقتصادی پاریس نه (که به کارشناسی ارشد ۲ $MASEF$ تبدیل شده است) و کارشناسی ارشد ۲ تحلیل و سیستم‌های تصادفی (با گردش مالی) در دانشگاه مارن ـ لا ـ وکه[۱۳]، $DESS$ مهندسی مالی در اِوری‌ـوَل ـ دِسون[۱۴]. دانشجویانی که در این آموزش‌های متفاوت درگیر می‌شوند از نقاط قوت تیم‌های تحقیقاتی محلی مختلف بهره می‌برند (مدل‌سازی، حسابان تصادفی، احتمال عددی، اقتصادسنجی، آمار و ...). چیزی بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ دانشجو هر ساله از این آموزش‌های «منطقه‌ی پاریس» (که اغلب به‌طور مشترک با مدارس مهندسی با کسب و کار برگزار می‌شوند و مورد استقبال بسیاری از دانشجویان این مؤسسات، که به‌دنبال آموزش‌های سطح بالای ریاضیات مالی هستند، قرار می‌گیرند) فارغ التحصیل می‌شوند. می‌توان برآورد کرد که حدود ۱۵٪ از دانشجویان اکول پلی‌تکنیک، بسیاری از آموزش‌های تخصصی در ریاضیات مالی در مدارس مهندسی شکوفا شده‌اند، مانند $ENPC$، $ENSAE$، $Sup'Aero$، در تولوز[۱۵] یا انسی‌ماگ[۱۶] در گرونوبل[۱۷]، در این حوزه بسیار پیشرو هستند.

صرفنظر از ویژگی‌ها، تخصص و یا جهت‌گیری، این آموزش‌ها برای کوانت‌ها[۱۸] (متخصصین مالی کمّی)، هستند. این آموزش‌ها حول سه جهت اصلی سازماندهی شده‌اند: مدل‌سازی (که اساساً

1) Nicolas Bouleau 2) Nicole El Karoui 3) Laure Élie 4) Hélyette Geman 5) Jean Jacod 6) Monique Jeanblanc 7) Damien Lamberton 8) Bernard Lapeyre 9) École nationale des Ponts et Chaussées 10) École Polytechnique 11) Jussieu 12) Ile-de-France 13) Marne-la-Vallée 14) Evry-Val-d'Essonne 15) Toulouse 16) Ensimag 17) Grenoble 18) Quant

بر پایهٔ حسابان تصادفی است)، احتمال و آنالیز عددی، بهینه‌سازی، برنامه نویسی الگوریتمی و کامپیوتری ([۱۰] را برای جزئیات بیشتر ببینید). باید در نظر داشت که واحدهای تحقیقاتی بانک‌ها که بسیاری از کوانت‌ها کار خود را از آن‌جا آغاز می‌کنند عموماً به‌عنوان ارائه کنندهٔ خدمات به سایر بخش‌های مؤسسهٔ خود هستند (اتفاق‌های معاملات، مدیران، ...). بنابراین آن‌ها مانند ساختارهای کوچک $PME$ (مخفف فرانسه برای کسب و کارهای کوچک) کار می‌کنند. این موضوع در مؤسسات با اندازه‌های نسبتاً کوچک درست‌تر است (انجمن‌های مدیریت، صندوق‌ها و غیره). بنابراین یک نیاز واقعی برای برنامه‌های متنوع وجود دارد.
تأثیر ریاضیات مالی را می‌توان در زمینه‌هایی که در ابتدا ریاضی‌مدار نبوده‌اند، مشاهده کرد. این موضوع به‌ویژه در برنامه‌های آموزشی قدیمی‌تر که عموماً تحصیلات تکمیلی در اقتصاد یا مدیریت بوده‌اند ($DEA$ی بانکداری و مالی پاریس $I$، ۲۰۳ در پاریس ۹، آموزش‌های بیمه‌سنجی[1] در لیون $II$ یا $ENSAE$ و ...)، درست است؛ همچنین در مدارس کسب و کاری مانند $HEC$ یا $ESSEC$، ریاضیات برای مالی اغلب جایگاه قابل توجهی دارد. این واقعیت موقعیتی را که فرهنگ ریاضیات کاربردی در حوزه‌های از پیش کم‌تر کمّی به خود اختصاص داده است، نشان می‌دهد، مانند مدیریت یا فروش، معاملات دارایی‌ها یا محصولات مالی. اگر فرانسه موقعیت مهمی در آموزش کوانت‌ها دارد، که عمدتاً به دلیل اهمیتی است که به‌طور سنتی به ریاضیات در آموزش جوانان داده می‌شود، امکانات شغلی در مالیِ بازار به‌وضوح مستقیماً مرتبط با اهمیت مکان‌های مالی است. امروزه اروپای مالی و اشتغالی که همراه آن است اساساً در لندن توسعه می‌یابد، جایی که، هر ساله تعداد بیشتری از فارغ‌التحصیلان جوان آن‌جا، آن‌چه را که به‌طور نظری چگونگی‌اش را آموخته‌اند در ساختمان شش‌گوشه‌اش به کار می‌برند. لندن تنها مقصد آن‌ها نیست: بسیاری از آن‌ها از پاسخ به تقاضای تمام دنیا اجتناب نمی‌کنند و به دنبال بخت خود به نیویورک یا توکیو یا ... می‌روند.
ظرفیت جذب این آموزش‌ها با توجه به متن حاضر، برای دانشجویان خارجی با استعداد، کاملاً واضح است. امّا این جذابیت ممکن است به دلیل سدّ زبانی و برخی سازگاری‌ها به سیستم فرانسوی کاهش یابد، به‌ویژه در روش ارزشیابی، که تقریباً به‌طور منحصر به فرد، حل کردن مسائل در یک زمان محدود است، محکی که همه جا در باقی دنیا به کار گرفته نمی‌شود، و برای آن دانشجویان خارجی آمادگی خوبی ندارند. برعکس، سیستم دانشگاهی تقریباً مجانی فرانسه، اگر دوام داشته باشد، یک امتیاز بزرگ است. این یک ویژگی فرانسوی است، که در مقایسه با آموزش‌های مشابه در ایالات متحده و بریتانیا که هزینهٔ آن بالغ بر چندین ده هزار یورو است شگفت‌انگیز است.

به‌عنوان نتیجه‌گیری، توجه کنیم که این پیام در میان نسل آینده انتشار یافته است و می‌توان دانشجویان کارشناسی و دانشجویان مدارس مهندسی بیشتر و بیشتری را دید که ــ بعضی اوقات با دشواری ــ تحصیلات ریاضی پیشرفته‌ای را دنبال می‌کنند با هدف یکتای دست‌یابی به شغل‌هایی در مالی بازار.

1) Actuaries

چه از این موضوع به وجد آییم و چه به رقّت درآییم، حسابان تصادفی و توسیع آن احتمال و ریاضیات کاربردی، طی ۱۵ سال اخیر به جادهٔ دسترسی حوزهٔ علم به شغل‌های مالی بازار تبدیل شده‌اند. در این لحظه، این رشته یک «بزرگراه» است، آینده خواهد گفت ....

## مراجع


[1] Artzner, P., Delbean, F., Elber, J. M., Heath, D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, **9**(3): 203-228, 1900.

[2] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, Série 3, janvier, **17**: 21-86, 1900.

[3] Black, F., Schoels, M., *The Pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economiy, **81**: 637-654, 1973 (May-June).

[4] Cont, R., Tonkov, P., *Financial modelling with jump processes*, Financial Mathematics Series, Chapman & HallCRC, Boca Raton, FL, 2004.

[5] Cox, J.C, Ross, M.Rubinstein, *Option Pricing: a Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, **7**: 259-261, 1979.

[6] Dana, R. A., Jeanblanc, M., *Financial Markets in Continuous Time*, Springer Finance. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2003. Secound Edition (2007).

[7] Delbean, F., Schachermayer, W., *The Fundamental Theory of Asset Prricing for Bounded Stochastics Processes*, Mathematische Annalen, **312**(2): 215-250, 1998.

[8] Duffie, D., *Modéles dynamiques d'évaluation*, P.U.F., Paris, 1974.

[9] El Karoui, N, *Mesures et Couverture de Risques dans les Marchés Financiers*, MATAPLI, **69**: 43-66, 2002.

[10] El Karoui, N., Jeanblanc, M., Shreve, S. E., *Robustness of the Black and Scholes formula*, Mathematical Finance, **8**(2): 93-126, 1998.

[11] El Karoui, N., Pagés G., *Comment Devenir Quant?*, http://www.maths-fi.com/devenirquant.asp, 2004.

[12] Follmer, H., *Probabilistic Aspects of Financial Risk*, Plenary Lecture at the Third European Congress of Mathematics, Proceeding of the European Congress of Mathemaics, Barcelona, 2000, Barkhauser, 2001.

[13] FOLLMER, H., SCHIED A., *Stochastic Finance*, Vol. 27, de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004, 2end Edition. An Introduction in Discrete Time.

[14] GARMAN, M., KOHLHAGEN, S.,*Foreign Currency Option Values*, Journal of Internatinal Money and Finance, **2**: 231-237, 1983.

[15] GEMAN, H., MADAN, D., PLISKA, S. R., VORST, T., *Mathematical Finance Bachelier Congress 2000*, Springer Finance. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2002. Selected papers from the1st World Congress of the Bachelier Finance Society held in Paris, June 29-July 1, 2000.

[16] GOBET, E., PAGÉS, G. AND YOR, M.,*Mathematics and Finance*, Aspects of Mathematical finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, pp: 63-76.

[17] HARRISON, M., KREPS D., *Martingales and Arbitrages in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economics Theory, **29**(3): 381-408, 1979.

[18] HARRISON, M., PLISKA, S.,*Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, Stochastic Processes and Their Applications, **11**(3): 215-260, 1981.

[19] HULL, J. C.,*Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International, Editions. Upper Saddle River, Prentice Hall, NJ, 2003.

[20] KARATZAS, I., SHREVE, S.H.,*Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin Heidelberg New Yorg, 1998.

[21] LAMBERTON, D., LAPEYRE, B.,*Introduction to stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall. Boca Raton, FL, 1996. Second Edition (2007).

[22] LAMBERTON, D., PRIAULET, P.,*Produits de taux d'intéret: Méthodes dunamiques d'évaluation et de couverture*, Économica, 2000.

[23] MERTON, R. C., *Theory or rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Managment Science, **4**: 141-183, 1973.

[24] MERTON, R. C., *Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3**: 125-144, 1976.

[25] PAGÉS, G., BOUZITAT, C.,*En passant par hasard, les probabilités dans la vie quotidienne*, 3é édition, Vuibert, Paris, 2003.Partie IV, La Bourse et la vie: 185-258.

[26] Rogers, L.C.G., Talay, D.,*Numerical Methods in Finance*, Publications of the Isaac Newton Institute series, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[27] Roncalli, T.,*La gestion des riques financiers*, Économica, Paris, 2004.

---

مترجمین: زانیار احمدی، zaniara3@gmail.com
شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت اقتصاد، zamani@sharif.edu