فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (پاییز ۱۳۸۸) صص. ۴۱ تا ۵۴

چگونه می‌توان لم فارکاش را اثبات کرد؟

احسان منبتی و حسین تقی‌زاده کاخکی

چکیده

قضیه‌ی فارکاش یکی از قضایای آلترناتیو[1] (یا این یا آن) است که کاربردهای مختلفی از جمله اثبات شرایط بهینگی در برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی و اثبات قضایای دوگانی در برنامه‌ریزی خطی دارد. در این مختصر به بیان این قضیه، برخی صورت‌های معادل و اثبات‌های مختلفی از آن می‌پردازیم.

مقدمه

قضیه‌ی فارکاش[2] به خودی خود قضیه‌ی چندان عمیقی در ریاضیات نیست اما کاربردهای آن در قضایای دیگر نتایج جالب و عمیقی داشته است. این قضیه‌که بعضاً لم نیز گفته می شود درباره‌ی دستگاه نامعادلات خطی است که عمدتاً پس از استفاده از آن توسط کوهن[3] و تاکر[4] در اثبات شرط لازم برای بهینگی مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی به شهرت رسید. گیولا فارکاش[*] استاد فیزیک نظری در دانشگاه کالاژوار[5] و عضو آکادمی علوم مجارستان بوده و عمده‌ی شهرتش به خاطر کارهایی است که در مکانیک و ترمودینامیک انجام داده است. وی این لم را نیز در ارتباط با مسائل عملی که در مکانیک داشته اثبات و از آن در مسأله‌ی تعادل مکانیکی[6] استفاده کرده است. بنا به نوشته‌ی پرکوپا[7] [۲۱] در اثبات نخست وی از این قضیه که در سال‌های ۱۸۹۴ و ۱۸۹۵

---

1) Alternative

۲) Farkas در زبان مجاری فارکاش تلفظ می‌شود به این دلیل ما به جای تلفظ انگلیسی آن یعنی فارکاس از تلفظ اصلی استفاده کرده‌ایم.

3) Kuhn   4) Tucker   5) Kolazsvár   6) Mechanical equilibrium   7) Prekopa

*) نام کوچک فارکاش در زبان مجاری گیولا (Gyula) و ترجمه‌ی آلمانی آن ژولیوس (Julius) است. تا اوایل قرن گذشته (۲۰ میلادی) متداول بوده که در ترجمه‌ی مقالات نام مؤلفین هم ترجمه می‌شده است به این دلیل در برخی مراجع G. Farkas و در برخی J. Farkas ذکر شده است.

به چاپ رسیده و همچنین در اثبات دوم وی در سال ۱۸۹۶ و ترجمه‌ی آلمانی آن در سال ۱۸۹۹ نواقصی وجود دارد. اما نخستین اثبات کامل این قضیه در سال ۱۸۹۸ در مجارستان و در سال ۱۸۹۹ در آلمان به چاپ رسیده است. این اثبات در مقاله‌ای که بیشتر از وی نقل می‌شود در سال ۱۹۰۱ به چشم می‌خورد.[۱] بین سال‌های ۱۹۰۲ و ۱۹۱۷ میلادی فارکاش مقاله‌ی دیگری در مورد نامعادلات به چاپ نرسانده است. اما در سال ۱۹۱۷ پس از آن که هار[۲] قضیه‌ی فارکاش را به دستگاه‌های ناهمگن تعمیم داد فارکاش مجدداً به این مسأله بر می‌گردد و مقالات جدیدی در این زمینه به چاپ می‌رساند. اما هار معتقد است که فارکاش و مینکوفسکی[۳] نظریه‌ی نامعادلات خطی را ابداع کرده‌اند، البته کارهای فوریه[۴] و گاوس[۵] را که قبل از آن‌ها در این زمینه انجام شده است، نمی‌توان نادیده گرفت. ولی فارکاش در مقاله‌ی سال ۱۹۰۱ خود معتقد است که وی نخستین فردی است که به اهمیت کاربرد نامعادلات خطی همگن پی برده است [۲۱]. تاریخچه‌ای از سیر تحول تحقیقات انجام شده در این زمینه را در [۲۴] نیز می‌توان یافت.

دانتزیگ[۶] [۸] نیز در مورد اهمیت و تاریخچه‌ی دستگاه نامعادلات خطی از قول ماتزکین[۷] ذکر می‌کند که در دوره‌ی ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۶ تنها ۳۰ مقاله و در مجموع نزدیک ۴۲ مقاله در این مورد چاپ شده بوده است. به هر تقدیر در این نکته که ظهور نظریه‌ی بازی‌ها و برنامه‌ریزی خطی نقطه‌ی عطفی در کاربرد دستگاه‌های نامعادلات خطی به شمار می‌آید، اتفاق نظر وجود دارد.

قضایایی نظیر قضیه‌ی فارکاش به عنوان قضایای آلترناتیو (یا این یا آن) شناخته می‌شوند. در این گونه قضایا همان طور که از نام آن‌ها پیداست، دو دستگاه معرفی می‌شوند که وجود جواب برای یکی مستلزم عدم وجود جواب برای دیگری است. معمولاً اثبات یک طرف بسیار آسان است اما اثبات طرف دیگر چندان ساده نیست. قضایای گوردان[۸]، اشتیمکه[۹]، تاکر و ماتزکین از جمله این گونه قضایا هستند. برای اطلاع بیشتردر مورد قضایای آلترناتیو خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به [۹]، [۱۹] و [۲۴] مراجعه کند.

اما آنچه ما را بر آن داشت تا در مورد این قضیه این مختصر را بنویسیم توجهی است که به آن شده است.[۱۰] تنوع اثبات‌های ارائه شده و کاربردهای جدید آن، گواهی بر این موضوع است.

---

۱) همین مرجع در برخی مقالات ۱۹۰۲ ذکر شده است.

Theorie der einfachen ungleichungen, J. Reine Angew. Math., 124 (1901) 1-27.

2) Haar 3) Minkowsky 4) Fourier 5) Gauss 6) Dantzig 7) Motzkin 8) Gordan 9) Stiemke

۱۰) حتی در شعر آهنگی از گروه موسیقی Aardvarks (مورچه‌خواران) نیز ذکری از لم فارکاش به میان آمده است:

Farkas lemma told you so
stay out of the cone
Farkas lemma told you so
stay beyond the cone
http://www.lyricsmode.com/lyrics/a/aardvarks/farkas_lemma.html

به عنوان مثال در [۵] به اثبات‌های مختلفی از آن که به سه دسته الگوریتمی، هندسی و جبری تقسیم می‌شوند، اشاره شده است. از جمله اثبات‌های الگوریتمی، اثبات ارائه شده توسط پرکوپا، برویدن [۱]، بازارا [۲] و همکاران، بلند [۳] و دکس [۴] را می‌توان ذکر کرد. پرکوپا از قاعده‌ی الفبایی و بِلَند از قاعده‌ی کمترین اندیس خود برای پیشگیری از به دور افتادن الگوریتم استفاده می‌کنند. آن‌ها بدین وسیله قضیه را در حالت‌های تبهگن نیز اثبات کردند و این دقیقاً همان نقیصه‌ای است که در اثبات نخست فارکاش به روایت پرکوپا نادیده گرفته شده بوده است. برخی از این گونه اثبات‌ها از جمله اثبات‌های ارائه شده توسط کاواتال [۵] و زیگلر [۶] از روش حذفی فوریه ـ ماتزکین استفاده می‌کنند.
ایده‌ی اثبات‌های هندسی بر مبنای قضیه‌ی تفکیک [۷] استوار است. همچنین در آن‌ها از خاصیت نزدیک‌ترین نقطه [۸] برای مجموعه‌های محدب استفاده می‌شود. از جمله‌ی این اثبات‌ها می‌توان به اثبات ارائه شده توسط فلچر [۹] و بازارا و همکاران اشاره کرد.
بالاخره روش‌های اثبات ارائه شده توسط وجدا [۱۰]، تاکر و گود [۱۱] جزء روش‌های جبری محسوب می‌شوند [۵].
از جنبه‌های مختلف، تعمیم‌هایی برای لم فارکاش وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان صورت ناهمگن آن را در نظر گرفت که در اینجا به عنوان لم ۳ بیان شده است. کال [۱۲] [۱۴] قضیه‌ی فارکاش را برای متغیرهای مختلط بررسی کرده است.

همین‌طور تعمیمی از صورت همگن آن برای فضاهای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب وجود دارد که در [٦] صورت ناهمگن آن نیز بیان شده است. پیش از این همان طور که اسپوزیتو [۱۳] در [۲۷] بدان اشاره کرده است لم فارکاش بر روی مخروط‌ها تعمیم داده شده بود. سوارتز [۱۴] [۲٦] برخی از تعمیم‌های لم فارکاش را با استفاده از قضیه‌ای در فضاهای هاسدورف موضعاً محدب به دست می‌آورد. بارتل [۱۵] [۲] قضیه‌ی فارکاش را برای فضاهای بابعد نامتناهی بررسی می‌کند؛ وی همچنین تعمیمی از قضیه فارکاش را با فرموله کردن آن در دو فضای برداری در [۳] ارائه می‌دهد.
راماناتان [۱٦] و سیواکومار [۱۷] [۲۲] قضیه‌ی فارکاش را بر روی فضاهای ضرب داخلی نامعین نیز ارائه داده‌اند . در [۱۳] به صورت غیرخطی این لم اشاره شده است که کاربردهایی در بهینه‌سازی سراسری و کمترین مربعات دارد. گلور [۱۸] [۱۰] و گلور و دیگران [۱۱] لم فارکاش را برای مسائل برنامه‌ریزی شبه‌مشتق‌پذیر بیان کرده‌اند.
بالاخره قابل ذکر است که لَسِر [۱۹] لم فارکاش را برای متغیرهای صحیح اثبات می‌کند [۱٦] وی همچنین در مقاله‌ی دیگری تعمیمی از این لم را برای دستگاه‌های خطی روی مخروطی از ماتریس‌های معین مثبت ارائه کرده است [۱۷].

---

1) Broyden 2) Bazaraa 3) Bland 4) Dax 5) Chavatal 6) Ziegler 7) Separation Theorem 8) Nearest point property 9) Fletcher 10) Vajda 11) Good 12) Kaul 13) Sposito 14) Swartz 15) Bartl 16) Ramanathan 17) Sivakumar 18) Glover 19) Lasserre

چند صورت معادل قضیهٔ فارکاش

در ادامه نخست به بیان قضیه‌ی فارکاش و صورت‌های معادل آن می‌پردازیم؛ سپس به چند اثبات از این قضیه از جمله ۳ اثبات جالبی که در [۱۸] آمده و هولدر [۱۲] در نقدی بر کتاب مذکور آنها را «جواهرهای کوچکی از تفکر و خلاقیت» می خواند اشاره خواهیم کرد.
قبل از بیان قضیه‌ی فارکاش یک تعریف می‌آوریم. این تعریف و قضیه‌ی بعدی را می توان در [۲۵] یافت.

دستگاه نامعادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$S: \begin{cases} Ax > a \\ Bx \geq b \\ Cx = c \end{cases}$$

که در آن A، B و C ماتریس‌هایی $m \times n$ و $a, b, c \in \mathbb{R}^m$.
فرض کنیم ρ یکی از روابط $=$، $\geq$ یا $>$ باشد. گوییم رابطه‌ی

$$Dx \ \ \rho \ \ d \tag{۱۰}$$

یک رابطه‌ی نتیجه‌ای از S است هرگاه هر x که در S صدق می‌کند در (۱) نیز صدق کند.
می خواهیم بدانیم چگونه می‌توان یک رابطه‌ی نتیجه‌ای از S به دست آورد. به راحتی می‌توان اثبات کرد که هر یک از اعمال زیر یک نتیجه از S به دست می‌دهند:

۱ − **ترکیب خطی**: فرض کنیم $u, v, w \in \mathbb{R}$ و $u, v \geq 0$ در این صورت اگر

$$(D, d) = u(A, a) + v(B, b) + w(C, c),$$

آنگاه $Dx \ \rho \ d$ یک نتیجه از S است؛ که در آن

$$\rho = \begin{cases} > & u \neq 0 \text{ اگر} \\ \geq & u = 0, v \neq 0 \text{ اگر} \\ = & u = 0, v = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۲ − **تضعیف**[1]: جایگزین کردن $>$ با $\geq$ یا جایگزین کردن $=$ با $\geq$؛ یا کوچک کردن مقدار سمت راست. به بیان دقیق‌تر، دو رابطه‌ی

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ \ \rho_1 \ \ a_0$$

و

$$a_0 \ \ \rho_2 \ \ \bar{a}_0$$

1) Weakening

را می‌توان با رابطه‌ی

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ \ \rho_3 \ \ \bar{a}_0$$

جایگزین کرد؛ که در آن اگر یکی از ρ_1 یا ρ_2 ، $>$ باشد ρ_3 را $>$ و اگر هر دو $\geq$ باشند ρ_3 را $\geq$ اختیار می‌کنیم.

۳− **جایگزینی**[1]: معادله‌ی $Bx = b_0$ را می‌توان از دو نامعادله‌ی $Bx \geq b_0$ و $-Bx \geq -b_0$ نتیجه گرفت.

با استفاده از این سه قاعده می‌توان تمام روابط نتیجه‌ای را بدست آورد. قضیه‌ی زیر این امر را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۱. اگر دستگاه S غیر تهی باشد آنگاه هر نامعادله‌ی نتیجه‌ای از S را می‌توان با ترکیب خطی و تضعیف به دست آورد. هر معادله نتیجه‌ای را نیز می‌توان از دو نامعادله نتیجه‌ای به دست آورد.

اکنون با استفاده از تعریف فوق می‌توان صورتی از قضیه‌ی فارکاش را بیان کرد:

قضیه‌ی ۲. هر نتیجه‌ی همگن $Dx \geq 0$ از دستگاه همگن $S : Ax \geq 0$ ترکیبی خطی از نامعادلات S با ضرایب نامنفی است.

این صورت اصلی لم فارکاش است که در [۲۱] نیز بدان اشاره شده است.
قضیه‌ی فارکاش صورت‌های معادل دیگری نیز دارد که از میان آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

لم ۱. دستگاه $Ax \leq b, \ \ x \geq 0$ جواب دارد اگر و فقط اگر به ازای هر $y \in \mathbb{R}^m$ که $y \geq 0$ و $y^TA \geq 0$ داشته باشیم $y^Tb \geq 0$.

لم ۲. دستگاه $Ax \leq b$ جواب دارد اگر و تنها اگر برای هر بردار نامنفی مانند y با شرط $y^TA = 0$ داشته باشیم $y^Tb \geq 0$.

لم اخیر که خود به عنوان یکی از قضایای آلترناتیو تلقی می‌شود توسط گِیل[2] ارائه شده است [۱۹]. صورت معادل دیگر به صورت زیر است:

لم ۳. فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ شدنی باشد. در این صورت هر جواب x از آن، در رابطه‌ی $c^Tx \leq \delta$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر برداری مانند $y \geq 0$ موجود باشد به طوری که $y^TA = c^T$ و $y^Tb \leq \delta$.

این لم را می‌توان به عنوان صورت ناهمگن لم فارکاش تلقی کرد. در واقع با فرض $\delta = 0$ و $c = 0$ لم فارکاش بدست می‌آید.
اما در اغلب مقالات و کتب جدید از جمله در [۴] این لم به صورت زیر بیان می‌شود.

1) Coupling   2) Gale

قضیه‌ی ۳. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد و $b \in \mathbb{R}^m$. در این صورت یک و فقط یکی از دو گزاره‌ی زیر درست است:

(۱) برداری مانند $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $Ax = b$ و $x \geq 0$،

(۲) برداری مانند $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^T A \geq 0$ و $y^T b < 0$.

اثبات یک طرف آسان است؛ فرض کنیم دستگاه (۲) جواب داشته باشد. بنابراین $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^T A \geq 0$ و $y^T b < 0$. در این صورت اگر x جوابی از دستگاه (۱) باشد آنگاه

$$0 \leq (y^T A)x = y^T b < 0$$

که تناقض است.

اما اثبات طرف دیگر چندان آسان نیست؛ قبل از این که به ارائه‌ی چند اثبات بپردازیم اجازه دهید به تعبیری هندسی از قضیه‌ی فوق اشاره کنیم. پیش‌تر بیان شد که در برهان‌های هندسی از قضایای تفکیک و خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب استفاده می‌شود. خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب بیان می‌کند که اگر $C \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب و بسته باشد و $b \notin C$ آنگاه نقطه‌ای مانند $z \in C$ وجود دارد که نزدیکترین نقطه به b است. به عبارت دیگر

$$||z - b|| = \min_{x \in C} ||x - b||.$$

قضیه‌ی تفکیک که صورت نامتناهی آن همان قضیه هان ـ باناخ است بیان می‌کند که اگر S زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^n$ باشد و $p \in \mathbb{R}^n$ آنگاه یا p متعلق به S است و یا ابرصفحه‌ای مانند H وجود دارد به طوری که p را از S جدا می‌کند یعنی p در یک طرف H و S در طرف دیگر آن قرار می‌گیرد.

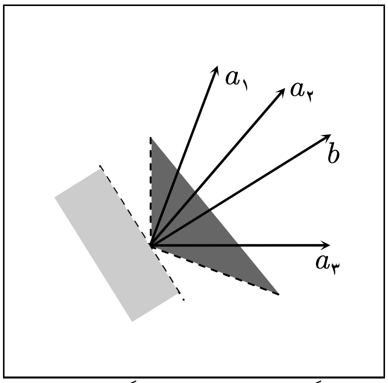
اگر ستون‌های A را با a_j نشان دهیم آنگاه یک تعبیر هندسی مجموعه‌ی

$$C = \left\{ Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ : \ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \right\}$$

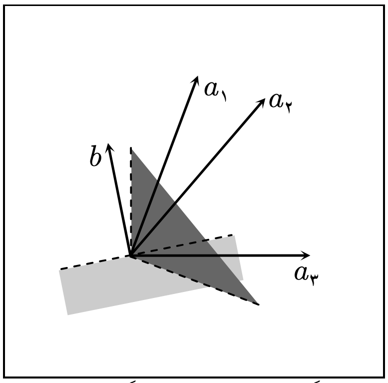
مخروط محدبی است که از بردارهای a_j درست می‌شود در نتیجه دستگاه $Ax = b$ با شرط $x \geq 0$ جواب دارد اگر و فقط اگر b متعلق به مخروط C باشد. از طرف دیگر اگر دستگاه (۱) جواب نداشته باشد یعنی b متعلق به مخروط C نباشد چون C محدب است پس بنا بر قضیه‌ی تفکیک ابرصفحه‌ای مانند

$$h = \{ z \in \mathbb{R}^m \ : \ y^T z = 0 \}$$

وجود دارد که b را از این مخروط جدا می‌کند. یعنی $y^T b < 0$ و $y^T a_j \geq 0$، برای $j = 1, \ldots, n$. به عبارت دیگر y جوابی از دستگاه (۲) است (شکل ۱).



(الف) دستگاه (۱) جواب دارد و دستگاه (۲) جواب ندارد



(ب) دستگاه (۲) جواب دارد و دستگاه (۱) جواب ندارد

شکل ۱ : تعبیر هندسی قضیه‌ی فارکاش

برهان‌ها

برهان اول. بنا بر قضیه‌ی ۱ هر نتیجه‌ای با انجام یکی از ۳ عمل به دست می‌آید. چون سمت راست صفر است پس تضعیف نداریم و چون معادله نداریم پس عمل ۳ را هم نداریم؛ و فقط ترکیب خطی می‌ماند.

تاکر در سال ۱۹۵٦ قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی اول وجودی معروف است ارائه داد [۱۹].

لم ۴. دستگاه‌های

(۱) $Ax = 0 \ , \ x \geq 0$ و

(۲) $y^T A \geq 0$ ،

جواب‌های شدنی مانند $\bar{y}$ و $\bar{x}$ دارند به طوری که $\bar{x}^T + \bar{y}^T A > 0$.

برویدن در [۵] قضیه‌ای را اثبات می‌کند که لم تاکر و برخی از قضایای آلترناتیو از جمله لم فارکاش به راحتی با استفاده از آن به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که در یادداشتی در مورد این مقاله روس[۱] و ترلاکی[۲] [۲۳] نشان می‌دهند که قضیه‌ی برویدن را می‌توان به عنوان یک قضیه‌ی آلترناتیو در نظر گرفت و آن را با استفاده از قضیه‌ی فارکاش اثبات کرد. آنها همچنین نشان می دهند که قضیه‌ی اصلی وی را نیز می‌توان از قضیه‌ی تاکر نتیجه گرفت.

اینک با استفاده از این لم، اثباتی برای لم فارکاش ارائه خواهیم داد.

1) Roos 2) Terlaky

برهان دوم. فرض کنیم دستگاه (۲) جواب شدنی نداشته باشد. دستگاه‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$(A \quad -b)\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \, , \; \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0 \tag{۱۱}$$

$$y^T \, (A \quad -b) \geq 0 \tag{۱۲}$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$. بنا بر لم تاکر، دستگاه‌های (۲) و (۳) به ترتیب جوابی مانند $(\bar{x} \quad \bar{\alpha})^T$ و $\bar{y}$ دارند که

$$(\bar{x} \quad \bar{\alpha})^T + \bar{y}^T \, (A \quad -b) > 0$$

پس

$$\bar{x}^T + \bar{y}^T A > 0 \;\; , \;\; \bar{\alpha} - \bar{y}^T b > 0. \tag{۱۳}$$

چون $\bar{y}$ جواب (۲۱) است و دستگاه (۲) جواب ندارد لذا $\bar{y}^T b = 0$ ؛ و از (۳۱) نتیجه می‌شود که $\bar{\alpha} > 0$. از طرفی بنا بر (۱۱) داریم $A\bar{x} - b\bar{\alpha} = 0$ بنابراین $x = \frac{\bar{x}}{\bar{\alpha}} \geq 0$ جواب دستگاه (۱) است.

همان طور که پیش‌تر اشاره شد برهان‌های دیگری نیز با استفاده از خاصیت نزدیکترین نقطه یک مجموعه محدب بسته وجود دارد. این خاصیت بنا به گفته‌ی کمرنیک[1] نقش کلیدی در اثبات‌های هندسی دارد. وی در [۱۵] یک اثبات استقرایی ساده برای وجود خاصیت نزدیک‌ترین نقطه به مخروط محدب تولید شده با تعداد متناهی بردار بیان کرده است.

در ادامه یکی دیگر از اثبات‌های هندسی را بررسی می‌کنیم. دَکس در [۷] ابتدا لم زیر را ثابت می‌کند.

لم ۵. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n$ و $r = Ax - b$. در این صورت x یک جواب مسأله کمترین مربعات زیر است

$$\text{LS}: \qquad \min_{x \geq 0} \;\; \|Ax - b\|^2$$

است اگر و تنها اگر

$$x \geq 0 \, , \; r^T A \geq 0 \, , \; r^T A x = 0.$$

با توجه به خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب بسته، مسأله‌ی LS جواب دارد. اکنون می‌توان با استفاده از این قضیه اثبات دیگری از لم فارکاش را ارائه کرد.

برهان سوم. فرض کنیم x جواب LS باشد و $r = Ax - b$. اگر $r = 0$ آنگاه x جوابی برای دستگاه (۱) است؛ در غیر این صورت بنا بر لم اخیر داریم $r^T A \geq 0$ و به علاوه

$$r^T b = r^T (Ax - r) = r^T A x - \|r\|^2 = -\|r\|^2 < 0.$$

بنابراین r جواب دستگاه (۲) است. □

1) Komornik

این دیدگاه هندسی ارتباط قضیه‌ی فارکاش را با دوگانی بهتر نشان می‌دهد. بدین ترتیب که کمترین فاصله از نقطه‌ی b تا مجموعه‌ی C برابر با بیشترین فاصله‌ای است که b می‌تواند با ابرصفحه‌ی جداکننده‌ی آن از C داشته باشد.

قضیه‌ی فارکاش دیگری دارد که از روش حذفی فوریه ـ ماتزکین استفاده می‌کند. از این روش برای حل دستگاه‌های نامعادلات استفاده می‌شود. توضیحات کاملی در مورد این روش را می‌توان در [۲۰] یافت.

قبل از ارائه‌ی برهان به یک لم نیاز داریم که اثبات آن در [۱۸] آمده است.

لم ٦. فرض کنیم $Ax \leq b$ دستگاهی با $n \geq 1$ متغیر و m نامعادله باشد. در این صورت دستگاهی مانند $A'x' \leq b'$ با $n-1$ متغیر و حداکثر $\max\{m, \frac{m^2}{4}\}$ نامعادله با خواص زیر وجود دارد

۱ $Ax \leq b$ جواب دارد اگر و فقط اگر $A'x' \leq b'$ جواب داشته باشد و

۲ هر نامعادله‌ی $A'x' \leq b'$ ترکیب خطی مثبتی از (نه لزوماً همه‌ی) نامعادلات $Ax \leq b$ است.

این لم نشان می‌دهد که می‌توان از یک دستگاه نامعادلات، یک دستگاه نامعادلات با یک متغیر کمتر به دست آورد به طوری که جواب‌های دستگاه بزرگ‌تر از جواب‌های دستگاه کوچک‌تر به دست آیند. از این رو لم اخیر شرایط را برای استفاده از یک روند استقرایی برای اثبات لم ۲ (که صورت معادل لم فارکاش است) فراهم می‌کند.

برهان چهارم. فرض کنیم $Ax \leq b$ جواب نداشته باشد. بردار y را به گونه‌ای می‌سازیم که

$$y \geq 0, \ \ y^T A = 0, \ \ y^T b < 0. \qquad (14)$$

به استقرا روی تعداد متغیرها عمل می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ هیچ متغیری نداشته باشد. یعنی $0 \leq b$ و برای i ای $b_i < 0$. قرار می‌دهیم $y = e_i$ و به وضوح چنین انتخابی در شرایط (۵) صدق می‌کند.

حال فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ حداقل یک متغیر داشته باشد. با انجام یک گام از روند حذفی فوریه ـ ماتزکین با استفاده از لم ٦ به دستگاه نشدنی $A'x' \leq b'$ با یک متغیر کمتر دست می‌یابیم. بنا به فرض استقرا برای دستگاه جدید، برداری همچون y' موجود است که در شرایط (۵) صدق می‌کند. از آنجا که نامعادلات $A'x' \leq b'$ ترکیب خطی مثبت نامعادلات اولیه هستند ماتریسی $m \times m$ مانند M با درایه‌های نامنفی موجود است که

$$\begin{pmatrix} 0 & A' \end{pmatrix} = MA, \quad b' = Mb.$$

ادعا می‌کنیم $y = M^T y'$ در شرایط (۵) صدق می‌کند. در واقع داریم

$$y^T A = y'^T MA = y'^T \begin{pmatrix} 0 & A' \end{pmatrix} = 0^T,$$

و

$$y^T b = y'^T M b = y'^T b' < 0.$$

از آنجا که $y' \geq 0$ و درایه‌های M نامنفی‌اند به راحتی دیده می‌شود که $y \geq 0$. □

برهان دیگری از قضیهٔ فارکاش با استفاده از الگوریتم سیمپلکس، یکی از اثبات‌های متداول است که در [۴] بدان اشاره شده است.

برهان پنجم. فرض کنیم دستگاه (۱) فاقد جواب باشد. مسأله‌ی $\mathrm{P}: \min\{b^T w \;:\; A^T w \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که صفر مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی P است. با استفاده از تغییر متغیر $w = w' - w''$ که $w', w'' \geq 0$ و با اضافه کردن متغیرهای کمبود s به نامعادلات P، آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$\mathrm{P}' : \qquad \begin{array}{ll} \min & b^T w' - b^T w'' \\ & A^T w' - A^T w'' - s = 0 \\ & w', w'', s \geq 0 \end{array}$$

فرض کنیم $A^T = [a'_1 \ldots a'_m]$. چون $s = w' = w'' = 0$ یک جواب بهینه‌ی فرین برای P' است، با شروع از s به عنوان جواب پایه‌ی اولیه و اعمال قوانین ممانعت از دور، می‌توان به یک پایه شدنی بهینه مانند B دست یافت که $xa'_j - b_j \leq 0$ برای هر $j = 1, \ldots, n$؛ که در آن $x = b_B^T B^{-1}$ و b_B نشان دهنده‌ی ضرایب تابع هدف نظیر متغیرهای پایه است. چون برای تمام متغیرها داریم $xa'_j - b_j \leq 0$ پس $xA^T - b^T \leq 0$، $-xA^T + b^T \leq 0$ و $-x^T \leq 0$. بدین ترتیب بردار $x^T \in \mathbb{R}^n$ را به دست آوردیم که $Ax^T = b$ و $x^T \geq 0$ و اثبات بدین ترتیب کامل می‌شود.□

از روش قاعده‌ی b نیز برای حل دستگاه نامعادلات استفاده می‌شود. این روش در واقع همان الگوریتم سیمپلکس دوگان با استفاده از قاعده‌ی ممانعت از دور بلاند[1] است که برای یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف صفر و دستگاه نامعادلات به عنوان قیود به کار می‌رود. از این رو می‌توان با استفاده از این قاعده اثباتی مشابه و البته کمی ساده‌تر برای لم فارکاش ارائه داد. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱] مراجعه کرد.
یکی از قضایای اصلی و پرکاربرد برنامه‌ریزی خطی، قضیه‌ی دوگانی است. در برهان بعدی از این قضیه استفاده شده است.

---

1) Blond

برهان ششم. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی اولیه

$$\text{P}: \quad \begin{array}{ll} \min & 0x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

و دوگان آن

$$\text{D}: \quad \begin{array}{ll} \max & y^T b \\ & y^T A \leq 0 \end{array}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنیم دستگاه (۱) فاقد جواب شدنی باشد. بنابراین مسأله‌ی P نشدنی است. لذا بنا بر قضیه‌ی اساسی دوگانی، مسأله‌ی ثانویه یا بی‌کران است و یا نشدنی. چون $y = 0$ جوابی شدنی برای مسأله‌ی D است پس مسأله‌ی دوگان بی‌کران است. در نتیجه $y^T A \leq 0$ دارای جواب است. پس دستگاه (۲) شدنی است.

اثبات حالتی خاص از یک قضیه و ترکیب آن با ابزاری دیگر و سپس به دست آوردن اثبات حالت کلی‌تر، یکی از روش‌هایی است که بعضاً از آن استفاده شده است. در این بخش برهانی ارائه خواهد شد که از این روند پیروی می‌کند.

ابتدا حالت خاصی از قضیه فارکاش را که برهانی ساده دارد بررسی می‌کنیم سپس با استفاده از ابزاری به نام دستگاه‌های به طور مینیمال نشدنی[1] حالت کلی‌تر را اثبات خواهیم کرد.

یادآوری می‌کنیم که دستگاه $Ax \leq b$ از m نامعادله را به طور مینیمال نشدنی گویند هرگاه‌این دستگاه جواب نداشته باشد ولی هر دستگاهی که با حذف یک نامعادله از آن به دست می‌آید دارای جواب باشد.

لم ۷. دستگاه $Ax = b$ جواب دارد اگر و تنها اگر برای هر بردار $y \in \mathbb{R}^m$، اگر $y^T A = 0$ آن‌گاه $y^T b = 0$.

برهان. اثبات یک طرف حکم بسیار ساده است. فرض کنیم x جوابی از $Ax = b$ باشد و $y^T A = 0$. در این صورت

$$y^T b = y^T A x = 0x = 0.$$

حال فرض کنیم $Ax = b$ فاقد جواب است. بردار y را به گونه‌ای می‌سازیم که $y^T A = 0$ و $y^T b \neq 0$ (در واقع $y^T b < 0$). فرض کنیم رتبه A برابر r باشد. ماتریس $(A \quad b)$ را در نظر بگیرید. چون ستون آخر، ترکیب خطی سایر ستون‌ها نیست پس رتبه‌ی این ماتریس $r + 1$ است. به دلیل مشابه ماتریس $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ نیز دارای رتبه‌ی $r + 1$ و در نتیجه $(0 \quad -1)$ ترکیب خطی سطرهای $(A \quad b)$ است. ضرایب این ترکیب خطی برداری مانند $y \in \mathbb{R}^m$ به وجود می‌آورد که

1) Minimally infeasible systems

$y^TA = \circ$ و $y^Tb = -\text{۱}$. اثبات بدین ترتیب کامل می‌شود. □

لم بعد در مورد دستگاه‌های به طور مینیمال نشدنی است که اثبات آن را می‌توان در [۱۸] یافت.

لم ۸. فرض کنیم $Ax \leq b$ یک دستگاه به طور مینیمال نشدنی از m نامعادله باشد. زیردستگاه حاصل از حذف محدودیت iام از آن را با $A^{(i)}x \leq b^{(i)}$ نمایش می‌دهیم ($i = \text{۱}, \cdots, m$). در این صورت برای هر i، برداری مانند $\tilde{x}^{(i)}$ موجود است به طوری که $A^{(i)}\tilde{x}^{(i)} = b^{(i)}$.

اینک می‌توان اثبات دیگری از لم ۲ را ارائه کرد.

برهان هفتم. فرض کنیم $Ax \leq b$ فاقد جواب است و $A^T = (a_\text{۱}^T, \cdots, a_m^T)$. می‌توانیم فرض کنیم این دستگاه به طور مینیمال نشدنی است (زیرا زیردستگاهی به طور مینیمال نشدنی از آن وجود دارد و در این حالت کافیست مؤلفه‌هایی از y را که نظیر محدودیت‌های حذف شده هستند صفر در نظر بگیریم). در این صورت دستگاه $Ax = b$ نیز جواب ندارد. بنا بر لم ۷ بردار $y \in \mathbb{R}^m$ موجود است به طوری که $y^TA = \circ$ و $y^Tb < \circ$. پس کافیست نشان دهیم $y \geq \circ$. فرض کنیم $i \in \{\text{۱}, \cdots, m\}$ از این پس ثابت باشد. با استفاده از لم ۸، $x^{(i)}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $A^{(i)}x^{(i)} = b^{(i)}$. یعنی $a_jx^{(i)} - b_j = \circ$ برای $j \neq i$. چون $x^{(i)}$ برای دستگاه $Ax \leq b$ شدنی نیست پس $a_ix^{(i)} - b_i \geq \circ$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
y_i(a_ix^{(i)} - b_i) &= \sum_{j=\text{۱}}^{m} y_j(a_jx^{(i)} - b_j) \\
&= y^T(Ax^{(i)} - b) \\
&= y^TAx^{(i)} - y^Tb \\
&= -y^Tb \\
&> \circ
\end{aligned}$$

پس $y \geq \circ$. برهان کامل است. □

مراجع

[1] Avis, D., and B. Kaluzny, Solving inequalities and proving Farkas' lemma made easy, *The Mathematical Association of America Monthly*, Vol. 111 (Feb 2004), pp. 152-157.

[2] Bartl, D., Farkas lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite dimensional spaces: a purely linear algebraic approach, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 55, No. 4 (2007), pp. 327-353.

[3] Bartl, D., A short algebraic proof of Farkas lemma, *SIAM J. Optim.*, Vol. 19, No. 1 (2008), pp. 234-239.

[4] Bazaraa, M. S., Jervis, J. J., and Sherali, H. D., *Linear Programming and Network Flows, 3^{rd} ed*, Wiley, 2005.

[5] Broyden,C. G., A simple algebraic proof of Farkas's lemma and related theorems, *Optimization Methods and Software*, Vol. 8, Iss. 3 (1998), pp. 185-199.

[6] Braunschweiger, C. C., An extension of the nonhomogeneous Farkas theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 10 (Dec. 1962), pp. 969-975.

[7] Dax, A. , An elementary proof of Farkas' lemma, *SIAM Rev.* , Vol. 39, No. 3 (Sep. 1997), pp. 503-507.

[8] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[9] Dantzig, G. B., and Thapa, M. N. *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Glovar, B. M., A generalized Farkas lemma with applications to quasidifferentiable programming, *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 26 (1982), pp. 125-141.

[11] Glovar, B. M., Jeyakumar, V., and Oettli, W., A Farkas lemma for difference sublinear systems and quasidifferentiable programming, *Mathematical Programming*, Vol. 63 (1994), pp. 109-125.

[12] Holder, A., Reviews, *American Mathematical Monthly*, Vol. 116, No. 5 (May 2009), pp. 471-476.

[13] Jeyakumar, V., and Glover, B. M., Nonlinear extensions of Farkas' lemma with applications to global optimization and least squares, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 20, No. 4 (Nov. 1995), pp. 818-837.

[14] Kaul, R. N., On linear inequalities in complex space, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 77, No. 9 (Nov., 1970), pp. 956-960.

[15] Komornik, V., A simple proof of Farkas' lemma, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 105, No. 10 (Dec. 1998), pp. 949-950.

[16] Lasserre, J. B., A Discrete Farkas Lemma, *LNCS 2667*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003), pp. 273-281.

[17] Lasserre, J. B., A New Farkas Lemma for Positive Semidefinite Matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 6 (1995), pp. 1131-1133.

[18] Matoušek J., and B. Gärtner, *Understanding and Using Linear Programming*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[19] Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[20] Murty, K. G., *Linear programming*, Wiley, 1983.

[21] Prékopa, A., On the development of optimization theory, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 87 (1980), pp. 527-542.

[22] Ramanathan, K., and Sivakumar, K. C., Theorems of the alternative over indefinite inner product spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 137, No. 1 (April 2008), pp. 99-104.

[23] Roos, C., and Terlaky, T., Note on a paper of Broyden, *Operations Research Letters*, Vol. 25 (1999), pp. 183-186.

[24] Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming* , J. Wiley & Sons, 1986.

[25] Stoer, J., and Witzgall, C., *Convexity and optimization in finite dimension*, Springer, 1970.

[26] Swartz, C., Technical Note: A general Farkas lemma, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, No. 2 (Jun. 1985), pp. 237-244.

[27] Sposito, V. A., and David, H. T., A note on Farkas lemmas over cone domains, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 3 (May 1972), pp. 356-358.

احسان منبتی eh_mo236@stu-mail.um.ac.ir
حسین تقی‌زاده کاخکی taghizad@math.um.ac.ir
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد