فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۸ (بهار و تابستان ۱۳۹۵) صص. ۸۹ تا ۱۰۲

تحلیل محتوای برنامهٔ درسی معادلات دیفرانسیل*

یونس کریمی فردین پور

چکیده

در این مقاله، به روش تحلیل محتوا و با استفاده از چارچوب نظری برنامهٔ درسی واقعیت‌مدار در حوزهٔ آموزش معادلات دیفرانسیل، شامل چهار مقولهٔ «متصل به واقعیت بودن»، «نزدیک به دانشجویان ماندن»، «مرتبط با مسائل جامعه بودن» و «جبری-عددی-هندسی بودن» همه مثال‌های فصل اول و دوم کتاب معادلات دیفرانسیل بویس، دیپریما و میتریا مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتیجهٔ حاصل از این یافته‌ها حاکی از نقش پررنگ «برنامهٔ درسی واقعیت‌مدار» در این کتاب است. در پایان، پیشنهاد بازنگری سرفصل معادلات دیفرانسیل، با تأکید بر وجه واقعیت‌مداری داده‌شده است.

۱. مقدمه

در این مقاله، ضمن معرفی نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار و مقایسهٔ آن با رویکردهای عمدهٔ برنامهٔ درسی معادلات دیفرانسیل، به بررسی تأثیرات بالقوهٔ این نهضت بر کتاب معادلات دیفرانسیل (بویس[۱] و همکاران، ۲۰۱۰) در مثال‌های کتاب می‌پردازیم. این تحقیق از آن جهت ضرورت دارد که تحلیل محتوای این کتاب، در واقع مبنای پیشنهاد تشکیل کمیسیون بازنگری سرفصل معادلات دیفرانسیل دورهٔ کارشناسی رشته‌های مهندسی و علوم پایه[۲] است. بنابراین جا دارد که سرفصل کتاب‌های

عبارات و کلمات کلیدی. آموزش ریاضی، ریاضی واقعیت مدار، برنامهٔ درسی، معادلات دیفرانسیل، تحلیل محتوا .

* این مقاله مستخرج است از طرح پژوهشی با عنوان «آموزش معادلات دیفرانسیل: برنامه درسی واقعیت مدار»

[۱]Boyce [۲]New Math

معادلات دیفرانسیل با ویژگی‌های معرفی‌شده توسط نظریهٔ آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، محک زده شود تا وضعیت کنونی آموزش معادلات دیفرانسیل در ایران و جهان از این منظر مورد مطالعه قرار گیرد.

۲. پیشینهٔ پژوهش

به گفتهٔ غلام آزاد (۱۹۹۳)، در اواخر دهه ۷۰ میلادی فرودنتال و همکارانش در اعتراض به نهضت «ریاضی جدید» در امریکا و رویکرد آموزش ریاضی مکانیکی در هلند، نظریهٔ آموزش ریاضی واقعیت‌مدار را به‌منظور اصلاح فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی، تبیین نمودند. فلسفهٔ زیربنایی آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این بود که یادگیرنده لازم است که درک ریاضی خود را از طریق کار روی زمینه‌هایی که برای او بامعنا است، کسب کند. به عقیدهٔ فرودنتال، برای آن‌که ریاضی از ارزش انسانی برخوردار باشد، باید متصل به واقعیت باشد، نزدیک به یادگیرنده بماند و مرتبط با مسائل جامعه باشد. در واقع، فرودنتال به‌جای این‌که ریاضی را موضوعی بداند که باید منتقل شود، بر آن به‌عنوان یک فعالیت انسانی تأکید داشت. او عقیده داشت آموزش باید فرصت هدایت‌شده‌ای برای مدل‌سازی در اختیار یادگیرنده قرار دهد تا ریاضی را از طریق انجام دادن، بازآفرینی کند. بر این اساس، در آموزش ریاضی نباید بر ریاضی به‌عنوان یک نظام بسته تأکید کرد بلکه باید بر فعالیت و فرآیند ریاضی‌ورزی تکیه شود. بنابراین فرودنتال در آن زمان، معماری ریاضی بورباکی (نام مستعار گروهی از ریاضیدانان عمدتاً فرانسوی که در قرن بیستم، مکتب خاصی در آموزش ریاضی پایه‌گذاری کردند. آن‌ها بر ریاضی دقیق تأکید داشتند و در پیِ بنا نهادن کل ریاضی بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها بودند) را به‌عنوان پایه‌ای برای تدریس ریاضی رد کرد، زیرا اعتقاد داشت که تنها راه یادگیری ریاضی ابداع دوبارهٔ آن تحت راهنمایی‌های مناسب است که البته باید از سال‌های اول آموزش ابتدایی شروع شود و طبعاً طی سال‌های تحصیل، گسترش پیدا کند. آموزش ریاضی واقعیت‌مدار از طریق معرفی دو نوع ریاضی‌ورزی معرفی شد: ریاضی‌ورزی افقی[۱] که به جنبهٔ کاربردی ریاضی مربوط می‌شد و ریاضی‌ورزی عمودی[۲] که به جنبهٔ رویه‌ای آن مربوط می‌شد.

در ریاضی‌ورزی افقی یادگیرنده به انواعی از ابزار ریاضی دست می‌یابد که می‌توانند به او در سازمان‌دهی و حل مسئله در موقعیت زندگی واقعی، کمک کنند. اما ریاضی‌ورزی عمودی فرآیند سازمان‌دهی دوباره در خودِ نظام ریاضی است. ریاضی‌ورزی افقی، رفتن از دنیای زندگی واقعی به دنیای نمادها است؛ در حالی که ریاضی‌ورزی عمودی به معنای حرکت درون دنیای نمادها است. فرودنتال تأکید می‌کند که این دو شکلِ ریاضی‌ورزی دارای ارزش برابر هستند. به‌علاوه، باید توجه داشت که ریاضی‌ورزی می‌تواند در سطوح مختلف درک و فهم اتفاق بیفتد. در واقع، اهمیت آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این

[۱] Horizontal Mathematization [۲] Vertical Mathematization

است که از طریق آن، یادگیرندگان می‌توانند نسبت به دانش ریاضی خود احساس مالکیت یا تعلق کنند، یعنی ریاضی را از آنِ خود بدانند. باید توجه داشت که واژهٔ واقعیت‌مدار، به تمام موقعیت‌هایی اشاره دارد که در ذهن یادگیرنده واقعی است.

در اوایل قرن ۲۱ میلادی، نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار در پاسخ به نگاه سنتی و رویکرد جبری غالب در آموزش معادلات دیفرانسیل، توسط راسموسن[۱] (۲۰۰۱) معرفی شد. این در حالی بود که راسموسن و وایتهد (۲۰۰۳)، سنت تدریس تحلیلی و رویهای حل معادلات دیفرانسیل را با ارزش می‌دانستند اما معتقد بودند که آموزش معادلات دیفرانسیل، نیازمند فعالیت‌های ریاضی‌ورزی[۲] است. بدین سبب چند سال بعد، بر اساس یافته‌های پژوهشی خود، به این نتیجه رسیدند که برنامهٔ درسی و شیوه‌های آموزشی درس معادلات دیفرانسیل باید به گونهای طراحی شوند که فرصتهای مناسبی در اختیار دانشجویان قرار دهد تا آن‌ها بتوانند کاوشگرانه و با انجام دادنِ فعالیت‌های مناسب، به بازآفرینی حل معادلات دیفرانسیل بپردازند. در ادامه، راسموسن و کُون[۳] (۲۰۰۷) دریافتند که تضمین‌کنندهٔ موفقیت در اتخاذ رویکرد واقعیت‌مدار به آموزش معادلات دیفرانسیل، این است که دانشجویان، دریافت‌کنندگانِ منفعل حل‌های جبری از پیش آماده شده برای انواع معادلات نباشند. بلکه باید به سمت استفاده از فرصت‌هایی برای بازآفرینی معادلات دیفرانسیل از طریق مدل‌سازی و سپس حل آنها هدایت شوند. این نهضت بر اساس نظریهٔ آموزش ریاضی واقعیت‌مدار[۴] آغاز شده بود که هانس فرودنتال[۵] ریاضیدان هلندی، در تقابل با اشاعهٔ ریاضی رویهای موسوم به «ریاضی جدید»، در دهه ۶۰ میلادی در آمریکای شمالی، مطرح نمود.

در واقع، همان‌طور که برای فرودنتالِ ریاضی‌دان، انجام دادن ریاضی به‌مراتب مهم‌تر از خودِ ریاضی به‌عنوان یک محصول حاضر و آماده بود، از دیدگاه راسموسن (۲۰۰۱) به‌عنوان یک آموزشگر ریاضی، آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، فرآیند انجام دادن حل معادلات دیفرانسیل بود که به‌مراتب مهم‌تر از خود راه‌حل حاضر و آماده بود. علاوه بر این، فرودنتال معتقد بود که ریاضی باید تدریس شود تا سودمند باشد و در عین حال، تأکید داشت که این مهم از طریق تدریس ریاضی سودمند[۶] به نتیجه نخواهد رسید، زیرا هر مبحث ریاضی در زمینه‌های محدودی می‌تواند سودمند باشد. در همین راستا، راسموسن و همکارانش نیز معتقد بودند که در رابطه با تدریس سودمند معادلات دیفرانسیل، رویکرد جبری به آموزش حل معادلات دیفرانسیل به‌تنهایی به نتیجه نمی‌رسد، زیرا مبحث تحلیلی و رویه‌ای حل معادلات دیفرانسیل تنها در زمینه‌های محدودی می‌تواند سودمند باشد.

---

[۱] Rasmussen [۲] Mathematizing [۳] Kwon [۴] Realistic Mathematics Education: RME [۵] Freudenthal
[۶] Useful Mathematics

در مجموع، دیدگاه راسموسن و همکارانش نسبت به آموزش معادلات دیفرانسیل را می‌توان چنین خلاصه کرد که لازم است قبل از هر چیز، آموزش معادلات دیفرانسیل هم به‌عنوان یک فرآیند و هم یک فعالیت انسانی دیده شود که انتظار می‌رود محصول نهایی آن، مدل‌سازی باشد. با چنین نگاهی به آموزش معادلات دیفرانسیل، این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان آموزش را شکل داد که این دو هدف، محقق شوند. در پاسخ به این سؤال، نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، به‌عنوان یک نظریهٔ یاددهی- یادگیری در آموزش معادلات دیفرانسیل، برای نخستین‌بار توسط راسموسن (۲۰۰۱) در آمریکا معرفی شد و طی دههٔ آخر قرن بیستم و دهه اول قرن بیست و یکم، توسعه یافت.

در قرن بیست و یکم، دلیل اصلی توجه همزمان آموزشی عالی و آموزش ریاضی مدرسه‌ای به مبحث معادلات دیفرانسیل، قابلیت‌های این حوزه در بحث آموزش مدل‌سازی[۱] است. اهمیت معادلات دیفرانسیل در این است که از پدیده‌های سادهٔ فیزیکی و مهندسی مانند رشد نمایی، دستگاه‌های فنر- جرم و مدل‌های الکتریکی گرفته تا فرآیندهای طبیعی دینامیکی با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند و برایشان کاربست صنعتی پیدا می‌شود. در واقع، مدل‌سازی‌های مسائل دنیای واقعی معمولاً از تلفیق و تعمیم این مدل‌های ساده و بنیادی حاصل می‌شوند که اطلاعات جامعی از این مدل‌های ساده فیزیکی و مهندسی در مبحث معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود. معادلات دیفرانسیل یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که در قرن هفدهم میلادی توسط نیوتن و لایبنیتز طی مطالعات حساب دیفرانسیل و انتگرال شکل گرفت و تا آخر قرن هجدهم، بسیاری از روش‌های مقدماتیِ حل جبری معادلات دیفرانسیل معمولی، توسط ریاضیدانان برجسته‌ای مانند برادران برنولی، اویلر و لاگرانژ کشف شدند.

برای این‌که مسائل دنیای واقعی با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی شده و حل شوند، اغلب نیازمند سه رویکرد جبری[۲]، عددی[۳] و هندسی[۴] حل معادلات دیفرانسیل هستیم. منظور از رویکرد جبری در آموزش معادلات دیفرانسیل، همان آموزش کلاسیک و مرسوم است. در این رویکرد، ابتدا مشخص می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل به چه رده‌ای (معمولی یا با مشتقات جزئی، خطی یا غیرخطی[۵]، مرتبهٔ اول یا دوم و سایر) تعلق دارد. سپس روش‌ها و الگوریتم‌های مشخصی برای حل آن اعمال می‌شود (کریمی فردین‌پور، ۱۳۹۳). در سراسر قرن نوزدهم در زمینهٔ حل معادلات دیفرانسیل، بیشتر به بررسی مسائل نظریِ وجود، یکتایی جواب و بسط به سری‌های توانی پرداخته شد. در این بین، تلاش برای حل تعدادی از معادلات دیفرانسیل که با روش‌های جبری حل‌شدنی نبودند، به ابداع و توسعهٔ روش‌های تقریب عددی برای این

[۱] Mathematical Modeling [۲] Algebraic (Analytic) [۳] Numerical [۴] Geometric (Graphical, Qualitative) [۵] Nonlinear Differential Equations

گونه معادلات انجامید. ولی کاربرد رویکرد عددی در حل معادلات دیفرانسیل به‌دلیل محدودیت محاسبات دستی، تا گسترش رایانه‌ها و نرم‌افزارها به تعویق افتاد.

شروع قرن بیستم برای معادلات دیفرانسیل، با ابداع رویکرد هندسی (گرافیکی، کیفی) حل معادلات دیفرانسیل آغاز شد. هدف این رویکرد، به‌ویژه برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، درک رفتار کیفی جواب‌ها از دیدگاه هندسی بود (راسموسن، ۲۰۰۱). در ادامهٔ این تحولات، قرن بیست و یکم برای آموزش معادلات دیفرانسیل، با تلاش برای تلفیق رویکردهای جبری، عددی و گرافیکی همراه بوده است (راسموسن[1] ، ۲۰۰۱). به باور راسموسن، با استفاده از پیشرفت‌های فناوری در کنارِ رویکردهای جبری (تحلیلی) و عددی، می‌توان به آموزش هندسی (کیفی، گرافیکی) معادلات دیفرانسیل پرداخت. راسموسن و وایتهد (۲۰۰۳) معتقدند با این‌که معادلات دیفرانسیل مبحثی قدیمی است، اما با تلفیق سه رویکرد هندسی، عددی و جبری، معادلات دیفرانسیل تبدیل به منبعی غنی از مسائل جذاب و مهم در بحث سیستم‌های دینامیکی [2] با کاربردهای متنوع صنعتی شده است.

۳. معرفی پژوهش

برای تجزیه و تحلیل مثال‌های موجود در کتاب معادلات دیفرانسیل بویس، از چارچوبِ نظری معرفی شده توسط فرودنتال و راسموسن (۲۰۰۱) استفاده شد. از دیدگاه آن‌ها، مسائل معادلات دیفرانسیل با توجه به فرض‌ها و رویکرد مدل‌سازی، به چهار دستهٔ متصل به واقعیت، نزدیک یادگیرنده، مرتبط با مسائل جامعه و رویکرد جبری–عددی–هندسی تقسیم می‌شوند که برای آشنایی با این تقسیم بندی، مثال‌هایی ارائه می‌شود. در فصل اول، مثال مدل‌سازی یک شیء در حال سقوط به‌صورت زیر مطرح شده است:

فرض کنید شیئی در جو نزدیک سطح دریا در حال سقوط است. معادلهٔ دیفرانسیلی بنویسید که این حرکت را تشریح کند. (ص. ۲.)

در این مثال، همه چیز واقعی است. یک مسئلهٔ مدل‌سازی کامل که شروع آن از دنیای واقعی است. زمینهٔ ارائه شده برای مسئله معنادار است. شیء در حال سقوط به تجربیات واقعی مخاطب متصل است. او بارها سقوط یک شیء را مشاهده کرده و درک واقعی از آن دارد. چیزی در صورت مسئله وجود ندارد که استفاده از واحد خاصی را ایجاب کند. بنابراین هر انتخاب منطقی، مجاز است. یعنی هر دانشجویی با توجه به تجربه و دانش خود، در انتخاب واحدِ مناسب مختار است. مثلاً اگر دانشجو جرم را با کیلوگرم و نیرو را با نیوتن اندازه‌گیری کند، آنگاه شتابِ گرانش در نزدیکی سطح زمین (سطح دریاهای آزاد) برابر ۹/۸متر بر مجذور ثانیه خواهد بود. چون دانشجو خودش واحدها را انتخاب می‌کند، عقل سلیم در این

[1] Rasmussen [2] Dynamical Systems

فرآیندِ مدل‌سازی نقشی برجسته دارد. از این‌رو می‌توان گفت این مسئله، نزدیک دانشجو باقی می‌ماند. تصریح سقوط شیء در نزدیکی سطح دریا نیز کمک می‌کند که مدل‌سازی متصل به واقعیت باشد. از طرف دیگر، مقاومت هوا در برابر حرکت اشیاء، با مسائل جامعه از قبیل کاهش مصرف سوخت مرتبط است. مثلاً هرچه مقاومت هوا در برابر حرکت یک وسیلهٔ نقلیه بیشتر باشد، مصرف سوخت نیز بیشتر خواهد بود؛ یا این‌که هرچه مقاومت هوا در برابر سقوط یک شیء بیشتر باشد، سرعت برخورد با زمین، کمتر خواهد بود.

مسئلهٔ سقوط شیء، علاوه بر رویکرد جبری، در مثال شماره ۲ همین فصل (ص. ۳)، با رویکرد هندسی نیز مدل‌سازی شده است. با استفاده از رویکرد هندسی جواب تعادل، یا همان سرعت تعادل که متناظر با توازن بین گرانش و مقاومت هوا است، به‌دست آمده است. در واقع، رویکرد هندسی نشان می‌دهد اگر سرعت شیء در حال سقوط، بیشتر از سرعت تعادل باشد، در اثر مقاومت هوا، سرعتش کاهش و به سرعتِ تعادل نزدیک می‌شود. اگر سرعت شیء در حال سقوط کمتر از سرعت تعادل باشد، در اثر گرانش سرعت بیشتر شده و به سرعتِ تعادل نزدیک‌تر می‌شود. این مطلب نیز که از بررسی مسئله با رویکرد هندسی حاصل شده است، نزدیک عقل سلیم دانشجو و متصل به واقعیت است. در نتیجه رویکرد جبری و رویکرد هندسی مانند مکملی درکنار هم کمک می‌کنند تا معادلهٔ دیفرانسیلِ مدل‌سازی‌شده، واقعیت‌مدار باشد. بالأخره، معادلهٔ دیفرانسیل حاصل از مثال ۱ و ۲، در مثال ۳ همین فصل (ص. ۵)، به‌صورت مسئلهٔ لجستیک جمعیت موش‌ها، مطرح می‌شود:

گروهی از موش‌های صحرایی را در نظر بگیرید که در یک ناحیهٔ روستایی معین زندگی می‌کنند. اگر شکارچی درکار نباشد، فرض می‌کنیم که جمعیت موش‌ها با نرخی متناسب با جمعیت فعلی آن‌ها افزایش یابد. اما در همان همسایگی چند جغد زندگی می‌کنند که روزانه ۱۵ موش صحرایی را شکار می‌کنند. (ص. ۵.)

در صفحهٔ ۱۰ کتاب توضیح داده شده است که معادلهٔ دیفرانسیل شیء در حال سقوط، اثرات متقابل گرانش و مقاومت هوا را تشریح می‌کند. همزمان، معادلهٔ دیفرانسیل لجستیک جمعیت موش‌ها، اثرات متقابل زاد و ولد موش‌های صحرایی و شکار جغدها را بیان می‌کند. هر دوی این معادلات دیفرانسیل به شکل کلی $\frac{dy}{dt} = ay - b$ هستند که a و b عددهای ثابت هستند. با این‌که ظاهر مسئله‌های شیء در حال سقوط و لجستیک جمعیت موش‌ها کاملاً متفاوت است، اما با یک نوع معادلهٔ دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند. در اینجا ریاضی‌ورزی افقی و ریاضی‌ورزی عمودی با هم ادغام می‌شوند. هر دو مسئله متصل به دنیای واقعی، نزدیک به عقل سلیم دانشجو و با مسائل جامعه مرتبط‌اند. همچنین هر دو مسئله با رویکرد

جبری حل شده و سپس جواب حاصل، با رویکرد هندسی مورد تأیید قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، در هر دو مسئله، منحنی‌های جواب حاصل از رویکرد هندسی، وجود جواب تعادل را نشان می‌دهند که این نتیجه از طریق رویکرد جبری به‌دست نمی‌آمد. اما پس از این‌که وجود جواب تعادل توسط رویکرد هندسی شناسایی شد، مورد تأیید رویکرد جبری نیز قرار گرفت. درک رابطهٔ بین رویکرد جبری و هندسی، بخشی از ریاضی‌ورزی عمودی در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار است. بخش دیگری از ریاضی‌ورزی عمودی در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، به درک رابطهٔ رویکرد عددی با رویکردهای دیگر حل معادلات دیفرانسیل برمی‌گردد. در آخر فصل دوم، شکل دیگری از معادلهٔ لجستیک جمعیت مطرح و با تلفیق رویکرد عددی و هندسی، بررسی می‌شود. این نوع از معادلهٔ لجستیک جمعیت و مسئلهٔ مالی (نرخ بهره) زیر که ظاهری کاملاً متفاوت دارند، با یک نوع معادلهٔ دیفرانسیل، یعنی معادلات دیفرانسیل تفاضلی مرتبهٔ اول، مدل‌سازی می‌شوند.

یک دانش‌آموخته دانشگاه ۱۰۰۰۰ دلار برای خرید ماشین وام‌گرفته است. اگر نرخ بهره ۱۲٪ باشد، میزان پرداخت لازم ماهیانه چقدر باشد تا تمام وام در چهار سال بازپرداخت شود؟ (ص. ۱۳۳.)

مثال‌های مطرح‌شده، نشان‌دهندهٔ آموزش معادلات دیفرانسیل با رویکرد واقعیت‌مدار است، زیرا دارای ملاک‌های ریاضی‌ورزی افقی و ریاضی‌ورزی عمودی هستند. در عین حال این مسئله‌های مدل‌سازی با ریاضی‌ورزیِ افقی متصل به دنیای واقعی، نزدیک عقل سلیم دانشجویان و از مسائل مربوط به جامعه به حساب می‌آیند. در ضمن همزمان، با ریاضی‌ورزی عمودی و تلفیق رویکردهای جبری، عددی و هندسی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

رویکرد آموزش معادلات دیفرانسیل اغلب رویکرد سنتی است (هبره[۱]، ۲۰۱۰). این رویکرد در یک دنیای مجرد که هیچ اشتراکی با دنیای زندگی واقعی یادگیرندگان ندارد، ارائه می‌شود و مشخصه آن، تمرکز بر انجام تحلیل‌های جبریِ صِرف و توجه کمتر به کاربردها است. در این رویکرد، از مدرسان انتظار می‌رود به‌طور مستقیم تدریس کنند و برای حل هر معادلهٔ دیفرانسیل معروف، یک الگوریتم استاندارد به دانشجویان ارائه دهند. یادگیری در این رویکرد، بیشتر متکی به تکرار و تمرین است و عمدهٔ فعالیت‌های دانشجویان، مبتنی بر حفظ‌کردن الگوها یا الگوریتم‌ها است. در رویکرد سنتی، چالش اصلی زمانی رخ می‌دهد که دانشجویان با مسائلی بجز آن‌هایی که قبلاً حفظ کرده‌اند، روبه‌رو می‌شوند. در همین حال، با پررنگ‌تر شدن حضور فناوری در تمام عرصه‌های یادگیری، آموزش معادلات دیفرانسیل نیز به سمت رویکرد عددی که مسائل مدل‌سازی آن به‌ظاهر از دنیای واقعی تأمین می‌شود، متمایل شد. در این رویکرد، دانشجویان ترغیب می‌شدند تا با استفاده از ماشین حساب یا رایانه، به کشف روابط بین

[۱] A. Habre

متغیرهایی مانند x و y بپردازند؛ در حالی که رابطه آن‌ها با $\frac{dy}{dx}$ معنی پیدا می‌کرد. اما در رویکرد هندسی، ابتدا خانوادهٔ مهمی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول معرفی می‌شوند که در آن‌ها، متغیر مستقل به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود. چنین معادلات دیفرانسیلی که به‌شکل $\frac{dy}{dx} = f(y)$ هستند، خودگردان[1] نامیده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل خودگردان در چارچوب مسائل واقعی مربوط به رشد یا زوال و در گستره‌ای از پزشکی گرفته تا محیط زیست، اقتصاد جهانی، مهندسی و غیره، کاربرد دارند. معادلات دیفرانسیل خودگردان، جداشدنی (تفکیک‌پذیر) بوده و با رویکرد جبری، قابل حل هستند. اما هدف اصلی تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل (رویکرد هندسی)، نشان دادن این موضوع است که چگونه اطلاعات کیفی مهم را می‌توان با استفاده از روش‌های هندسی و گرافیکی و بدون حل جبری، به‌دست آورد. تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل، این امکان را فراهم می‌کند تا با رسم منحنی‌های جواب معادلهٔ دیفرانسیل خودگردان که به‌طور کیفی صحیح باشد، رفتار بلندمدت معادله را پیش‌بینی نمود.

در جستجوی جایگزینی برای رویکرد غالب و سنتی به برنامهٔ درسی معادلات دیفرانسیل، راسموسن (۲۰۰۱) هیچ‌یک از رویکردهای جبری، عددی یا هندسی را به‌تنهایی دنبال نکرد. به‌طور مشخص، آن‌ها با غالب شدن تنها یک رویکرد مخالفت کردند و با استفاده از چارچوب نظری آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، فرصتی ایجاد نمودند تا برنامهٔ درسی معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار شکل بگیرد. در این رویکرد، موقعیت دنیای واقعی یا مسئلهٔ زمینه‌دار، به‌عنوان نقطهٔ شروع یادگیری معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود. سپس از طریق فعالیت‌های ریاضی‌ورزی افقی، کشف اتفاق می‌افتد. این یعنی دانشجویان، مسئله را سازمان‌دهی نموده و سعی می‌کنند که جنبه‌های ریاضی مسئله را تشخیص دهند و قواعد و رابطه‌ها را کشف کنند. سپس با استفاده از ریاضی‌ورزی عمودی، مفاهیم ریاضی را توسعه می‌دهند. در آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، مسائل زمینه‌مدار اهمیت بسیار زیادی دارند و از این منظر است که این رویکرد، بدیلی در مقابل رویکرد جبری و سنتی صِرف به آموزش معادلات دیفرانسیل به حساب می‌آید.

در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، شرایط متفاوت است و مسائل زمینه‌دار، به‌عنوان منبعی برای فرآیند یادگیری عمل می‌کنند. به عبارت دیگر، در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، مسائل زمینه‌دار و موقعیت‌های زندگی واقعی، هر دو برای شکل‌گیری مفاهیم ریاضی و به‌کار بردن آن مفاهیم، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این نوع آموزش، دانشجویان ضمن کار با مسائل زمینه‌دار، می‌توانند ابزار درک و فهم ریاضی را توسعه دهند. به این صورت که دانشجویان، ابتدا راهبردهایی را تبیین می‌کنند که با زمینهٔ مسئله ارتباط نزدیک دارند. بعد از آن، جنبه‌های خاصی از موقعیتِ زمینهٔ

[1] Autonomous

مسئله می‌تواند عمومیت بیشتری پیدا کند، یعنی زمینهٔ مسئله کم و بیش، مشخصهٔ یک مدل را به خود می‌گیرد و در این صورت به حل سایر مسائل مرتبط با آن کمک می‌کند. سرانجام، این مدل‌ها دستیابی دانشجویان را به دانش ریاضیِ رسمی‌تر، امکان‌پذیر می‌سازد.

۴. روش پژوهش

جلد اول ویراست نهم کتاب درسی معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسئله‌های مقدار مرزی بویس (۱۳۹۰) در سال اول یا دوم دوره‌های کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی ارائه می‌شود. این جلد، شامل هفت فصل با نام‌های: مقدمه، معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول، معادلات خطی مرتبهٔ دوم، معادلات خطی مرتبهٔ بالاتر، جواب‌های سری معادلات خطی مرتبهٔ دوم، تبدیل لاپلاس، دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول است. در مطالعهٔ حاضر، تمام مثال‌های مطرح شده در کتاب مورد بررسی قرار گرفتند. هر یک از مثال‌ها، یک واحد تحلیل در نظر گرفته شدند. مضمون مورد نظر برای تحلیل محتوا، واقعی بودنِ زمینه‌های مورد استفاده و نزدیک بودن آن‌ها به تجربه‌های دانشجویان بود.

انتخاب کتاب معادلات دیفرانسیل بویس به این دلیل انجام شد که یکی از معروف‌ترین کتاب‌های درسی معادلات دیفرانسیل در جهان و ایران است. در واقع با وجود این‌که چندین کتاب درسی تألیفی و ترجمهای برای معادلات دیفرانسیل موجود است، کتاب معادلات دیفرانسیل بویس همچنان مورد توجه مدرسان معادلات دیفرانسیل قرار دارد. در پژوهش حاضر، تعداد ۳۴ مثال فصل‌های اول و دوم کتاب با استفاده از چارچوب نظری آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، کدگذاری شدند. کدگذاری‌ها توسط محقق و در دو زمان متفاوت، با فاصلهٔ زمانی شش ماه انجام شد. میزان توافق بین این دو کدگذاری، نشان دهندهٔ پایایی نتایج کدگذاری بود.

۵. تحلیل محتوای کتاب

در پیشگفتار کتاب آمده است که:

این کتاب از دیدگاه یک متخصص ریاضیات کاربردی نوشته شده است که علاقه‌اش به معادلات دیفرانسیل گاهی کاملاً نظری، گاهی بیش از حد کاربردی و اغلب جایی میان این دو است.

در اینجا ملاحظه می‌شود که مؤلفان کتاب، صراحتاً جهت‌گیریِ از تجرید به سمت واقعیت را مورد نظر داشته‌اند. البته در ادامه، این نکته را مورد تأکید قرار داده‌اند که:

علت اصلی گنجاندن مطالب نسبتاً مفصل دربارهٔ کاربردها و مدل‌سازی ریاضی در کتاب این است که دانشجویان قانع شوند که مدل‌سازی ریاضی، اغلب به معادلات دیفرانسیل منجر می‌شود و معادلات دیفرانسیل در گسترهٔ متنوعی از رشته‌ها، بخشی از بررسی مسئله‌ها است.

در رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، چنین تأکیدی به معنای ریاضی‌ورزیِ افقی و اهمیت آن است. پس ملاحظه می‌شود که تأکید کتاب بر کارآییِ ریاضی در حل مسائل واقعی و اهمیت یادگیری آن برای دانشجویان است.

مسئله‌های غیر عادی، اغلب نیازمند استفاده از ابزارهای متنوع- جبری، عددی و هندسی- هستند. روش‌های مداد و کاغذی، اغلب باید با استفاده مؤثر از رایانه ترکیب شوند. ... پس دانشجویان باید به این تشخیص برسند که تحقیق درباره مسئله‌ای دشوار، ممکن است هم به تحلیل جبری و هم به محاسبه نیاز داشته باشد که برای تعیین بهترین ابزار برای هدفی خاص نیازمند قضاوتی مناسب است؛ و این‌که نتایج را معمولاً می‌توان به شکل‌های متنوعی ارائه کرد. معتقدیم که مهم است که دانشجویان درک کنند که هدف از حل یک معادلهٔ دیفرانسیل به‌ندرت، صرِف به‌دست آوردنِ جواب است. ... جواب به خودی خود هدف نیست. ... این مسئله‌ها نوعاً مسئله‌هایی هستند که در کاربردهای معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند.

اگرچه در کتاب به‌صراحت، به «واقعیت مدار بودن» به‌عنوان رویکرد آموزشی این کتاب اشاره نشده است، ولی تأثیر آن را تقریباً می‌توان در اکثر تأکیدهای آموزشی مؤلفان، مشاهده نمود. برای مثال، آنان معتقدند که «مسئله‌های غیرعادی اغلب نیازمند استفاده از ابزارهای متنوع- جبری، عددی و هندسی- هستند» و از دانشجویان انتظار دارند تا «به این تشخیص برسند که تحقیق دربارهٔ مسئله‌ای دشوار، ممکن است هم به تحلیل جبری و هم به محاسبه نیاز داشته باشد». مؤلفان همچنین تصریح کرده‌اند که «هدف از حل یک معادلهٔ دیفرانسیل، به‌ندرت صرف به‌دست آوردن جواب است» و «جواب به خودی خود، هدف نیست»؛ تأکیدهایی که برآمده از دیدگاه نظری «ریاضیات واقعیت‌مدار» است. بدین سبب، پیش‌فرض گرفتن «واقعیت‌مدار» بودنِ مثال‌های مطرح شده در این کتاب، ضروری است.

۶. نتایج

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل مثال‌های کتاب با استفاده از چارچوب نظری آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، نشان داد که تمام مثال‌های فصل‌های اول این کتاب از نظر ماهیتی، واقعیت‌مدار هستند، اما سهم مثال‌های واقعیت‌مدار در فصل دوم، کمتر است. در واقع، از مجموع ۳۴ مثال مورد

بررسی در پژوهش حاضر، تعداد ۱۴ مثال یعنی حدود ۴۲٪ درصد مثال‌ها، در دستهٔ مسائل واقعیت‌مدار به معنای مسائل مطرح‌شده در دنیای واقعی با رویکرد جبری، عددی، هندسی یا تلفیقی از این رویکردها قرار گرفتند. این با «واقعیت‌مدار بودن» و «کاربردی بودن» که یکی از اهداف اصلی کتاب است، هم‌راستا است. سهم مسائل «ریاضی‌ورزی افقی» حدود ۴۲ درصد است و ۵۹ درصد مثال‌ها، در دستهٔ «ریاضی‌ورزی عمودی» جای دارند. هیچ موردی هم از مثال‌های ریاضی‌ورزی عمودی که تلفیق همزمان سه رویکرد جبری، عددی و هندسی در حل معادلهٔ دیفرانسیل است، در بین مثال‌های فصل اول و فصل دوم کتاب وجود ندارد.

در فصل دوم، بجز مثال‌های مطرح‌شده در بخش‌های ۳-۲ و ۵-۲ که مربوط به «ریاضی‌ورزی افقی» هستند، بقیهٔ مثال‌ها در دنیای ریاضی و رویه‌ای مطرح شده‌اند و به نظر می‌رسد واقعیت‌مدار بودن آن‌ها مورد توجه قرار نگرفته است. در حقیقت، تمام فصل دوم وضعیت خوبی در این رابطه ندارد و تنها حدود ۳۰٪ از مسائل این فصل جزو دستهٔ ریاضی‌ورزی افقی هستند. اما وضعیت فصل اول بهتر است، زیرا ۱۰۰٪ مثال‌های مطرح‌شده در آن، در دستهٔ ریاضی‌ورزی افقی قرار می‌گیرند. ۷۰٪ مثال‌های فصل دوم با رویکرد جبری و رویه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به نظر می‌رسد نویسندگان کتاب از طرح مثال‌های «به‌ظاهر زمینه‌مدار» بیم داشته‌اند، چراکه پژوهش‌های مختلف از جمله گابرایت و استیلمن (۲۰۰۱) نشان می‌دهند که چون زمینهٔ مسئله‌های «به‌ظاهر زمینه‌مدار»، دنیای واقعی نیست، معمولاً تأثیری در آموزش فرآیند مدل‌سازی ندارند. بنابراین دانشجویان می‌توانند بدون آسیب زدن به مسئله، زمینه را حذف کرده و مسئله را در دنیای ریاضی رویه‌ای حل نمایند که این اتفاق، موجب بی‌اعتمادی دانشجویان به کاربردهای واقعی ریاضی می‌شود. نتایج تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و فصل دوم کتاب معادلات دیفرانسیل، در جدول شماره ۱ به تفکیک هر بخش آمده است.

جدول شماره ۱: تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و دوم

بخش	تعداد مثال	متصل به واقعیت	نزدیک دانشجویان	مرتبط با مسائل جامعه	جبری	عددی	هندسی	جبری عددی	جبری هندسی	عددی هندسی	جبری عددی هندسی
۱-۱-	۳	۳	۳	۳	۱	۰	۲	۰	۳	۰	۰
	مثال ۱	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-
	مثال ۲	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-
	مثال ۳	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-
۲-۱-	۲	۲	۲	۲	۲	۰	۲	۰	۲	۰	۰
	مثال ۱	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۲	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
۱-۲-	٤	۰	۰	۰	٤	۰	٤	۰	٤	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۲	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۳	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ٤	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
۲-۲-	۳	۰	۰	۰	۳	۰	۳	۰	۳	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۲	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۳	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
۳-۲-	٤	٤	٤	٤	٤	۱	۱	۱	۱	۰	۰
	مثال ۱	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۲	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-
	مثال ۳	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ٤	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
٤-۲-	٤	۰	۰	۰	٤	۰	۱	۰	۱	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ۲	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ۳	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ٤	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
۵-۲-	۵	۵	۵	۵	۵	۰	۵	۰	۵	۰	۰
	مثال ۱	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۲	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۳	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ٤	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
	مثال ۵	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
٦-۲-	٤	۰	۰	۰	٤	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ۲	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ۳	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
	مثال ٤	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
۷-۲-	۳	۰	۰	۰	۰	۳	۰	۰	۰	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
	مثال ۲	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
	مثال ۳	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
۸-۲-	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
	مثال ۱	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
۹-۲-	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
	مثال ۱	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-

۷. بحث پایانی

نتایج حاصل از تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و فصل دوم نشان داد که به‌طور واقعی، ۴۲٪ مثال‌ها را می‌توان در ردهٔ «ریاضی واقعیت‌مدار» قرار داد و با وجود تأکید مؤلفان بر اهمیت «مدل‌سازی» و «کاربرد»، این تحقیق نشان داد که این هدف، در مورد ۵۸٪ مثال‌های دو فصل اول کتاب، مورد غفلت قرار گرفته است. در عوض، مسائل «بدون زمینه» در این کتاب، حضور نسبتاً پررنگی دارند و با وجود این‌که با مسائل «مدل‌سازی» واقعی تفاوت جدی دارند، ولی می‌تواند نقطهٔ شروع خوبی برای معرفی رویکرد جبری حل معادلات دیفرانسیل به دانشجویان باشد.

نکتهٔ مهمی که لازم است به آن توجه نمود این است که معرفی رویکرد «واقعیت‌مدار» برای آموزش معادلات دیفرانسیل، به معنای تجویز نسخه‌ای برای مدرسان درس معادلات دیفرانسیل نیست که در تمام کلاس‌های درس خود و برای حل تمام مثال‌ها آن را به‌کار برند. به‌طور مشخص، نزدیکِ دانشجویان بودنِ یک موقعیت یا یک مسئلهٔ زمینه‌دار، به معنای واقعی بودنِ آن زمینه یا مسئله است که به‌شدت، به حوزهٔ زمانی و مکانی مخاطبان وابسته است.

برای مثال، مسئله زمینه مدار مربوط به کبوتر نامه‌رسان، برای دانشجویان ایرانی ممکن است معنادار نباشد، در حالی که ممکن است برای دانشجوی غربی معنادار باشد. به این دلیل، طراحیِ فعالیت‌های مدل‌سازی بومی مانند پروژه‌های مربوط به محیط زیست مناطق مختلف ایران، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. می‌توان به‌جای مسئلهٔ مربوط به انقراض کبوتر نامه‌رسان، مسئله‌های واقعی دربارهٔ گونه‌های مختلف جانوران ایرانی را مطرح کرد. در این شرایط، تقاضای اجرای آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار با سرفصل فعلی معادلات دیفرانسیل، نه تنها امکان‌پذیر نیست بلکه می‌تواند آسیب‌رسان نیز باشد. مثلاً ممکن است به‌جای طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی اصیل، مدرسان معادلات دیفرانسیل به دلیل نداشتنِ الگوهای مناسب و منابع در دسترس، مسائل «مستقل از زمینه» را به‌جای مسائل مدل‌سازی اصیل طراحی کنند که این هر دو، خطراتی را در پی خواهد داشت، زیرا این گونه مسائل باعث می‌شوند تا غیرواقعی بودن مسائل ریاضی و ساختگی بودن موقعیت‌های مسئلهٔ ریاضی در ذهن دانشجویان تداعی شود و این ذهنیت، موجب بی‌اعتمادی دانشجویان نسبت به ریاضی گردد.

با توجه به این‌که حتی در آخرین سرفصل مصوب درس معادلات دیفرانسیل که از طرف دفتر برنامه‌ریزی آموزش عالی وابسته به وزارت علوم، تحقیقات و فناوری در تاریخ ۱۳۸۸/۲/۲۶ منتشر شده است، رویکرد هندسی (گرافیکی یا کیفی) حل معادلات دیفرانسیل و تلفیق آن با رویکردهای جبری و عددی نادیده گرفته شده است، طبیعی است آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار نیز نادیده گرفته شود. در حالی که به باور متخصصان آموزش معادلات دیفرانسیل، مسائل دنیای واقعی از طریق تلفیق همزمان این سه رویکرد، مدل‌سازی می‌شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود تا با بازنگریِ سرفصل درس معادلات دیفرانسیل توسط یک کمیسیون تخصصی در این دفتر، آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل در دوره‌های کارشناسی، مورد مطالعه امکان‌سنجی قرار گیرد.

مراجع

[۱] بویس، دابلیو؛ دیپریما، آر؛ و میتریا، دی. (۱۳۹۴)، معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسائل مقادیر مرزی. ترجمهٔ حمیدرضا ظهوری زنگنه، ویرایش نهم، چاپ ششم، انتشارات فاطمی.

[۲] غلام آزاد، سهیلا. (۱۳۹۳)، ردپای آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در ریاضیات مدرسه‌ای در ایران، دو فصلنامهٔ نظر و عمل در برنامهٔ درسی، دوره ۲، شماره ۳، ۷۰-۴۷.

[۳] کریمی فردین پور، یونس. (۱۳۹۳). بررسی ارائه مدل تحلیل خطا و رابطه آن با پیشرفت تحصیلی دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر در درس معادلات دیفرانسیل. آموزش مهندسی ایران. گروه علوم مهندسی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران. ۶۳. ۱۳۳-۱۱۱.

[۴] فرودنتال، اچ. (۱۹۷۹) ریاضی جدید با آموزش جدید. ترجمهٔ سحر ظهوری زنگنه و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجلهٔ رشد و آموزش ریاضی، شماره ۷۰، صص ۲۸ تا ۳۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[5] Boyce, W., DiPrima, R., & Mitrea, D. (2010). Elementary differential equations and boundary value problems. ebook: Wiley.

[6] Galbraith, P. & Stillman, G. (2001). Assumptions and context: pursuing their role in modelling activity. In J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, and S. P. Carreira (Eds.), Modelling and mathematics education: ICTMA 9: Application in science and technology, (pp. 300-310). Chichester: Horwood.

[7] Habre, A. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. Teaching Mathematics and Its Applications, 29, 94-107.

[8] Rafiepour, A. and Stacey, K. (2009). Applying a mathematical literacy framework to the Iranian Grade 9 mathematics textbook. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 433-440. Thessaloniki, Greece: PME.

[9] Rafiepour, A. and Stacey, K. and Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. Mathematics Education Research Journal. 24:403-421.

[10] Rasmussen(e), C., and Whitehead, K. (2003). Research Sampler 7: Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. 10, 12: AMC.

[11] Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties. The Journal of Mathematical Behaviour, 20, 55–87.

[12] Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 189-194.

یونس کریمی فردین پور: گروه ریاضی، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران

رایانامه: y-k-fardinpour@iau-ahar.ac.ir