فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۸ (بهار و تابستان ۱۳۹۵) صص. ۱۲۷ تا ۱۳۴

چرا اثبات؟[1]

فولکر رونده

برگردان: فاطمه اختری و رسول نصراصفهانی

چکیده

پروفسور رونده استاد دانشگاه آلبرتای کانادا در رشتهٔ ریاضی است. مقالات تخصصی وی روی اثرات متقابل بین آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک متمرکز است. مقالات عمومی رونده دربارهٔ جنبه‌های فلسفی ریاضی نیز جالب توجه‌اند؛ از جمله مقالهٔ حاضر که ضمن ارائهٔ چند مثال، چرایی و چگونگی اثبات در ریاضیات را توضیح می‌دهد.

روزی روزگاری، شاهزاده‌ای بود که معلم‌های سرخانه او را تعلیم می‌دادند. یک روز، معلم ریاضی سعی کرد قضیهٔ فیثاغورس را برای شاگرد سلطنتی‌اش توضیح دهد، اما شاهزاده آن را نپذیرفت. بنابراین معلم، قضیه را برای او اثبات کرد، اما او باز هم متقاعد نشد. معلم اثبات دیگری برای قضیه ارائه کرد و باز هم اثبات دیگری. اما شاهزاده هنوز سرش را با ناباوری تکان می‌داد. معلم با درماندگی فریاد زد: «سرورم، به شرفم سوگند این قضیه درست است!» شاهزاده ذوق زده شد و گفت:«چرا این را از همان اول نگفتید؟!»

عجیب نیست؟ سوگند سادهٔ معلم و پذیرش درستیِ قضیه از طرف شاگرد ... . البته که عجیب است. چه کسی مطمئن است که می‌توان به این معلم اعتماد کرد؟ او دانش خود را از کجا آورده است؟ آیا او هم به سوگند شخص دیگری اعتماد کرده است؟ آیا کسی که معلم، قضیه را از او آموخته، خودش مورد اعتماد بوده است؟ خود او دانشش را از کجا آورده است؟ آیا او هم به سوگند کسی دیگر اعتماد کرده است؟ هر

---
[1] Volker Runde, "Why Proof ?", *Pi in the Sky* 11 (2008) 12-15.

چه زنجیرهٔ سوگندها طولانی‌تر شود، قضیه سست‌تر به نظر می‌رسد. این زنجیره نمی‌تواند تا ازل ادامه پیدا کند: کسی باید روشی پذیرفتنی برای درستی این قضیه خلق کرده باشد. به تعبیر ما: *کسی آن را اثبات کرده است.*

چرا ریاضی‌دان‌ها تا این حد غرق در اثبات‌اند؟ پاسخ، ساده است:

« ریاضی‌دان‌ها، غرق در جستجوی حقیقت هستند.»

اثبات، روندی است که با به کارگیری قواعد خاصی، به پذیرش درستی یک ادعا می‌انجامد. اثبات‌ها تنها در ریاضیات وجود ندارند. مثلاً در یک دادرسی کیفری، شاکی سعی می‌کند جرم *متهم را ثابت کند.* البته قواعدی که یک اثبات برحسب آن‌ها شکل می‌گیرد بستگی زیادی به زمینهٔ مورد بحث دارد: اثباتِ دزدیده شدن قالپاق خودروی همسایه توسط جو اسمیت در دادگاه، یک چیز است و ارائهٔ اثباتی برای وجود بی‌نهایت عدد اول، چیزی دیگر.

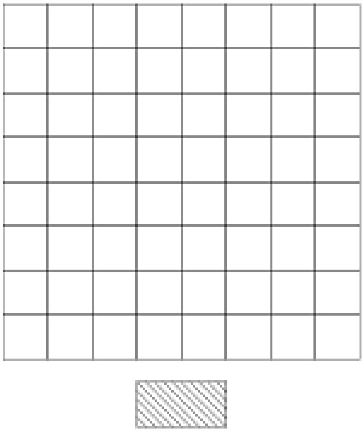
اما در نهایت، همهٔ اثبات‌ها یک هدف را دنبال می‌کنند: یافتن حقیقت.

در اینجا لطیفه‌ای بیان می‌کنیم: *از یک ریاضی‌دان و یک فیزیک‌دان خواسته می‌شود تا بررسی کنند که آیا هر عدد فردِ بزرگتر از یک، اول است یا نه؟ ریاضی‌دان می‌گوید: «سه، عدد اول است؛ پنج، عدد اول است؛ هفت، عدد اول است؛ اما نه، عدد اول نیست. پس این فرضیه، درست نیست.» فیزیک‌دان می‌گوید: «سه، عدد اول است؛ پنج، عدد اول است؛ هفت، عدد اول است؛ نه، عدد اول نیست؛ اما دوباره یازده و سیزده اعداد اول هستند. پس پنج مورد از شش مورد، فرضیه را تایید می‌کنند و لذا این فرضیه، درست است!»*

ما به فیزیک‌دان می‌خندیم. چطور او می‌تواند مثال نقض را به همین سادگی نادیده بگیرد؟ اما این کار آنقدرها هم که به نظر می‌رسد ساده‌لوحانه نیست. داده‌های تجربی به‌ندرت با پیش‌بینی‌های نظری مطابقت کامل دارند و دانشمندان به موارد استثنا عادت کرده‌اند.

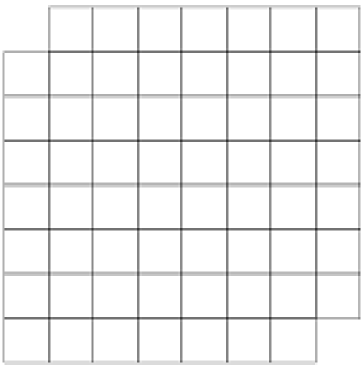
آنچه که باعث شد فیزیک‌دان در این لطیفه، ساده‌لوح به نظر برسد این است که او با یک مسئلهٔ ریاضی مانند یک مسئلهٔ تجربی رفتار کرد: او از قواعدی برای اثبات استفاده کرد که در یک زمینه درست است، اما در زمینهٔ دیگر درست نیست.

یک صفحهٔ شطرنجی شامل ۶۴ مربع را در نظر بگیرید:



سپس کاشی‌های مستطیلی شکلی را مانند آنچه در زیر صفحهٔ شطرنجی نشان داده شده است، از آن بردارید: هر یک از آن‌ها در صفحهٔ شطرنجی دقیقاً دو مربع کنار هم را می‌پوشانند. به‌وضوح شما می‌توانید تمام صفحه را با چنین کاشی‌هایی بپوشانید بدون این‌که هیچ دو کاشی هم‌پوشانی داشته باشند. این مسئلهٔ ساده‌ای است؛ آیا تا اینجا به اثبات نیاز داریم؟ هنوز نه!

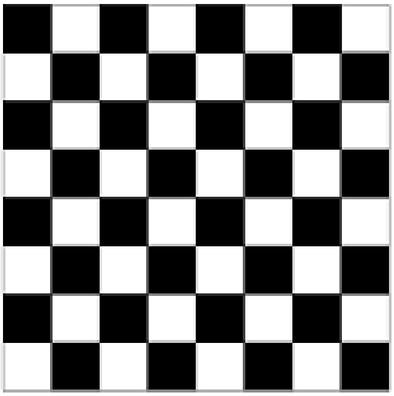
برای این‌که مسئله را کمی پیچیده‌تر کنیم، یک قیچی بردارید و مربع‌های گوشهٔ چپ بالا و گوشهٔ راست پایین صفحهٔ شطرنجی را ببرید. شکل صفحه چنین خواهد شد:



حال سعی کنید این صفحهٔ تغییر یافته را با همان کاشی‌ها بپوشانید بدون این‌که هیچ دو کاشی هم‌پوشانی داشته باشند ... . اگر واقعاً سعی کنید این کار را انجام دهید (ترجیحاً با صفحهٔ شطرنجی که روی یک برگه کشیده شده است)، خیلی زود خواهید فهمید که حداقل کار راحتی نیست و شاید در پی این تردیدِ آزار دهنده، فکر کنید که حتی ناممکن است. اما چرا؟

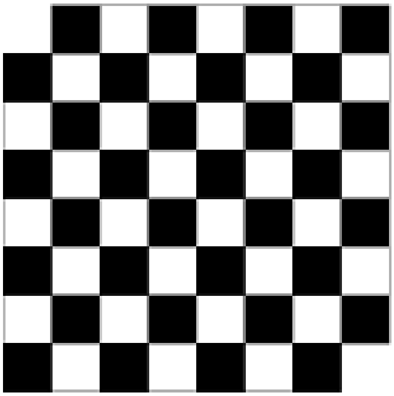
البته برای پی بردن به این مسئله می‌توان به روش افنا پناه برد. حداکثر تعدادی متناهی راه احتمالی برای قرار دادن کاشی‌ها روی صفحهٔ شطرنجی وجود دارد و اگر همهٔ آن راه‌ها را امتحان کنیم و ببینیم که در هیچ حالتی صفحهٔ پوشیده شده با کاشی‌ها، با صفحهٔ شطرنجی منطبق نیست، به نتیجه رسیده‌ایم. اما این رویکرد دو اشکال دارد: اول این‌که باید همهٔ *راه‌های احتمالی* را برای قرار دادنِ کاشی‌ها روی صفحهٔ شطرنجی مشخص کنیم و دوم این‌که حتی اگر این کار را انجام دهیم، ممکن است تعداد راه‌ها آنقدر زیاد باشد که نتوانیم همهٔ آن‌ها را امتحان کنیم. بنابراین با روش افنا خداحافظی می‌کنیم ...

پس اگر روش افنا به کار نیاید، چه می‌توان کرد؟ به یاد آورید که با یک صفحهٔ شطرنجی سر و کار داریم و یک صفحهٔ شطرنجی تنها شامل ۶۴ مربع در یک الگوی هشت در هشت نیست، بلکه رنگ مربع‌ها تغییر یافته است: ۳۲ مربع سفید و ۳۲ مربع سیاه.



هر کاشی روی صفحهٔ شطرنجی دقیقاً دو مربع کنار هم را می‌پوشاند و دو مربع کنار هم روی یک صفحه همیشه رنگ‌های مختلفی دارند. پس هر کاشی، یک مربع سفید و یک مربع سیاه را می‌پوشاند. در نتیجه هر آرایش از کاشی‌ها روی صفحهٔ شطرنجی باید همان تعداد از مربع‌های سفید را بپوشاند که سیاه را.

حال صفحهٔ شطرنجی تغییر یافتهٔ زیر را بررسی کنید:



چون دو مربع سفید را حذف کرده‌ایم، پس صفحهٔ تغییر یافته شامل ۳۰ مربع سفید و ۳۲ مربع سیاه است. بنابراین نمی‌توانیم این صفحه را با کاشی‌ها بپوشانیم؛ یعنی *آن را اثبات کردیم*.

آیا این اثبات چیزی شبیه جادو نیست؟ شاید از ته دل ترجیح می‌دهید همچنان به روش افنا پناه ببرید که راهی سخت‌تر اما هنوز شدنی است، و شاید تا *همهٔ راه‌های احتمالی* را امتحان نکنید، نخواهید بپذیرید که نمی‌توان کاشی‌ها را به طرز مطلوب روی صفحهٔ شطرنجی قرار داد.

با این حال، در برخی موقعیت‌ها پناه بردن به روش افنا برای دستیابی به حقیقت، نه تنها سخت، بلکه ناشدنی است. به قضیه‌های ریاضی زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۱. *هر عدد صحیح بزرگتر از یک، حاصل‌ضربی از اعداد اول است.*

آیا این حکم صادق است؟ و اگر هست، چگونه صدق آن را اثبات کنیم؟

بهتر است با بررسی چند عدد شروع کنیم: ۲ اول است (و بنابراین حاصل‌ضربی از اعداد اول است)؛ ۳ نیز چنین است؛ ۴ = ۲ × ۲؛ ۵ نیز اول است؛ ۶ = ۲ × ۳؛ ۷ نیز اول است؛ ۸ = ۲ × ۲ × ۲؛ ۹ = ۳ × ۳ و ۱۰ = ۲ × ۵. لذا این قضیه برای تمام اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ و کوچکتر یا مساوی ۱۰ درست است. دانستن این مطلب دلگرم‌کننده است، اما در مورد اعداد صحیح بزرگتر از ۱۰ چه می توان گفت؟ خوب! ۱۱ اول است؛ ۱۲ = ۲ × ۲ × ۳؛ ۱۳ اول است؛ ۱۴ = ۲ × ۷؛ ۱۵ = ۳ × ۵؛ ۱۶ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲...

این بررسی را در همین جا قطع می‌کنیم چون ادامهٔ این کار بیهوده است. بی‌نهایت عدد صحیح مثبت وجود دارد و مستقل از این‌که چه تعداد از آن‌ها را می‌توانیم به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول بنویسیم،

همیشه بی‌نهایت عدد باقی خواهد ماند که هنوز نشان نداده‌ایم به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشته می‌شوند. آیا $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}} + ۱$ حاصل‌ضربی از اعداد اول است؟ این عدد بیش از حد بزرگ است. حتی به‌کمک رایانه‌های قدرتمند ممکن است تا ابد طول بکشد تا (در صورت وجود) اعداد اولی را پیدا کنیم که حاصل‌ضربشان این عدد است. حتی اگر نشان دهیم که این قضیه برای اعداد تا $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}} + ۱$ برقرار است، آنگاه باز در مورد عدد بسیار بزرگتر $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}}} + ۱$ چیزی نمی‌دانیم!

در اینجا روش افنا به جایی نمی‌رسد. بررسی این قضیه برای مثال‌هایی خاص ممکن است دریافتی از آن به شما بدهد، اما به اثبات صدق آن برای *تمام اعداد صحیح بزرگتر از یک* کمکی نمی‌کند.

آیا ممکن است حکم این قضیه صدق نباشد؟ این به چه معنایی است؟ اگر هر عدد صحیح بزرگتر از یک، حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد، آنگاه حداقل یک عدد صحیح مانند $a_۰$ وجود دارد که حاصل‌ضربی از اعداد اول نیست. شاید عدد صحیح دیگری مانند $a_۱$ با شرط $a_۰ > a_۱ > ۱$ وجود داشته باشد که آن نیز حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد؛ در این حالت $a_۱$ را جایگزین $a_۰$ کنید. اگر عدد صحیح دیگری مانند $a_۲$ با شرط $a_۱ > a_۲ > ۱$ وجود داشته باشد که آن عدد نیز حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد، $a_۲$ را جایگزین $a_۱$ کنید و همین‌طور قدم‌های بعدی. تنها تعدادی متناهی عدد بین ۲ و $a_۰$ وجود دارند و بنابراین بعد از حداکثر تعدادی متناهی قدم، به بن‌بست می‌رسیم و این روند را با عدد صحیحی مانند $a > ۱$ با ویژگی‌های زیر به پایان می‌بریم:

(الف) a حاصل‌ضربی از اعداد اول نیست، و

(ب) a کوچکترین عدد صحیح با این ویژگی است.

بنابراین هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ و کوچکتر از a، حاصل‌ضربی از اعداد اول است.

بهتر است به این عدد فرضی a فکر کنیم. اگر حکم قضیه صادق نباشد، آنگاه این عدد وجود دارد. در مورد آن چه می‌توان گفت؟ این عدد نمی‌تواند اول باشد، زیرا آن‌وقت باید حاصل‌ضربی از اعداد اول (با تنها یک عامل) باشد. پس a عدد اول نیست؛ یعنی

$$a = b\,c$$

که در آن، b و c هیچ‌کدام a یا ۱ نیستند. این خودش بدین معنی است که

$$۱ < b, c < a.$$

بنابراین طبق ویژگی (ب)، اعداد b و c هر کدام حاصل‌ضربی از اعداد اول هستند. در نتیجه اعداد اول $p_۱$، ...، p_n و $q_۱$، ...، q_m وجود دارند به‌طوری که

$$b = p_۱ \cdots p_n,$$

$$c = q_۱ \cdots q_m.$$

اما در این صورت برابری زیر برقرار است:

$$a = b\,c = p_۱ \cdots p_n\, q_۱ \cdots q_m$$

و a حاصل‌ضربی از اعداد اول می‌شود که در تناقض با (الف) است.

فرض کردیم حکم صادق نباشد و بر اساس این فرض، عددی صحیح مانند a یافتیم که حاصل‌ضربی از اعداد اول نیست؛ ولی بعداً معلوم شد که a حاصل‌ضربی از اعداد اول هست. تنها راه خروج از این تناقض، این است که بگوییم فرض ما نادرست بوده، یعنی حکم این قضیه صادق است! (و اکنون می‌دانیم که $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}} + ۱$ حاصل‌ضربی از اعداد اول است بدون این‌که آن اعداد را بیابیم.)

این روشی که برای اثبات قضیهٔ ۱ استفاده کردیم، *اثبات غیرمستقیم* نامیده می‌شود. برای برخی چیزها نمی‌توان اثبات مستقیم ارائه کرد. در چنین حالتی، فرض می‌کنیم آنچه ادعا شده است، کاذب باشد و امیدواریم با این فرض، به یک تناقض برسیم.

اکنون اثبات غیرمستقیم دیگری را امتحان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. *بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.*

آیا این قضیه پذیرفتنی است؟ هیچ فرمول آسانی برای محاسبه عدد اول n-ام وجود ندارد و پس از کنار گذاشتن چند عدد اول، دست‌یابی به عدد اول بعدی سخت و سخت‌تر می‌شود. پس آیا حکم قضیه کاذب است و آیا ما به‌سادگی، بعد از مدتی همهٔ اعداد اول را می‌یابیم؟

فرض کنیم چنین باشد؛ به این معنی که تنها تعداد متناهی عدد اول وجود داشته باشد: مثلاً $p_۱$، ...، p_n. قرار دهید

$$a := p_۱ \cdots p_n + ۱.$$

بنابر قضیهٔ ۱، عدد a حاصل‌ضربی از اعداد اول است. در واقع عددی اول مانند q و عددی صحیح مثبت مانند b با شرط $a = q\,b$ وجود دارند. چون در اینجا $p_۱$، ...، p_n تمام اعداد اولِ موجود هستند،

q نیز باید یکی از این‌ها باشد. فرض کنیم c حاصل‌ضرب همهٔ p_jهایی باشد که با q برابر نیستند. در این صورت

$$a = q\,c + ۱.$$

پس برابریِ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$۰ = a - a = q\,c + ۱ - q\,b = q\,(c - b) + ۱$$

و از این‌رو

$$q\,(c - b) = -۱.$$

اما این غیر ممکن است، زیرا $c - b$ یک عدد صحیح ناصفر است و $q \geq ۲$.

بنابراین باز هم به تناقض رسیدیم، و قضیهٔ ۲ اثبات شد.

اثبات قضیهٔ ۲ به سادگیِ اثبات قضیهٔ ۱ نیست. چرا ما a را این طور تعریف کردیم؟ پاسخ این است که چون اگر این طور تعریفش کنیم، به درد می‌خورد و بیش از دو هزار سال است که چنین بوده است: قضیهٔ ۲ اولین بار در کتاب *اصول اقلیدس* بیان و اثبات شد.

به قول یک ریاضی‌دان:

«ریاضیات، مبتنی بر اثبات است و اثبات، جاودانه است.»

فاطمه اختری: دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

رایانامه: f_akhtari@math.iut.ac.ir

رسول نصراصفهانی: دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

رایانامه: isfahani@cc.iut.ac.ir