فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص. ۶۷ تا ۸۷

ریشه‌ها، مبانی و سیر تکاملی نظریهٔ استورم-لیوویل

سیدسیف‌اله موسی‌زاده

چکیده

اولین مقالهٔ مشترک استورم و لیوویل در سال ۱۸۳۷، مقدمه‌ای بر نظریهٔ عام معادلات دیفرانسیل استورم-لیوویل به‌شمار می‌آید. نظریه‌ای که نقشی محوری در بخش عمده‌ای از آنالیز ریاضی نوین بازی کرده و در طول سال‌های متوالی در تجزیه و تحلیل بسیاری از مسائل مربوط به ریاضیاتِ فیزیک و دیگر شاخه‌های علم به‌کار گرفته شده است. در این نوشتار، تاریخچه‌ای از نظریهٔ استورم-لیوویل و سرچشمه‌های پیدایش آن را بیان می‌کنیم و به اهمیت و جایگاه آن در مطالعهٔ مسائل مقدار مرزی و برخی تلاش‌هایی که در جهت تعمیم آن انجام گرفته است، می‌پردازیم. نظریهٔ طیفیِ عملگرهای استورم-لیوویل غیرخطی را نیز شرح می‌دهیم.

۱. سرآغاز

در یک سلسله از مقالات در سال‌های ۱۸۳۶ و ۱۸۳۷ میلادی، دو ریاضیدان فرانسوی به نام‌های چارلز فرانسوا استورم[۱] (۱۸۰۳-۱۸۵۵) و جوزف لیوویل[۲] (۱۸۰۹-۱۸۸۲) موضوع جدیدی را در آنالیز ریاضی بنیان نهادند که بعدها «نظریهٔ استورم-لیوویل» نام گرفت. در آن زمان، استورم پس از نوشتن مقاله‌ای مشترک با کولادون[۳] (یکی از دوستان دوران کودکی و نیز از همشاگردی‌های استورم) در زمینهٔ فشرده‌سازی مایعات [۱۹] و نیز به‌دلیل قضیهٔ مشهورش دربارهٔ تعداد ریشه‌های حقیقی یک چندجمله‌ای [۴۴، ۴۷]، برندهٔ جایزه شده و شهرت یافته بود. همچنین در سال ۱۸۲۹ دستوری مربوط به حل معادلات

عبارات و کلمات کلیدی. نظریهٔ استورم-لیوویل؛ مسئلهٔ مقدار مرزی؛ شرایط مرزی؛ مقادیر ویژه؛ توابع ویژه.

[۱] Charles François Sturm [۲] Joseph Liouville [۳] Jean-Daniel Colladon

جبری و پیدا کردن جذر را کشف کرد و در نتیجهٔ این کار، به درجهٔ استادی ریاضیات در کلژ رولن[۱] نائل آمد. وی در سال ۱۸۳۶ به عضویت آکادمی علوم در آمد و در سال ۱۸۳۸ به سمت معاونت و در سال ۱۸۴۰ به استادیِ اکول پلی‌تکنیک انتخاب شد و سپس به جانشینیِ پواسن، کرسی مکانیک دانشکدهٔ علوم پاریس را احراز کرد [۱]. فعالیت‌های علمی استورم در عرصه‌های گوناگونی همچون هندسه، جبر، آنالیز ریاضی، مکانیک و نورشناخت بر کسی پوشیده نیست و کتاب‌های درسی در آنالیز و مکانیک منتشر کرد که هنوز نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و تا اواخر قرن بیستم نیز انتشار مجدد یافته است.[۲]

لیوویل نیز در سال ۱۸۲۷ از مدرسهٔ پلی‌تکنیک پاریس که امروزه معتبرترین و قدیمی‌ترین دانشگاه فنی و مهندسی فرانسه به‌شمار می‌آید، فارغ‌التحصیل شد و کرسی استادی ریاضیات در موسسهٔ پژوهشی کلژ دو فرانس[۳] و دانشکدهٔ علوم پاریس را به‌دست آورد. او در زمینه‌های گوناگونی در ریاضیات تحقیق کرد: معادلات دیفرانسیل، نظریهٔ اعداد، آنالیز مختلط، هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی، ریاضیاتِ فیزیک و اخترشناسی [۳۷].

پژوهش‌های استورم و لیوویل که اغلب در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل انجام گرفته است، به‌لحاظ زمانی به چهار دوره تقسیم می‌شود: طی دورهٔ اول، ۱۸۲۹–۱۸۳۰، آنها ایده‌های اولیهٔ خود را جداگانه ارائه کردند [۲۹، ۳۰، ۴۴، ۴۵]. سپس در بین سال‌های ۱۸۳۱–۱۸۳۵ (دورهٔ دوم)، استورم دو مجموعه از نتایج کارهای خود را در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به نگارش در آورد که همزمان با اولین نتایج لیوویل در سومین دوره، ۱۸۳۶–۱۸۳۷، منتشر شد [۴۶، ۴۷، ۵۰، ۵۱، ۵۲]. در دورهٔ پایانی که بین سال‌های ۱۸۳۸ تا ۱۸۴۰ است، لیوویل تعمیم نتایج قبلی برای معادلات دیفرانسیل خطی مراتب بالاتر را مطالعه کرد و به نتایج ارزشمندی دست یافت [۳۳، ۳۴، ۳۵].

نظریهٔ استورم–لیوویل به بررسی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dV}{dx}) + (rg(x) - \ell(x))V(x) = 0 \qquad x \in (\alpha, \beta) \tag{۱.۱}$$

به همراه شرایط مرزی

$$k(\alpha)V'(\alpha) - hV(\alpha) = 0, \quad k(\beta)V'(\beta) + HV(\beta) = 0 \tag{۲.۱}$$

می‌پردازد که در اینجا k، g و ℓ تابع‌های مثبت معلوم، h و H ضرایب ثابت معلوم و r یک پارامتر است. اگرچه استورم و لیوویل تنها یک مقالهٔ مشترک در رابطه با مسائل مقدار مرزی به چاپ رساندند [۵۲]، با ملاحظهٔ کارهایشان می‌توان شواهدی بر همکاری بیشتر آنها یافت (برای مثال، [۵۰، ۵۱] را می‌توان نام

[۲] در سال ۲۰۰۸، مجموعهٔ کاملی از مقالات استورم در قالب کتاب [۴۰] گردآوری و منتشر شده است.

[1] Collège Rollin [3] Collège de France

برد). آنچه را که توسط استورم و لیوویل دربارهٔ مسئلهٔ بالا مورد بررسی قرار گرفت و نتایج آن در [۵۲] منتشر شد، می‌توان به سه دستهٔ زیر طبقه‌بندی کرد:

(۱) ویژگی‌های مقادیر ویژه؛
(۲) رفتار کیفی توابع ویژه؛
(۳) بسط هر تابع دلخواه به سری نامتناهی از توابع ویژه.

به همین دلیل، نظریهٔ بررسی وجود و رفتار مجانبی مقادیر ویژه، بررسی کیفی توابع ویژه و تمامیت آنها در یک فضای مناسب، *نظریهٔ استورم–لیوویل* خوانده می‌شود. برای موارد ذکر شده در بالا، استورم (۱) و (۲)، و لیوویل (۳) را مطالعه کردند و در این فرآیند، به نتایج بیشتری درباره (۱) و (۲) دست یافتند.

تا قبل از سال ۱۸۲۰، تنها پرسشی که در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل مطرح بود این بود که:

«یک معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است؛ جواب آن را به‌شکل یک عبارت تحلیلی بیابید.»

برای معادلهٔ (۱.۱) در حالت کلی، استورم نتوانست جوابی بیابد ولی لیوویل توانست با روش تقریب‌های متوالی، جوابی برای (۱.۱) ارائه کند اما این جواب برای بررسی ویژگی‌های (۱)-(۳) مناسب نبود. از این‌رو آنها کار خود را با تحقیق دربارهٔ «نظریهٔ کیفی[۱]» معادلات دیفرانسیل، یعنی «استنتاج ویژگی‌های جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل به‌طور مستقیم از خودِ معادله و بدون دسترسی به جواب‌ها» ادامه دادند؛ شیوه‌ای که تا نیم قرن قبل از آن مورد توجه بود و اعتبار داشت. این گونه بود که استورم و لیوویل توانستند اطلاعاتی دربارهٔ ویژگی‌های جواب‌های معادلهٔ (۱.۱) بیابند. این موضوع شواهدی از یک مفهوم جدید در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل را نشان می‌دهد که با پرسشی کلی‌تر از قبلی توصیف می‌شود:

«یک معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است؛ برخی ویژگی‌های کیفیِ جواب آن را بررسی کنید.»

دامنهٔ استفاده از نتایج کارهای استورم و لیوویل بسیار وسیع است و نتایج بسیاری در زمینهٔ معادلات تفاضلی، معادلات دیفرانسیل تأخیری و تابعی و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به‌دست آمده است. برای مثال، می‌توان به «قضایای نوسان و مقایسه‌ای استورم[۲]» اشاره کرد که تا به امروز نیز جزء موضوعات قابل‌توجه باقی مانده است. نظریهٔ استورم برای معادلات تفاضلی، شبیه به معادلات دیفرانسیل معمولی است اما شامل پیچیدگی‌های بسیاری است. در [۵] به جزئیات این نظریه پرداخته شده است. همچنین برخی کارهای انجام شده در مورد کاربرد این نظریه در معادلات تأخیری و تابعی را می‌توان در [۲، ۳، ۲۲، ۲۸] مشاهده کرد. نظریهٔ استورم اگرچه منشأ فیزیکی دارد، همانند نظریهٔ طیفی عملگرهای دیفرانسیلی، با مسائل دیگری از قبیل بهینه‌سازی در حساب تغییرات و کنترل بهینه گره خورده و دارای اهمیت است. همچنین این نظریه نقشی کلیدی در تجزیه و تحلیل جنبه‌های مختلف رفتار جواب‌ها در دستگاه‌های دینامیکی نامتناهی–بُعد

[۱] qualitative theory [۲] Sturm’s oscillation and comparison theorems

مرتبط با معادلات سهموی غیرخطی که دارای جواب‌های تناوبی هستند، ایفا می‌کند [۱۶، ۲۴، ۳۹]. از آنجا که می‌توان معادلهٔ کوتاه‌ترین منحنی بین دو نقطهٔ ثابت از یک رویه را به یک معادلهٔ سهموی غیرخطی تبدیل کرد، ایده‌های استورم در این گونه مسائل نیز نقش کلیدی دارد [۲۱، ۲۶، ۲۷].

از برجسته‌ترین ویژگی‌های معادلات دیفرانسیل که در اوایل قرن نوزدهم مورد بررسی قرار گرفت، «وجود جواب» بود. قضیهٔ وجودی توسط کُشی صورت‌بندی و اثبات شد که مفهوم گسترده‌تری از معادلات دیفرانسیل را نشان می‌داد. البته توسعهٔ مفهومی در شاخهٔ معادلات دیفرانسیل به موازات توسعه در شاخهٔ معادلات جبری انجام گرفت. در این زمان کارهای آبل و گالوا به‌طور جالبی مسئلهٔ فوق را از «یافتن جواب‌ها» به‌سوی «یافتن برخی جواب‌ها و بررسی ویژگی‌های آنها» سوق داد. از آنجایی که هیچ جواب صریح کلی برای مسئلهٔ استورم-لیوویل (۱.۱)-(۲.۱) نمی‌توان یافت، ویژگی‌های جواب‌ها به‌طور کیفی از خود معادله استنباط می‌شد. از این دیدگاه، نظریهٔ استورم-لیوویل اولین نظریهٔ کیفی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل بود که رویکرد پوانکاره را در برخورد با معادلات دیفرانسیل غیرخطی که در اواخر قرن نوزدهم ارائه شده بود، تغییر داد. به‌علاوه نظریهٔ استورم-لیوویل بنیانگذار نظریه‌های مقدماتی در زمینهٔ مسائل مقدار ویژه شد و به این ترتیب جایگاهی محوری در حل روش‌مند بسیاری از مسائل بنیادی در ریاضیات محض و کاربردی پیدا کرد و امروزه نیز نقشی اساسی و سازنده در مسائل معادلات دیفرانسیل و برخی دیگر از شاخه‌های ریاضی دارد. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر دربارهٔ اهمیت و جایگاه نظریهٔ استورم-لیوویل، خوانندگان را به [۶، ۳۶، ۴۰] ارجاع می‌دهیم.

۲. ریشه‌ها و مبانی نظریهٔ استورم-لیوویل

ریشه‌ها و زمینه‌های نظریهٔ استورم-لیوویل را می‌توان در کارهای اصلی استورم در طول سال‌های ۱۸۲۹ تا ۱۸۳۶ جستجو کرد [۴۵، ۴۸، ۴۹] که نتایج محوریِ این نظریه در اولین مقالهٔ مشترک او با لیوویل دربارهٔ مسائل مرزی در [۵۲] به چاپ رسید. استورم بسیاری از مسائل مربوط به توزیع گرما در اجسام با شکل‌های مختلف و حرکات نوسانی کوچکِ مواد جامدِکشسان و انعطاف‌پذیر و مایعات کشسان را که منجر به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم می‌شوند، مورد مطالعه قرار داد که در [۴۸] به آن اشاره کرده است. او در مقالهٔ بعدی خود [۴۹]، با جزئیات بیشتری توضیح داد که چگونه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ناشی از مسائل فوق را به‌طور کلی می‌توان با جداسازیِ متغیرها، به یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معمولی که دارای یک پارامتر است، تبدیل و حل کرد. برای مثال، او مسئلهٔ انتقال حرارت در یک نوار باریک ناهمگن را مورد بررسی قرار داد. در این مسئله، رابطهٔ حاکم بر درجهٔ حرارت به‌شکل معادلهٔ زیر است:

$$g\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) - \ell u(x,t) \qquad \alpha \leq x \leq \beta \tag{۱.۲}$$

که در آن، $u(x,t)$ بیانگر درجهٔ حرارت در نقطهٔ x و در زمان t است و g، k و ℓ تابع‌های مثبت از متغیر x هستند. اگر اطراف نوار در دمای صفر درجه نگهداری شود، آن‌گاه درجهٔ حرارت u در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$k\frac{\partial u}{\partial x} - hu(x,t) = 0 \quad (x=\alpha), \qquad k\frac{\partial u}{\partial x} + Hu(x,t) = 0 \quad (x=\beta) \tag{۲.۲}$$

که در آن، h و H ثابت‌های مثبتی هستند. گاهی اوقات درجهٔ حرارت در زمان $t=0$ معلوم است که در این صورت شرط اولیهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$u(x,0) = f(x). \tag{۳.۲}$$

با صرف‌نظر کردن از شرط اولیهٔ (۳.۲)، استورم جواب مسئلهٔ (۱.۲)-(۲.۲) را به‌شکل

$$u(x,t) = V(x)e^{-rt}$$

در نظر گرفت و با جانشانیِ آن در (۱.۲)-(۲.۲)، مسئلهٔ فوق را به مسئلهٔ (۱.۱)-(۲.۱) برحسب تابع مجهول V تبدیل کرد (در نظریهٔ انتقال حرارت، روش جداسازیِ متغیرها برای جستجوی جواب به‌شکل $F(x)f(t)$، قبل از آن توسط فوریه معرفی شده بود [۲۵]). حال اگر مسئلهٔ (۱.۲)-(۲.۲)، به همراه شرط اولیهٔ (۳.۲) را در نظر بگیریم و V_1، V_2، …، V_n، … توابع متناظر با مقادیر r_1، r_2، …، r_n، … از مسئلهٔ (۱.۱)-(۲.۱) باشند، آن‌گاه ترکیب خطی $u(x,t) = \sum_n A_nV_n(x)e^{-r_nt}$ نیز یک جواب (۱.۲)-(۲.۲) است (امروزه r_nها را مقادیر ویژه و V_nها را توابع ویژهٔ متناظر با مسئلهٔ مقدار ویژه (۱.۲)-(۲.۲) می‌نامند). از این‌رو شرط مرزی (۳.۲) معادل است با مسئلهٔ تعیین A_nها به‌طوری که داشته باشیم

$$\sum_n A_nV_n(x) = f(x). \tag{۴.۲}$$

به این ترتیب، مسئلهٔ ارائهٔ یک تابع به‌شکل ترکیب خطی برحسب توابع ویژه مطرح می‌شود. این مسئله ابتدا توسط لیوویل مطرح شد که نتایج آن را در [۳۱] منتشر نمود.

مسئلهٔ مقدار مرزی‌ای که استورم و لیوویل در [۵۲] مطالعه کردند شامل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}(k\frac{dV}{dx}) + (gr-\ell)V = 0 \qquad \alpha \leq x \leq \beta \tag{۵.۲}$$

همراه با شرایط مرزی

$$\frac{dV}{dx} - hV(x) = 0 \quad (x=\alpha), \tag{۶.۲}$$

$$\frac{dV}{dx} + HV(x) = 0 \quad (x = \beta) \tag{۷.۲}$$

است. در اینجا ضرایب k، g و ℓ توابعی از متغیر x و روی بازهٔ $[\alpha, \beta]$ پیوسته‌اند و h و H اعداد ثابت مثبت معلومی هستند و r یک پارامتر حقیقی است. آنها نشان دادند که به‌ازای هر مقدار پارامتر r، مسئلهٔ مقدار مرزی (۵.۲)-(۶.۲) یک جواب غیربدیهی V دارد. مسئلهٔ مقدار مرزی بالا فقط به‌ازای توابعی غیرصفر (توابع ویژه) و مقادیر اصلی از پارامتر r (مقادیر ویژه) تعریف می‌شود. آنها در [۵۲] این مقادیر اصلی را به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ

$$w(r) = 0 \tag{۸.۲}$$

محاسبه کردند که رابطهٔ فوق با جایگذاری جواب عمومی V از مسئلهٔ (۵.۲)-(۶.۲) در شرط مرزی (۷.۲) به‌دست می‌آید. البته قبل از آن، استورم در مقالات قبلی‌اش [۴۵، ۴۸، ۴۹] نشان داده بود که معادلهٔ (۸.۲) تعداد نامتناهی ریشهٔ حقیقی سادهٔ مثبت دارد و در [۵۲] این ریشه‌ها به‌شکل صعودی $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ معرفی شد. این اعداد، مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ مقدار مرزی و V_1، V_2، ...، V_n، ... توابع ویژهٔ متناظرشان هستند. در همین مرجع اشاره شد که برای هر عدد طبیعی n، تابع w دارای ویژگی $w'(r_n) \neq 0$ است و

$$\int_\alpha^\beta g(x) V_n^2(x) dx = -k(\beta) V_n(\beta) w'(r_n) \tag{۹.۲}$$

که در آن، اعداد $k(\beta)$ و $V_n(\beta)$ ناصفرند. با توجه به (۹.۲) ساده بودنِ ریشه‌های تابع w قابل قبول است. از دیگر نتایج [۵۲]، تعامد توابع جواب V_1، V_2، ...، V_n، ... نسبت به تابع وزن g است. یعنی برای هر دو عدد طبیعی متمایز m و n داریم

$$\int_\alpha^\beta g(x) V_m(x) V_n(x) dx = 0. \tag{۱۰.۲}$$

لازم به ذکر است اگرچه مقالهٔ مشترک استورم و لیوویل [۵۲] تنها چهار صفحه است، دارای نتایج مهم و ارزشمندی در زمینهٔ مسئلهٔ مقدار مرزی استورم-لیوویل روی یک بازهٔ فشرده همراه با شرایط مرزی جدایی‌پذیر است که زمینه‌های لازم برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ مسائل مقدار مرزی را فراهم کرد.

در اوایل قرن هجدهم، مسائل مقدار ویژه به‌شکل (۱.۱)-(۲.۱) به موضوع مطالعهٔ حرکات ارتعاشی تبدیل شده بود. در مقاله‌های بروک تیلور [۵۴] در زمینهٔ نظریهٔ ارتعاش و یوهان برنولی [۱۰] دربارهٔ زنجیر آویزان، اولین مقدار ویژهٔ مسئلهٔ (۱.۱)-(۲.۱) محاسبه شد. دانیل برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲) نیز در پیگیری

تحقیقات پدرش، یوهان برنولی، در زمینهٔ ارتعاش زنجیر آویزان با معادلهٔ

$$\alpha\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + y(x) = 0 \tag{۱۱.۲}$$

مواجه شد که $y(x)$ بیانگر خم زنجیر و α نیز یک پارامتر است. او جواب معادلهٔ (۱۱.۲) را به‌شکل یک سری نامتناهی به‌دست آورد که امروزه آن را به‌صورت $y = AJ_0(2\sqrt{x/\alpha})$ می‌نویسیم و J_0 تابع بسل مرتبهٔ صفر است. همچنین او استدلال کرد که تعداد نامتناهی از مقادیر ویژهٔ α وجود دارد به‌طوری که $J_0(2\sqrt{\ell/\alpha}) = 0$ (ℓ طول زنجیر) و توزیع $n-1$ ریشهٔ nاُمین تابع ویژه را در بازهٔ $(0, \ell)$ بررسی کرد [۱۰].

تیلور و برنولی‌ها، معادلات دیفرانسیل معمولی را به‌طور مستقیم از قانون‌های فیزیکی استخراج کرده بودند و از سال ۱۷۴۸ که دالامبر و اویلر معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را از مسائل مربوط به نظریهٔ ارتعاش استخراج کردند، مسئلهٔ مقدار ویژه را با استفاده از روش جداسازیِ متغیرها به‌دست آوردند. سال‌ها بعد (تقریباً از سال ۱۸۰۷)، روش جداسازیِ متغیرها به‌طور گسترده در نظریهٔ انتقال حرارت، ابتدا توسط فوریه و بعد از آن خیلی زود توسط تقریباً همهٔ ریاضیدانان جوان فرانسوی مورد استفاده قرار گرفت. این مجموعهٔ وسیع از تحقیقات، انگیزهٔ کافی را برای استورم و لیوویل به‌منظور پیگیری مطالعاتشان فراهم نمود.

انتشار یک نسخهٔ جامع از ایده‌های استورم تا سال ۱۸۳۶ به تعویق افتاد تا اینکه لیوویل او را ترغیب کرد ایده‌هایش را در مجلهٔ تازه تاسیس خود با عنوان «*مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی*»[1] به چاپ برساند. این مجله از سال ۱۸۳۳ در آکادمی پاریس شروع به انتشار مقالات کرده بود و امروزه دومین مجلهٔ قدیمی بین‌المللی ریاضی در جهان به‌شمار می‌آید. البته قبلاً خلاصه‌ای از مقالهٔ استورم در مجلهٔ L'Institut ارائه شده بود که فقط شامل نتایج اصلی کارهای او بود و به روش‌های کار او هیچ اشاره‌ای نشده بود [۴۶]. وی در ادامه، تمام جزئیات کارش را ارائه کرد که احتمالاً تازگیِ روش‌های او موجب اصرار لیوویل برای چاپ کارهای او شد [۴۸، ۴۹]. مسئله‌ای که استورم در [۴۸] بررسی کرد شامل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}(k(x,r)\frac{dV}{dx}) + G(x,r)V(x,r) = 0 \qquad \alpha \le x \le \beta \tag{۱۲.۲}$$

به همراه یک شرط مرزی به‌صورت

$$\frac{k(\alpha,r)}{V(\alpha,r)}\frac{\partial V}{\partial x}(\alpha,r) = h(r) \tag{۱۳.۲}$$

است که k، G و V تابع‌های حقیقی پیوسته‌ای برحسب دو متغیر x و r هستند و $h(r)$ یک تابع معلوم است. در این بررسی، استورم قضیهٔ زیر را ثابت کرد که یکی از مهم‌ترین اظهارات او به حساب آمده و در

[1] Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

دستیابی به نتایج بعدی او نقش مهمی ایفا کرده است. البته لازم به ذکر است هرگاه مقادیر $V(\alpha,r)$ و $\frac{\partial V}{\partial x}(\alpha,r)$ معلوم باشند، جواب $V(x,r)$ به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۲. *اگر V یک جواب غیربدیهی (۱۲.۲)-(۱۳.۲) باشد و برای هر $x\in[\alpha,\beta]$ شرایط زیر برقرار باشد:*

(آ) برای هر r، $k(r)>0$ و k تابعی نزولی نسبت به r باشد؛

(ب) G تابعی صعودی و h تابعی نزولی نسبت به r باشد،

آن‌گاه برای هر $x\in[\alpha,\beta]$، $\frac{k}{V}\frac{\partial V}{\partial x}(x,r)$ تابعی نزولی نسبت به r است.

استورم دو اثبات برای قضیهٔ فوق ارائه کرد که نسخه‌ای از اثبات دوم او در [۳۶] صفحهٔ ۳۲۸ در پاورقی آمده است. استورم در ادامهٔ بررسی‌های خود روی معادلهٔ (۱۲.۲) و از آنچه که در اثبات قضیهٔ ۱.۲ انجام داد، قضیهٔ زیر را که به «قضیهٔ مقایسهٔ استورم» معروف است، ثابت کرد که در بخش ۱ به اهمیت این قضیه اشاره کردیم.

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم برای $i=1,2$، V_i یک جواب غیربدیهی معادلهٔ $(k_iV_i')'+G_iV_i=0$ باشد، $h_i=\frac{k_iV_i'}{V_i}(\alpha)$، $h_2<h_1$ و برای هر $x\in[\alpha,\beta]$، $k_2(x)\le k_1(x)$ و $G_2(x)\ge G_1(x)$. در این صورت اگر α و β دو ریشهٔ متوالی V_1 باشند، آن‌گاه بازهٔ باز (α,β) شامل حداقل یک ریشه از V_2 است.*

برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه می‌توانید به [۵] صفحهٔ ۵۱ مراجعه کنید.

در ادامهٔ نتایج استورم که از روش‌های او حاصل شد، قضیه‌ای وجود دارد که در واژگان امروزی، «قضیهٔ جداسازی استورم[۱]» نامیده می‌شود:

قضیه ۳.۲. *اگر V_1 و V_2 دو جواب مستقل خطی از معادلهٔ $(kV')'+GV=0$ و a و b دو ریشهٔ متوالی V_1 باشند، آن‌گاه V_2 حداقل یک ریشه در بازهٔ (a,b) دارد.*

اثبات این قضیه هم در [۵] صفحهٔ ۵۰ آمده است. آخرین نتیجه از کارهای استورم که مایل به نقل آن هستیم، دغدغه‌های او دربارهٔ ریشه‌های توابع ویژهٔ مسئلهٔ مقدار مرزی در نظریهٔ نوسان است که دستاوردهای او سهم مهمی در مسئلهٔ تعیین تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ دلخواه در یک بازهٔ معین دارد و در [۴۹] به این موضوع پرداخته است. او در این کار، مسئلهٔ مقدار ویژه شامل معادلهٔ دیفرانسیل

[۱] Sturm's separation theorem

(۵.۲) به همراه شرایط مرزی جدایی‌پذیر

$$k(\alpha)V'(\alpha) - hV(\alpha) = \circ, \quad k(\beta)V'(\beta) + HV(\beta) = \circ \qquad (۱۴.۲)$$

را در نظر گرفت که در آن، k، g و ℓ تابع‌هایی مثبت هستند. ویژگی‌هایی از این مسئله که او به‌دست آورد، عبارت‌اند از اینکه مسئلهٔ مقدار ویژه شامل (۵.۲) و (۱۴.۲) دارای تعداد شمارای نامتناهی مقدار ویژهٔ حقیقی ساده است و اگر V_1، V_2، ...، V_n، ... توابع ویژهٔ متناظر با این مقادیر ویژه باشند، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، V_n دقیقا $n-1$ ریشه در بازهٔ (α, β) دارد و بین هر دو ریشهٔ متوالی V_{n+1}، دقیقاً یک ریشه از V_n قرار دارد.

اگرچه اثبات‌های استورم، شرایط، محدودیت‌ها و استانداردهای امروزی را برآورده نمی‌کنند و فقط برای استانداردهای زمان خودِ او کارآیی دارند، می‌توان بدون تغییر در ساختار اثبات‌ها و روش‌های به‌کار رفته توسط او، اثباتی کامل برای مسئلهٔ مقدار ویژهٔ شامل (۵.۲) و (۱۴.۲) با شرایط و محدودیت‌های جدید ارائه کرد. مثلاً می‌توان به اولین تلاش‌هایی که در این باره توسط بوچر[۱] در [۱۳، ۱۴] انجام گرفته است، اشاره کرد که به‌جای شرط پیوستگیِ ضرایب معادلهٔ (۵.۲)، شرط پیوستگیِ قطعه‌ای جایگزین شد. همچنین بعدها علاوه بر موضوعات مورد اشاره در بالا، ویژگی‌های دیگری دربارهٔ مسائل مقدار مرزی استورم–لیوویل با شرایط و محدودیت‌های بیشتر مورد تحقیق قرار گرفت که از مهم‌ترین آنها می‌توان به «کامل‌بودنِ» مجموعه‌ای از توابع که برحسب توابع ویژه ارائه می‌شوند، در برخی فضاهای برداری خاص اشاره کرد. بورگ[۲] در زمرهٔ اولین کسانی بود که این موضوع را برای مسئلهٔ تکین شامل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad \circ \le x < b_\circ, \ \circ < b_\circ \le \infty$$

به همراه شرایط $y(\circ)\cos\alpha + y'(\circ)\sin\alpha = \circ$ و $y \in L^{۲}(\circ, b_\circ)$ بررسی کرد که در آن، q درون بازهٔ $[\circ, b_\circ)$ پیوسته است و اگر $b_\circ < \infty$، q در $x = b_\circ$ دارای تکینی است. او نشان داد که مجموعهٔ مربعات توابع ویژهٔ مسئلهٔ فوق در فضای $L^{۲}(\circ, b_\circ)$ کامل است [۱۵] (مجموعهٔ توابع $\{y_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ در فضای $L^p(a,b)$، $۱ \le p < \infty$، کامل نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f \in L^p(a,b)$ از

$$\int_a^b f(x)\overline{y}_n(x)dx = \circ \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

بتوان نتیجه گرفت $f \equiv \circ$ که در آن، $\overline{y}_n(x)$ مزدوج مختلط $y_n(x)$ است). بعد از بورگ به‌ویژه در دهه‌های اخیر نیز هر ساله صدها مقاله دربارهٔ مسائل مقدار ویژهٔ استورم–لیوویل خطی مرتبهٔ دوم البته با

[۱] Maxime Bôcher [۲] Göran Borg

شرایط مرزی و محدودیت‌های متنوع‌تری از قبیل ناپیوستگی ضرایب، تکینی، نقطهٔ برگردان و ... منتشر می‌شود.

۳. تعمیم نظریهٔ استورم-لیوویل

بعد از آنکه استورم و لیوویل نظریهٔ خود را در [۵۲] ارائه کردند، مباحث مختلفی دربارهٔ این نظریه مطرح گردید که از میان آنها «تعمیم نظریهٔ استورم-لیوویل به معادلات مرتبهٔ بالاتر» و «مسائل استورم-لیوویل غیرخطی» بیشتر مورد توجه قرار گرفته است.

۱.۳. تعمیم نظریهٔ استورم-لیوول به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ سوم و بالاتر. لیوویل مدتی پس از چاپ مقالهٔ مشترکش با استورم، در ادامهٔ تحقیقاتش معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ سوم

$$\frac{d^۳V}{dx^۳}+rV(x)=۰ \qquad x\in[۰,۱] \tag{۱.۳}$$

همراه با شرایط مرزی جدایی‌پذیر

$$V(۰)=V'(۰)=۰, \tag{۲.۳}$$

$$V(۱)=۰ \tag{۳.۳}$$

را مورد بررسی قرار داد که در آن، r یک پارامتر است [۳۲]. او در این بررسی یک جواب صریح به‌شکل

$$V(x)=\frac{۱}{۳\rho^۲}(e^{-x\rho}+\mu e^{-\mu x\rho}+\mu^۲e^{-\mu^۲x\rho})$$

برای (۱.۳)-(۲.۳) به‌دست آورد که در آن، $r=\rho^۳$ و $\mu^۳=۱$، $\mu\neq ۱$. همچنین نشان داد که همهٔ قضایای استورم که در بخش ۲ به آنها اشاره کردیم، بجز ویژگی تعامدی (۱۰.۲)، برای مسئلهٔ مقدار مرزی (۱.۳)-(۳.۳) نیز برقرارند و به‌جای این رابطهٔ تعامدی، رابطهٔ دوتعامدی زیر برقرار است:

$$\int_۰^۱ V_m(x)U_n(x)dx=۰ \qquad m\neq n \tag{۴.۳}$$

که در آن، U_n، nاُمین تابع ویژه از مسئلهٔ مقدار مرزی زیر است که «مسئلهٔ الحاقی[۱]» متناظر با (۱.۳)-(۳.۳) نامیده می‌شود:

$$\frac{d^۳U}{dx^۳}-rU(x)=۰ \qquad x\in[۰,۱],$$
$$U(۰)=۰, \quad U(۱)=U'(۱)=۰.$$

[۱] adjoint problem

لذا شکل تغییر یافتهٔ سری فوریهٔ یک تابع مانند $f(x)$ عبارت است از

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(x)\frac{\int_0^1 f(x)U_n(x)dx}{\int_0^1 V_n(x)U_n(x)dx}.$$

او مطالعات خود را به مسائل شامل معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ بالاتر از ۳ و به شکل کلی‌تر

$$(K(L\cdots(M(NV')')'\cdots)')'+rV=0,\quad x\in[0,1] \tag{۵.۳}$$

به همراه شرایط مرزی

$$V=A,\ NV'=B,\ K(L\cdots(M(NV')')'\cdots)'=D \qquad (x=0), \tag{۶.۳}$$

$$aV+b(NV')+\cdots+cK(L\cdots(M(NV')')'\cdots)'=0 \qquad (x=1) \tag{۷.۳}$$

گسترش داد که برای هر $x\in[0,1]$ توابع $K(x)$، $L(x)$، . . . ، $M(x)$ و $N(x)$ همواره مثبت و A، B، . . . ، D و a، b، . . . ، c ضرایب ثابت مثبتی هستند [۳۳]. او نشان داد که در این حالت نیز ویژگی دوتعامدی (۴.۳) برقرار است که در اینجا V_m، mاُمین تابع ویژهٔ مسئلهٔ مقدار مرزی (۵.۳)–(۷.۳) و U_n نیز nاُمین تابع ویژهٔ مسئلهٔ الحاقی

$$(N(M\cdots(L(KU')')'\cdots)')'+(-1)^{\mu}rU=0 \qquad x\in[0,1],$$

$$DU-\cdots+(-1)^{\mu-2}B(M\cdots(L(KU')')'\cdots)$$
$$+(-1)^{\mu-1}AN(M\cdots(L(KU')')'\cdots)'=0 \qquad (x=0),$$

$$U=c,\ldots,\ N(M\cdots(L(KU')')'\cdots)'=(-1)^{\mu-1}a \qquad (x=1)$$

و μ مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل (۵.۳) است.

بعد از لیوویل نیز محققین بسیاری به‌دنبال مطالعه روی تعمیم نتایج قبلی برای مسائل استورم–لیوویل با در نظر گرفتنِ شرایط و محدودیت‌های ضعیف‌تر و پیچیده‌تر برای ضرایب معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ بالاتر از ۳ و یا ضرایب شرایط مرزی بوده‌اند. در این بین، اوریت[۱] جزء اولین کسانی است که با به‌کارگیریِ شکل‌های جدیدی از توابع گرین متناظر با یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ چهار، ساختارهای صریحی برای توابع ویژه ارائه کرد که جزئیات بیشتر در این زمینه در رسالهٔ دکتری وی در سال ۱۹۵۵ در دانشگاه آکسفورد، آمده است و نتایج مهم آن در سال ۱۹۵۷ در [۲۳] به چاپ رسیده است. در ادامهٔ

[۱] William N. Everitt

کارهای انجام شده دربارهٔ تعمیم نظریهٔ استورم-لیوویل، به کار ارزشمند بنزینگر[1] [۹] برای مطالعهٔ مسئلهٔ L_τ شامل معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$\tau(u) := u^{(n)} + a_{n-2}(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)u = \lambda u \qquad 0 \leq x \leq 1$$

به همراه شرایط مرزی جدایی‌ناپذیر

$$U_j(u) := \alpha_j u^{(k_j)}(0) + \beta_j u^{(k_j)}(1) + \sum_{k=0}^{k_j-1}\{\alpha_{j_k}u^{(k)}(0) + \beta_{j_k}u^{(k)}(1)\} = 0$$

اشاره می‌کنیم که در اینجا برای $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ داریم $a_j(x) \in L^\infty(0,1)$ و برای $j = 0, 1, 2, ..., n$،

$$0 \leq k_j \leq n-1, \;\; k_{j+1} \leq k_j, \;\; k_{j+2} < k_j, \;\; |\alpha_j| + |\beta_j| > 0.$$

همچنین $u \in C^{n-1}[0,1]$ و $u^{(n-1)}$ روی $[0,1]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است. او با استفاده از شکل مجانبی توابع ویژهٔ مسئلهٔ L_τ نشان داد که برای یک $p \in (1, \infty)$ ثابت $\{u_k\}$، دنبالهٔ توابع ویژهٔ مسئلهٔ L_τ، در $L^p(0,1)$ کامل و یک پایه برای $L^p(0,1)$ است. او همچنین ثابت کرد هرگاه r نمای مزدوج p باشد (یعنی $1/p + 1/r = 1$)، آنگاه $\{v_k\}$، دنبالهٔ توابع ویژهٔ مسئلهٔ الحاقی متناظر با L_τ نیز در $L^r(0,1)$ کامل و یک پایه برای $L^r(0,1)$ است و دنباله‌های $\{u_k\}$ و $\{v_k\}$ در رابطهٔ دوتعامدی $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$ صدق می‌کنند و برای هر $f \in L^p(0,1)$، $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\langle f, v_k\rangle u_k(x)$ تقریباً همه‌جا برقرار است. در اینجا $\langle u_i, v_j\rangle$ بیانگر ضرب داخلی u_i و v_j با تعریفِ $\int_0^1 u_i(x)\overline{v}_j(x)dx$، $\overline{v}_j$ مزدوج مختلط v_j و $\delta_{i,j}$ تابع دلتای کرونکر است.

نکتهٔ قابل ذکر در پایان این زیربخش این است که در دهه‌های اخیر روش دیگری برای مطالعهٔ ویژگی‌های عملگر استورم-لیوویل از مرتبهٔ سوم و بالاتر و مقادیر ویژه، توابع ویژه و طیف‌های متناظر آنها به‌کار گرفته می‌شود. در این روش، ساختار ماتریسی عملگر داده‌شده ارائه می‌شود و با استفاده از خواص ماتریس‌ها، ماهیت توابع ویژه و مقادیر ویژهٔ عملگر مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. برای مثال، عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ چهارم

$$L_p(u) := D^4 u - (p_1(x)u')' + p_2(x)u \qquad (۸.۳)$$

را روی بازهٔ $(0,1)$ به همراه شرایط مرزی

$$u(0) = u''(0) = 0 = u(1) = u''(1) \qquad (۹.۳)$$

[1] Harold E. Benzinger

در نظر بگیرید که در آن، $D = d/dx$ و تابع‌های $p_۱$ و $p_۲$ حقیقی‌مقدار و متعلق به $L^۲[۰,۱]$ هستند. متناظر با (۸.۳)-(۹.۳)، دستگاه ماتریسی از نوع استورم-لیوویل $\mathbf{M}g = \lambda \mathbf{B}g$ ارائه می‌شود که در آن،

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_۱ & M_۲ \\ M_۳ & M_۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_۱ & B_۲ \\ B_۳ & B_۴ \end{bmatrix}$$

و

$$M_۱ = D^۵ - p_۱ D^۳ - ۲p_۱' D^۲ + (\frac{۸}{۳}p_۲ - p_۱'')D + ۲p_۱', \quad M_۲ = -\frac{۱۰}{۳}D^۳ + \frac{۴}{۳}p_۱ D + \frac{۲}{۳}p_۱',$$

$$M_۳ = -۳p_۱' D^۴ + ۱۰p_۲ D^۳ + (۳p_۱ p_۱' + ۵p_۲')D^۲ + (p_۲'' - ۴p_۱ p_۲ + ۳(p_۱')^۲)D - ۶p_۱' p_۲,$$

$$M_۴ = D^۵ - ۵p_۱ D^۳ - p_۱' D^۲ + (۴p_۱^۲ - ۸p_۱'' - ۲۴p_۲)D + (۲p_۱ p_۱' - ۲p_۱'' - ۶p_۲'),$$

$$B_۱ = \frac{۸}{۳}D, \quad B_۲ = ۰, \quad B_۳ = ۱۰D^۳ + ۴p_۱ D - ۶p_۱', \quad B_۴ = -۲۴D.$$

در این صورت اگر u و v جواب‌هایی از معادلهٔ $L_p(u) = \lambda u$ باشند، آن‌گاه $\mathbf{M}\phi = \lambda \mathbf{B}\phi$ که در آن، $\phi = (uv, u'v')^T$. همچنین برای $\{\psi_i\}$ و $\{\chi_i\}$ که به‌ترتیب دنباله‌های توابع ویژهٔ متناظر با عملگرهای $\mathbf{M} - \lambda\mathbf{B}$ و $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{B})^*$ هستند، رابطهٔ دوتعامدیِ $\langle \chi_i, \mathbf{B}\psi_j \rangle = \delta_{i,j}$ برقرار است که $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{B})^*$ ترانهادهٔ مزدوج ماتریس $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{B})$ است (برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر، [۱۸] را ببینید).

۲.۳. مسائل استورم-لیوویل غیرخطی. با توجه به تأثیر عمیقی که نظریهٔ استورم-لیوویل طی سال‌ها بر روی گسترش نظریهٔ طیفی برای معادلات دیفرانسیل خطی گذاشته است، تلاش‌های بسیاری برای گسترش ایده‌ها و روش‌های به‌کار رفته در این نظریه به معادلات دیفرانسیل غیرخطی صورت گرفته است. بر این اساس، مسائل مقدار ویژهٔ استورم-لیوویل نه‌تنها در رابطه با معادلات دیفرانسیل خطی، بلکه دربارهٔ معادلات استورم-لیوویل غیرخطی نیز مورد مطالعه قرار گرفت. به‌عنوان یک مثال مشخص از معادلهٔ استورم-لیوویل غیرخطی، معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$-u'' = \lambda \sin u \tag{۱۰.۳}$$

که در مسئلهٔ حرکت آونگ ساده ظاهر می‌شود. در اینجا موقعیت آونگ با تابع u توصیف می‌شود که زاویهٔ بین میله با بردار در جهتِ عمودی رو به پایین و λ ثابت وابسته به شتاب گرانشی و ویژگی‌های آونگ است. یک مثال فیزیکی دیگر که در مسائل انشعاب مطرح شد، کمانش از یک ستون است [۷]. این مثال که نخست در سال ۱۷۴۴ توسط اویلر مورد مطالعه قارگرفت، به فشرده‌سازی یک ستون راست نازک در راستای محور افقی می‌پردازد. اگر طول ستون برابر با π، $u(x)$ بیانگر زاویهٔ بین خط مماس بر ستون در نقطهٔ x با محور افقی (محور xها) و λ رانش اعمال شده (اندازه‌ای از بزرگی نیروی فشاری) باشد، آن‌گاه برای هر $۰ < x < \pi$، u در معادلهٔ (۱۰.۳) و شرایط مرزی $u'(۰) = u'(\pi) = ۰$ صدق می‌کند.

تا امروز، اغلب مسائل استورم-لیوویل غیرخطی در ارتباط با دو دسته معادلات مورد بررسی قرار گرفته‌اند. دستهٔ اول، معادلات استورم-لیوویل غیرخطی مرتبهٔ دوم به‌شکل

$$-(p(x)y')' + F(x, y, y') = \lambda w(x)y \qquad (۱۱.۳)$$

و یا

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda F(x, y, y') \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن، F نسبت به y یا y' تابعی غیرخطی است و دستهٔ دوم، معادلات استورم-لیوویل کسری غیرخطی به‌شکل

$$p_1(x)D_1(p_2(x)D_2(p_3(x)y(x))) = G_1(x, y, y') + \lambda G_2(x, y, y') \qquad (۱۳.۳)$$

که در اینجا حداقل یکی از G_iها نسبت به y یا y' تابعی غیرخطی است و هر یک از نمادهای D_1 و D_2 می‌تواند بیانگر مشتق کسری ریمان-لیوویل و یا مشتق کسری کاپوتو[۱] باشد که جلوتر در این رابطه توضیحات بیشتری خواهیم داد.

به نظر می‌رسد که اولین مطالعات پیشرفته روی دستهٔ اول در دههٔ ۱۹۶۰ توسط ولکوویسکی[۲] صورت گرفته باشد. وی با در نظر گرفتن یک معادله به‌شکل (۱۱.۳) و با فرضِ پیوستگی ضرایب آن، به‌همراه شرایط مرزی جدایی‌پذیر روی بازهٔ متناهی $[\alpha, \beta]$، مسئلهٔ وجود جواب‌های غیربدیهی را بررسی و ثابت کرد برای هر عدد صحیح مثبت k، جوابی مانند y_k از مسئله وجود دارد به‌طوری که دارای $k-1$ ریشه درون بازهٔ (α, β) است [۵۵]. بعد از او نیز در سال ۱۹۷۰ رابینوویتز[۳] برای یک مسئلهٔ مقدار مرزی شامل معادلهٔ (۱۲.۳) با ضرایب پیوسته به‌همراه شرایط مرزی جدایی‌پذیر روی بازهٔ $[0, \pi]$، نتایجی مشابه با نتایج ولکوویسکی به‌دست آورد [۴۱]. بعدها به‌ویژه در دو دههٔ اخیر، بعضی از پژوهشگران با انتخاب شرایطی ضعیف‌تر برای ضرایب معادلات (۱۱.۳) و (۱۲.۳)، این دسته از معادلات را مورد بررسی قرار دارند. برای مثال، در [۱۷] برای یک مسئلهٔ مقدار مرزی جدایی‌پذیر تکین روی بازهٔ $(0, 1)$ شامل معادلهٔ (۱۱.۳) با شرط $p(x) = x^{2\mu}$، $\mu > 0$، $w \equiv 1$، $F = -y^r$ و $r > 1$، وجود جواب‌های مثبت پیوسته بررسی شد. همچنین در [۵۳]، مطالعاتی مشابه برای یک مسئلهٔ شامل معادلهٔ (۱۲.۳) با تابع غیرخطی F، $q \equiv 0$ و یک تابع $p(x)$ که در نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $(0, 1)$ دارای تکینی است، انجام گرفت. موضوع دیگر قابل ذکر دربارهٔ دستهٔ اول، پرداختن به مسائل عکس[۴] متناظر با این دسته از معادلات است که در دههٔ اخیر مورد توجه قرارگرفته است و در این باره علاقه‌مندان را به مطالعهٔ [۴۲، ۴۳] ارجاع می‌دهیم (اگر در مسئلهٔ استورم-لیوویل، ضرایب معادله و شرایط مرزی معلوم باشند و هدف، بررسی و تعیین مقادیر

[۱] Caputo [۲] Jay H. Wolkowisky [۳] Paul Henry Rabinowitz [۴] inverse problems

ویژه و جواب‌های ویژه باشد، آن‌گاه مسئله را از نوع مستقیم و در صورتی که مقادیر ویژه معلوم باشند و هدف، تعیین ضرایب معادله و شرایط مرزی باشد، آن را از نوع عکس می‌نامیم).

دربارهٔ دستهٔ دوم از معادلات استورم–لیوویل غیرخطی، یعنی معادلات استورم–لیوویل کسری، نخست لازم است تعریف‌های انتگرال ریمان–لیوویل و مشتقات کسری از نوع ریمان–لیوویل و کاپوتو را بیان کنیم. لذا مطابق [۳۸]، این تعریف‌ها و همچنین یک رابطهٔ مهم بین آنها را ارائه می‌کنیم. لازم به ذکر است که خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای مطالعه دربارهٔ معادلات استورم–لیوویل خطی از نوع کسری، [۸، ۱۲، ۲۰] را ملاحظه نمایند.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم تابع f برای $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $\alpha \in (۰,۱]$. انتگرال‌های چپ و راست ریمان–لیوویل تابع f از مرتبهٔ α به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I^{\alpha}_{a,+}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-۱}f(t)dt \qquad x>a,$$

$$(I^{\alpha}_{b,-}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-۱}f(t)dt \qquad x<b$$

که Γ بیانگر تابع گاما است.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم تابع f برای $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $\alpha \in (۰,۱]$. مشتقات چپ و راست ریمان–لیوویل و کاپوتو تابع f مرتبهٔ α به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(D^{RL,\alpha}_{a,+}f)(x) = \frac{d}{dx}(I^{۱-\alpha}_{a,+}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \qquad x>a,$$

$$(D^{RL,\alpha}_{b,-}f)(x) = -\frac{d}{dx}(I^{۱-\alpha}_{b,-}f)(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}(-\frac{d}{dx})\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \qquad x<b,$$

$$(D^{C,\alpha}_{a,+}f)(x) = (I^{۱-\alpha}_{a,+}\frac{df}{dx})(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \qquad x>a,$$

$$(D^{C,\alpha}_{b,-}f)(x) = (I^{۱-\alpha}_{b,-}(-\frac{df}{dx}))(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\int_x^b \frac{-f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \qquad x<b.$$

با توجه به این تعریف‌ها، برای سه تابع f، g و h رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\int_a^b f(x)D^{RL,\alpha}_{b,-}(g(x)D^{C,\alpha}_{a,+}h(x))dx =$$
$$\int_a^b g(x)D^{C,\alpha}_{a,+}(f(x)D^{C,\alpha}_{a,+}h(x))dx - f(x)I^{۱-\alpha}_{b,-}(g(x)D^{C,\alpha}_{a,+}h(x))|_a^b. \quad (۱۴.۳)$$

برای تشریح نظریهٔ طیفی مسئلهٔ استورم-لیوویل کسری غیرخطی، از بین حالات موجود برای معادلهٔ (۱۳.۳)، به‌عنوان مثال حالتی را که $D_۱$ مشتق ریمان-لیوویل راست و $D_۲$ مشتق کاپوتو چپ است،

$$G_۱(x,y,y') = ۰ \text{ و } G_۲(x,y,y') = w(x)y^۲(x)$$

در نظر می‌گیریم و احکامی را دربارهٔ خودالحاقی بودنِ عملگر استورم-لیوویل کسری فوق، حقیقی بودنِ مقادیر ویژه و متعامد بودنِ توابع ویژهٔ متناظر، ثابت می‌کنیم. به این منظور، برای $۰ < \alpha < ۱$ عملگر استورم-لیوویل کسری $\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu}$ را با

$$\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} = -D_{۱,-}^{RL,\alpha} p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} \qquad \nu \in [۰,\infty) \tag{۱۵.۳}$$

تعریف می‌کنیم. متناظر با $\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu}$، مسئلهٔ مقدار مرزی استورم-لیوویل کسری غیرخطی شامل معادلهٔ

$$\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y(x) = \lambda w(x) y^۲(x) \qquad ۰ < x \leq ۱ \tag{۱۶.۳}$$

به همراه شرایط مرزی

$$I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{RL,\alpha} y(x))|_{x=۰} = ۰, \qquad y(۱) = ۰ \tag{۱۷.۳}$$

را در نظر می‌گیریم که $p(x) \neq ۰$، p روی بازهٔ $(۰,۱]$ حقیقی و پیوسته است و برای هر $x \in (۰,۱]$، $w(x) > ۰$. همچنین ضرب داخلی دو تابع جواب مانند y و $\tilde{y}$ برای مسئلهٔ فوق عبارت است از

$$\langle y, \tilde{y} \rangle := \int_۰^۱ y(x)\tilde{y}(x)dx.$$

قضیه ۳.۳. *عملگر $\boldsymbol{L}_B^{\alpha,\nu}$ روی $(۰,۱]$ خودالحاقی است.*

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر دو تابع جواب مانند $y_۱$ و $y_۲$ برای مسئلهٔ مقدار مرزی (۱۶.۳)-(۱۷.۳)،

$$\langle \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۱, y_۲ \rangle = \langle y_۱, \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۲ \rangle.$$

با توجه به (۱۵.۳) داریم

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۱, y_۲ \rangle &= \int_۰^۱ \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۱(x).y_۲(x)dx \\
&= \int_۰^۱ y_۲(x)\{-D_{۱,-}^{RL,\alpha} p(x)(D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۱(x))\}dx \\
&= -\int_۰^۱ y_۲(x) D_{۱,-}^{RL,\alpha} p(x)(D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۱(x))dx.
\end{aligned}$$

بنابر (۱۴.۳) و اینکه $y_۱$ و $y_۲$ در (۱۷.۳) صدق می‌کنند، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۱, y_۲\rangle &= -\int_۰^۱ p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha}(y_۲(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۱(x))dx \\ &+ y_۲(x) I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۱(x))\Big|_۰^۱ \\ &= -\int_۰^۱ p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha}(y_۲(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۱(x))dx. \qquad (۱۸.۳)\end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\langle y_۱, \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y_۲\rangle = -\int_۰^۱ p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha}(y_۱(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} y_۲(x))dx$$

این به همراه رابطهٔ (۱۸.۳) حکم را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۴.۳. *مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ استورم-لیوویل کسری (۱۶.۳)-(۱۷.۳) حقیقی هستند.*

اثبات. فرض کنیم λ یک مقدار ویژه برای مسئلهٔ مقدار مرزی (۱۶.۳)-(۱۷.۳) و y نیز تابع ویژه متناظر با λ باشد. در این صورت برای $\overline{y}$، مزدوج مختلط y، داریم

$$\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} \overline{y}(x) = \lambda w(x) \overline{y}^۲(x) \qquad ۰ < x \le ۱, \qquad (۱۹.۳)$$

$$I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{RL,\alpha} \overline{y}(x))|_{x=۰} = ۰, \qquad \overline{y}(۱) = ۰. \qquad (۲۰.۳)$$

با ضرب دو طرفِ رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۹.۳) به‌ترتیب در $\overline{y}^۲$ و $y^۲$ و کم کردنِ طرف‌های نظیر تساوی‌های به‌دست‌آمده، نتیجه می‌شود

$$(\lambda - \overline{\lambda}) w(x) y^۲(x) \overline{y}^۲(x) = \overline{y}^۲(x) \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y(x) - y^۲(x) \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} \overline{y}(x).$$

از سوی دیگر، بنابر ضابطهٔ عملگر $\mathbf{L}_B^{\alpha,\nu}$ در (۱۵.۳) و از رابطهٔ (۱۴.۳)، برای دو تابع y و $\overline{y}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ y^۲(x) \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} \overline{y}(x)dx &= -\int_۰^۱ p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha}(y^۲(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} \overline{y}(x))dx \\ &+ y^۲(x) I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} \overline{y}(x))\Big|_۰^۱. \qquad (۲۱.۳)\end{aligned}$$

از (۱۴.۳) و (۲۱.۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda}) \int_۰^۱ w(x) y^۲(x) \overline{y}^۲(x)dx &= \int_۰^۱ \overline{y}^۲(x) \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} y(x)dx - \int_۰^۱ y^۲(x) \mathbf{L}_B^{\alpha,\nu} \overline{y}(x)dx \\ &= \overline{y}^۲(x) I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} y(x))|_۰^۱ - y^۲(x) I_{۱,-}^{۱-\alpha}(p(x) D_{۰,+}^{C,\alpha} \overline{y}(x))|_۰^۱. \qquad (۲۲.۳)\end{aligned}$$

به این ترتیب با توجه به شرایط مرزی (۱۷.۳) و (۲۰.۳)، به‌دست می‌آوریم

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_{\circ}^{۱} w(x)|y(x)|^{۲}dx=\circ.$$

حال چون $w(x)>\circ$ و y نیز یک جواب غیربدیهی مسئلهٔ (۱۶.۳)-(۱۷.۳) است، از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم $\lambda=\overline{\lambda}$. □

قضیه ۵.۳. *اگر $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ دو مقدار ویژهٔ متمایز مسئلهٔ استورم-لیوویل کسری* (۱۶.۳)-(۱۷.۳) *و $y_{۱}$ و $y_{۲}$ به‌ترتیب توابع ویژهٔ متناظرشان باشند، آن‌گاه $y_{۱}$ و $y_{۲}$ روی بازهٔ $[\circ,۱]$ نسبت به تابع $w(x)$ متعامدند، یعنی*

$$\int_{\circ}^{۱} w(x)y_{۱}(x)y_{۲}(x)dx=\circ.$$

اثبات. مشابه برهان قضیهٔ قبل، با جانشینیِ $y_{۱}$ و $y_{۲}$ به‌ترتیب به‌جای y و $\overline{y}$ و نیز $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ به‌ترتیب به‌جای λ و $\overline{\lambda}$، از رابطهٔ (۲۲.۳) و به‌کارگیریِ شرایط مرزی (۱۷.۳) و (۲۰.۳) برای $y_{۱}$ و $y_{۲}$، به‌دست می‌آوریم

$$(\lambda_{۱}-\lambda_{۲})\int_{\circ}^{۱} w(x)y_{۱}^{۲}(x)y_{۲}^{۲}(x)dx=\circ. \tag{۲۳.۳}$$

چون $w(x)y_{۱}(x)y_{۲}(x)=\sqrt{w(x)}.\sqrt{w(x)}y_{۱}(x)y_{۲}(x)$، بنابر نامساوی کُشی-شوارتز خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{۱} w(x)y_{۱}(x)y_{۲}(x)dx\leq\Big(\int_{\circ}^{۱} w(x)dx\Big)^{۱/۲}\Big(\int_{\circ}^{۱} w(x)y_{۱}^{۲}(x)y_{۲}^{۲}(x)dx\Big)^{۱/۲}.$$

این به همراه (۲۳.۳) و $\lambda_{۱}\neq\lambda_{۲}$ حکم را نتیجه می‌دهد. □

مراجع

[۱] دهخدا، ع.، *لغت‌نامهٔ دهخدا*، جلد ۴، ص. ۲۲۰۵، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۲۸.

[2] Agarwal R., Grace S., O'Regan D., *Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[3] Agarwal R., Grace S., O'Regan D., *Oscillation Theory for Second-Order Dynamic Equations*, Taylor and Francis, London, 2003.

[4] Ahlbrandt C., Peterson A., *Discrete Hamiltionian Systems*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[5] Al-Gwaiz M. A., *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.

[6] Amrein W. O., Hinz A. M., Pearson D. B., *Sturm-Liouville Theory, Past and Present*, Birkhäuser, Berlin, 2005.

[7] Antman S. S., Bifurcation problems for nonlinearly elastic structures, in *Applications of Bifurcation Theory*, Academic Press, New York, 1977.

[8] Bensidhoum F. Z., Dib H., On some regular fractional Sturm-Liouville problems with generalized Dirichlet conditions, *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications*, June 23-25, Catania, Italy, 2014.

[9] Benzinger H. E., Pointwise and norm convergence of a class of biorthogonal expansions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **231** (1977), 259-271.

[10] Bernoulli J., Meditationes de chordis vibrantibus, *Comm. Aead. Sci. Petrop.*, **3** (1728), 13-28.

[11] Bernoulli D., Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae, *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, **6** (1732-33), 108-122.

[12] Blaszczyk T., Ciesielski M., Numerical solution of fractional Sturm-Liouville equation in integer form, *Frac. Calculus and Appl. Anal.*, **17** (2014), 307-320.

[13] Bôcher M., The theorems of oscillation of Sturm and Klein, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **4** (1897-1898), 295-313.

[14] Bôcher M., *Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la Théorie des Equations Différentielles Linéaires, et leurs Développements Modernes*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[15] Borg G., On the completeness of some sets of functions, *Acta. Math.*, **81** (1949), 265-283.

[16] Brunovský P., Poláčik P., Sandstede B., Convergence in general periodic parabolic equations in one space dimension, *Nonlinear Anal. TMA*, **18** (1992), 209–215.

[17] Castro H., Bifurcation analysis of a singular non-linear Sturm-Liouville equation, *Commun. Contemp. Math.*, **16** (2014), 14500121-145001254

[18] Caudill L. F., Perry P. A., Schueller A.W., Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators, *SIAM J. Math. Anal.*, **29** (1998), 935-966.

[19] Colladon D., Sturm C., Mémoire sur la compression des liquides, *Mém. Savants Etrang. l'Acad. Royale Sci.*, **5** (1834), 267-347.

[20] Darzi R., Mohammadzadeh B., Fractional Sturm-Liouville problems with α-ordinary and α-singular points, *J. Fractional Calculus and Appl.*, **5** (2014), 202-208.

[21] Epstein C. L., Weinstein M. I., A stable manifold theorem for the curve shortening equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **40** (1987), 119–139.

[22] Erbe L., Kong Q., Zhang B., *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Monographs in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1995.

[23] Everitt W. N., The Sturm-Liouville problem for fourth-order ordinary differential equations, *Quart. J. Math.*, **8** (1957), 146-160.

[24] Feireisl E., Poláčik P., Structure of periodic solutions and asymptotic behavior for time-periodic reaction-diffusion equations on R, *Adv. Differ. Equat.*, **5** (2000), 583–622.

[25] Fourier J., *Théorie Analytique de la Chaleur*, F. Didot, Paris, 1822.

[26] Gage M., Hamilton R. S., The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Differ. Geom.*, **23** (1986), 69–96.

[27] Grayson M. A., Shortening embedded curves, *Ann. Math.*, **129** (1989), 71–111.

[28] Györi I., Ladas G., *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Oxford Press, New York, 1991.

[29] Liouville J., Mémoire sur le calcul aux différences partielles, Unpublished manuscripts presented to the Academie des Sciences on Dec. 1., 1828.

[30] ——, Recherches sur la théorie physico-mathématique de la chaleur, *Ann. Math.*, **21** (1830-31), 133-181.

[31] ——, Démonstration d'un théorème du à M. Sturm relatif à une classe de fonctions transcendantes, *Journ. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 269-277.

[32] ——, Mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$, *Journ. Ec. Polytechn. Paris*, **15** (1837), 85-117.

[33] ——, Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires, et sur le développement des fonctions en séries, *Journ. Math. Pures Appl.*, **3** (1838), 561-614.

[34] ——, Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles, *Mém. Savans Etrang. Acad. Sci. Paris*, **5** (1838), 559-606.

[35] ——, Sur les conditions de convergence d'une classe générale de séries, *Journ. Math. Pures Appl.*, **5** (1840), 356-359.

[36] Lützen J., Sturm and Liouville's work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm-Liouville theory, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **29** (1984), 309-376.

[37] Lützen J., *Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1990.

[38] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[39] Poláčik P., Transversal and nontransversal intersections of stable and unstable manifolds in reaction diffusion equations on symmetric domains, *Differ. Integr. Equat.*, **7** (1994), 1527–1545.

[40] Pont J. C., Padovani F., *Complete Works of Charles-François Sturm*, Birkhäuser, Basel, 2008.

[41] Rabinowitz P. H., Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order ordinary differential equations, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **23** (1970), 939-961.

[42] Shibata T., Inverse spectral problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Electronic J. Diff. Eq.*, **2007** (2007), 1-10.

[43] Shibata T., Direct and inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Research Institute for Math. Sci.*, 17-28, 2011.

[44] Sturm C., Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Bull. Sci. Math. Astr. Phys.*, **11** (1829), 419-422.

[45] ——, Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, *Bull. Sci. Math. Astr. Phys.*, **12** (1829), 315-322.

[46] ——, Analyse d'un mémoire sur les propriétés générales des fonctions qui dépendent d'équations différentielles linéaires du second ordre, *L'institut Journ. Acad. et Soc. Sci.*, **9** (1833), 219-223.

[47] ——, Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mém. Savants Etrangers, Acad. Sci. Paris*, **6** (1835), 271-318.

[48] ——, Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journ. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 106-186.

[49] ——, Memoire sur une classe d'équations à differences partielles, *Journ. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 373-444.

[50] Sturm C., Liouville J., Démonstration d'un théorème de M. Cauchy relatif aux racines imaginaires des équations, *Journ. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 278-289.

[51] ——, Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des equations simultanées, *Comp. Rend.*, **4** (1837), 720-739.

[52] ——, Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une meme équation différentielle linéaire, contenant un parametre variable, *Journ. Math. Pures Appl.*, **2** (1837), 220-233.

[53] Sun Y., Liu L., Cho Y. J., Positive solutions of singular nonlinear Sturm-Liouville boundary value problems, *ANZIAM J.*, **45** (2004), 557-571.

[54] Taylor B., De motu nervi tensi, *Phil. Trans.*, **28** (1713), 26-32.

[55] Wolkowisky J. H., A nonlinear Sturm-Liouville problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 634-636.

سیدسیف‌اله موسی‌زاده: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: s.mosazadeh@kashanu.ac.ir