فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۵۹ تا ۸۰

مجموعه‌های متخلخل و پدیده‌های اَبَرعام در آنالیز ریاضی

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، مفهوم تخلخل که اساساً مفهومی هندسی برای سنجش بزرگیِ مجموعه‌ها است و برخی از تعمیم‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس از بیان پیوند این مفهوم با دیگر مفاهیمی که بدین منظور به‌کار گرفته می‌شوند، آن را برای مطالعهٔ گستره‌ای پهناور از رفتارهای نامتعارف توابع در فضاهای تابعی گوناگون به‌کار خواهیم گرفت و خواهیم دید که بسیاری از این رفتارها به‌تعبیری که خواهد آمد، اَبَرعام هستند.

۱. مقدمه

در دههٔ ۱۸۷۰ کانتور به مهم‌ترین مسئلهٔ آنالیز ریاضی در آن روزگار، یعنی بررسی یکتاییِ سری فوریه توابع پرداخت و این موضوع، او را به پژوهش‌های انقلابی‌اش دربارهٔ مفهوم بزرگیِ مجموعه‌ها رهنمون شد. در آنالیز ریاضی مفاهیم طبیعی بسیاری برای سنجش بزرگی و کوچکیِ مجموعه‌ها معرفی شده است مانند: شمارایی، کوچک‌بودن به‌معنای اندازه، کوچک‌بودن به‌معنای رسته، *تخلخل*[۱]، هار-پوچی، Γ-پوچی و همچنین مفاهیم مختلف مجموعه‌های *نازک*[۲] که در آنالیز هارمونیک تعریف شده‌اند. در [۲] برخی از این مفاهیم را معرفی کرده‌ایم. همچنین در [۱۷] بررسی نسبتاً جامعی از مفاهیم کوچک‌بودن از دیدگاه نظریهٔ توصیفیِ مجموعه‌ها آمده است که به کار متخصصان می‌آید. مفهوم تخلخل، یکی از این مفاهیم کوچک‌بودن است که به‌طور طبیعی در نظریهٔ مشتق‌پذیری و بررسی سری فوریهٔ توابع ظاهر می‌شود. این مفهوم، نخست

عبارات و کلمات کلیدی. مجموعه‌های متخلخل؛ مجموعه‌های هیچ‌جا چگال؛ اَبَرعام بودنِ توپولوژیکی؛ پدیده‌های نامتعارف در آنالیز ریاضی.

[۱] porosity [۲] thin

در سال ۱۹۲۰ و سپس به‌طور منسجم‌تر در سال ۱۹۶۷ معرفی و به‌کار گرفته شد. *مجموعه‌های متخلخل*[۱] نقش مجموعه‌های استثنایی را ایفا می‌کنند که در حوزه‌های مختلفی از آنالیز ریاضی ظاهر می‌شوند. مجموعهٔ متخلخل هم به‌لحاظ توپولوژیکی (بِر) کوچک است و هم به‌لحاظ اندازهٔ لبگ. از این‌رو جالب است بدانیم که آیا می‌توان نتایجی را که برحسبِ این دو مفهوم به‌دست آمده‌اند، با استفاده از مفهوم تخلخل بهبود بخشید. چنانچه رفتاری از همهٔ توابع عضو یک فضای تابعی به‌استثنای مجموعه‌ای از رستهٔ اول سر بزند، آن رفتار یا پدیده را *عام*[۲] می‌نامند. با جایگزین کردن مجموعه از رستهٔ اول با مجموعه‌های متخلخل در این تعریف، رفتارهای *اَبَرعام*[۳] حاصل می‌شود. چنین مفاهیمی در تشخیص بسیار نادر یا بسیار رایج بودنِ پدیده‌ها در حوزه‌های گوناگون ریاضیات به ما کمک می‌کنند. همچنین این مفاهیم برهان‌های وجودی اما غیرسازنده برای برخی رفتارها در اختیار می‌گذارند.

در این مقاله، قصد داریم مفهوم هندسیِ مجموعهٔ متخلخل را برای سنجش بزرگی و کوچکیِ مجموعه‌های متشکل از توابع با رفتار نامتعارف معرفی کنیم. پدیده‌های عجیب و نامتعارف، گستره‌ای پهناور در آنالیز ریاضی دارند و غالباً با رفتار توابع در پیوند هستند. تعمیم‌های تخلخل و بسیاری از کاربردهای این مفهوم را در دو بخش مجزا خواهیم آورد.

۲. تخلخل و اَبَرعام بودنِ توپولوژیکی

تخلخل، مفهومی هندسی است که برای سنجش کیفیِ بزرگی و کوچکیِ مجموعه‌ها به‌کار می‌رود. برای زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{R}$، تخلخل در نقطهٔ دلخواه x به‌نوعی نشان‌دهندهٔ اندازهٔ «سوراخ‌های» موجود در نزدیکی x در مجموعهٔ A در مقیاس‌های کوچک است. به‌یاد آورید که مجموعهٔ A در فضای متری X *هیچ‌جا چگال* است اگر هر گوی باز در X به مرکز نقطه‌ای از A، شامل یک زیرگوی باز مجزا از A باشد. همهٔ مفاهیم گوناگون تخلخل ناظر بر شرط‌هایی هستند که بزرگی و یا محل این زیرگوی‌ها را به‌نوعی محدود می‌کنند. مجموعهٔ *متخلخل* نه‌تنها هیچ‌جا چگال است، بلکه به‌تعبیری قوی‌تر، کوچک است یعنی اینکه در نزدیکی هر نقطه از آن، سوراخی در آن مجموعه وجود دارد که به‌اصطلاح، بزرگ است. برتری نسبیِ مفهوم تخلخل بر دو مفهومِ از رسته اول بودن و اندازه‌-صفر بودن در این است که چنانچه ثابت کنیم مجموعه σ-*متخلخل* است، با یک برهان، دو حکمِ از رسته اول بودن و اندازه‌-صفر بودن را به‌دست آورده‌ایم. محاسبات مربوط به تخلخل، به‌گونه‌ای طبیعی در برخی مسائل آنالیز حقیقی به‌ویژه در نظریهٔ مشتق‌پذیری و سری فوریه ظاهر می‌شوند. ظاهراً اولین بار دانژوا[۴]، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۹۲۰ در مطالعات خود دربارهٔ سری‌های مثلثاتی و مشتقات متقارن مرتبهٔ دوم، این مفاهیم را البته با نامی دیگر، معرفی کرده و به‌کار گرفته است. او به هر مجموعهٔ *تام*[۵] از اعداد حقیقی، یک شاخص نسبت داد: اگر $P \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای تام باشد و

[۱] porous sets [۲] generic [۳] supergeneric [۴] A. Denjoy [۵] perfect set

$x, x+h_\circ \in P$ به‌طوری که $h_\circ > \circ$، تعریف می‌کنیم

$$\alpha_+(x,h_\circ) = \inf\{\alpha \,|\, \exists\{h_n\}_{n=1}^{\infty}, \circ < h_{n+1} < h_n \leq \alpha h_{n+1}, h_n \to \circ, x+h_n \in P\}$$

و شاخص راست، $\alpha_+(x)$، را به‌صورت $\lim_{h_\circ \to \circ} \alpha_+(x,h_\circ)$ تعریف می‌کنیم. همچنین تخلخل مجموعهٔ P با استفاده از دنباله‌ای از بازه‌های (a_n, b_n) در P به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_+(x,h_\circ) = \sup\left\{p \,|\, p = \frac{b_n - a_n}{h_\circ}, (a_n,b_n) \subseteq (x, x+h_\circ)\right\}$$

و $p_+(x) = \lim_{h_\circ \to \circ} p_+(x,h_\circ)$. این اولین صورت از تعریف تخلخل است. برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر، به [۵] مراجعه کنید. خینچین[۱] و کانتُرُویچ[۲] در سال ۱۹۳۲ نیز از این مفهوم استفاده کرده‌اند و به نظر می‌رسد اولین بار در سال ۱۹۵۲ پیاتتسکی-شاپیرو[۳] این مفهوم را صریحاً در نظریهٔ سری‌های مثلثاتی به‌کار برده است.

مطالعهٔ مجموعه‌های σ-*متخلخل* با کار دِلژِنکُ[۴] در سال ۱۹۶۷ آغاز شد. او در رسالهٔ دکتری‌اش در سال ۱۹۶۴ به بررسی ویژگی‌های مرزی توابع دلخواه پرداخت. سابقهٔ چنین بررسی‌ای به کارهای فاتو به سال ۱۹۰۶ می‌رسد. ثابت شده بود که اگر f یک تابع تحلیلی روی قرص واحد و ζ یک نقطهٔ مرزی آن و $E_{VV}(f)$ مجموعهٔ نقاطی همچون ζ باشد که مجموعهٔ نقاط حدی $f(z)$ هنگامی که z به ζ با زاویه V^ζ و رأس واقع در ζ میل کند، با یکدیگر برابر نباشند، آنگاه $E_{VV}(f)$ مجموعه‌ای از رستهٔ اول است. دِلژِنکُ در سال ۱۹۵۹ ثابت کرده بود که این مجموعه اندازه-صفر است. او در رساله‌اش و مقاله‌ای به سال ۱۹۶۷ اولین بار اصطلاح مجموعهٔ متخلخل[۵] و مجموعه‌های σ-متخلخل را به‌کار برد و این نتیجه را علاوه بر دیگر نتایج، بهبود بخشید. او نشان داد که برخی از مجموعه‌های خاص که در نظریهٔ *مجموعه‌های خوشه‌ای*[۶] ظاهر می‌شوند، σ-متخلخل هستند. همچنین دریافت که ردهٔ مجموعه‌های σ-متخلخل در $\mathbb{R}$، زیررده‌ای از ردهٔ مجموعه‌های اندازه-صفر و رستهٔ اول و در واقع زیررده‌ای سره از آنها است؛ البته اثباتی برای این احکام به‌دست نداد. مطلبی مشابه در مقالهٔ مشترک آلفورس[۷] و بیورلینگ[۸] دربارهٔ توابع مختلط به سال ۱۹۵۰ نیز به‌کار رفته است. پس از پژوهش‌های دِلژِنکُ، قضیه‌هایی مشابه در نظریهٔ مجموعه‌های خوشه‌ای ثابت شد. مفهوم مجموعهٔ خوشه‌ای را اولین بار پُل پَنلُوِه[۹]، ریاضیدان و سیاستمدار فرانسوی، طی درس‌گفتارهایش در بابِ معادلات دیفرانسیل در سال ۱۸۹۵ تعریف کرده و به‌کار برده است. او این مفهوم را به‌منظور بیان توصیفیِ شهودی از مشخص‌سازی رفتار توابع تحلیلی در همسایگی نقاط تکین دامنه‌شان تعریف کرد. بعداً این مفهوم به توابع و حالت‌های دیگر تعمیم داده شد.

---

[۱] A. Khintchine [۲] L.V. Kantorovich [۳] I. Piatetski-Shapiro [۴] E. P. Dolženko [۵] poristoe množestvo
[۶] cluster sets [۷] L. V. Ahlfors [۸] A. Beurling [۹] P. Painlevé

فرض کنیم f تابعی (حقیقی یا مختلط) با دامنهٔ D و z_0 نقطه‌ای در بستار D باشد. مجموعهٔ خوشه‌ای f در z_0، مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند α است که یک دنباله از عضوهای دامنه همگرا به z_0 و متمایز از z_0 موجود باشد به‌طوری که تصویر جمله‌های آن دنباله تحت f، به α میل کند. جزئیات بیشتر را می‌توان در [۶] یافت. در اواخر دههٔ ۱۹۴۰ زاهورسکی[۱]، ریاضیدان معروف لهستانی، از مفهوم تخلخل در مشخص‌سازی پادمشتق توابع استفاده کرد. اردوش، ریاضیدان مشهور، نیز در مقاله‌ای به سال ۱۹۴۶ این مفهوم را در فضای $\mathbb{R}^n$ به‌کار برد. دو ریاضیدان ژاپنی؛ یکی یاناگیهارا[۲] در سال ۱۹۶۹ و دیگری یوشیدا[۳] در سال ۱۹۷۱، این مفهوم تخلخل تعمیم‌یافته را در چندین مقاله دربارهٔ مجموعه‌های خوشه‌ای به‌کار گرفتند. در مقاله‌های این دو نیز این حکم که مجموعه‌ای اندازه‌–صفر وجود دارد که σ–متخلخل نیست، بیان می‌شود ولی در هیچ‌جا اشاره‌ای به وجود مجموعه‌ای اندازه–صفر و از رستهٔ اول که σ–متخلخل نباشد، به میان نمی‌آید. ظاهراً پس از این پژوهش‌ها، مقاله‌ای از زائیچک[۴]، ریاضیدان اهل چک، به سال ۱۹۷۲ اولین مقاله‌ای است که به این مبحث پرداخته و حکم مذکور از دلژِنکُ مجدداً بدون اثبات، در آن ذکر شده است.

پس از توقفی چند ساله، به مقالهٔ بسیار تأثیرگذار زائیچک در سال ۱۹۷۶ می‌رسیم. او در این مقاله به بررسی مفاهیم مختلف تخلخل و تعمیم آنها در فضای متری دلخواه پرداخته است. این اولین مقاله‌ای است که تماماً به بررسی خود این مفهوم اختصاص داده شده است. او یکی از نامدارترین پژوهشگران حال حاضر در این زمینه است. مقالهٔ مروری [۳۰] که به سال ۱۹۸۸ نگاشته است، مقاله‌ای بی‌اندازه سودمند در این زمینه است. رانگ [۵]، ریاضیدان معاصر آمریکایی، نفر بعدی است که از مفهوم تخلخل در مقاله‌ای به سال ۱۹۷۷ استفاده کرده است. رِنفرُ[۶] در [۲۴] از زبان استادش اِوَنز[۷] نقل می‌کند که رانگ موجبات توجه جامعهٔ پژوهشگران آنالیز حقیقی آمریکا را به مفهوم و کاربردهای تخلخل فراهم کرد. در پاییز سال ۱۹۷۷ رانگ به بلنا[۸]، اِوَنز و هامکِ[۹] متذکر می‌شود که برخی قضیه‌هایی را که در مقاله‌ای به سال ۱۹۷۶ دربارهٔ مجموعه‌های خوشه‌ای توابع حقیقی اثبات کرده‌اند و متضمن مفاهیم مجموعه‌های پوچ و یا رستهٔ اول است، می‌توانند با استفاده از مفهوم تخلخل تعمیم دهند. آنها درمی‌یابند که برای انجام این کار، تقریباً هیچ تغییر اساسی لازم نیست و این مطلب را در مرحلهٔ غلطگیریِ آن مقاله به آن افزودند. ظاهراً نخستین کاربرد مفهوم تخلخل در آنالیز حقیقی، در دو مقاله از بلنا، اِوَنز و هامک دربارهٔ مشتق‌پذیری متقارن و معمولی توابع حقیقی در سال ۱۹۷۸ بوده که مضمون آنها σ–متخلخل بودنِ برخی مجموعه‌های خاص است. همچنین بجا است اشاره کنیم که مجموعه‌های متخلخل اولین بار در سال ۱۹۸۴ در نظریهٔ فضاهای باناخ در پیوند با مسئلهٔ مشتق فرشهٔ برخی نگاشت‌ها به‌کار گرفته شده است. مفهوم تخلخل به صورت‌های گوناگونی تعمیم داده شده و در بخش‌های مختلفی از آنالیز به‌کار گرفته شده است؛ [۳۰، ۳۱] را ببینید.

[۱] Z. Zahorski [۲] N. Yanagihara [۳] H. Yoshida [۴] L. Zajíček [۵] D. C. Rung [۶] D. L. Renfro [۷] M. J. Evans [۸] C. L. Belna [۹] P. D. Humke

فهرست تقریباً همهٔ منابعی که به‌نوعی به مفهوم تخلخل پیوند می‌یابند، در [۲۵] آمده است. برخی موارد دیگرِ استفاده از مفهوم تخلخل را به‌مناسبت، در ادامهٔ مقاله خواهیم آورد.

نخست تعریف تخلخل برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ و سپس تعریف کلی را برای فضاهای متری می‌آوریم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه و I یک بازه باشد. طول بزرگترین زیربازهٔ باز از I را که E را قطع نمی‌کند با $\lambda(E, I)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$. تخلخل چپ و راست E در x را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p^-(E,x) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\lambda(E,(x-r,x))}{r},$$
$$p^+(E,x) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\lambda(E,(x,x+r))}{r}.$$

تخلخل E در x را با

$$p(E,x) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\lambda(E,(x-r,x+r))}{r}$$

تعریف می‌کنیم.

توجه می‌کنیم که $0 \le p^+(E,x), p^+(E,x) \le 1$. اگر $x \in \bar{E}$، آن‌گاه $0 \le p(E,x) \le 1$. در این حالت $p(E,x) = \max\{p^+(E,x), p^-(E,x)\}$ و چنانچه $x \notin \bar{E}$، $p(E,x) = 2$.

تعریف ۲.۲. اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ گوییم

(الف) E متخلخل در x است اگر $p(E,x) > 0$ و نامتخلخل در x است اگر $p(E,x) = 0$؛

(ب) E از راست در x متخلخل است اگر $p^+(E,x) > 0$؛

(پ) E *قویاً متخلخل*[۱] در x است اگر $p(E,x) \ge 1$؛

(ت) E متخلخل دوطرفه در x است اگر هم از راست و هم از چپ در x متخلخل باشد.

مجموعهٔ E را متخلخل گوییم اگر E در هر نقطه از E متخلخل باشد. همچنین E را σ-*متخلخل* گوییم اگر E اجتماعی شمارا از مجموعه‌های متخلخل باشد. توجه می‌کنیم که اگر E در x متخلخل باشد، آن‌گاه x به درون بستار E تعلق ندارد. همچنین تخلخل، مفهومی موضعی است.

حال چند ویژگی ساده اما مهم دربارهٔ مجموعه‌های متخلخل بیان می‌کنیم. اولین آنها متعلق به دانژوا است به سال ۱۹۴۱.

قضیه ۳.۲. *حکم‌های زیر برقرارند.*

[۱] strongly porous

(الف) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ بسته و هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه مجموعهٔ نقاطی از E که E در آنها قویاً متخلخل دوطرفه است، مجموعه‌ای مانده در E است؛

(ب) هر مجموعهٔ متخلخل در $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال و اندازه-صفر است؛

(پ) ردهٔ مجموعه‌های σ-متخلخل یک σ-ایدآل در σ-ایدآل مجموعه‌های اندازه-صفر و از رستهٔ اول است؛

(ت) مجموعه‌ای بسته و متخلخل راست وجود دارد که σ-متخلخل چپ نیست.

حکم (ت) در [۲۷] تعمیم داده شده است. به‌آسانی می‌بینیم که برای مجموعهٔ کانتور C داریم $p(C,x) \geq ۱/۲$ به‌ازای هر $x \in C$. پس مجموعهٔ کانتور مجموعه‌ای تام، اندازه-صفر و متخلخل است. اما مجموعه‌ای تام و اندازه-صفر در $\mathbb{R}$ وجود دارد که σ-متخلخل نیست.

مثال ۴.۲. فرض کنیم $a = \{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد در بازهٔ $(۰,۱)$ باشد. مجموعهٔ $C_a \subseteq [۰,۱]$ را همانند مجموعهٔ کانتور می‌سازیم با این تفاوت که در مرحلهٔ nام، از مرکز $۲^{n-۱}$ بازهٔ بستهٔ باقی‌مانده با طول d_n، بازه‌ای باز به طول $a_n d_n$ را حذف می‌کنیم. می‌توان دید که اندازهٔ مجموعهٔ C_a برابر با صفر است اگر و تنها اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \infty$ و همچنین C_a، σ-متخلخل نیست اگر و تنها اگر $a_n \to ۰$.

اکنون تعمیم این مفاهیم را در فضای متری می‌آوریم. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $M \subseteq X$ مجموعه‌ای دلخواه باشد و $R > ۰$. تعریف می‌کنیم

$$\gamma(x,R,M) = \sup\{r \geq ۰ \mid \exists y \in X,\ B(y,r) \subseteq B(x,R) \setminus M\}$$

که در آن، $B(x,r)$ گوی باز به مرکز x و شعاع r است. تخلخل بالاییِ M در x را با

$$p^{-}(M,x) = ۲ \limsup_{R\to ۰^+} \frac{\gamma(x,R,M)}{R}$$

و تخلخل پایینیِ M در x را با

$$p_{-}(M,x) = ۲ \liminf_{R\to ۰^+} \frac{\gamma(x,R,M)}{R}$$

تعریف می‌کنیم. برخی نویسندگان عدد ۲ را در تعریف بالا حذف می‌کنند؛ وجود آن برای مشابهت با تعریف این مفهوم در $\mathbb{R}$ است. در [۱۸] در تعریف $\gamma(x,R,M)$ شرط $d(y,x)+r \leq R$ را نیز اضافه کرده‌اند. اشاره می‌کنیم که در فضای متری‌ای که گوی‌های آن فشردهٔ نسبی هستند، مقدار $\gamma(x,R,M)$ اختیار می‌شود. گوییم M *متخلخل بالایی*[۱]، *متخلخل پایینی*[۲]، *c-متخلخل بالایی* و *c-متخلخل پایینی* در

[۱] upper porous [۲] lower porous

x است هرگاه به‌ترتیب،

$$p^{-}(M,x) > \circ,\ p_{-}(M,x) > \circ,\ p^{-}(M,x) > c,\ p_{-}(M,x) > c.$$

همچنین اگر $p_{-}(M,x) \geq ۱$، آن‌گاه M را در x *بسیار قویاً متخلخل*[۱] می‌گویند. M متخلخل بالایی است اگر M در هر $x \in M$ متخلخل بالایی باشد. به همین ترتیب، مفاهیم متخلخل پایینی، c-متخلخل بالایی و ... تعریف می‌شوند. همچنین گوییم M، σ-متخلخل بالایی (σ-متخلخل پایینی) است اگر اجتماعی شمارا از مجموعه‌های متخلخل بالایی (پایینی) باشد. توجه می‌کنیم اگر $x \in \bar{M}$، آن‌گاه $p^{-}(M,x) = ۱$ و در غیر این صورت $\circ \leq p^{-}(M,x) \leq ۱/۲$.

تخلخل به‌تعبیر دانژوا-دِلژِنکُ همان تخلخل بالایی است. بد نیست خواننده برای تمرینی ساده نشان دهد که $p^{-}(\{\circ\} \cup \{۱/n | n \in \mathbb{N}\}, \circ) = \circ$ و $p^{-}(\{\circ\} \cup \{۱/۲^n | n \in \mathbb{N}\}, \circ) = ۱/۲$.

به‌روشنی

(الف) c-متخلخل پایینی $\Leftarrow$ متخلخل پایینی $\Leftarrow$ متخلخل بالایی $\Leftarrow$ هیچ‌جا چگال؛

(ب) c-متخلخل پایینی $\Leftarrow$ c-متخلخل بالایی $\Leftarrow$ متخلخل بالایی؛

(پ) σ-متخلخل پایینی $\Leftarrow$ σ-متخلخل بالایی $\Leftarrow$ رسته اول.

تذکر می‌دهیم که در آنالیز حقیقی منظور از σ-متخلخل عموماً σ-متخلخل بالایی و منظور از اصطلاح مجموعهٔ σ-بسیار متخلخل در واقع σ-متخلخل پایینی است. حال آنکه در فضاهای باناخ (و فضاهای مجرد) σ-متخلخل را به‌جای σ-متخلخل پایینی استفاده می‌کنند.

از تعریف دیده می‌شود که زیرمجموعهٔ M از فضای متری (X,d) متخلخل پایینی است اگر و تنها اگر

$$\forall x \in M\, \exists \alpha > \circ\, \exists R_\circ > \circ\, \forall R \in (\circ, R_\circ)\, \exists y \in X,\ B(y,\alpha R) \subseteq B(x,R) \setminus M$$

و چنانچه X فضای برداری نرمدار باشد، رابطهٔ بالا با رابطهٔ ساده‌تر

$$\forall x \in M\, \exists \alpha > \circ\, \forall R > \circ\, \exists y \in X,\ B(y,\alpha R) \subseteq B(x,R) \setminus M$$

معادل است. همچنین در فضای برداری نرمدار اگر مجموعهٔ M، c-متخلخل پایینی باشد، آن‌گاه $c \leq ۱$.

تفاوتی که در مفهوم تخلخل پایینی و هیچ‌جا چگال بودن می‌بینیم این است که در مفهوم هیچ‌جا چگال بودن، در هر گوی باید یک گوی یافت شود که مجموعهٔ مورد نظر را قطع نکند اما در تخلخل پایینی، در هر گوی دلخواه به شعاع به‌دلخواه کوچک باید گویی موجود باشد که مجموعه را قطع نکند و به‌علاوه شعاع همهٔ این گوی‌ها باید نسبت مشخص و ثابتی با شعاع گوی اولیه داشته باشد.

[۱] very strongly porous

گزارهٔ زیر که در [۲۸] اثبات شده است و از تعریف نتیجه می‌شود، کار را ساده‌تر می‌کند.

قضیه ۵.۲. *گیریم M زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X,d) باشد و $c>\circ$. حکم‌های زیر معادل‌اند.*

(الف) M یک مجموعهٔ c-متخلخل پایینی است؛

(ب) به‌ازای هر $x\in M$

$$\forall\alpha\in(\circ,c/۲)\,\exists R_\circ>\circ\,\forall R\in(\circ,R_\circ)\,\exists y\in X,\ B(y,\alpha R)\subset B(x,R)\setminus M.$$

همچنین از تعریف تخلخلِ بالایی می‌بینیم که M متخلخل بالایی در x است اگر

$$\exists\alpha>\circ\,\forall R>\circ\,\exists R_\circ\in(\circ,R)\,\exists y\in X,\ B(y,\alpha R_\circ)\subseteq B(x,R_\circ)\setminus M$$

و c-متخلخل بالایی در x است اگر

$$\forall\alpha\in(\circ,c/۲)\,\forall R>\circ\,\exists R_\circ\in(\circ,R)\,\exists y\in X,\ B(y,\alpha R_\circ)\subset B(x,R_\circ)\setminus M.$$

علاوه بر اینها، باز هم از تعریف می‌بینیم که مجموعهٔ M متخلخل بالایی در $x\in X$ است اگر $\alpha>۱$ و دنبالهٔ $B(c_n,r_n)$ از گوی‌های باز چنان موجود باشد که $c_n\to x$، $B(c_n,r_n)\cap M=\emptyset$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $x\in B(c_n,\alpha r_n)$. روشن است که می‌توان شرط $c_n\to x$ را با $r_n\to\circ$ (یا $c_n\to x$ و $r_n\to\circ$) جایگزین کرد.

مشابه قضیهٔ دانژوا، قسمت (۱) قضیهٔ ۳.۲، را می‌توان در فضای متری دلخواه بیان کرد: اگر E مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال در فضای متری X باشد، آن‌گاه مجموعهٔ نقاطی از E که E در آنها قویاً متخلخل است، مجموعه‌ای مانده در E است. همچنین توجه کنید که اجتماع دو مجموعهٔ متخلخل لزوماً متخلخل نیست. مثلاً $E_۱=\{\frac{۱}{n}\,|\,n\in\mathbb{Z}\setminus\{\circ\}\}$ و $E_۲=\{\circ\}$ هر دو متخلخل بالایی هستند ولی $E_۱\cup E_۲$ متخلخل بالایی نیست، زیرا $p^-(E_۱\cup E_۲,\circ)=\circ$. همچنین رِمُ‌اوتیل[۱] در [۲۶] ثابت می‌کند که حاصل‌ضرب دو مجموعه‌ای که σ-متخلخل پایینی نیستند، ممکن است σ-متخلخل پایینی باشد یا نباشد؛ البته حالت σ-متخلخل بالایی را زائیچک در سال ۱۹۹۶ ثابت کرده بود. از نتایج پرایس[۲] و زائیچک در سال ۱۹۹۸ چنین برمی‌آید که صورت معقولی از قضیهٔ متداول فوبینی برای مجموعه‌های σ-متخلخل بالایی حتی در صفحه وجود ندارد.

روشن است که هر مجموعه از رستهٔ اول در یک مجموعهٔ F_σ و از رستهٔ اول قرار می‌گیرد. نتایجی از این دست را ویژگی‌های توصیفی می‌نامند که در حوزهٔ نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها بررسی می‌شوند (البته این، حوزهٔ بررسی مجموعه‌ها و توابع «تعریف‌شدنی» مانند مجموعه‌های بُرل، تصویری، توابع بِر و غیره، به‌ویژه در فضاهای متری کامل تفکیک‌پذیر موسوم به فضاهای لهستانی[۳] است). در سال ۱۹۸۰ فورَن[۴] و

[۱] M. Rmoutil [۲] D. Preiss [۳] Polish spaces [۴] J. Foran

هامکِ از این دست ویژگی‌های پوششی را برای مجموعه‌های متخلخل بررسی کردند. مثلاً ثابت کردند (۱) هر مجموعهٔ σ-متخلخل بالایی در یک مجموعهٔ σ-متخلخل بالایی از نوع $G_{\delta\sigma}$ قرار می‌گیرد. (۲) یک مجموعهٔ σ-متخلخل بالایی وجود دارد که در هیچ مجموعه‌ای از ردهٔ اول و از نوع G_δ قرار نمی‌گیرد. (۳) مجموعهٔ σ-متخلخل بالایی وجود دارد که در هیچ مجموعهٔ اندازه-صفر و از نوع F_σ قرار نمی‌گیرد. برای مطالعهٔ نتایج جدیدتر، به [۳۳] مراجعه کنید.

در هر فضای متری، هر مجموعهٔ σ-متخلخل بالایی اجتماعی شمارا از مجموعه‌های c-متخلخل بالایی است که $\circ < c < ۱$ عددی دلخواه است. این مطلب برای مجموعه‌های σ-متخلخل پایینی برقرار نیست. در واقع در هر فضای متری کامل و نسبتاً معقول، یک مجموعهٔ σ-متخلخل پایینی وجود دارد که به‌ازای هیچ $c > \circ$ی، $\sigma - c$-متخلخل پایینی نیست. با وجود این، گزارهٔ زیر برقرار است.

قضیه ۶.۲ (زائیچک، ۲۰۰۳). *فرض کنیم X فضای متری باشد و $A \subset X$. حکم‌های زیر معادل‌اند.*

(الف) A یک مجموعهٔ σ-متخلخل پایینی است؛

(ب) $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} M_n$ که در آن، مجموعهٔ M_n در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\exists \alpha > \circ\, \exists R_\circ > \circ\, \forall x \in X\, \forall R \in (\circ, R_\circ)\, \exists y \in X:\ B(y, \alpha R) \subset B(x, R) \setminus M_n.$$

چنانچه X فضای نرمدار باشد،

(پ) $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} M_n$ که در آن، مجموعهٔ M_n در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\exists \alpha > \circ\, \forall x \in X\, \forall R > \circ\, \exists y \in X:\ B(y, \alpha R) \subset B(x, R) \setminus M_n.$$

شرط (ب) در قضیهٔ بالا نسبت به تخلخل پایینی قوی‌تر به نظر می‌رسد. در واقع در [۹، ۲۳] زیرمجموعهٔ M از فضای متری (X, d) متخلخل نامیده شده است اگر

$$\exists \alpha > \circ\, \exists R_\circ > \circ\, \forall x \in X\, \forall R \in (\circ, R_\circ)\, \exists y \in X:\ B(y, \alpha R) \subset B(x, R) \setminus M.$$

مجموعهٔ σ-متخلخل نیز به شیوهٔ متداول تعریف می‌شود. تخلخل به‌تعبیر بالا، قوی‌تر از تخلخل پایینی است ولی قضیهٔ اخیر نشان می‌دهد که σ-تخلخل به این تعبیر، معادل با σ-تخلخل پایینی است. همچنین در برخی موارد (مثلاً در [۲۹]) بنا به فضای مورد بحث، c-تخلخل مجموعهٔ M در x به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall R > \circ\, \exists y \in X,\ \circ < d(y, x) < R,\ B(y, c\, d(y, x)) \cap M = \emptyset.$$

این تعریف قوی‌تر از تخلخل بالایی است که ما در اینجا تعریف کردیم. به‌روشنی این تعریف معادل است با اینکه برای هر $c > ۰$، دنباله‌ای مانند $\{r_n\}$ چنان موجود باشد که $r_n \to ۰$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $y \in B(x, r_n)$ موجود باشد که $B(y, cr_n) \cap M = \emptyset$.

گفتیم در $\mathbb{R}^n$ و به‌طور کلی در فضای برداری نرمدار متناهی‌-بعد، هر مجموعهٔ متخلخل بالایی لزوماً هیچ‌جا چگال و اندازه‌-صفر است. لذا مجموعه‌های σ-متخلخل در $\mathbb{R}^n$ از رستهٔ اول و اندازه‌-صفر هستند. حال اگر مجموعه‌ای بسته و هیچ‌جا چگال با اندازه لبگ مثبت را در نظر بگیریم (مثلاً در حالت یک‌بعدی، مجموعه‌هایی از نوع اسمیت‌-ولترا‌-کانتور [۱])، آن‌گاه مجموعه‌ای بسته و هیچ‌جا چگال خواهیم داشت که σ-متخلخل بالایی نیست. اما مطلب اساسی که در کاربرد مجموعه‌های σ-متخلخل بالایی اهمیت دارد، این است که در $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای تام (هیچ‌جا چگال) و اندازه‌-صفر وجود دارد که σ-متخلخل بالایی نیست. حکمی نسبتاً عمیق و با اثباتی دشوارتر، این است که در $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ صفر و از رستهٔ اول وجود دارد که σ-متخلخل بالایی نیست. حکمی مشابه (البته ضعیف‌تر) برای فضای باناخ دلخواه X می‌توان بیان کرد. اگر X فضای باناخ و f یک تابعک خطی پیوستهٔ ناصفر روی X باشد و $K \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال باشد که σ-متخلخل بالایی نیست، آن‌گاه می‌توان دید که $f^{-۱}(K)$ هیچ‌جا چگال است ولی σ-متخلخل بالایی نیست. لذا مطلب مهمی که نتیجه می‌شود این است که در فضای باناخ، مفهوم σ-متخلخل بالایی اکیداً محدود کننده‌تر از مفهوم مجموعه از رستهٔ اول است.

قبل از تعمیم این احکام، مثالی دیگر از مجموعهٔ بستهٔ اندازه‌-صفر در $\mathbb{R}$ می‌آوریم که σ-متخلخل بالایی نیست. این مثال را زائیچک در [۳۰] از کونیاگین[۱] نقل می‌کند. تعریف می‌کنیم

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=۱}^{\infty} \left| \frac{\sin(n!\pi x)}{n} \right| \leq ۱ \right\}.$$

در این صورت E مجموعه‌ای بسته و اندازه‌-صفر است که σ-متخلخل بالایی نیست. توجه می‌کنیم که بخشی از اثبات این حکم و همچنین خودِ این مجموعه به آنالیز فوریه مربوط می‌شود. یادآوری می‌کنیم: مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ را N-مجموعه می‌نامیم اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مانند $\{a_n\}$ یافت شود که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \infty$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \sin nt$ روی A همگرای مطلق باشد. ثابت می‌شود که هر N-مجموعه، اندازه‌-صفر است. پرسش مطرح این بوده است که «آیا N-مجموعه‌ها σ-متخلخل بالایی هستند؟» مثال بالا پاسخی منفی به این پرسش است.

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای از رستهٔ اول و یا اندازه‌-صفر نباشد، آن‌گاه A به‌تعبیری می‌تواند بزرگ باشد، زیرا بنابر قضیهٔ مشهور اشتاینهاوس، مجموعهٔ $A + A$ شامل یک بازهٔ باز است. اما چنین مطلبی دربارهٔ مجموعه‌هایی که σ-متخلخل بالایی نیستند، برقرار نیست. در واقع ویلشینسکی[۲] ثابت کرده است

[۱] S. V. Konyagin [۲] W. Wilczynski

که یک مجموعهٔ تام و ناσ-متخلخل بالایی مانند $A \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر دسته از اعداد c_1، …، c_n، مجموعهٔ $\sum_{i=1}^{n} c_i A$ اندازه-صفر است.

در سال ۱۹۷۶ زائیچک مفهوم $\langle g \rangle$-متخلخل بالایی را معرفی کرد که تعمیمی از تخلخل بالایی است. فرض کنیم $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ تابعی غیرنزولی و از راست پیوسته در ۰ باشد که $g(0) = 0$ و $g(x) > x$ به‌ازای هر $x > 0$. گوییم زیرمجموعهٔ M از فضای متری (X,d)، $\langle g \rangle$-متخلخل بالایی در x است اگر

$$\limsup_{R \to 0^+} \frac{g(\gamma(x,R,M))}{R} > 0.$$

می‌توان دید که این، معادل است با اینکه دنباله‌ای مانند $B(c_n, r_n)$ از گوی‌های باز موجود باشد که $c_n \to x$ و $B(c_n, r_n) \cap M = \emptyset$ و $x \in B(c_n, g(r_n))$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$. مفاهیم $\langle g \rangle$-متخلخل بالایی و $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل بالایی نیز به شیوهٔ متداول تعریف می‌شوند. اگر $g(x) = qx$ که $q > 1$، آن‌گاه مفهوم $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل بالایی با σ-متخلخل بالایی یکی است. ظاهراً جالب‌ترین حالتی که با مفهوم تخلخل معمولی متفاوت است، وقتی است که $g(x) = x^q$ که در آن، $1 > q > 0$. این حالت را اولین‌بار یاناگیهارا در سال ۱۹۶۹ در نظر گرفت.

اکنون می‌رسیم به قضیهٔ مهم و دشوار زائیچک:

قضیه ۷.۲ (زائیچک، ۱۹۹۸). *فرض کنیم X یک فضای متری توپولوژیکی-کامل و بدون نقطهٔ تنها باشد. فرض کنیم g با مشخصات بالا باشد. در این صورت*

(الف) مجموعهٔ هیچ‌جا چگال بسته‌ای وجود دارد که $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل بالایی نیست؛

(ب) اگر μ یک اندازهٔ بُرل موضعاً متناهی روی X باشد، مجموعه‌ای بسته، هیچ‌جا چگال و اندازه-صفر وجود دارد که $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل بالایی نیست؛

(پ) یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال و G_δ با اندازهٔ هاسدورف صفر وجود دارد که $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل بالایی نیست. در حالتی که $X = \mathbb{R}$، می‌توان این مجموعه را بسته انتخاب کرد.

اما مفهوم $\sigma - \langle g \rangle$-متخلخل پایینی داستان دیگری دارد. اصولاً تخلخل پایینی مفهومی ضعیف‌تر از تخلخل بالایی است و اثبات تخلخل پایینی مجموعه‌های کوچک معمولاً قدری آسان‌تر از اثبات تخلخل بالایی است. زائیچک در سال ۲۰۰۳ مشابه قضیهٔ بالا را برای تخلخل پایینی با برهانی ثابت کرد که در ساده‌بودن، قابل قیاس با برهان قضیهٔ بالا نیست. وی با استفاده از این مطلب شناخته‌شده که هر زیرمجموعهٔ σ-متخلخل پایینی در فضای متری را می‌توان با تعدادی شمارا مجموعهٔ متخلخل پایینی بسته پوشاند (حکمی که برای تخلخل بالایی برقرار نیست)، گزاره زیر را ثابت کرد.

گزاره ۸.۲ (زائیچک،۲۰۰۳). *فرض کنیم X یک فضای متری توپولوژیکی‌ـکامل و بدون نقطهٔ تنها باشد. در این صورت مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال و بسته وجود دارد که σ−متخلخل پایینی نیست.*

چنانچه فضای X جدایی‌پذیر و μ یک اندازهٔ غیراتمی متناهی و بُرل روی X باشد، آن‌گاه می‌توان مجموعهٔ مذکور در قضیهٔ بالا را اندازه−صفر نیز در نظر گرفت. همچنین تحت شرایط قضیهٔ بالا می‌توان مجموعه‌ای بسته‌ای یافت که متخلخل بالایی باشد ولی σ−متخلخل پایینی نباشد. طبیعی است بپرسیم آیا مجموعه‌های لاغر زیادند یا نه؟ همچنین مجموعه‌های اندازه−صفر چطور؟ یا مجموعه‌های متخلخل چطور؟ به این سؤالات که سابقهٔ طرح اولینِ آنها دست‌کم به کوراتوفسکی به سال ۱۹۳۳ می‌رسد، در بخش بعدی پاسخ خواهیم داد.

در پایان این بخش، به رابطهٔ تخلخل با مفهوم Γ−پوچی که آن هم برای سنجش بزرگیِ مجموعه‌ها به‌کار می‌رود و تعریفی بسیار ظریف‌تر دارد، اشاره می‌کنیم. برای مشاهدهٔ تعریف، [۲] را ببینید. نشان داده می‌شود که در فضای l_p برای $1 < p < \infty$ یک مجموعهٔ σ−متخلخل بالایی وجود دارد که Γ−پوچ نیست در حالی که هر مجموعهٔ σ−متخلخل بالایی در c_0، مجموعه‌ای Γ−پوچ است.

۳. نمونه‌هایی از رفتارهای اَبَرعام در آنالیز ریاضی

اولین کاربردهای مفهوم تخلخل در بررسی مجموعه‌های خوشه‌ای و *استثنایی*[۱] و نظریهٔ مشتق توابع حقیقی بوده است و همان‌طور که اشاره کردیم، دِلژِنکُ و دانژوا این مفهوم را در بررسی مسائل پیشگفته به‌کار بردند. از دیگر پژوهش‌های نخستین در این باره می‌توان به نتایج یاناگیهارا در سال ۱۹۶۹ و اِوَنز و دانشجویانش در سال ۱۹۷۸ اشاره کرد. مفهوم تخلخل در بستر فضاهای باناخ نامتناهی−بعد، عمدتاً در نظریه‌های مشتق‌پذیری توابع به‌کار گرفته شده است. اولین‌بار پرایس و زائیچک در سال ۱۹۸۴ از این مفهوم برای بررسی مشتق فرشهٔ توابع محدب روی فضاهای باناخ استفاده کردند. این بخش را با ذکر قضیهٔ زیر آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۳ (پرایس−زائیچک، ۱۹۸۴). *مجموعهٔ نقاطی که تابع محدب پیوسته روی یک فضای باناخ با دوگان جدایی‌پذیر، در آنها مشتق فرشه ندارد، مجموعه‌ای σ−متخلخل بالایی است.*

این مبحث حجمی زیاد از پژوهش‌ها را به خود اختصاص داده است و خواننده می‌تواند به [۱۶] که نویسندگان آن خود از سرشناس‌ترین پژوهشگران در این زمینه هستند، مراجعه کند.

به یاد آورید که یک ویژگی یا رفتارِ توابع را عام می‌خوانند اگر مجموعهٔ توابعی که فاقد آن ویژگی هستند، به‌تعبیر بِر (یا رسته‌ای) کوچک باشد یا به عبارت دیگر، از رستهٔ اول باشد. در این صورت

[۱] exceptional set

می‌گویند «بیشترِ» عضوهای آن فضا دارای آن ویژگی هستند؛ برای دریافت آگاهی بیشتر در این زمینه، به [۲] مراجعه کنید. اکنون با در دست داشتنِ مفاهیم مختلف تخلخل که در حالت کلی بسیار محدود کننده‌تر از لاغر بودن (رستهٔ اول بودن) هستند، می‌توانیم مفهوم توپولوژیکی-عام بودن[۱] را بهبود بخشیم و از رفتارها و نتایج اَبَرعام صحبت کنیم. به عبارت دیگر، رفتارها یا نتایجی که بیان می‌کنند مجموعه‌ای از نقاط (تابع‌ها، نگاشت‌ها، مجموعه‌ها و ...) با رفتاری که به یک معنای مناسب، نامتعارف و منفرد است، نه‌تنها از رستهٔ اول بلکه به رده‌ای کوچکتر از مجموعه‌ها، تعلق دارد. این مجموعه‌های کوچکتر می‌توانند یکی از مفاهیم مختلف تخلخل باشند.

می‌گوییم ویژگی Q برای نقاط مجموعهٔ X *نسبت به تخلخل، عام است* (یا p-*عام است*) اگر مجموعهٔ نقاطی که آن ویژگی را ندارند، مجموعه‌ای σ-متخلخل بالایی باشد. در این صورت می‌گوییم هر عضو p-*نمونه‌وار نوعی*[۲] از X ویژگی Q را دارد یا *تقریباً همهٔ*[۳] عضوهای X دارای ویژگی Q هستند. اگر مجموعهٔ نقاطی که ویژگی Q را ندارند، به‌ازای cیی، مجموعه‌ای $c-\sigma$-متخلخل بالایی باشد، می‌گوییم c-*تقریباً* همهٔ عضوهای X دارای ویژگی Q هستند.

اما باید بر این مطلب نکته‌ای افزود و آن اینکه آیا نتایجی که در آنها از مفهوم تخلخل استفاده می‌شود، پیامدهای جالب مستقیمی دارند که در بیان آنها نیاز به مفهوم تخلخل نباشد و آیا زیرمجموعه‌های جالب از فضاهای باناخ وجود دارند که از رستهٔ اول باشند ولی σ-متخلخل نباشند؟ در زیر، نمونه‌های گوناگونی خواهیم آورد و امیدواریم خواننده را متقاعد کند که پاسخ تا اندازه‌ای مثبت است.

پیش از آن که به سراغ نمونه‌های این بخش برویم، به سؤالی جواب می‌دهیم که در پایان بخش قبل پرسیدیم. برای بررسی آن سؤال نخست لازم است روی خانوادهٔ زیرمجموعه‌های یک فضا، یک متر داشته باشیم تا این سؤالات معنادار باشند. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و محدب باشد، یعنی به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x,y\in X$ نقطهٔ $z\in X$ موجود باشد که $d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)$.
مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار و بسته از X را با $B(X)$ نشان می‌دهیم. اگر X فضای متری کامل باشد، برای هر $x\in X$ و زیرمجموعهٔ بستهٔ $A\subset X$ تعریف می‌کنیم

$$\rho(x,A)=\inf\{d(x,y)\,|\,y\in A\}$$

و اگر $B\subset X$ مجموعهٔ بستهٔ دیگری باشد، تعریف می‌کنیم

$$H(A,B)=\max\{\sup_{x\in B}\rho(x,A),\ \sup_{y\in A}\rho(y,B)\}.$$

H را متر *هاسدورف* می‌نامند. فضای $B(X)$ همراه با متر هاسدورف H فضای متری کامل است. این نتیجه در کتاب مشهور توپولوژی کوراتوفسکی که اولین چاپ آن به سال ۱۹۳۳ برمی‌گردد، آمده است.

[۱] topological genericity [۲] p-typical [۳] nearly all

در سال ۱۹۸۲ گروبر[۱] ثابت کرد [۱۳] که بیشترِ مجموعه‌های فشرده در فضای $\mathbb{R}^n$ اندازه–صفر هستند. همچنین در کتاب توپولوژی کوراتوفسکی به‌طور ضمنی ثابت شده است که بیشترِ مجموعه‌های فشرده در $\mathbb{R}^n$ هیچ‌جا چگال هستند. اما در مورد تخلخل، نتیجهٔ زیر را از زامفیرسکو[۲] داریم.

قضیه ۲.۳ (زامفیرسکو، ۱۹۸۷). *(الف) فرض کنیم (X, d) یک فضای متری محدب کامل باشد. در این صورت به‌ازای هر $۱ > \alpha > ۰$ بیشترِ مجموعه‌های بسته و کلاً کراندار در X، $\sigma - \alpha$-متخلخل بالایی هستند؛*

(ب) اگر X فضای باناخ باشد، به‌ازای هر $\alpha, \beta > ۰$ که $۲\alpha + \beta < ۱$، α-تقریباً همهٔ مجموعه‌های بسته و کلاً کراندار، β-متخلخل بالایی هستند.

اولین بار در سال ۱۹۵۹ کلِه[۳] قضیهٔ بِر را در فضای اجسام محدب به‌کار برد. برای مطالعهٔ کاربردهای مفاهیم رستهٔ اول و تخلخل در هندسهٔ اجسام محدب، به [۱۳، ۱۴، ۲۹] مراجعه کنید.

برگردیم به فضا و رفتار آشنای توابع پیوسته! با استفاده از مفهوم تخلخل می‌توان بیان کیفیِ رفتار نوعیِ توابع پیوسته (به‌تعبیر بِر) را بهبود بخشید. در [۲] نتایج باناخ و مازورکیه‌ویچ را دربارهٔ توابع مشتق‌ناپذیر آوردیم و اشاره کردیم که بیشترِ توابع پیوسته به‌تعبیر بِر، مشتق‌ناپذیر هستند! این نتایج را می‌توان با استفاده از مفهوم قوی‌تر تخلخل بهبود بخشید. چنین نتایجی را گاندینی[۴] و تسوکو[۵] در سال ۱۹۸۹ و آنِسی[۶] در سال ۱۹۹۳ ثابت کرده‌اند [۴، ۱۲]. تعمیم و بهبود این نتایج با استفاده از مفاهیم مختلف تخلخل و مشتق‌پذیری، موضوع اصلی رسالهٔ دکتری رِنفرُ است که در سال ۱۹۹۳ تحت راهنمایی ام. جی. اِوَنز نگاشته است [۲۴]. بد نیست اشاره کنیم که دشوار نیست نشان دهیم که اگر M زیرمجموعه‌ای هیچ‌جا چگال از $\mathbb{R}$ باشد ولی متخلخل بالایی نباشد، آن‌گاه مجموعهٔ $F = \{f \in C[۰, ۱] \mid f(۰) \in M\}$ در $C[۰, ۱]$ هیچ‌جا چگال است ولی متخلخل بالایی نیست.

قضیه ۳.۳ (گاندینی–تسوکّو (۱۹۸۹)، آنِسی (۱۹۹۳)). *در فضای باناخ $C[۰, ۱]$ یک تابع p-نمونه‌وار نوعی در هیچ نقطه‌ای مشتق یک‌طرفهٔ متناهی ندارد.*

در واقع آنسی نشان داد که مجموعهٔ توابع پیوسته که در دست‌کم یک نقطه مشتق یک‌طرفهٔ متناهی دارند، یک مجموعهٔ ۱/۷۶–متخلخل بالایی است. به بیان نادقیق، اگر قضیهٔ باناخ–مازورکیه‌ویچ این احساس را در ما ایجاد می‌کند که «بیشترِ» توابع پیوسته در بیشترِ نقاط مشتق متناهی ندارند، قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که «تقریباً همهٔ» توابع پیوسته در بیشترِ نقاط (به‌تعبیر بِر) مشتق نامتناهی دارند. از آنجایی که توابع پیوسته‌ای که در هیچ نقطه‌ای مشتق (متناهی یا نامتناهی) یک‌طرفه نداشته باشند، حتی مجموعه‌ای

[۱] P. M. Gruber [۲] T. Zamfirescu [۳] V. L. Klee [۴] P. M. Gandini [۵] A. Zucco [۶] V. Anisiu

مانده تشکیل نمی‌دهند، چنین رفتاری p-عام نیز نیست؛ برای دریافت اطلاعات بیشتر، به [۲] مراجعه کنید.

آلِوسکی[۱] در سال ۱۹۹۱ قضیهٔ باناخ-اشتاینهاوس را با جایگزین کردنِ کوچک‌بودن به معنای توپولوژیکی بِر با مفهوم هندسی تخلخل، بهبود بخشید [۱۹]. او نخست ثابت کرد که مجموعهٔ هیچ‌جا چگال محدب در یک فضای باناخ، قویاً متخلخل (بالایی) است و اشاره کرد که سَکس[۲] به او متذکر شده است که اثباتش در واقع حکمی قوی‌تر را ثابت می‌کند. این حکم قوی‌تر مفهومی محدودکننده‌تر از مفاهیم معمول تخلخل (σ-تخلخل پایینی و بالایی) است که به O-*تخلخل* معروف شده است و در [۲۸] تعریفی کمی متفاوت اما معادل با آن به‌صورت زیر آمده است.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای برداری نرمدار باشد. زیرمجموعهٔ M از X را O-متخلخل گوییم اگر به‌ازای هر عدد حقیقی α در بازهٔ $(\circ, ۱)$

$$\exists R_\circ > \circ\, \forall x \in M\, \forall R \in (\circ, R_\circ)\, \exists y \in X : \; (\|x-y\| = R,\; B(y, \alpha R) \cap M = \emptyset).$$

از طرف دیگر، زائیچک و پرایس در سال ۱۹۸۴ مفهوم R-*گوی متخلخل*[۳] و R-*گوی کوچک‌بودن*[۴] را تعریف کردند.

تعریف ۵.۳. زیرمجموعهٔ M از فضای برداری نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را R-گوی متخلخل گوییم اگر

$$\forall x \in M\, \forall \alpha \in (\circ, ۱)\, \exists y \in X : (\|x-y\| = R,\; B(y, \alpha R) \cap M = \emptyset).$$

همچنین M را کوچکِ‌گویی[۵] می‌نامیم اگر M اجتماعی شمارا از مجموعه‌هایی باشد که به‌ازای احتمالاً Rهای مختلف، R-گوی متخلخل هستند.

استربین در [۲۸] نشان داد که اگر زیرمجموعهٔ M از یک فضای برداری نرمدار، O-متخلخل باشد، آن‌گاه ۱-متخلخل پایینی است و لذا مفهوم O-متخلخل محدودکننده‌تر از مفاهیم تخلخل عادی است. همچنین هر مجموعهٔ R-گوی متخلخل، O-متخلخل است. او با استفاده از قضیهٔ رسته‌ای بِر، مطالب مهم‌تری ثابت کرد و برای مثال، نشان داد که در هر فضای باناخ نابدیهی، مجموعه‌ای O-متخلخل وجود دارد که کوچکِ گویی (و در نتیجه R-گوی متخلخل) نیست. اکنون توجه می‌کنیم که هر مجموعهٔ بسته، محدب و هیچ‌جا چگال در فضای باناخ، کوچکِ گویی و حتی R-گوی متخلخل (به‌ازای هر $R > \circ$) است؛ این مطلب را زائیچک بدون اثبات در [۳۰] آورده است.

بنابر آنچه آمد و همان‌گونه که سَکس اشاره کرده است، اثبات آلِوسکی حتی شکلی قوی‌تر از آنچه او بیان کرده است، برای قضیهٔ کلاسیک باناخ-اشتاینهاوس و قضیهٔ باناخ در اختیار می‌گذارد.

[۱] V. Olevskii [۲] K. Saxe [۳] R-ball porous [۴] R-ball smallness [۵] ball small

قضیه ۶.۳ (آلِوسکی، ۱۹۹۸). *(الف) گیریم X یک فضای باناخ و Y یک فضای برداری نرمدار و Φ خانواده‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از X به Y باشد که $\sup\{\|\phi\| \mid \phi \in \Phi\} = \infty$. در این صورت مجموعهٔ*

$$E = \{x \in X \mid \text{کراندار است} (\phi(x))_{\phi\in\Phi}\}$$

R-گوی متخلخل (به‌ویژه σ-متخلخل پایینی) است؛

(ب) فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی پیوسته باشد. در این صورت یا $T(X) = Y$ یا $T(X)$ در Y، R-گوی متخلخل است.

طبیعی است که دو قضیهٔ بالا نتایج زیادی دارند. آلِوسکی نتیجهٔ زیر را ذکر می‌کند.

نتیجه ۷.۳. *مجموعهٔ توابعی که سری فوریهٔ آنها در نقطه‌ای مشخص همگرا است، یک مجموعهٔ R-گوی متخلخل در $C[-\pi, \pi]$ است.*

قضیهٔ باناخ-اشتاینهاوس شکل‌های غیرخطی نیز دارد که یکی از آنها را یاخیمسکی[۱] در سال ۲۰۰۵ ثابت کرده است و ما آن را به مناسبتی در [۲] آورده‌ایم. باید خاطرنشان کرد که قضیهٔ یاخیمسکی شکلی قوی‌تر ندارد که در آن بتوان لاغر بودن را با مفاهیم مختلف تخلخل جایگزین کرد. در واقع این مطلب را با مثال کونیاگین که در بالا آوردیم، می‌توان نشان داد. مسئله‌ای که یاخیمسکی به آن پرداخته بود، تعیین بزرگیِ مجموعهٔ عضوهای یک فضای تابعی بود که بتوان یک عمل ضرب طبیعی بین آنها در نظر گرفت. با استفاده از شکل غیرخطیِ قضیهٔ باناخ-اشتاینهاوس، او توانست بسیاری از نتایج قبلی را تعمیم دهد و نتایجی جدید ثابت کند. اکنون گرچه صورتی قوی‌تر از شکل غیرخطی قضیهٔ باناخ-اشتاینهاوس نمی‌توان به‌دست داد، می‌توان با تغییر برخی روش‌های او، صورت‌های قوی‌تری از نتایج او را به‌دست آورد.

نخست چند تعریف می‌آوریم. به‌طورکلی فرض کنیم X فضایی از توابع باشد و بتوان عملی طبیعی بین عضوهای آن در نظر گرفت. چنانچه عضوهایی وجود داشته باشند که حاصل‌ضرب آنها به این مجموعه تعلق نداشته باشد، می‌توان از بزرگیِ مجموعهٔ $\{(f,g) \mid f \cdot g \in X\}$ پرسید. بگذارید قدری جزئی‌تر بیندیشیم. فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه و $L^p(\mu)$ فضای لبگ روی آن باشد. فضای $L^p(\mu)$ به‌ازای $0 < p < 1$ متشکل از همهٔ توابع اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ است که $\|f\|_p = \int_X |f|^p d\mu < \infty$. در این حالت $L^p(\mu)$ با $\|f\|_p$ تعریف‌شده در بالا، فضای نرمدار نیست ولی یک فضای متری کامل با متر $d(f,g) = \|f - g\|_p$ است. برای $p, q, r \in (0, \infty]$ تعریف می‌کنیم

$$E^r_{p,q} = \{(f,g) \in L^p(\mu) \times L^q(\mu) \mid fg \in L^r(\mu)\}.$$

[۱] J. Jachymski

بنابر نامساوی هلدر، اگر $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$، آن‌گاه $E^r_{p,q} = L^p(\mu) \times L^q(\mu)$. اگرنه می‌توان از بزرگی یا کوچکیِ مجموعهٔ $E^r_{p,q}$ صحبت کرد.

قضیه ۸.۳ (ونپ[1]-استربین[2]، [۱۰]). *فرض کنیم $p, q, r \in (0, \infty[$ و $\frac{1}{r} > \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$. در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(الف) $E^r_{p,q}$ زیرمجموعهٔ $\sigma - \frac{2}{3}$-متخلخل پایینی در $L^p(\mu) \times L^q(\mu)$ است؛

(ب) $E^r_{p,q} \neq L^p(\mu) \times L^q(\mu)$؛

(پ) $\inf\{\mu(A) \,|\, 0 < \mu(A) < \infty\} = 0$.

اگر $\frac{1}{r} < \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$، باید قسمت (پ) را با $\sup\{\mu(A) \,|\, 0 < \mu(A) < \infty\} = 0$ جایگزین کرد.

چنانچه G گروهی موضعاً فشرده مجهز به اندازهٔ هار چپ باشد و عمل بین توابع را عمل پیچش در نظر بگیریم، نتایجی مشابه به‌دست می‌آید؛ برای آگاهی از این نتایج، به [۳] مراجعه کنید.

اکنون فرض کنیم (X, μ) یک فضای اندازه‌پذیر توپولوژیک باشد؛ یعنی X یک فضای توپولوژیک است و اندازهٔ μ روی σ-جبری از زیرمجموعه‌های X شامل مجموعه‌های بُرل تعریف شده است. گوییم (X, μ) منظم داخلی است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند A با شرط $\mu(A) < \infty$ داشته باشیم $\mu(A) = \sup\{\mu(D) \,|\, D \subset A, \text{بسته} D\}$.

قضیه ۹.۳ (ونپ-استربین، [۱۱]). *فرض کنیم (X, μ) یک فضای اندازهٔ توپولوژیک و منظم داخلی و X فضای نرمال باشد. فرض کنیم*

$$A = \Big\{(f, g) \in C_b(X) \times C_b(X) \,|\, fg \in L^1(X, \mu)\Big\}.$$

در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:

(الف) A مجموعه‌ای $\sigma - \frac{1}{2}$-متخلخل پایینی است؛

(ب) $A \neq C_b(X) \times C_b(X)$؛

(پ) $\mu(X) = \infty$.

این مقاله را با ذکر دو نمونهٔ دیگر به پایان می‌بریم؛ یکی در نظریهٔ عملگرها و دیگری در نظریهٔ نقطهٔ ثابت! فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که توپولوژی آن توسط یک متر ناوردای کامل القا می‌شود؛ یعنی X یک F-فضا است. عملگر خطی پیوستهٔ T روی X را *اَبَردوری*[3] گوییم اگر $x \in X$ موجود باشد که مدار $\text{orb}(x) = \{T^n(x) \,|\, n \geq 0\}$ در X چگال باشد. در این صورت T را اَبَردوری و

[1] S. Głąb [2] F. Strobin [3] hypercyclic

x را یک *بردار اَبَردوری* می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ بردارهای اَبَردوری T را با $\mathrm{HC}(T)$ نشان می‌دهیم. مطلب عجیبی که در مطالعهٔ $\mathrm{HC}(T)$ به چشم می‌خورد، این است که همین‌که عملگر T اَبَردوری باشد، مجموعهٔ $\mathrm{HC}(T)$ بسیار بزرگ می‌شود. در واقع به‌تعبیر بِر، توپولوژیکی-عام است، یعنی شامل یک مجموعهٔ G_δ چگال است. پس $X \setminus \mathrm{HC}(T)$ مجموعه‌ای کوچک (به‌تعبیر بِر) است. حال می‌توان پرسید آیا به تعبیری که در این قسمت بیان کردیم، این مجموعه کوچک می‌شود؟ بررسی این موضوع در [۸] انجام شده است. مثلاً در آنجا نشان داده شده است که عملگرهایی روی $c_\circ$ و l^p ($۱ \leq p \leq \infty$) وجود دارند که مجموعهٔ بردارهای نااَبَردوری آنها σ-متخلخل بالایی نیست.

آخرین نمونه‌ای که می‌آوریم همچون مرسوم امروزه، کاربردی در آنالیز غیرخطی و نظریهٔ نقطهٔ ثابت است! فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متری باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را *غیرانبساطی* گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\rho(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ و f را *انقباض* (باناخ) می‌نامیم اگر عددی مانند $\circ \leq k < ۱$ موجود باشد که

$$\rho(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

فضای همهٔ توابع کراندار پیوسته از X به Y مجهز به متر

$$d_s(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

یک فضای متری کامل است. قضیه‌ای مشهور منسوب به باناخ بیان می‌کند که هر انقباض روی یک فضای متری کامل دارای نقطهٔ ثابت یکتا است. از طرف دیگر، نگاشتی غیرانبساطی روی فضای متری کامل وجود دارد که نقطهٔ ثابت ندارد. از این‌رو به‌طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید که بزرگیِ مجموعهٔ نگاشت‌هایی که شرایط قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ را دارند، در مجموعهٔ نگاشت‌های غیرانبساطی چقدر است؟ با جایگزین کردنِ مجموعهٔ نگاشت‌های دیگر بجز نگاشت‌های غیرانبساطی و مفاهیمی دیگر بجز نقطهٔ ثابت، پرسش بالا جنبه‌هایی گوناگون می‌یابد. ظاهراً اولین بار دِبلَزی[۱] و مِیاک[۲] در سال ۱۹۷۶ به این گونه پرسش‌ها پرداخته‌اند. آنها نتایج‌شان را در سال ۱۹۸۹ تعمیم دادند.

قضیه ۱۰.۳ (دِبلَزی-مِیاک،۱۹۷۶ و ۱۹۸۹). *فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ کراندار، محدب، بسته و ناتهی از یک فضای باناخ باشد. در این صورت*

(الف) مجموعهٔ همه نگاشت‌های کراندار غیرانبساطی از K به K که دارای نقطهٔ ثابت یکتا هستند، برابر با متمم یک مجموعهٔ σ-متخلخل پایینی است؛

(ب) مجموعهٔ انقباض‌های باناخ از K به K در فضای همهٔ نگاشت‌های غیرانبساطی از K به K مجموعه‌ای لاغر است.

[۱] F. S. De Blasi [۲] J. Myjak

بنابر قضیه‌ای مشهور از شاودر[1]، هر تابع پیوسته از یک زیرمجموعهٔ محدب و فشرده از فضای باناخ به خودش، دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد. همچنین قضیهٔ بروئر[2] بیان می‌کند که هر تابع پیوسته از یک زیرمجموعهٔ فشرده و محدب با درون ناتهی از $\mathbb{R}^n$ به خودش، دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد. قضیهٔ زیر بیانی کیفی از این دو قضیهٔ به‌دست می‌دهد.

قضیه ۱۱.۳ (زامفیرسکو، ۱۹۹۳). *(الف) اگر K زیرمجموعه‌ای فشرده و محدب با بیش از یک نقطه از فضای باناخ باشد، آن‌گاه بیشترِ توابع از K به K دارای مجموعهٔ نقاط ثابت همانریخت با مجموعهٔ کانتور هستند؛*

(ب) اگر K زیرمجموعه‌ای محدب و فشرده با درون ناتهی از $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه بیشترِ توابع از K به K دارای مجموعهٔ نقاط ثابت قویاً متخلخل بالایی و اندازه‌-صفر هستند.

تعمیمی از این نتایج در [۷] آمده است. در سال ۲۰۰۵ رِیخ[3] و زاسلاوسکی[4] این نتایج را به نگاشت‌های غیرانبساطی از زیرمجموعهٔ کراندار، بسته و محدب یک فضای باناخ به فضای باناخ (توابع غیرخود-نگاشت) تعمیم دادند. این نتایج در سال ۲۰۱۴ در [۲۱] به نگاشت‌های غیرانبساطی مجموعه-مقدار تعمیم داده شده‌اند. نتایج در این زمینه بسیار زیاد هستند و اهم آنها در ۴۰ سال اخیر در [۲۳] که نویسندگان آن از جمله سرشناس‌ترین پژوهشگران در این زمینه هستند، گرد آمده است.

۴. سخن پایانی

این بخش پایانی را با مطلبی آشنا آغاز می‌کنیم که به تعمیمی کلی از مفهوم تخلخل انجامیده است. به‌آسانی می‌توان دید که نمودار هر تابع پیوسته روی یک بازهٔ فشرده، زیرمجموعه‌ای اندازه-صفر و هیچ‌جا چگال از صفحه است. در واقع می‌توان نشان داد که اگر f تابعی از فضای توپولوژیک دلخواه X به فضای هاسدورف بدون نقطهٔ تنها Y باشد که نقاط پیوستگی آن، یک مجموعهٔ مرزی (با درون تهی) باشد، آن‌گاه نمودار f در فضای $X \times Y$ هیچ‌جا چگال است؛ برای مثال، به کتاب توپولوژی کوراتوفسکی مراجعه کنید. اما باید توجه کرد که تابع با نمودار از رستهٔ اول و اندازه-صفر لزوماً پیوسته نیست؛ چنین مثالی در [۱۵] یافت می‌شود.

در سال ۱۹۸۵ فورَن ثابت کرد تابعی پیوسته روی بازهٔ یکه وجود دارد که نمودار آن، σ-متخلخل بالایی نیست. او برای اثبات این مطلب، لمی را ثابت کرد که در طی آن شیوه‌هایی به‌دست می‌داد برای ساختن مجموعه‌های تام و هیچ‌جا چگال که σ-متخلخل بالایی نیستند. این لم بیان روشن‌تر برخی برهان‌هایی است که دیگران برای وجود چنین مجموعه‌هایی استفاده می‌کردند. این لم، به *لم فورَن* و دستهٔ آن مجموعه‌ها، به *دستگاه فورَن* معروف شده است. لم فورن به صورت‌های مختلفی تعمیم داده شده و برای ساختن

[1] J. Schauder [2] L. E. J. Brouwer [3] S. Reich [4] A. J. Zaslavski

مجموعه‌هایی که به‌نوعی متخلخل نباشند، مورد استفاده قرار گرفته است. اما زِلنی[۱] مثالی عمیق آورد که نتیجهٔ فوق از فورن را تعمیم می‌دهد و به یکی از سؤالات او نیز پاسخ می‌دهد.

قضیه ۱.۴ (زِلنی، ۲۰۰۴). *یک تابع پیوستهٔ مطلق روی* $[-۱,۱]$ *وجود دارد که نمودار آن در صفحه* σ*-متخلخل بالایی نیست.*

این قضیه همچنین پاسخی به پرسش گافمن[۲] است که در سال ۱۹۹۵ پرسیده بود «آیا تابعی با سری فوریهٔ یکنواخت-همگرا وجود دارد که نمودار آن σ-متخلخل بالایی نباشد؟» او با ارائهٔ مثال‌هایی نسبتاً ساده وجود تابع پیوسته با سری فوریهٔ واگرا در یک نقطه و نمودار متخلخل بالایی و همچنین تابعی پیوسته با سری فوریهٔ یکنواخت-همگرا را که نمودار آن متخلخل بالایی نباشد، ثابت کرده بود. زِلنی در اثبات وجود تابع مذکور، به‌طور گسترده از نتایج قبلی خود استفاده کرد که در آنها شیوه‌ای برای ساختن مجموعه‌های ناσ-متخلخل بالایی به‌دست داده بود. دو نمونه از این نتایج را ذکر می‌کنیم [۲۰].

قضیه ۲.۴ (زِلنی-پِلَنت،۲۰۰۴). *(الف) هر زیرمجموعهٔ سوسلین[۳] و ناσ-متخلخل بالایی از یک فضای متری توپولوژیکی‌ـکامل، شامل یک زیرمجموعهٔ بسته و ناσ-متخلخل بالایی است؛*

(ب) فرض کنیم X فضای متری فشرده و $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ تحلیلی از فضای همهٔ زیرمجموعه‌های فشرده X باشد. اگر $\mathcal{A}$ شامل همهٔ زیرمجموعه‌های فشرده و شمارا باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $K \in \mathcal{A}$ وجود دارد که σ-متخلخل بالایی نیست.

اثبات این قضیه، پیچیده و ساختاری است. زائیچک و زِلنی با روش‌های غیرسازنده نتایجی مشابه و قوی‌تر در [۳۲] به‌دست آورده‌اند. آنها حالتی کلی‌تر از تخلخل را که به *تخلخل* مجرد مشهور است، به‌کار بردند که در سال ۱۹۸۷ زائیچک آن را معرفی کرده بود. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد. گوییم $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ *نقطه-مجموعه* روی X است اگر $\mathcal{R} \subseteq X \times ۲^X$؛ یعنی رابطه‌ای بین نقاط و زیرمجموعه‌های فضای X است. اگر $\mathcal{R}$ برای (x,A) برقرار باشد، می‌نویسیم $\mathcal{R}(x,A)$ که A زیرمجموعه‌ای از X است. یک رابطهٔ نقطه-مجموعه مانند $\mathcal{P}$ را *رابطهٔ تخلخل‌وار*[۴] گوییم اگر (الف) به‌ازای هر $X \supseteq B \supseteq A$ و $x \in X$ اگر $\mathcal{P}(x,B)$، آن‌گاه $\mathcal{P}(x,A)$ (ب) $\mathcal{P}(x,A)$ اگر و تنها اگر عددی مانند $r > ۰$ موجود باشد که $\mathcal{P}(x, A\cap B(x,r))$ (پ) $\mathcal{P}(x,A)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{P}(x,\bar{A})$. گوییم $A \subseteq X$ در نقطهٔ x، $\mathcal{P}$-متخلخل است اگر $\mathcal{P}(x,A)$. مفاهیم دیگر همچون حالت‌های عادی تعریف می‌شوند. برای تعریف دستگاه فورَن تعمیم‌یافته و لم فورَن و وجود مجموعه‌های ناσ-$\mathcal{P}$-متخلخل، خوانندهٔ مشتاق را به سرچشمهٔ این مباحث، یعنی [۲۰] ارجاع می‌دهیم.

---
[1] M. Zelený [2] C. Goffman [3] A. Suslin [4] porosity-like

تشکر و قدردانی

از دو داور محترم مقاله سپاسگزارم. همچنین نویسنده از حمایت‌های صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور در قالب طرح شماره ۹۳۰۲۷۶۴۵ قدردانی می‌کند.

مراجع

[۱] برسود، د.، *رویکردی بنیادین به نظریهٔ انتگرال‌گیری لبگ*، ترجمه سعید مقصودی، انتشارات دانشگاه زنجان، ۱۳۹۳.

[۲] مقصودی، س.، پدیده‌های حیرت‌آور در آنالیز و سنجش بزرگی مجموعه‌ها، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶)، ۳۵-۶۶.

[۳] مقصودی، س.، سی سال حدس L^p و مسائل وابسته به آن، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۳۳، شمارهٔ ۵۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۳)، ۳۱-۶۰.

[4] Anisiu, V., Porosity and continuous, nowhere differentiable functions, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **2** (1993), 5–14.

[5] Bullen, P. S., Denjoy's index and porosity, *Real Anal. Exchange*, **10** (1984/85), 85-144.

[6] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., *The Theory of Cluster Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[7] Craciun, G., Most homeomorphisms with a fixed point have a Cantor set of fixed points, *Arch. Math. (Basel)*, **100** (2013), 95–99.

[8] De Blasi, F. S., Myjak, J., Sur la convergence des approximations successives pour les contractions non linéaires dans un espaces Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **283** (1976), 185–187.

[9] De Blasi, F. S., Myjak, J., Sur la porosité de l'ensemble des contractions sans point fixe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **308** (1989), 51–54.

[10] Głąb, S., Strobin, F., Dichotomies for L^p spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **368** (2010), 382–390.

[11] Głąb, S., Strobin, F., Dichotomies for $C_0(X)$ and $C_b(X)$ spaces, *Czechoslovak Math. J.*, **63** (2013), 91–105.

[12] Gandini, P. M., Zucco, A., Porosity and typical properties of real-valued continuous functions, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **59** (1989), 15–21.

[13] Gruber, P. M., *Results of Baire category type in convexity*, in Discrete geometry and convexity, New York, 1982.

[14] Gruber, P. M., *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2007.

[15] Kuczma, M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, 2nd edn., Birkhäuser, New York, 2009.

[16] Lindenstrauss, J., Preiss, D., Tišer, J., *Fréchet Differentiability of Lipschitz Functions and Porous Sets in Banach Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 2012.