فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۶ (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۹۷ تا ۱۱۳

خم‌های عجیب در هندسهٔ هذلولوی

منیره پیمان

چکیده

در این مقاله، دو خم عجیب در هندسهٔ هذلولوی که مشابه اقلیدسی ندارند، معرفی و ویژگی‌های آنها بررسی می‌شود. تعریفی جدید برای دایره می‌آوریم و می‌بینیم که برخی از ویژگی‌های جالب این دو خم، در مورد دایره نیز صادق است. در پایان نشان می‌دهیم که اگر سه نقطه بر یک استقامتِ اقلیدسی نباشند، سه خم هم‌فاصلهٔ متفاوت وجود دارند که این سه نقطه بر آنها قرار دارند.

۱. سرآغاز

هندسه در اصل علم «اندازه‌گیری زمین» بوده است. هرودت[۱]، تاریخ‌نگار یونانی سدهٔ پنجم پیش از میلاد، پیدایش هندسه را به مسّاحان مصری نسبت می‌دهد ولی تمدن‌های کهن بابلی، هندی و چینی نیز اطلاعات هندسی زیادی داشته‌اند. ما هندسهٔ اقلیدسی را برای تجسم جهان مادی به‌کار می‌بریم. مقدمات این علم، از کتابی به نام «اصول» به‌دست ما رسیده است که اقلیدس[۲]، ریاضیدان یونانی، آن را حدود سیصد سال پیش از میلاد مسیح نگاشته است. تصوّری که ما بر اساس این هندسه از جهان فیزیکی پیدا کرده‌ایم، تا اندازهٔ زیادی به‌وسیلهٔ آیزاک نیوتن[۳] در اواخر سدهٔ هفدهم میلادی ترسیم شده است. داوید هیلبرت[۴]، برجسته‌ترین ریاضیدان جهان در اوایل سدهٔ بیستم، با به‌کارگیریِ روش بنداشتی، دستگاهی را پایه‌ریزی کرد که بنداشت‌های آن از نظر ماهیت، نزدیک‌ترین بنداشت‌ها به اصول اقلیدس هستند. در این روش، خطر استدلال از روی نمودار و دیگر کاستی‌هایی که در روش

عبارات و کلمات کلیدی. هندسهٔ هذلولوی؛ خم حدی؛ دایرهٔ زمانی؛ خم هم‌فاصله؛ اَبَردایره.

[۱]Herodotus [۲]Euclid [۳]Isaac Newton [۴]David Hilbert

ارائهٔ هندسه توسط اقلیدس وجود داشت، برطرف گردید. بنداشت‌های هیلبرت به پنج دستهٔ وقوع، میانبود، قابلیت انطباق، پیوستگی و توازی تقسیم می‌شوند که بنداشت توازی او معادل اصل پنجم اقلیدس یا همان *اصل توازی* اقلیدسی است. اگر از بنداشت‌های هیلبرت، بنداشت توازی را کنار بگذاریم، هندسه‌ای خواهیم داشت که به هندسهٔ خنثی یا هندسهٔ نتاری شهرت دارد. این هندسه، زیربنایی برای هر دو هندسهٔ اقلیدسی و هذلولوی است و در آن، همهٔ احکامی که در برهان آنها اصل توازی نقشی ندارد، قابل اثبات هستند. در نتیجه هندسهٔ نتاری از نظر علم منطق، یك دستگاه قیاسی سازگار و تمام است [۱].

هندسهٔ هذلولوی که در اوایل سدهٔ نوزدهم تقریباً همزمان توسط گاوس[۱]، بویویی[۲] و لباچفسکی[۳] کشف شد، هندسه‌ای است که با پذیرش همهٔ بنداشت‌های هندسهٔ نتاری و افزودن بنداشت توازی هذلولوی پدید آمده است. در بنداشت توازی هذلولوی می‌پذیریم که یك خط ℓ و یك نقطهٔ P ناواقع بر آن وجود دارند که حداقل دو خط موازی با ℓ از نقطهٔ P می‌گذرند. برای تجسم هندسهٔ هذلولوی، از سه الگوی بلترامی[۴]ـکلاین[۵]، نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره[۶] و قرص پوانکاره کمك می‌گیریم. برتریِ الگوی بلترامیـکلاین در نمایش خط‌های این هندسه به‌کمك پاره‌خط‌های اقلیدسی و برتریِ الگوهای پوانکاره در این است که زوایا به روش اقلیدسی اندازه گرفته می‌شوند. با بررسی الگوهای فوق دیده می‌شود که هندسهٔ هذلولوی همان‌قدر سازگار است که هندسهٔ اقلیدسی و با توجه به کارهایی که توسط گاوس انجام گرفته است، می‌توان هندسهٔ اقلیدسی را یك حالت حدی از هندسهٔ هذلولوی دانست [۱].

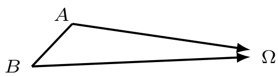
در هندسهٔ هذلولوی، خط‌های موازی ممکن است واگرا یا به‌طور مجانبی همگرا باشند. در این مقاله خواهیم دید که یك نقطهٔ عادی، آرمانی یا فراآرمانی به‌ترتیب، مرکز دایره، مرکز خم حدی یا مرکز خم هم‌فاصله خواهند بود. این دو خم اخیر در هندسهٔ اقلیدسی مشابه ندارند و هدف ما در این مقاله، بررسی ویژگی‌های این دو خم است.

۲. نقاط آرمانی، فراآرمانی و متناظر

می‌دانیم که دو خط به‌طور مجانبی موازی، هیچ نقطهٔ تقاطعی ندارند امّا به چنین خط‌هایی نقطه‌ای در بی‌نهایت به نام *نقطهٔ آرمانی* منسوب می‌کنیم و آن را نقطهٔ تقاطع آن دو خط می‌انگاریم. پس چنین می‌پنداریم که همهٔ خط‌هایی که در یك امتداد با یك خط معین و در نتیجه با یکدیگر موازی حدی هستند، در یك نقطهٔ آرمانی متقارب می‌شوند و یك دسته خط با یك رأس آرمانی تشکیل می‌دهند. پس هر خط علاوه بر نقاط عادی، دو نقطهٔ آرمانی دارد که تمام خط‌هایی که در دو امتداد با آن موازی حدی باشند، بر یکی از آن نقاط خواهند گذشت. بنابراین در گزارهٔ «دو خط در یك نقطهٔ آرمانی

---

[۱] Carl Friedrich Gauss [۲] János Bolyai [۳] N. I. Lobachevsky [۴] Eugenio Beltrami [۵] Felix Klein [۶] Henri Poincaré



شکل ۱

متقاطع هستند»، منظور آن است که دو خط موازی حدی هستند و گزارهٔ «خطی یك نقطهٔ عادی را به یك نقطهٔ آرمانیِ خطی مفروض وصل می‌کند» یعنی از آن نقطهٔ عادی یك نیم‌خط موازی حدی با آن خط مفروض و در آن امتداد معین، رسم شده است. معمولاً برای نمایش نقاط آرمانی، حروف بزرگ الفبای یونانی (مانند Ω) به‌کار گرفته می‌شود.

دو خط به‌طور واگرا موازی نیز نقطهٔ مشترك ندارند ولی چنان‌که می‌دانیم، این خط‌ها دارای عمود مشترك هستند [۵]. با استفاده از این ویژگی، به هر خط، نقطه‌ای فراآرمانی چنان منسوب می‌شود که به‌منزلهٔ نقطهٔ مشترك همهٔ خط‌های عمود بر آن باشد. پس همهٔ خط‌های عمود بر یك خط، دسته‌ای تشکیل می‌دهند که رأس آنها نقطه‌ای فراآرمانی است. در نتیجه می‌توان پنداشت که دو خط به‌طور واگرا موازی، یکدیگر را در یك نقطهٔ فراآرمانی قطع می‌کنند. همچنین متناظر با هر نقطهٔ فراآرمانی، خطی وجود دارد که نمایندهٔ آن نقطه است و هر خطی که بر خط نماینده عمود باشد، از آن نقطهٔ فراآرمانی می‌گذرد. قرارداد می‌کنیم که نقاط فراآرمانی را با حروف بزرگ یونانی به همراه اندیسی که معرف خط نمایندهٔ آن نقطه باشد، نمایش دهیم. با این قرارداد، Γ_ℓ یك نقطهٔ فراآرمانی است و همهٔ خط‌هایی که بر ℓ عمود هستند، از آن می‌گذرند.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم نقطهٔ آرمانی Ω تقاطع دو خط است که به‌طور مجانبی موازی هستند. همچنین نقاط دلخواه A و B را چنان در نظر می‌گیریم که A بر یکی از این دو خط و B بر دیگری واقع باشد. شکل پدید آمده از دو خط مذکور و پاره‌خط AB، شکلی *مثلث‌گونه* است که دو رأس عادی آن، نقاط A و B و رأس آرمانی آن، Ω است (شکل۱).

گزاره ۲.۲ ([۱۰]). *اگر در دو شکل مثلث‌گونهٔ $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ داشته باشیم*

$$AB \cong A'B' \quad \text{و} \quad \angle BA\Omega \cong \angle B'A'\Omega'،$$

آن‌گاه $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ و بنابراین $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ قابل‌انطباق خواهند بود.

تعریف ۳.۲. دو نقطهٔ P و Q واقع بر دو خط متمایز را *نقاط متناظر* گوییم، اگر زاویه‌های واقع در یک طرف خط $\overleftrightarrow{PQ}$ که توسط آن دو خط و خط $\overleftrightarrow{PQ}$ پدید آمده‌اند، قابل‌انطباق باشند.

اگر خط‌هایی که نقاط متناظر بر آنها واقع‌اند، به‌طور مجانبی موازی، متقاطع یا به‌طور واگرا موازی باشند، دارای ویژگی‌هایی خواهند بود که در قضیه‌های زیر می‌بینیم. اثبات این قضیه‌ها را می‌توانید در [۱۰] بیابید.

قضیه ۴.۲. *به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خطی که به‌طور مجانبی موازی هستند، یک و تنها یک نقطهٔ متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.*

قضیه ۵.۲. *اگر هر یک از نقاط P، Q و R بر یکی از سه خطی که در یک جهت با یکدیگر به‌طور مجانبی موازی هستند، واقع گردند و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار گیرند و به‌علاوه R متناظر با P است.*

قضیه ۶.۲. *به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خط متقاطع، یک و تنها یک نقطهٔ متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.*

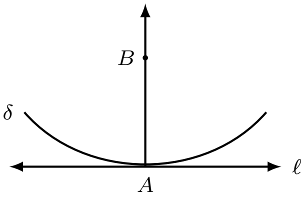
قضیه ۷.۲. *اگر هر یک از نقاط P، Q و R بر یکی از سه خطی که متقاطع هستند، واقع شود و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار گیرند و به‌علاوه R متناظر با P است.*

قضیه ۸.۲. *به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خطی که به‌طور واگرا موازی هستند، یک و تنها یک نقطهٔ متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.*

قضیه ۹.۲. *اگر هر یک از نقاط P، Q و R بر یکی از سه خطی که به‌طور واگرا موازی هستند، واقع شود و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار گیرند مگر وقتی که خط گذرنده بر آنها، عمودمشترک سه خط باشد. به‌علاوه R متناظر با P است.*

۳. خم حدی

خط ℓ و نقطهٔ A واقع بر آن را در نظر می‌گیریم. از A بر ℓ عمودی خارج و نقطهٔ B را بر آن اختیار می‌کنیم. حال فرض کنیم دایرهٔ δ به مرکز B و شعاع $\overline{AB}$ در A بر ℓ مماس باشد. اگر B در امتداد عمود بر ℓ از A بسیار دور شود، آن‌گاه دایرهٔ δ در حالی که بر ℓ مماس باقی می‌ماند، به‌تدریج بزرگ می‌شود و اگر B به‌اندازهٔ دلخواه زیاد از A دور شود، به سمت یک وضع حدی میل خواهد کرد. در هندسهٔ اقلیدسی، وضع حدی دایرهٔ δ دقیقاً خط ℓ است ولی در هندسهٔ هذلولوی، وضع حدی δ، یک خم با سرشتی عجیب است (شکل۲). اکنون به معرفی و بررسی ویژگی‌های این خم می‌پردازیم.



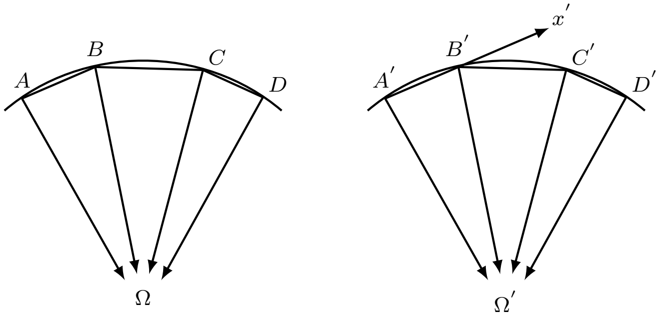
شکل ۲

برای این منظور، تعریفی جدید برای دایره می‌آوریم که بتواند همهٔ ویژگی‌های مشهور دایره را نتیجه دهد و به‌علاوه وسیله‌ای ساده برای انتقال از دایرهٔ معمولی به خم‌های تازه و عجیب باشد.

تعریف ۱.۳. دایره مکان هندسی نقاط متناظرِ واقع بر شعاع‌های یک دسته خط شعاعی است که رأس آن یک نقطهٔ عادی باشد.

اگر سرشت شعاع‌هایی که نقاط متناظر بر آنها قرار دارند را تغییر دهیم، به دو خم مورد نظر در این مقاله خواهیم رسید. نخست به مطالعهٔ مجموعهٔ نقاط متناظرِ واقع بر دسته‌ای از خط‌ها که به‌طور مجانبی موازی هستند، می‌پردازیم؛ یعنی دسته‌ای که رأس آن یک نقطهٔ آرمانی است. این مکان در هندسهٔ هذلولوی یک خط راست نیست، زیرا بنا بر قضیهٔ ۵.۲، هیچ سه نقطه‌ای از این مجموعه بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار ندارند. این مکان دایره نیز نیست، زیرا چنان‌که خواهیم دید، دارای ویژگی‌هایی است که در دایره وجود ندارد. چون این خم، صورت حدیِ دایره‌ای است که شعاع آن بی‌نهایت بزرگ می‌شود، آن را *خم حدی* یا *دایرهٔ زمانی* می‌نامند [۱۰]. نیم‌خط‌های دسته خط‌هایی که به‌طور مجانبی موازی هستند را شعاع‌ها یا محورها و به مرکز آرمانی این شکل، مرکز خم حدی می‌گویند. بدیهی است که بنابر قضیهٔ ۵.۲، چون هیچ سه نقطه‌ای از خم حدی بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار نگرفته‌اند، یک خط راست نمی‌تواند یک خم حدی را در بیش از دو نقطه قطع کند.

تذکر ۲.۳. دو خم حدی را در نظر می‌گیریم که مرکزهای آرمانی آنها Ω و Ω' است. نقاط A، B، C، D و ... را بر خم حدی به مرکز Ω اختیار و شعاع‌های $\overrightarrow{A\Omega}$، $\overrightarrow{B\Omega}$، $\overrightarrow{C\Omega}$، $\overrightarrow{D\Omega}$ و ... را رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ دلخواه A' را بر خم حدی به مرکز Ω' اختیار و شعاع $\overrightarrow{A'\Omega'}$ را رسم می‌کنیم. حال نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان رسم می‌کنیم که $\angle\Omega' A' x'$ بر $\angle\Omega AB$ قابل‌انطباق باشد. سپس نقطهٔ B' واقع بر نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان برمی‌گزینیم که $A'B' \cong AB$. با رسمِ شعاع $\overrightarrow{B'\Omega'}$، بنابر گزارهٔ ۲.۲، دو مثلث‌گونهٔ $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ قابل‌انطباق خواهند بود. در نتیجه $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ و بنابراین $\angle A'B'\Omega' \cong \angle B'A'\Omega'$. پس B' متناظر با A' خواهد بود و بنابر قضیهٔ ۴.۲،



شکل ۳

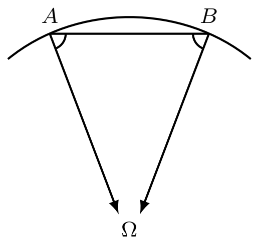
نقطهٔ B' بر خم حدیِ به مرکز Ω' واقع است. با ادامهٔ این روند، نقاط C'، D' و ... را بر این خم حدی چنان می‌یابیم که وترهای $B'C'$، $C'D'$ و ... به‌ترتیب، بر وترهای BC، CD و ... قابل‌انطباق باشند و به‌علاوه، زاویه‌های ساخته‌شده توسط جفت وترهای متناظر و شعاع‌های مرسوم از نقاط انتهایی آنها، قابل‌انطباق باشند (شکل ۳). این تناظر میان دو خم حدی را *قابلیت انطباق* آنها می‌نامیم. در نتیجه هر دو خم حدی قابل‌انطباق هستند. همچنین تناظر یک‌به‌یک میان قوس‌های متناظر در تناظر توصیف‌شده را به قابلیت‌انطباق آنها اطلاق می‌کنیم. برای مثال، می‌گوییم قوس‌های متناظر AD و $A'D'$ قابل‌انطباق هستند. همچنین ممکن است این تناظر بین دو قوس از دو خم حدی هم‌مرکز یا دو قوس از یک خم حدی برقرار شود. اگر تناظر توصیف‌شده در تذکر ۲.۳ بین دو قوس از یک خم حدی برقرار شود، این تناظر را با واژهٔ «خمیدگی» و به این صورت بیان می‌کنیم که «یک خم حدی در همهٔ نقاط خود دارای یک خمیدگی است.» چنان که دیده می شود، این ویژگی را دایره‌ها نیز دارند.

ویژگی‌های جالب دیگری برای خم‌های حدی در [۱۰] به‌دست آمده است که در قضیهٔ زیر می‌بینیم. برخی از این ویژگی‌ها در مورد دایره نیز صادق هستند ولی نه همهٔ آنها.

قضیه ۳.۳. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

(الف) *بر هر دو خم حدی (یا بر یک خم حدی)، وترهای قابل‌انطباق دارای قوس‌های قابل‌انطباق و قوس‌های قابل‌انطباق دارای وترهای قابل‌انطباق هستند. علاوه بر این، در قوس‌هایی که قابل‌انطباق نیستند، وتر بزرگتر متعلق به قوس بزرگتر است؛*

(ب) *اگر خطی خم حدی را در یک نقطه قطع کند و شعاع نباشد، خم را در یک نقطهٔ دیگر نیز قطع خواهد کرد؛*



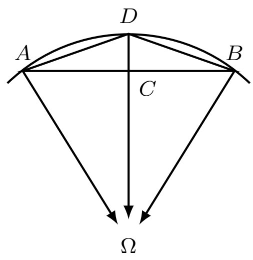
شکل ۴

(پ) *مماس بر خم حدی در هر نقطه، بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است؛ یعنی خم حدی محورهای خود را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. در نتیجه می‌توان آن را مسیری عمود بر دسته شعاع‌های خود پنداشت.*

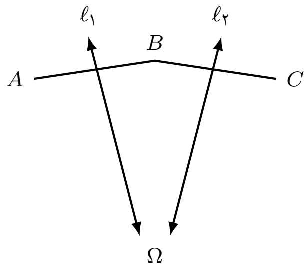
یادآوری می‌کنیم که خط‌های به‌طور مجانبی موازی، در یک امتداد به هم نزدیک و در امتداد دیگر از هم دور می‌شوند. همچنین بنابر تعریف، یک خم حدی، مکان هندسی نقاط متناظرِ واقع بر دسته‌ای از خط‌ها است که به‌طور مجانبی موازیند؛ یعنی دسته‌ای از خط‌ها که رأس آن یک نقطهٔ آرمانی است. بنابراین برای یک خم حدی، واژهٔ «تقعر» را به این صورت تعریف می‌کنیم. فرض کنیم Ω مرکز آرمانی یک خم حدی و A و B نقاطی دلخواه واقع بر آن باشند. چون زاویه‌های قابل‌انطباق $\angle BA\Omega$ و $\angle AB\Omega$ در مثلث‌گونهٔ $\triangle AB\Omega$ حاده هستند، گوییم تقعر یک خم حدی به طرف توازی شعاع‌های آن، کاو یا مقعر است (شکل۴). در پایان این بخش، نشان می‌دهیم که با داشتن سه نقطه از یک خم حدی، می‌توان آن را رسم کرد. برای این منظور، ابتدا قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳. *خط عمود بر وسط وتری از خم حدی، شعاع است و قوس متناظر با آن وتر را نصف می‌کند.*

اثبات. وتر AB از خم حدی داده‌شده به مرکز آرمانی Ω را اختیار و شعاع‌های $\overrightarrow{A\Omega}$ و $\overrightarrow{B\Omega}$ را رسم می‌کنیم. چون نقاط A و B متناظر هستند، داریم $\angle BA\Omega \cong \angle AB\Omega$. فرض کنیم C نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد. شعاع $\overrightarrow{C\Omega}$ را رسم می‌کنیم و دو شکل مثلث‌گونهٔ $\triangle AC\Omega$ و $\triangle BC\Omega$ را در نظر می‌گیریم. بنابر گزارهٔ ۲.۲، خواهیم داشت $\angle AC\Omega \cong \angle BC\Omega$. پس $\angle AC\Omega$ بر مکمل خود قابل‌انطباق است. در نتیجه $\angle AC\Omega$ قائمه است و بنابراین خط $\overleftrightarrow{C\Omega}$ عمودمنصف وتر AB است. حال اگر تقاطع خط $\overleftrightarrow{C\Omega}$ و خم حدی را D بنامیم، بدیهی است که دو مثلث $\triangle ACD$ و $\triangle BCD$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین، قابل‌انطباق خواهند بود. در نتیجه $AD \cong BD$ و



شکل ۵



شکل ۶

بنابراین قوس‌های نظیر آنها قابل‌انطباق هستند. پس خط $\overleftrightarrow{C\Omega}$ قوس نظیر وتر AB را نصف می‌کند (شکل۵). □

قضیه ۵.۳. *هر خم حدی با سه نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.*

اثبات. فرض کنیم سه نقطهٔ A، B و C از یک خم حدی داده شده باشند. بنابر قضیهٔ ۵.۲، این سه نقطه بر یک استقامتِ اقلیدسی نیستند. اگر خط‌های ℓ_1 و ℓ_2 به‌ترتیب، عمودمنصف وترهای AB و BC باشند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۴.۳، این دو خط، شعاع‌اند و بنابراین به‌طور مجانبی موازی هستند. پس Ω مرکز خم حدی، نقطهٔ آرمانی مشترک آنها است و در طرفی از خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارد که C در آن است. با یافتنِ Ω، نقاط دیگر آن نیز با استفاده از تعریف به‌دست می‌آیند (شکل۶). □

۴. خم هم‌فاصله

در این بخش، به دسته‌ای از شعاع‌ها که رأس فراآرمانی دارند، می‌پردازیم و نقاط متناظر واقع بر این دسته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. خم هم‌فاصله، مکان هندسی نقاط متناظرِ واقع بر دسته‌ای از خط‌ها است که به‌طور واگرا موازی‌اند. خط‌های دسته را شعاع‌ها یا محورهای خم هم‌فاصله، رأس فراآرمانی دسته را مرکز آن و خط نمایندهٔ رأس را *خط مبنا* می‌نامیم.

خط مبنا در واقع همان عمودمشترک خط‌های دستهٔ مذکور است. به خم هم‌فاصله، *اَبَردایره* نیز می‌گویند [۱۰]. چون هر خط (در اینجا خط مبنا) دقیقاً مرز دو نیم‌صفحه است و این نیم‌صفحه‌ها، نقطهٔ مشترکی ندارند [۵]، نشان خواهیم داد که خم هم‌فاصله از دو شاخه تشکیل شده است که در دو طرف خط مبنا قرار دارند. بنابراین خم هم‌فاصله همبند نیست.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم نقاط A و B واقع بر خم هم‌فاصله‌ای با خط مبنای ℓ باشند که در یک طرف ℓ واقع‌اند. همچنین فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ به‌ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B با خط ℓ باشند. بنابر تعریف خم هم‌فاصله و ویژگی‌های یک چهارضلعی گوژ در هندسهٔ هذلولوی [۵]، زاویه‌های قابل‌انطباق $\angle BAH_۱$ و $\angle ABH_۲$ حاده‌اند. در این حالت گوییم خم هم‌فاصله به سمت خط مبنای خود کاو یا مقعر است.

ویژگی‌های خم هم‌فاصله را می‌توان در قضیه‌های زیر دید.

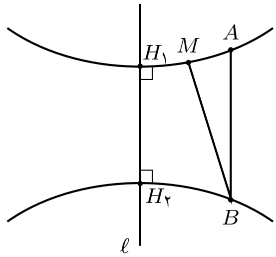
قضیه ۳.۴. *برای هر خم هم‌فاصله گزاره‌های زیر برقرارند:*

(الف) *خم هم‌فاصله، مکان هندسی نقاط واقع در یک طرف معین خط مبنا است که فاصله‌های عمودی آنها از خط مبنا یکسان است. این گزاره در طرف دیگر خط مبنا نیز برقرار است؛*

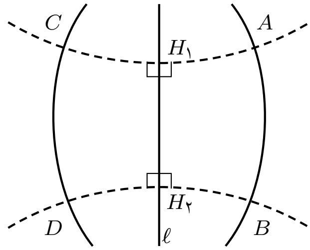
(ب) *خم هم‌فاصله از دو شاخه که در دو طرف خط مبنا قرار دارند، تشکیل شده است.*

اثبات. (الف) فرض کنیم نقطهٔ فراآرمانی Γ_ℓ مرکز خم هم‌فاصله باشد. پس ℓ خط مبنا خواهد بود. حال اگر در یک طرف خط مبنا، نقاط A و B را واقع بر خم هم‌فاصله اختیار کنیم، آن‌گاه شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B بر خط مبنا عمود خواهند بود، زیرا بنابر تعریف خم هم‌فاصله، خط مبنا عمودمشترک آنها است. پس اگر نقاط تلاقی شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B با خط ℓ را به‌ترتیب، $H_۱$ و $H_۲$ بنامیم، آن‌گاه زاویه‌های $\angle AH_۱H_۲$ و $\angle BH_۲H_۱$ قائمه هستند. همچنین بنابر تعریف خم هم‌فاصله، نقاط A و B متناظر هستند. در نتیجه $\angle BAH_۱ \cong \angle ABH_۲$. امّا $BH_۲ \cong AH_۱$؛ اگرنه با فرضِ $BH_۲ < AH_۱$، نقطهٔ M میان A و $H_۱$ وجود دارد که $BH_۲ \cong MH_۱$ و آن‌وقت در چهارضلعی ساکری[۱] $\square H_۱H_۲BM$، زاویه‌های $\angle BMH_۱$ و $\angle MBH_۲$ قابل‌انطباق و حاده خواهند شد [۵]. از طرف دیگر، چون $\angle MBH_۲ < \angle ABH_۲$،

[۱] Saccheri



شکل ۷



شکل ۸

پس $\angle BMH_1 < \angle BAH_1$ و بنابراین $\angle MBH_2 < \angle BAH_1$ که ممکن نیست، زیرا $\angle BMH_1$ زاویهٔ خارجی غیرمجاور به $\angle BAM$ از مثلث $\triangle BAM$ است و باید داشته باشیم $\angle BMH_1 > \angle BAM$ یا $\angle BMH_1 > \angle BAH_1$. پس $AH_1 \cong BH_2$؛ یعنی A و B از ℓ به یک فاصله‌اند. با انتخابِ طرف دیگر خط مبنا و به روش مشابه، درستیِ گزارهٔ بیان‌شده در بند (الف) این قضیه مجدداً ثابت می‌شود (شکل ۷). لازم به ذکر است که چون شعاع‌های گذرنده بر A و B خط‌های به‌طور واگرا موازی هستند و این خط‌ها در طرفین خط عمودمشترک‌شان از هم دور می‌شوند [۵]، در شکل ۷ این خط‌ها بدین گونه ترسیم شده‌اند. ضمناً خم هم‌فاصله در این شکل دیده نمی‌شود؛ ترسیم آن را در شکل ۸ خواهیم دید.

(ب) نقاط C و D را به‌ترتیب، بر نیم‌خط‌های متقابل $\overrightarrow{H_1A}$ و $\overrightarrow{H_2B}$ چنان اختیار می‌کنیم که $H_1C \cong H_1A$ و $H_2D \cong H_2B$. در نتیجه $H_1C \cong H_2D$ و بنابراین در چهارضلعی ساکری $\square H_2H_1CD$، داریم $\angle H_1CD \cong \angle H_2DC$ [۵]. پس نقاط C و D متناظرند و لذا C و D نیز بر خم هم‌فاصله و در طرف دیگر خط مبنا قرار دارند (شکل ۸). $\square$

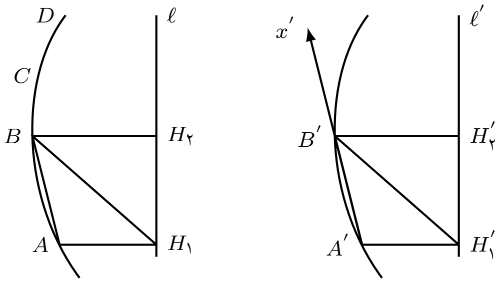
تعریف ۴.۴. فاصلهٔ یکسان نقاط یک خم هم‌فاصله از خط مبنای آن را *فاصله* می‌نامیم.

دلیل نامگذاری خم هم‌فاصله، فاصلهٔ یکسان نقاط آن تا یک خط مشخص (خط مبنا) است. در هندسهٔ اقلیدسی، هر دو خط موازی، یک خم هم‌فاصله هستند. همچنین هر خط را می‌توان به‌عنوان خم هم‌فاصله‌ای با فاصلهٔ صفر فرض کرد.

قضیه ۵.۴. *هر دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های یکسان، قابل‌انطباق هستند.*

اثبات. فرض کنیم ℓ و ℓ' خط‌های مبنای دو خم هم‌فاصله با فاصلهٔ یکسان d باشند. نقاط دلخواه A، B، C، D و ... را بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن ℓ است، اختیار می‌کنیم. سپس نقطهٔ دلخواه A' را بر خم دیگر در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ به‌ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از A و B با خط ℓ و $H'_۱$ نقطهٔ تلاقی شعاع گذرنده از A' با خط ℓ' باشند. چون در یک خم هم‌فاصله، خط مبنا عمودمشترک شعاع‌های آن است، زاویه‌های $\angle AH_۱H_۲$ و $\angle BH_۲H_۱$ قائمه هستند. حال نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان رسم می‌کنیم که $\angle H_۱AB \cong \angle H'_۱A'x'$. سپس نقطهٔ B' واقع بر $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان برمی‌گزینیم که $AB \cong A'B'$ و محل تلاقی شعاع گذرنده از B' با خط ℓ' را $H'_۲$ می‌نامیم. در نتیجه زاویهٔ $\angle B'H'_۲H'_۱$ قائمه است. حال چون دو خم دارای فاصلهٔ یکسان هستند، داریم $AH_۱ \cong A'H'_۱$. در نتیجه دو مثلث $\triangle BAH_۱$ و $\triangle B'A'H'_۱$ به حالت (ض‌زض)، قابل‌انطباق خواهند بود و بنابراین $BH_۱ \cong B'H'_۱$ و $\angle BH_۱A \cong \angle B'H'_۱A'$. پس $\angle H_۲H_۱B \cong \angle H'_۲H'_۱B'$ و در نتیجه دو مثلث $\triangle H_۲BH_۱$ و $\triangle H'_۲B'H'_۱$ به حالت (ززض) قابل‌انطباق هستند. بنابراین $BH_۲ \cong B'H'_۲$ و در نتیجه $B'H'_۲ \cong A'H'_۱$. پس چهارضلعی $\square H'_۲H'_۱A'B'$ ساکری است و لذا $\angle H'_۱A'B' \cong \angle H'_۲B'A'$. در نتیجه B' متناظر با A' است؛ یعنی B' بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن ℓ' است، قرار دارد. با ادامهٔ این روند، نقاط C'، D' و ... را چنان می‌یابیم که وترهای $B'C'$، $C'D'$ و ... به‌ترتیب، بر وترهای BC، CD و ... قابل‌انطباق باشد و به‌علاوه، زاویه‌هایی که جفت وترهای متناظر با شعاع‌های گذرنده از نقاط انتهایی آنها می‌سازند، قابل‌انطباق باشند. چنین تناظر میانِ دو خم هم‌فاصله را به مفهوم قابلیت‌انطباق آنها بیان می‌کنیم (شکل ۹). $\square$

دیدیم که تناظر توصیف‌شده میان دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های یکسان در قضیهٔ ۵.۴ را با واژهٔ «قابلیت‌انطباق» آنها بیان کردیم. اکنون تناظر یک‌به‌یک میان قوس‌های متناظر در تناظر توصیف‌شده را به قابلیت‌انطباق آن دو قوس اطلاق می‌کنیم. برای مثال، گوییم قوس‌های متناظر AB و $A'B'$ قابل‌انطباق‌اند. حال اگر تناظر توصیف‌شده میان دو قوس از یک خم هم فاصله برقرار شود، این تناظر را با واژهٔ «خمیدگی» به این صورت بیان می‌کنیم که «یک خم هم‌فاصله در تمام نقاط خود دارای

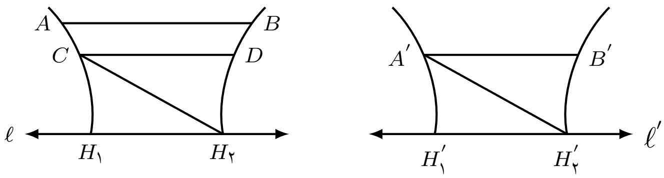


شکل ۹

یک خمیدگی است.» چنان که دیده می‌شود، این ویژگی میان دایره، خم حدی و خم هم‌فاصله مشترک است.

قضیه ۶.۴. *دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های متفاوت، خمیدگی‌های متفاوت دارند و هرچه فاصله بزرگتر باشد، خمیدگی بیشتر است.*

اثبات. دو خم هم‌فاصله را به‌ترتیب با خط‌های مبنای ℓ و ℓ' و فاصله‌های d و d' در نظر می‌گیریم. سپس نقاط دلخواه A و B را بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن ℓ است، اختیار می‌کنیم. اگر $H_۱$ و $H_۲$ به‌ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از A و B با خط ℓ باشند، آن‌گاه زاویه‌های $\angle H_۲H_۱A$ و $\angle H_۱H_۲B$ قائمه هستند و طول پاره‌خط‌های قابل‌انطباق $H_۱A$ و $H_۲B$ مساوی d است. حال نقاط $H'_۱$ و $H'_۲$ را بر ℓ' چنان اختیار می‌کنیم که $H_۱H_۲ \cong H'_۱H'_۲$. سپس عمودهایی از $H'_۱$ و $H'_۲$ بر ℓ' خارج می‌کنیم و نقاط A' و B' را به‌ترتیب، بر این دو عمود و در یک طرف ℓ' چنان برمی‌گزینیم که دو پاره‌خط $H'_۱A'$ و $H'_۲B'$ دارای طول یکسان d' باشند. بدیهی است که A' و B' بر یک شاخه از خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن ℓ' است، قرار دارند. حال فرض کنیم $d > d'$. پس نقاط C و D وجود دارند که C میان A و $H_۱$ و D میان B و $H_۲$ واقع است و $H_۱C \cong H'_۱A'$ و $H_۲D \cong H'_۲B'$. دو مثلث $\triangle H_۱H_۲C$ و $\triangle H'_۱H'_۲A'$ به حالت (ض‌زض) قابل‌انطباق هستند و در نتیجه همین قابلیت‌انطباق را برای دو مثلث $\triangle H_۲DC$ و $\triangle H'_۲B'A'$ خواهیم داشت. پس بنا بر جمع زاویه‌ها، $\angle H_۱CD \cong \angle H'_۱A'B'$ و $\angle H_۲DC \cong \angle H'_۲B'A'$. ادعا می‌کنیم $\angle H'_۱A'B' > \angle H_۱AB$ که در صورت درستی این ادعا، نامساوی $\angle H'_۲B'A' > \angle H_۲BA$ را نیز خواهیم داشت. فرض کنیم چنین نباشد. پس $\angle H'_۱A'B' \leqslant \angle H_۱AB$ و $\angle H'_۲B'A' \leqslant \angle H_۲BA$. در نتیجه $\angle H_۱CD \leqslant \angle H_۱AB$ و $\angle H_۲DC \leqslant \angle H_۲BA$ و بنابراین مجموع



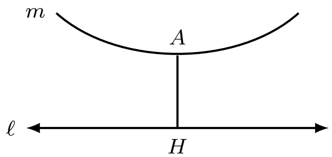
شکل ۱۰

اندازه‌های زاویه‌های چهارضلعی گوژ $\square CDBA$ بزرگتر یا مساوی چهار قائمه خواهد بود که یک تناقض در هندسهٔ هذلولوی است. با اثبات ادعا، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود (شکل ۱۰). $\square$

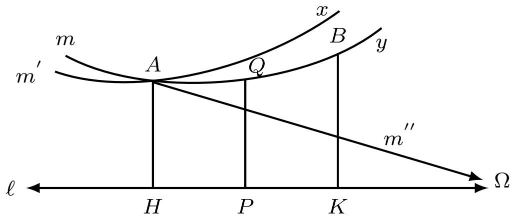
در شکل ۱۰، دو خم هم‌فاصلهٔ پیشگفته، رسیم نشده‌اند و فقط خط مبنای ℓ (یا ℓ') و نقاط A و B (یا A' و B') را مشاهده می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که در یک خم هم‌فاصله یا در خم‌های هم‌فاصلهٔ قابل‌انطباق، قوس‌های قابل‌انطباق، وترهای قابل‌انطباق دارند و وترهای قابل‌انطباق، منسوب به قوس‌های قابل‌انطباق هستند. بدیهی است که منظور ما وترهایی است که نقاط واقع بر یک شاخه را به هم وصل می‌کند. همچنین بنابر قضیهٔ ۹.۲ و مشابه آنچه در مورد خم حدی دیدیم، خط راست نمی‌تواند خم هم‌فاصله را در بیش از دو نقطه قطع کند.

قضیه ۷.۴. *اگر خطی خم هم‌فاصله را در یک نقطه قطع کند، آن را در یک نقطهٔ دیگر نیز قطع خواهد کرد مگر اینکه بر آن، مماس یا با خط مبنای آن، به‌طور مجانبی موازی باشد.*

اثبات. فرض کنیم ℓ خط مبنا، A نقطه‌ای از خم هم‌فاصله و m خطی باشد که در A بر شعاع گذرنده از A عمود است. محل تلاقی شعاع گذرنده از A بر ℓ را H می‌نامیم. پس خط $\overleftrightarrow{AH}$ عمودمشترک دو خط ℓ و m است، یعنی ℓ و m به‌طور واگرا موازی هستند. پس اگر d فاصلهٔ خم هم‌فاصله باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط AH برابر با d است و هیچ نقطهٔ دیگری بر m وجود ندارد که فاصلهٔ عمودی آن از ℓ مساوی d باشد. بنابراین m خم هم‌فاصله را فقط در A بُریده است. پس m در A بر آن مماس است. در نتیجه خم هم‌فاصله را می‌توان مسیر عمود بر دسته محورهای آن دانست (شکل ۱۱). حال فرض کنیم A نقطهٔ تلاقی خم هم‌فاصله و خط m باشد که با ℓ به‌طور مجانبی موازی است. در این حالت چون هیچ دو نقطه‌ای واقع بر m از ℓ به یک فاصله نیستند، A تنها نقطهٔ تلاقی m و خم هم‌فاصله خواهد بود. اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که خط m خم هم‌فاصله را در نقطهٔ A بُریده است ولی نه در A بر خم مماس است و نه با ℓ به‌طور مجانبی موازی است. اگر m بر ℓ عمود و H نقطهٔ تلاقی آنها باشد، آن‌گاه m شاخهٔ دیگر خم هم‌فاصله را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند. بدیهی است که $A \neq B$، $AH \cong BH$ و اثبات تمام است. در غیر این صورت، فرض کنیم خط



شکل ۱۱

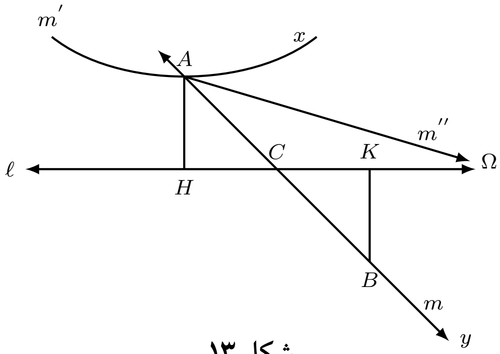


شکل ۱۲

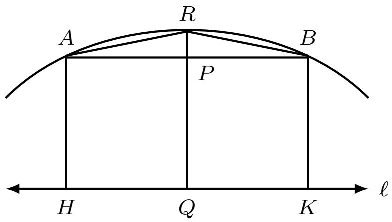
m' در A بر خم مماس و خط m'' بر A بگذرد و با ℓ به‌طور مجانبی موازی باشد. همچنین فرض کنیم H پای عمود وارد از A بر ℓ و نقطهٔ آرمانی Ω محل تلاقی ℓ و m'' باشند. نقطهٔ x متمایز با A را واقع بر m' و در همان طرفی از خط $\overleftrightarrow{AH}$ که Ω در آن است، اختیار می‌کنیم. اگر m شامل نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{Ay}$ باشد که میان دو نیم‌خط $\overrightarrow{Ax}$ و $\overrightarrow{AH}$ قرار گرفته است، آن‌گاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت اول: نیم‌خط $\overrightarrow{Ay}$ میان $\overrightarrow{Ax}$ و $\overrightarrow{A\Omega}$ است. در این صورت، خط m با ℓ به‌طور واگرا موازی و با ℓ دارای عمودمشترک است. اگر نقاط P و Q به‌ترتیب، محل تلاقی ℓ و m با عمودمشترک‌شان باشد و نقطهٔ B واقع بر نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{QA}$ را چنان اختیار کنیم که $QA \cong QB$، آن‌گاه $AH \cong BK$ که در آن، K پای عمود وارد از B بر ℓ است. پس B بر خم هم‌فاصله قرار دارد و لذا خط m خم را در نقطهٔ دیگری مانند B قطع کرده است (شکل ۱۲).

حالت دوم: نیم‌خط $\overrightarrow{Ay}$ میان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{A\Omega}$ است. در این صورت، خط m خط ℓ را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند. نقطهٔ B واقع بر نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{CA}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $CA \cong CB$. سپس از B بر ℓ عمودی وارد می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم. بدیهی است که دو مثلث $\triangle\ CHA$ و $\triangle\ CKB$ به حالت (ززض) قابل‌انطباق هستند و در نتیجه $AH \cong BK$؛ یعنی B بر خم هم‌فاصله قرار دارد. پس خط m خم هم‌فاصله را در نقطهٔ دیگری مانند B قطع کرده است. بدیهی است که در این حالت، هر یک از نقاط A و B بر یک شاخه از خم قرار گرفته است (شکل ۱۳). حال اگر خط m شامل نیم‌خطی باشد که میان نیم‌خط $\overrightarrow{Ax}$ و نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{AH}$ قرار گرفته است، آن‌گاه



شکل ۱۳

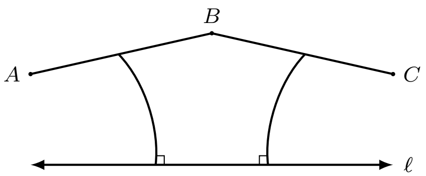


شکل ۱۴

طرفی از خط $\overleftrightarrow{AH}$ را که Ω در آن نیست، در نظر می‌گیریم. نقطهٔ آرمانی دیگر خط ℓ را که در این طرف واقع است، Ω' می‌نامیم و خط $\overleftrightarrow{A\Omega'}$ را که با ℓ به‌طور مجانبی موازی است، m'' نامگذاری و مشابه قبل عمل می‌کنیم. $\square$

قضیه ۸.۴. *خط عمود بر وسط وتری از خم هم‌فاصله شعاع است و قوس متناظر آن وتر را نصف می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم ℓ خط مبنا و A و B دو نقطه از یک خم هم‌فاصله باشند که بر یک شاخه از آن قرار گرفته‌اند. همچنین فرض کنیم H و K به‌ترتیب، پای عمودهای وارد از A و B بر ℓ، P وسط وتر AB و Q وسط پاره‌خط HK باشد. چون $AH \cong BK$، به‌سادگی دیده می‌شود که خط $\overleftrightarrow{PQ}$ بر هر دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{HK}$ عمود است و لذا عمودمنصف وتر AB، شعاع است. حال اگر نقطهٔ R محل تقاطع این شعاع با خم هم‌فاصله باشد، آن‌گاه از قابلیت‌انطباق دو مثلث $\triangle RPA$ و $\triangle RPB$ نتیجه می‌گیریم که $RA \cong RB$. امّا قوس‌های متناظرِ وترهای قابل‌انطباق، قابل‌انطباق هستند. پس دو قوس RA و RB قابل‌انطباق خواهند بود (شکل ۱۴). $\square$



شکل ۱۵

اکنون می‌توان چگونگی ترسیم یک خم هم‌فاصله را با داشتن سه نقطه از آن بیان کرد.

قضیه ۹.۴. *هر خم هم‌فاصله با داشتن سه نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.*

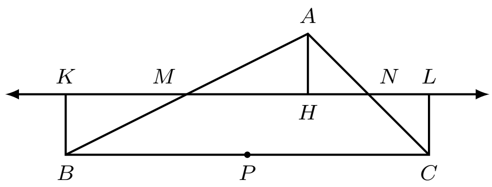
اثبات. فرض کنیم A، B و C سه نقطه از یک خم هم‌فاصله باشند. بنابر قضیهٔ ۹.۲، این سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامتِ اقلیدسی قرار گیرند. همچنین بنابر قضیهٔ ۸.۴، عمودمنصف‌های دو وتر AB و BC شعاع هستند. در نتیجه به‌طور واگرا موازی هستند و عمودمشترک آنها، خط مبنای خم هم‌فاصله است. خط مبنا را ℓ و فاصله را d می‌نامیم. بدیهی است که d فاصلهٔ عمودی نقطهٔ A (B یا C) از ℓ است. با داشتن ℓ و d نقاط دیگر این خم هم‌فاصله به‌دست می‌آیند (شکل ۱۵). $\square$

در پایان، نشان می‌دهیم که اگر سه نقطه بر یک استقامتِ اقلیدسی نباشند، سه خم هم‌فاصلهٔ متفاوت وجود دارند که این سه نقطه بر آنها قرار دارند.

قضیه ۱۰.۴. *سه نقطهٔ ناواقع بر یک خط، بر سه خم هم‌فاصلهٔ متفاوت قرار دارند.*

اثبات. فرض کنیم A، B و C بر یک استقامتِ اقلیدسی نباشند. مثلث $\triangle ABC$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم M، N و P به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AB، AC و BC باشند. اگر پای عمودهای وارد از A، B و C بر خط $\overleftrightarrow{MN}$ را به‌ترتیب، H، K و L بنامیم، آن‌گاه از دو قابلیت‌انطباق $\triangle AHM \cong \triangle BKM$ و $\triangle AHN \cong \triangle CLN$ داریم $BK \cong AH \cong CL$. در نتیجه نقاط A، B و C بر خم هم‌فاصله‌ای با خط مبنای $\overleftrightarrow{MN}$ و فاصلهٔ d قرار دارند که در آن، d طول پاره‌خط‌های قابل‌انطباق مذکور است. به روش مشابه، این سه نقطه بر دو خم هم‌فاصلهٔ دیگر با خط‌های مبنای $\overleftrightarrow{MP}$ و $\overleftrightarrow{NP}$ نیز قرار خواهند داشت (شکل ۱۶). $\square$

نتیجه ۱۱.۴. *چهار دایره به معنی عام بر رأس‌های یک مثلث می‌گذرند. یکی از آنها همان دایرهٔ محیطی مثلث است که مرکز آن یک نقطهٔ عادی است و سه دایرهٔ دیگر، سه خم هم‌فاصله (اَبَردایره) هستند که دارای مراکز فراآرمانی هستند و وجود آنها در قضیهٔ ۱۰.۴ ثابت شد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که چهار دایره به معنی عام وجود دارند که بر اضلاع یک مثلث مماس هستند.*



شکل ۱۶

مراجع

[۱] ماروین جی. گرینبرگ، *هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی*، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۹.

[2] Beardon, A. F., *An Introduction to Hyperbolic Geometry, in Ergodic Theory, Symbolics Dynamics and Hyperbolic Spaces*, T. Bedford, M. Keane, C. Series (eds.), Oxford University Press, Oxford, 1991.

[3] Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publication Inc., New York, 1955.

[4] Coxeter H. S. M., *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Exposition 2, University of Toronto Press, Toronto, 1978.

[5] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Second Edition, W. H. Freeman and Co., 1979.

[6] Iversen, B., *Hyperbolic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts **25**, Cambridge, 1992.

[7] Kelly, P. J., Matthews, G., *The Non-Euclidean Hyperbolic Plane*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] Redei, L., *Founction of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F. Klein*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics **97**, Pergamon Press, Oxford, 1968.

[9] Rosenfeld, B. A., *A History of Non-Euclidean Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[10] Wolfe, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Holt. Rinehart and Winston, 1945.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۱۲/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۵/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۵/۴

منیره پیمان: دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر
رایانامه: Paimann_m@scu.ac.ir